Random collision model と集団生物モデル

統計数理研究所・総合研究大学院大学
伊藤　栄明
e-mail: itoh@ism.ac.jp

集団生物学における基本的なモデルは，気体分子運動論におけるランダムな粒子の衝突という考え方はにもとづいているように思われる。本稿においては、非結合的代数をもちいてこれらのモデルを微分方程式系により近似する。集団遺伝学における非結合的代数についての研究は以前からあり、Wörz-Busekros (1980) によりくわしく述べられている。例えばS.Bernstein がはやい時期にこの問題に注目し、現在 Bernstein algebras と言われるものについて議論をしていたようである。McKean (1966) は Boltzmann方程式についての Kacのモデル(1959)の平衡状態へ移行する早さを評価する際に非結合的convolutionの考えをもちいた（伊藤(1970)）。ランダムな粒子の衝突にもとづいた生存競争のモデルについて、非結合的代数の性質をもちいることにより系の安定性等を議論することができる（Itoh (1971, 1975, 1981, 1983); 伊藤・上田 (1975)）。ここではボルツマンのモデル、生存競争のモデル、オーストラリアアボリジニの婚姻規則等の例について非結合的代数をもちいて定式化する。このことにより様々な現象相互の比較が容易になることを示したい。

次のような非結合的代数を考える。

定義・非結合的代数 A^m は

I. $A^m = \{\sum_{i=1}^m x_iE_i \mid x_i \in R, \quad i=1,2,\cdots,m\}$ は体 R 上の線型空間であり、一次独立な元 $E_i, \quad i=1,2,\cdots,m.$ により生成される。

II. 基底の間の積は $E_i \circ E_j = a_{ijk}E_k$ により定義される。ここで a_{ijk} は i,j , kにより　定まる実数である。

III. A_mに属する元 $x=\sum_{i=1}^m x_iE_i$ と $y=\sum_{j=1}^m y_jE_j$ の積は　$\sum_{i=1}^m x_iE_i \circ \sum_{j=1}^m y_jE_j = \sum_{i,j=1}^m x_iy_jE_i \circ E_j$　である。

A^m の2つの元の積は一般に非結合的である。以下においては、可換律が成りたつという制約をおきモデルの表現を考える。

1. 離散Boltzmann モデル

Boltzmann (1872) は気体分子の運動エネルギーの分布の時間変化を記述するモデルを考え、H 定理を導いた。Boltzmann はエネルギーを離散的であると仮定したモデルについても述べている。論文「気体分子間の熱平衡についてのさらに進んだ研究」(Boltzmann(1872)) より必要な部分を次に示す。（「」でかこまれた部分）　「空間Rに非常に多くの気体分子がある。その各々はしかし次のような運動エネルギーしかもつことはできないとする。$\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, 4\varepsilon, \cdots, p\varepsilon$ どの分子もその中間のあるいはより大きな運動エネルギーをもつことはできない。2つの分子が衝突すると、それらの運動エネルギーはきわめて多様な変化をする。しかし衝突後には各分子の運動エネルギーはつねに ε の整数倍の値でなければならない。」

「さてわれわれは時刻tに運動エネルギーεをもつ分子がw_1個、運動エネルギー2^εをもつものがw_2個,$\cdots$,p^εをもつものがw_p個、単位体積中にあると仮定する。また時刻tですでに運動エネルギーの分布は一様であり（したがってwで表した量が単位体積を空間のどこでとるかに無関係である）、さらに速度の方向については空間のあらゆる方向については空間のあらゆる方向が一様に確からしいということを仮定する。」

「衝突前に第1の衝突する分子の運動エネルギーが$k\varepsilon$で、第2のそれ$l\varepsilon$であり、衝突後には第1のが$\kappa\varepsilon$、第2のが$\lambda\varepsilon$であるような衝突を考え、非常に短い時間τのあいだに単位体積中でそのような衝突のおこる数を$N_{\kappa\lambda}^{kl}$で表すことにしよう。これら4つの量 k, l, κ, λは正の整数$\leq p$である。なぜなら量k, l, κ, λがそれ以外の値をもつような衝突は、起こらないとしているからである。さらに、衝突前の2

つの分子の運動エネルギーの和は、衝突後の2つの分子の運動エネルギーの和に等しいはずであるから、これらの量のあいだには等式 $k+l=\kappa+\lambda$が成り立つ。」

「数$N_{\kappa\lambda}^{kl}$は前のように第1に時間γに比例し、第2に単位体積中で運動エネルギーが $k\varepsilon$であるような分子の数、したがってw_kに比例し、第3に数w_lに比例すると仮定す。これら3つの量の積になお比例係数をかけなければならないが、それは衝突の性質をきめる量 k, l, κ, λには依存するが、時間にはよることができない。それを$A_{\kappa\lambda}^{kl}$で表そう。これらすべてをまとめて

$$N_{\kappa\lambda}^{kl}=\tau\cdot w_k w_l\cdot A_{\kappa\lambda}^{kl} \tag{1.1}$$

がえられる。」

Boltzmann は、

$$\sqrt{kl}A_{\kappa\lambda}^{kl}=\sqrt{\kappa\lambda}A_{kl}^{\kappa\lambda} \tag{1.2}$$

なる仮定を物理的な考察からみちびいた。

$\sqrt{kl}A_{\kappa\lambda}^{kl}=B_{\kappa\lambda}^{kl}$ とおくと、

$$B_{\kappa\lambda}^{kl}=B_{kl}^{\kappa\lambda} \tag{1.3}$$

となる。

「時間τの間に量w_1がどんな変化をするかを問題にする。w_1は単位体積中にある運動エネルギーεをもつ分子の数である。これは衝突によってのみ変化することをわれわれは知っている。衝突前に2つの分子のうちの1つが運動エネルギーεをもち、衝突後にはどちらも運動エネルギーεをもたないという具合に2つの分子が衝突すると、そのたびにこの数は1だけ減少する。逆に、衝突前にはどちらも運動エネルギーεをもたないが、後では1つがそれをもつように2つの分子が衝突するたびに、それは1だけ増大する。したがって、w_1から前者の数を引き、後者の数を加えれば、時刻$t+\gamma$に運動エネルギーεをもつ単位体積中の分子の数がえられる。その数をw_1'で表そう」

「このようにして

$$w_1'=w_1-N_{22}^{13}-N_{23}^{14}-N_{32}^{14}-N_{32}^{15}-\cdots+N_{13}^{22}+N_{14}^{23}+N_{14}^{32}+N_{15}^{24}+\cdots \tag{1.4}$$

がえられる。」

同様にして$w_2', w_3', \cdots, w_p'$ を求めることができる。τが十分小であれば

$$\tau\frac{dw_k}{dt}=w_k'-w_k \tag{1.5}$$

である。$p=3$なる場合について考える。(1.1)式を(1.4)式に代入し、$w_k=\sqrt{k}v_k$なるおきかえをすると、

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}=B_{22}^{13}(v_2^2-v_1v_3) \\ \sqrt{2}\frac{d}{dt}v_2=2B_{22}^{13}(v_1v_3-v_2^2) \\ \sqrt{3}\frac{d}{dt}v_3=B_{22}^{13}(v_2^2-v_1v_3) \end{cases} \tag{1.6}$$

となる。 非結合的代数をもちいて導いた式が同様になることを次に示す。

$$A_{\kappa\lambda}^{kl}=A_{\lambda\kappa}^{kl}=A_{\kappa\lambda}^{lk}=A_{\lambda\kappa}^{kl} \tag{1.7}$$

なる仮定をおく。物理的な意味から考えて、この仮定は自然である。さらに(1.2)式を考慮し、基底の間の積を次のように定義する。

$$E_k \circ E_l = C_{k+1} \sum_{1\le\kappa\le p, 1\le k+l-\kappa\le p} \sqrt{\kappa(k+l-\kappa)} E_\kappa \tag{1.8}$$

ただし

$$C_{k+l} \sum_{1\le\kappa\le p, 1\le k+l-\kappa\le p} = 1.$$

時間tにおけるエネルギーkを持つ粒子の割合を$P_k(t)$とする。上記の Boltzmannのモデルより$P(t) = \sum_{k=1}^{p} P_k(t)E_k$ とおけば

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t) \circ P(t) - P(t) \tag{1.9}$$

なる方程式が導かれる。

エネルギーは$p\varepsilon$以下の値をとると仮定しp = 3の場合について考察する。基底の間の積は、(1.8)式より、

$$\begin{cases} E_1 \circ E_1 = E_1, E_1 \circ E_2 = \frac{1}{2}(E_1 + E_2) \\ E_1 \circ E_3 = \frac{1}{2+2\sqrt{3}}(\sqrt{3}E_1 + 2E_2 + \sqrt{3}E_3) \\ E_2 \circ E_2 = \frac{1}{2+2\sqrt{3}}(\sqrt{3}E_1 + 2E_2 + \sqrt{3}E_3) \\ E_2 \circ E_3 = \frac{1}{2}(E_2 + E_3) \\ E_3 \circ E_3 = E_3 \end{cases} \tag{1.10}$$

となる。これを(1.9)式に入れれば

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}P_1 = \frac{\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}P_2^2 - \frac{2}{2+2\sqrt{3}}P_1P_3 \\ \frac{d}{dt}P_2 = \frac{4}{2+2\sqrt{3}}P_1P_3 - \frac{2\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}P_2^2 \\ \frac{d}{dt}P_3 = \frac{\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}P_2^2 - \frac{2}{2+2\sqrt{3}}P_1P_3 \end{cases} \tag{1.11}$$

となることがわかる。

$P_k = \sqrt{k}v_k$とおくと、

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}v_1 = \frac{2\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}(v_2^2 - v_1v_3) \\ \sqrt{2}\frac{d}{dt}v_2 = \frac{2\cdot 2\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}(v_1v_3 - v_2^2) \\ \sqrt{3}\frac{d}{dt}v_3 = \frac{2\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}(v_2^2 - v_1v_3) \end{cases} \tag{1.12}$$

となる。この式は(1.6)式と同じものであり、非結合的代数をもちいることにより自然にみちびかれることがわかる。

一般のpの場合にも同様にみちびくことができ$E=\sum\sqrt{k}v_k\log v_k$が減少して行き、最終的に$v_k=\tau^{k-1}v_1, k=1,2,\cdots,p$となることがわかる。これは H 定理と言われているものであり、上記のBoltzmannの論文に述べられている。たとえば、p = 3　の場合

$$\frac{d}{dt}E=\frac{2\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}(v_2^2-v_1v_3)\log\frac{v_1v_3}{v_2^2}\le 0 \tag{1.13}$$

であり等号は$\frac{v_3}{v_2}=\frac{v_2}{v_1}$のときなりたつことがわかる。

2. 婚姻規則と離散Boltzmannモデル

文化人類学において，婚姻規則についての興味深い例が議論され, Morgan (1872) あるいは Lévi-Strauss(1947)にくわしく述べられている。婚姻規則は系図等のように図によりあらわされることが多い。Lévi-Strauss の著書に André Weil による補遺があり、置換群をもちいて婚姻規則が記述されている。ここでは非結合的代数をもちいて表現し、その応用について述べる。　つぎのモデルはオーストラリアアボリジニの社会における規則を理想化したものである(伊藤 (1983), 厳佐(1986), Tainaka and Itoh (1994)).

(1) 各男性 (女性) は m 個のグループ $M_1,...,M_m$ $(W_1,...,W_m)$, に属する.

(2)M_i の男性はW_iの女性と結婚し，彼らの子供の所属するグループはつぎのような規則によるものとする．１人 M_1と１人のW_1の結婚により２人のM_3, あるいは１人のM_3と１人のW_2, あるいは１人の W_2と１人M_3, あるいは２人のW_2に変化する．すなわち

$$M_1+W_1\to\begin{cases}2M_3\\ M_3+W_2\\ W_2+M_3\\ 2W_2\end{cases} \tag{2.1}$$

これらはそれぞれ 1/4の確率をもつ. この規則を

$$\begin{cases}M_1+W_1\to M_3+W_2\\ M_2+W_2\to M_4+W_1\\ M_3+W_3\to M_1+W_4\\ M_4+W_4\to M_2,W_3\end{cases} \tag{2.2}$$

により表わす．E_1はM_1を表し, E_2はW_1を表し, E_3は M_2, E_4 はW_2, E_5はM_3, E_6はW_3, E_7は M_4、E_8はW_4,を表すとする。上の規則は

$$\begin{cases}E_1\circ E_2=\frac{1}{2}E_5+\frac{1}{2}E_4\\ E_3\circ E_4=\frac{1}{2}E_7+\frac{1}{2}E_2\\ E_5\circ E_6=\frac{1}{2}E_1+\frac{1}{2}E_8\\ E_7\circ E_8=\frac{1}{2}E_3+\frac{1}{2}E_6\end{cases} \tag{2.3}$$

により表される。これより

$$E_{1+2i}\circ E_{2+2i}=\frac{1}{2}E_{5+2i}+\frac{1}{2}E_{4-2i} \tag{2.4}$$

がえられる．ここで $E_{8m+k}=E_k$ である．奇数の添字は男性を表わし，偶数は女性を表わす．式(2.3)よりこの社会では男性は母親の兄弟の娘あるいは父親の姉妹の娘とおなじグループの女性と結婚するこがわかる．上記 (2.3) に示した以外の場合は

$$E_i\circ E_j=\frac{1}{2}E_i+\frac{1}{2}E_j \tag{2.5}$$

とする．

$P(t)=\sum_{i=1}^{8}P_i(t)E_i$, とおき式(1.9)を考える．

$$\frac{d}{dt}P(t)=P(t)\circ P(t)-P(t) \tag{2.6}$$

これより

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}P_1=P_5P_6-P_1P_2 \\ \frac{d}{dt}P_2=P_3P_4-P_1P_2 \\ \frac{d}{dt}P_3=P_7P_8-P_3P_4 \\ \frac{d}{dt}P_4=P_1P_2-P_3P_4 \\ \frac{d}{dt}P_5=P_1P_2-P_5P_6 \\ \frac{d}{dt}P_6=P_7P_8-P_5P_6 \\ \frac{d}{dt}P_7=P_3P_4-P_7P_8 \\ \frac{d}{dt}P_8=P_5P_6-P_7P_8 \end{cases} \tag{2.7}$$

がえられる．

この系について,

$P_1+P_5=C_1$, $P_2+P_4=C_2$, $P_3+P_7=C_3$, and $P_6+P_8=C_4$. は時間によらない量である．

このことは一旦生じたかたよりが以後も保たれることを意味する。現実の集団の大きさは有限であり、確率モデルとしてとりあつかう必要がある。その場合、婚姻規則が安定に存続するために必要な集団の大きさはどの程度であるか等を様々なモデルにより検討することは意味のあることであると思われる。

つぎの4つの速度ベクトル $(c,0),(-c,0),(0,c),(0,-c)$ に単純化した離散Boltzmann モデルは Godunov 及び Sultangazin (1971)により述べられている．

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}P_1=P_3P_4-P_1P_2 \\ \frac{d}{dt}P_2=P_3P_4-P_1P_2 \\ \frac{d}{dt}P_3=P_1P_2-P_3P_4 \\ \frac{d}{dt}P_4=P_1P_2-P_3P_4 \end{cases} \tag{2.8}$$

これはうえの系が退化したものであると考えられる．

$$(2.9) \qquad \begin{cases} M_1 + W_1 \to M_2 + W_2 \\ \\ M_2 + W_2 \to M_1 + W_1. \end{cases}$$

この系について次のH定理が成り立つ．

$$(2.10) \qquad \frac{d}{dt}\sum_1^4 P_i \log P_i = 2(P_3P_4 - P_1P_2)\log\frac{P_1P_2}{P_3P_4} \leq 0$$

3. 生存競争のモデルと相対エントロピーのH定理

n 個の種からなる系を考える。それぞれの種は相互のであいがなければ単位時間に $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ の割合で個対数が増加するものとする。時刻tにおいて種rと種sのであう回数は $m_{rs}N_rN_sdt$とし、そのうちのある割合P_{rs}が種sにたべられるものとする。したがって $P_{rs}m_{rs}N_rN_sdt.$だけ種rは減少する。今、種r,sの重さをβ_r, β_sとし、種sは種rをたべることにより$\frac{\beta_r P_{rs} m_{rs}}{\beta_s}N_rN_sdt.$ だけ増加する。ここでは同時に3種以上がであうことはないと仮定している。以上より Volterra (1931)は

$$(3.1) \qquad dN_r = \varepsilon_r N_r dt + \sum_{s=1}^n \frac{a_{sr}}{\beta_r} N_r N_s dt$$

を得た。非結合的代数をもちいて、生存競争のモデルを議論しよう。（Itoh (1971, 75, 81);伊藤・上田 (1975)）次のようなランダムな衝突モデルを考える。各粒子は値$1, 2, \cdots, n$をとるものとする。値iの1粒子と値jの1粒子の衝突により確率$\frac{1}{2} + a_{ij}$ で2粒子ともiになり、確率 $\frac{1}{2} + a_{ji}$で2粒子ともjになるものとする。この規則は

$$(3.2) \qquad E_i \circ E_j = (\frac{1}{2} + a_{ij})E_i + (\frac{1}{2} + a_{ji})E_j$$

$$a_{ij} + a_{ji} = 0, | a_{ij} | \leq \frac{1}{2}$$

により基底の間の積を定義することにより表現される。時刻 t における値 iを持つ粒子の割合を $P_i(t)$ とし、$P(t) = \sum_{i=1}^n P_i(t)E_i$とおけば、

$$(3.3) \qquad \frac{d}{dt}P(t) = P(t) \circ P(t) - P(t)$$

が得られる。これは通常の表現によれば、

$$(3.4) \qquad \frac{d}{dt}P_i(t) = 2P_i(t)(\sum_{j=1}^n a_{ij}P_j(t)), i = 1, 2, \cdots, n$$

となる。これは Volterra の方程式において $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_n = 0$とした場合である。非結合的代数をもちいることにより、3種のであいを考慮した場合に自然に議論を拡張することができる。3種のであいを考慮にいれた

$$(3.5) \qquad \frac{d}{dt}P(t) = k_1(P(t)\circ P(t) - P(t)) + k_2((P(t)\circ P(t))\circ P(t) - P(t)$$

を考える。　　　$q \circ q - q = 0, \sum_{i=1}^{n} q_i = 1, q_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$ なる q が一意的に存在するとすれば

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} q_i \log P_i(t) = 2k_2 \sum_{i=1}^{n} q_i (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} P_j(t))^2 \geq 0 \tag{3.6}$$

が成りたつ．非結合的代数の性質をもちいることによりこれを証明することができる (Itoh(1981))．

線形な保存系を考える．有限状態のマルコフ過程について，相対エントロピーのH定理が示されている (Moran (1961), Morimoto (1963), Csiszár (1963))．これついて，つぎのような定理が得られている (Cohen, J.E., Iwasa, Y., Rautu, Gh., Ruskai, M. B., S eneta, E., and Zbaganu, Gh. (1993))．p と r を m-次元で非負の要素を持つ確率ベクトルとする．相対エントロピー $H(p, r) = \sum_i p_i \log(p_i/r_i)$ を考える．もしAが $n \times m$ 行列で $a_{ij} \geq 0, \sum_i a_{ij} = 1, j = 1, \cdots, m,$ を満たせば $H(Ap, Ar) \leq \bar{\alpha}(A) H(p, r)$ が成り立つ．ここで $\bar{\alpha}(A) = (1/2)\max_{j,k} \sum_{i=1}^{n} \mid a_{ij} - a_{ik} \mid \leq 1$ とする．連続時間の場合には $d \log H(p(t), r(t))/dt$ が負となることがわかる．

非線形の場合に相対エントロピーのH定理はどうなるのだろうか．上記の生存競争系の場合，2体衝突モデルの場合には相対エントロピーは振動するが，3体衝突モデルの場合平衡確率ベクトルのまわりでは，相対エントロピーのH定理が成立する．

$$(p_1(t_0), p_2(t_0), \ldots, p_m(t_0)) \in B^m \tag{3.7}$$
$$= \left\{ p \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, p_i > 0 \ \ for \ \ i = 1, 2, \ldots, m \right\}.$$

とする．$q \circ q - q = 0$ を満たす一意的な$q \in B^m$ が存在し $q \circ q - q = 0$
$p(t) \in B$ 及び $r(t) \in B, t \geq t_0,$ は式(3.5)の２つの異なった解を表わすとする．すなわち $p(t_0) \neq r(t_0)$ とする．$p = q + \delta, r = q + \varepsilon$．もし $\max_i \mid \delta_i/q_i \mid$ and $\max_i \mid \varepsilon_i/q_i \mid$ が十分に小であれば,

$$\frac{dH(p(t), r(t))}{dt} \approx -2k_2 \sum_i q_i (\sum_j a_{ij}(p_j - r_j))^2 < 0 \tag{3.8}$$

となる (Itoh and Cohen (1994)).

4 じゃんけんモデルと Smolukowsky 方程式

コロイドの凝集の過程においてクラスターのサイズの分布の時間的変化を記述する方程式として Smoluchowsky方程式が知られている(早川 (1987), Adachi (1994)).

$$dN_i(t) = 1/2 \sum_{i+j=k} (a_{ij} N_i N_j dt - \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} N_j N_k) \tag{4.1}$$

ここで a_{ij} は凝集のメカニズムによってきまるものであり，a_{ij} が定数の場合, ij，$i + j$，の場合等について厳密解がえられている．

つぎのようなモデルを考える．

i) m 個のタイプ $1, 2, ..., m$ のそれぞれの粒子数は時刻 t においてそれぞれ $X_1(t), X_2(t), ..., X_m(t)$ とする。粒子の総数を$n(t)$とする。

ii)単位時間にランダムに選ばれた２粒子の間の衝突が１回起きる。衝突する２粒子の組は可能な組のなかから等確率で選ばれる。

iii) タイプ i の1粒子とタイプ jの1粒子の衝突により，2粒子は確率 $(1+a_{ij})/2$で iの1粒子になり確率 $(1+a_{ji})/2$ でjの1粒子になる。ここで $a_{ij}+a_{ji}=0$である。
すなわち確率 $\frac{1}{2}+a_{ij}$で

$$A_{i-1}+A_i \to A_i$$

, 確率$\frac{1}{2}-a_{ij}$で,

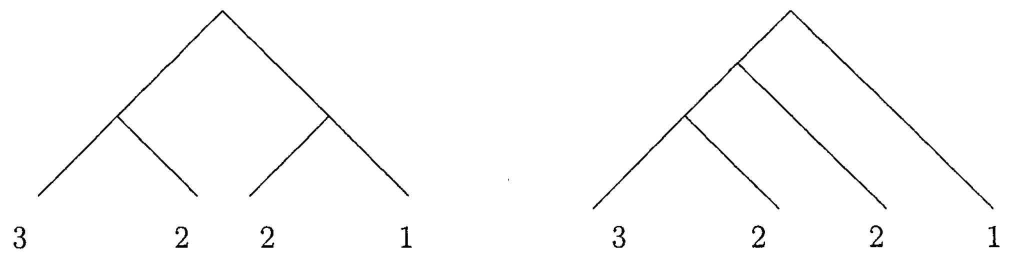
$$A_{i-1}+A_i \to A_j$$

となる.

いま、$m=2s+1$ として係数a_{ij} を次の式によりさだめる。

$$2\sum_{j=1}^{m} a_{ij}P_j \equiv \sum_{j=1}^{s} P_{i-j} - \sum_{j=1}^{s} P_{i+j} \tag{4.2}$$

強弱関係がじゃんけんと同様な場合($m=3$)，最初に以下のような4粒子あるとき最終的に1粒子だけのこる過程を図式化すると次のようになる．ex.a ex.b



ex.a では3がのこり, ex.b では1が残る．

上記iii)をつぎのiii)'でおきかえる． iii) タイプ i の1粒子とタイプ jの2粒子の衝突により，2粒子は確率 $(1+a_{ij})/2$で iの2粒子になり確率 $(1+a_{ji})/2$ でjの2粒子になる。ここで $a_{ij}+a_{ji}=0$ である。
すなわち確率 $\frac{1}{2}+a_{ij}$で

$$A_{i-1}+A_i \to 2A_i$$

, 確率$\frac{1}{2}-a_{ij}$で,

$$A_{i-1}+A_i \to 2A_j$$

となる.

nが十分大である場合，時間のスケールを適当にとり，$P_i=X_i$とおくことにより，

$$\frac{dP_i}{dt} = P_i\Big(\sum_{j=1}^{s} P_{i-j} - \sum_{j=1}^{s} P_{i+j}\Big) \tag{4.3}$$

,$i=1,2,...,2s+1$, となり，これは非線形可積分系である。(Itoh(1973, 1979, 1987), Bogoyavkensky(1988, 1991))。$s=2$の場合つぎの保存量をもつ。

$$I_0 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5,$$
$$I_1 = P_1P_2P_4 + P_2P_3P_5 + P_3P_4P_1 + P_4P_5P_2 + P_5P_1P_3,$$
$$I_2 = P_1P_2P_3P_4P_5.$$

離散的な系を基本に考え，Lax-Pair, 保存量等を求めてゆくという差分学がこの系についても適用される（Hirota (1981), 広田、辻本(1994) Nakamura (1994)）。行列の固有値をもとめるアルゴリズムを連続化した力学系から，強弱関係が巡回的でない場合がえられる（永井，薩摩 (1993)).

上記 i), ii), iii) を考える．時刻 o でn 個の粒子があったとすると，時刻tで$n-t$ 個の粒子がある．$m=3$の場合 $X_1(t), X_2(t)$ 及び $X_3(t)$. の積 $H_1(t) \equiv X_1(t)X_2(t)X_3(t)$ を考える．時刻 tでの積が与えられたという条件で時刻$t+1$ における積の値の期待値は

$$(E(H_1(t+1) \mid H_3(t)) = (1 - 3\frac{1}{n-t})H_1(t). \tag{4.4}$$

となる．時刻tでの総粒子数 $n(t)$ をもちいた $I_1(t) \equiv \frac{X_1(t)}{n(t)}\frac{X_2(t)}{n(t)}\frac{X_3(t)}{n(t)}$. を考えると

$$E(I_1(t+1) \mid I_1(t)) = \frac{(n(t))^3 - 3(n(t))^2}{(n(t)-1)^3} I_1(t). \tag{4.5}$$

（伊藤　(1973)).

つぎのようなii)"を考える．ii)"単位時間にランダムに選ばれた２粒子の間の衝突が$n(t)/2$回起きる。衝突する２粒子の組は可能な組のなかから等確率で選ばれる。

上記i), ii)", iii) を考える．粒子数が十分に大きければ，各タイプの粒子数は，基底のあいだの積を　$E_i \circ E_j = \frac{1}{2}\{(\frac{1}{2} + a_{ij})E_i + (\frac{1}{2} + a_{ji})E_j\}$ により定義した

$$\frac{dN}{dt} = N \circ N - (\sum_{i=1}^{m} N_i)N \tag{4.6}$$

により記述されると考えられる．ここで $N = \sum_{i=1}^m N_iE_i$ 及び $n = \sum_{i=1}^m N_i$. である．a_{ij}を(4.2)により定めると$m = 2s+1$, $s=2$の場合，$I_i(t), i = 0,1,2$ は時間によらない保存量である．

参考文献

Adachi, Y. (1994). Dynamic Aspects of Coagulation and Flocculation, preprint.

Bogoyavlensky, O.I. (1988). Integrable Discretizations of the KdV Equation. Phys.Lett.A 134, 34-38.

Bogoyavlenskiĭ, O.I.(1991). Algebraic constructions of integrable dynamical systems—extensions of the Volterra system, Russian Math. Surveys 46:3(1991), 1-64.

Boltzmann, L. (1872). Weitere Studien uber das Warmegleichgewicht unter Gasmolekulen, Weiner Berichte, 83, 275-370.

Bramson, M. and Griffeath, D. (1989). Flux and fixation in cyclic particle systems, Ann. Probab. 17, 26-45.

Csiszár, I., (1963), Eine informationstheoretische Ungleichung und ihre Anwendung auf den Beweis der Ergodizität von Markoffschen Ketten, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 8, 85-108. Math. Rev. 29,333, 1671, 1965.

Cohen, J.E., Iwasa, Y., Rautu, Gh., Ruskai, M. B., Seneta, E., and Zbaganu, Gh. (1993a), Relative entropy under mappings by stochastic matrices. Linear Algebra and Its Applications, 179, 211-235.

Godunov, S. K. and Sultangazin, U. M. (1971). On the discrete models of kinetic equation of Boltzmann, (translated by Tanaka, H. and Takahashi Y.from Russian)

早川尚男(1987). 凝集現象の数理、数理科学 291, 42-49.

Hirota, R. (1981). Discrete analogue of a generalized Toda equation, J. Phys. Soc. Jpn., 62, 3785-3791.

広田良吾・辻本諭(1993). Discrete Lotka-Volterra Equation の保存量、数理解析研究所講究録 868, 31-38.

伊藤栄明(1970). H定理、数理科学 83, 15-21.

Itoh, Y.(1971). Boltzmann equation on some algebraic structure concerning struggle for existence, Proc. Japan Acad.,47, 854-858.

Itoh, Y.(1973). On a ruin problem with interaction, Ann. Inst. Statist. Math.,25,635-641.

伊藤栄明 (1973) 生存競争のモデル, 日本科学技術連盟数学計画シンポジウム報文シリーズ 27, 19-40.

Itoh, Y.(1975). An H-theorem for a system of competing species, Proc. Japan Acad., 51,374-379.

Itoh, Y.(1979). Random collision models in oriented graphs, J. Appl. Prob., 16,36-44.

Itoh, Y. (1981). Non-associative algebra and Lotka-Volterra equation with ternary interaction, Nonlinear Anal., 5, 53-56.

伊藤栄明 (1983). 非結合的代数によるランダムな衝突モデルの表現、統計数理研究所い報 30, 55-65.

Itoh, Y. (1987). Integrals of a Lotka-Volterra system of odd number of variables, Prog. Theor. Phys.,78,507-510.

Itoh, Y. and Cohen J. E.(1993) Competitive ternary interactions and relative entropy of solutions, J. Phys. A 27, 6383-6393.

厳佐庸 (1986). 原生生物の性と人の婚姻システム、数理科学 280, 11-19.

Kac, M. (1959). Probability and Related Topics in Physical Sciences, Interscience, London.

Lévi-Strauss, C. (1967). Les Structures Elementaires del la Parénté, Mouton & Co. and Maison des Science de l'Homme. (First edition 1949)

Moran, P.A.P.,(1961), Entropy, Markov processes and Boltzmann's H-Theorem, Proc. Camb. Phil.Soc.57, 833-842.

Morgan, L.H. (1877). Ancient society of researches in the lines of human progress from savagery through barbarism to civilization. (trans. Michio Aoyama (1958). Ancient Society, Iwanami Shoten Publishers, Tokyo.)

Morimoto, T.,(1963), Markov processes and the H-theorem. Journal of the Physical Society of Japan 18, 328-331.

Nagai, A. and Satsuma, J. (1995)

Nakamura, Y.(1994). On the discretization of the three-dimensional Volterra system, Phys. Lett. A 193, 42-46.

永井敦・薩摩順吉(1993) QR分解法と Lotka-Volterra方程式、統計数理研究所共同研究リポート 48、119-124.

Tainaka ,k. and Itoh, Y. (1994). Glass effect in a prescribed marriage system, Phys. Let. A 187, 49-53.

Volterra, V. (1931). Lecon sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie, Cahiers Scientifiques VII, Gauthiers-Villars, Paris.

Wörz-Busekros, A. (1980). Algebras in Genetics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.