氏　　　　名	山　本　一　登
学位（専攻分野）	博士(理学)
学 位 記 番 号	総研大甲第756号
学位授与の日付	平成１６年３月２４日
学位授与の要件	数物科学研究科　天文科学専攻 学位規則第４条第１項該当
学 位 論 文 題 目	A Study of Symmetric Linear Multistep Methods
論 文 審 査 委 員	主　査　教授　水本　好彦 教授　吉田　春夫 教授　福島　登志夫 教授　富阪　幸治（国立天文台） 助教授　牧野　淳一郎（東京大学）

論文内容の要旨

我々は常微分方程式の数値解放について調べてきた。特に、線形多段法の中でもエネルギーなどの保存料の誤差が有界に留まる性質を持った対称線形多段法の開発を行ってきた。対象とした微分法形式系は先行研究があまりされていない一階の微分方程式用の公式について詳細な調査を行った。

まず、公式の評価方法の確立から行った。構築した公式の善し悪しを判断する要素として我々が選んだのは、安定な刻み幅の最大値と誤差定数である。我々はこの二つを数値計算を行う際に最も重要と考えている。対象線形多段法は公式の次数に応じてフリーパラメータを複数含むため、フリーパラメータの値によって公式の性質が大きく異なってくる。したがって、それらの値を少しずつ変化させていきながら、安定な刻み幅の最大値と誤差定数の計算を行い、広範な調査を行い、最良な公式郡がどのようになるかを実際に2,4,6,8,10,12次の公式について調べた。そして、最良な公式群を使い実際に数値実験多数行い公式の総合的な評価を行った。特殊な二階の公式についても、同様の調査を行い、先行研究と比較を行った。

次に、我々が行ったことは分割対称線形多段法の詳細な調査である。一階の対称線形多段法をケプラー問題のような非線形な二階の微分方程式系に対して適用すると数値不安定を起こすことが既に証明されている。分割対称多段法は、この問題を克服する方法の一つである。仕組みは単純で、我々はこの方法についても調査を行い、安定な刻み幅の最大値と誤差定数の計算方法を確立した。その結果、誤差定数の値に非常に面白い性質を見つけた。それは同次数の陽型と陰型の対称系公式を組み合わせると、その次数の誤差定数が消去できる場合があることを発見した。その結果、分割対称多段法の公式の次数が2次あがることがわかった。このような性質を持った公式で実際に調和振動系（調和振動子、強制振動、減衰振動及び非線形振動）で数値計算を行い、公式の次数が上がっていることを示した。そしてケプラー問題にも適用し、この公式の評価を行った。

最後に、今まであまり数値計算法の研究の対象となっていなかった純粋な一階の微分方程式系であるオイラーの自転運動について、時間に依存する誤差と刻み幅に依存する誤差の成長を調べた。一階の対称線形多段法はケプラー問題に対して適用すると数値不安定を起こすが、純粋な一階の微分方程式系に対しては不安定を起こさないことを確認した。時間に対する誤差の成長は、調和振動子やケプラー問題と同様に、保存量の誤差は有界に留まることが分かった。同様に経度方向の誤差は時間に対して一次でしか成長しないことも分かった。しかし、オイラー問題も非線形な微分方程式系であるため、刻み幅共鳴が起こることが分かった。そして、オイラー問題に対しても正則化（線形化）を試みた。また、一階の微分方程式系については、ケプラー問題を要素変化法によって純粋な一階の運動方程式に変換し、一階の対称線形多段法の適用も行った。残念ながら、要素変化法に対して、対称線形多段法を適用すると不安定を起こすことが分かった。対称型公式を不完全修正子法として使用すると時間対称性が壊れ、不安定を起こすことは知られていたが、公式上は時間対称性が保たれていても、計算の過程で時間対称性を壊す処理が行われると、同様に不安定を起こすことが分かった。要素変化法では計算の過程でケプラー方程式を解かなければならず、この方程式が陽的に解けないことが原因と考えられる。

論文審査結果の要旨

三体問題の一般解は解析的に求められないこともあり、天体力学の研究に数値シミュレーションは欠かせないツールとなっている。特に、百億年スケールでの太陽系天体の運動など、非常に長期に渡る軌道運動を精度よく、かつ高速に求める数値積分法の開発は、観測天文学における新型検出器の開発などと同じく、研究を有効に推進するための重要な鍵となっている。

PC など安価で高速な計算機資源が簡単に利用できる現在でも、軌道運動の数値積分法における重要課題は「計算時間を増加させることなく計算誤差の増大を以下に抑えるか」である。ルンゲ・クッタ法、非対称多段法、外挿法などの古典的方法では、エネルギーなど保存量の誤差が時間に比例して増大し、その結果、位置誤差が時間の 2 乗に比例して増大するため、倍精度実数環境でも長期的には結果の信頼性が急速に失われていく。最近、ビーム力学や天体力学で主流となりつつあるシンプレクティック積分法は、保存量の誤差を有限に抑え、従って位置誤差が時間に比例してしか増大しないという優れた性質を持っているが、基本的には対象がハミルトン力学系に限られるため、万能というわけではない。また一段法であるために同じ計算時間で、より離散化誤差が小さくなる多段法に比べて不利な点があった。

1990 年代に、係数に対称性を持つ多段法（対象多段法）が、シンプレティック積分法と並んで、上記の優れた性質を持つことが発見された。しかしながら、その後いくつかの欠点も有することが判明したためか、シンプレクティック法ほどには広まっていない。申請者は、本研究において、この対称多段法の欠点を克服すべく、Hairer（1999,2002）が提唱した分割多段法について詳細な数値解析的研究を行い、下記のような結果を得た。

1. 任意次数の対称多段法の係数決定のアルゴリズムに改良を施すとともに、調和振動子に対する線形安定領域および誤差定数の高速計算法を編み出し、実用上十分な次数（12 次）までの公式について、公式中のフリーパラメータ空間内で、きめ細かく探索することにより、安定領域が大きく誤差定数が小さい、優れた公式群を多数発見した。
2. 対象となる計の成分ごとに異なる 1 海洋積分公式を用いる分割多段法の中で、最も用いられることが多い位置・速度分割多段法について、等価な 2 階用積分公式が存在することを発見し、安定領域及び誤差定数の解析的表現を得た。このことから、非線形な 2 階微分方程式に対して 1 階用公式による非分割多段法が不安定になることの別証明と、分割多段法に変更すればこの不安定性が消えることの証明を得た。
3. 位置・速度分割多段法において、特に、陽的公式と陰的公式をうまく組み合わせると、等価な 2 階用公式の誤差定数が消え、したがって次数が 2 だけ増えることを突き止めた。この特殊な公式（昇格分割多段法とよぶ）は、同じ段数の他の多段法に比べて、計算の手間が同じであるにもかかわらず、計算精度が格段に高くなおかつ安定領域もさらに広がるという優れた性質を持つ。
4. 純粋な 1 階非線形微分方程式系の代表であるオイラーの時点運動の方程式について、巧妙な変数変換を行うことにより、微分方程式の主要部分を線形化し、さらに対称多段法と非対称多段法を組み合わせた分割多段法を用いることにより、対称多段法の欠点である刻み幅共鳴現象を消去することに成功した。

以上のように、申請者の研究結果は提唱されて間もない分割多段法の数理を解明することによって、従来、省みられることが少なかった対称多段法を、より安定かつ高精度な手法に発展させ、力学系の高速・高精度数値積分法の分野で、新しい地平を切り開いたものとして、非常に高く評価できる。

審査委員全員の出席のもとで、公開の論文発表会を行った。まず、申請者による学位論文の内容の口頭発表を約 50 分間行い、引き続き審査委員及び一般参加者による質疑応答を約 40 分間行った。これらにおいて、申請者は研究の背景、目的、研究内容の要点、成果の重要性について明確に説明し、また質疑に的確に対応した。続いて非公開の審査会に移り、審査委員によるさらに専門的な質疑応答を 30 分間行い、申請者の研究者としての資質を試した。その後、申請者体質の上、審査委員のみによる審議を約 50 分間行った。その結果、論文の科学的な価値を十分に認め、研究においての申請者の主体性を確認した。さらに出願者の天文科学に関する学識、力量は十分であると認定し、また英文で書かれた提出論文から、語学力も基準を満たしていることを確認した。

以上の試験の結果、申請者は天文科学において博士（理学）の学位を受けるに相応しい学識及び研究能力を持つものと認定し、審査委員全員一致により合格と判定した。