| | |
|---|---|
| 氏　　　名 | 梅谷　真史 |
| 学位（専攻分野） | 博士（理学） |
| 学 位 記 番 号 | 総研大甲第1318号 |
| 学位授与の日付 | 平成２２年３月２４日 |
| 学位授与の要件 | 物理科学研究科　天文科学専攻<br>学位規則第６条第１項該当 |
| 学 位 論 文 題 目 | New Manifold Correction Methods for Satellite Orbit Integration |
| 論 文 審 査 委 員 | 主　査　　教授　　牧野　淳一郎<br>教授　　川口　則幸<br>准教授　　関井　隆<br>准教授　　加藤　隆二<br>准教授　　大坪　俊通（一橋大学） |

論文内容の要旨

## 論文題目：New Manifold Correction Methods for Satellite Orbit Integration

## 1. Introduction

天体の軌道運動や回転運動は一般には解析的に解くことができないので、数値計算、特に数値積分法を用いて解を求めることが通例である。残念なことに数値計算は誤差を生むため、長期的な軌道計算結果に基づく物理定数の精密決定等において非常に問題となる。本論文では、多様体補正と呼ばれる数値計算技法を改良することにより、衛星軌道を高精度でかつ高速に求める数値計算アルゴリズムについて研究した。

多様体補正法とはNacozy(1971)により提案された数値積分法で、ルンゲ・クッタ法や線形多段法など通常の数値積分法で得られた数値解を系の物理的な保存量が正しく保たれるように補正することで高精度化する技法である。Nacozyによる最初の多様体補正法には、（１）保存量が存在しない系に適用不能である、（２）自由度の高い系では数値不安定を起こしやすい、など種々の問題点があったが、近年Fukushima(2003)、Wu et al.(2007)、Ma et al.(2008)らの研究によりそれらの問題点が改善された新しい多様体補正法が各種発表されている。Fukushima(2003)に始まった新多様体補正法では、系を摂動二体問題とし系の準保存量であるケプラー・エネルギー $K$ を単スケール変換(Fukushima,2003)、不完全最急降下法(Wu et. al.,2007)、速度スケール変換(Ma et. al.,2008)といった様々な補正法で正しい値に補正する。

我々はこの新多様体補正法をさらに拡張すべく、新たに準保存量として全エネルギー $E$、ヤコビ積分 $C$、軌道角運動量の $z$ 成分 $L_z$ およびそれらの組み合わせを採用するとともに、補正法として新たに二重スケール変換を創案した(表１参照)。

| 準保存量 | 単スケール変換 | 速度スケール変換 | 二重スケール変換 |
|---|---|---|---|
| $K$ | Fukushima(2003) | Ma et al. (2008) | — |
| $E$ | 新 | 新 | — |
| $C$ | 新 | 新 | — |
| $K, L_z$ | — | — | 新 |
| $E, L_z$ | — | — | 新 |
| $C, L_z$ | — | — | 新 |

表 1: 本論文で構築した準保存量と補正法の組み合わせ。「新」が今回構築した方法を表している。$K, E, C, L_z$ はそれぞれケプラー・エネルギー、全エネルギー、ヤコビ積分、角運動量の $z$ 成分である。

## 2. Method

代表的な方法として、準保存量として $C$ および $L_z$ を採用し、二重スケール変換で軌道を補正する方法について述べよう。一般に、摂動二体問題の運動方程式は

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\left(\frac{\mu}{r^3}\right)\mathbf{x} + \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{b} \tag{1}$$

と書ける。ただし $\mu, \mathbf{x}, \mathbf{v}$ は二体問題の重力定数、第2体の相対位置ベクトル、相対速度ベクトル、$r \equiv |\mathbf{x}|$、$V$ は第1体の非球対称重力場による摂動関数で、$\mathbf{b}$ はその他の摂動加速度である。

簡単のために第1体が $z$ 軸の周りを一様回転していると仮定しよう。このとき $V$ を軸対称成分 $V_S$ と非軸対称成分 $V_A$ に分けると二つの準保存量を考えることができる。一つはヤコビ積分で、第1体が静止して見える回転座標系 $\mathbf{X} \equiv (X, Y, Z)$ において

$$C = \frac{\mathbf{V}^2}{2} - \frac{\omega^2}{2}(X^2 + Y^2) - \left[\frac{\mu}{r} + V(\mathbf{X})\right]. \tag{2}$$

と表現される。$\mathbf{V}$ は回転座標系における相対速度ベクトルである。なお $C$ は慣性系では

$$C = \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \omega L_z - \left[\frac{\mu}{r} + V(\mathbf{x}, t)\right], \tag{3}$$

と表現される。もう一つは軌道角運動量の $z$ 成分

$$L_z \equiv x v_y - y v_x, \tag{4}$$

である。実際、これらの量の時間発展は

$$\frac{dC}{dt} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{b}, \tag{5}$$

および

$$\frac{dL_z}{dt} = x\left(\frac{\partial V_A}{\partial y}\right) - y\left(\frac{\partial V_A}{\partial x}\right) + (x b_y - y b_x) \tag{6}$$

となり、$V_A = 0$ および $\mathbf{b} = 0$ の場合に右辺は 0 となる。

式(1)を数値積分して得られた解は、数値積分の誤差のために式(3)および(4)を一般には満たさない。そこで両式を満たすために数値解を次のように補正することを考えよう。

$$(x, y, z; v_x, v_y, v_z) \rightarrow (s_p x, s_p y, s_z z; s_p v_x, s_p v_y, s_z v_z) \tag{7}$$

この変換を二重スケール変換と呼ぶ。式(7)を式(4)に代入することで $s_p$ は

$$s_p = \sqrt{\frac{L_z}{x v_y - y v_x}}. \tag{8}$$

と解析的かつ一意的に求まる。また $s_z$ は式(7)を(3)に代入して得られる決定方程式

$$I(s_z) = \left(\frac{v_z^2}{2}\right)s_z^2 - \left[\left(\frac{\mu}{\sqrt{(x^2+y^2)s_p^2 + z^2 s_p^2}}\right) + V(s_p x, s_p y, s_z z, t)\right] + \left[\left(\frac{v_x^2 + v_y^2}{2}\right) - \omega L_z\right]s_p^2 - C = 0, \tag{9}$$

をニュートン法を用いて

$$s_{z,n+1} = s_{z,n} - \frac{I(s_{z,n})}{I'(s_{z,n})}, \tag{10}$$

と解くことで得られる。ここで

$$I'(s_z) = v_z^2 s_z - \frac{\partial}{\partial s_z}\left[\left(\frac{\mu}{\sqrt{(x^2+y^2)s_p^2 + z^2 s_p^2}}\right) + V(s_p x, s_p y, s_z z, t)\right], \tag{11}$$

であり、$s_z$ の初期値は $s_z = 1$ である。

## 3. Numerical Experiments

新しい方法を用いて行った数値実験結果を述べよう。対象軌道は $n$ 次の球面調和関数であらわされる重力場下の衛星の軌道運動である。

まず、実行速度について調べてみると、ほとんどの場合、新しい補正法の実行速度は $n > 10$ で無補正の場合とほぼ変わらなくなる。$n$ が十分大きい時は、全計算時間の中で摂動項の計算時間が圧倒的に大きくなるため、補正にかかる時間は事実上無視できるからである。例外は（1）$C$ を準保存量として単スケール変換で補正する方法、（2）$E$ および $L_z$ を二個の準保存量として二重スケール変換で補正する方法、および（3）$C$ および $L_z$ を準保存量として二重スケール変換で補正する方法の 3 つであり、計算時間の増加率は $n > 10$ で、それぞれ 1.1 倍、1.6 倍、および 2.0 倍となる。この増加は、これらの方法では補正の際に摂動関数等の再計算が必要となるためである。

次に積分誤差についてみてみよう。図 1 は測地衛星 LAGEOS の軌道を各方法を用いて数値実験した結果である。摂動は 10 次の球面調和関数で表される地球重力場と月の潮汐力とした。この図から、特に高精度の結果を導くのは上記の第 3 方法、すなわち準保存量を $C$ および $L_z$ とし二重スケール変換で補正する方法であることが分かる。しかし、上に述べた通り、この方法では計算時間が約 2 倍かかるため、このままでは、準保存量を $E$ もしくは $C$ とし速度スケール変換で補正する方法のほうが精度・速度の両面からみて優れていることになってしまう。

そこで我々は補正法の実行時間を実効的に減少させる方法を考えた。アイデアは、数値積分の各ステップで実施している補正を複数ステップに 1 回だけ行うように補正頻度を減らすことである。例えば、上記の第三方法で、8 ステップに 1 回だけ補正を行う場合、計算時間の増加は $(1.0 \times 7 + 2.0 \times 1)/8 \simeq 1.125$ 倍となる。実際に数値実験を行った結果、8 ステップに 1 回程度の補正頻度でも、各ステップで補正を行った場合と比べて、周期的な誤差の増大はあるものの、長期的な誤差成長は変わらないという結論を得た。

図 2 は、（1）$C$ を準保存量として速度スケール変換で毎ステップ補正する方法、（2）$C$ 及び $L_z$ を準保存量として二重スケール変換で毎ステップ補正する方法、（3）$C$ 及び $L_z$ を準保存量として二重スケール変換で 8 ステップに 1 回補正する方法の三方法の積分誤差を比較したものである。同じ条件下で比較するために、方法毎に刻み幅を変えることによっていずれも同じ計算時間となるように調整している。この結果、第 3 の方法、すなわち $C$ 及び $L_z$ を準保存量として二重スケール変換で 8 ステップに 1 回補正する方法が最も効率よい方法であることがわかった。

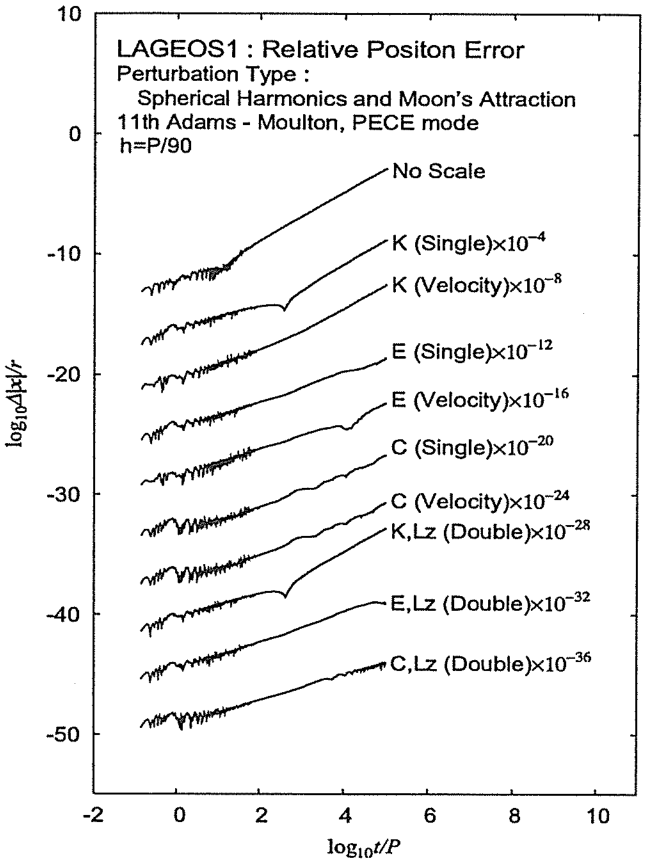


図 1: 人工衛星 LAGEOS の位置の誤差成長。横軸は時間の対数、縦軸は相対位置誤差の対数である。摂動は 10 次の球面調和関数で表現された地球重力場と月の潮汐力として、数値積分法には 11 次の Adams-Moulton 法を用いた。誤差曲線の重なりを防ぐため結果を表示するにあたって、各々$10^{-4}$ 下げている。

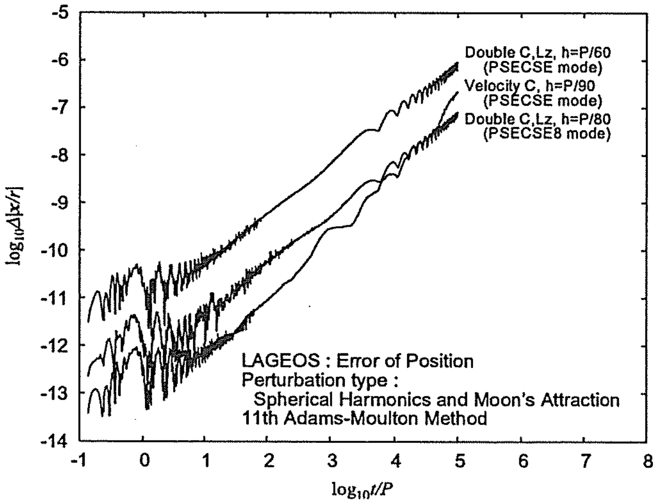


図 2: 同一計算時間での誤差比較。$C$ を速度スケール変換で毎ステップ補正した方法、$C$ と $L_z$ を二重スケール変換で毎ステップ補正した方法、および $C$ と $L_z$ を二重スケール変換で 8 ステップに 1 回補正した方法の誤差成長を示した。数値積分の条件は図 1 と同じである。

## 博士論文の審査結果の要旨

摂動がある2体問題の数値積分は、電子計算機の発明以前からある極めて古い問題であるが、高精度・高速な軌道計算法の研究には依然として大きな重要性がある。応用面では、衛星重力ミッションのような、地球の重力場自体を人工衛星の軌道の測定から求めるような場合には、非常に高精度な積分が必要であり、またこの場合には、2体問題といっても摂動部分の計算量は極めて大きく、高速化も重要である。

一方、数値積分の方法には近年いくつかの進歩があった。ハミルトン力学系の場合には、シンプレクティック法、特に摂動がある2体問題の場合にはMVS 法によって、ケプラー問題については厳密解を与え、また摂動についても永年誤差をもたないような積分スキームが実現されている。しかし、人工衛星の軌道の高精度計算では、月の重力摂動や空気抵抗等、保存力でない摂動があるために、MVS 法等の利用は困難であり、従来からある線形多段階法が依然有力な方法であるのが現状である。この方法は、MVS 法のようなよい性質はもたず、長時間積分では誤差が時間の2乗に比例して増大する。

最近になって、線形多段階法を改良する有望な方法として、改良された多様体補正法が提案された。多様体補正法では、基本的になんらかの保存量、ないしは精度良く計算可能な量を厳密に保存するように、数値解に補正を加えることで数値解の精度を改良する。保存量一定という制約は位相空間内の多様体を与えるので、この方法を多様体補正と呼ぶ。補正のために使う量(以下「参照量」)、補正の方法の両方ともに、様々な可能性があり、どのような量を使ってどのような方法で補正するべきかは自明ではないため、いくつかの方法が提案されているが、何を使うべきかは明らかになっていない。

このような背景の中、本論文では、まず、参照量としてケプラーエネルギー以外に全エネルギー、ヤコビ積分を考え、さらに参照量にエネルギー1 つだけでなく軌道角運動量の z 軸成分も加えることでより精度を上げる可能性を検討した。その結果、ヤコビ積分と軌道角運動量の z 軸成分を使い、位置、速度について 2 重スケーリングを行う方法が、低軌道の GRACE のような衛星から、高軌道、高離心率の HALCA のような衛星まで様々な軌道に対して、従来知られていたケプラーエネルギーだけを使う方法に比べてよい精度をもたらすことを見いだした。精度の改善は、10万周期後で4桁程度に及ぶものである。2重スケーリングの欠点として、補正のために計算量が 2 倍になる、という問題があるが、出願者は補正はタイムステップ毎に必要ではなく、 4-8 ステップ程度について 1 度行えば十分であることを見いだし、計算量の増加は無視できる程度になることも示した。新しい計算法である多様体補正法にこのような大きな改良を加えた本研究の意義は高く評価される。また、アルゴリズムの考案から実装、数値実験、結果の取りまとめ、議論など、論文作成の一連の過程において、出願者が主体的に行っていることが認められる。これにより審査委員会は、全員一致で本論文が博士論文として十分な価値を有し、合格であると判定した。