

氏 名 比江島 欣 慎

学位（専攻分野） 博士(学術)

学 位 記 番 号 総研大甲第242号

学位授与の日付 平成9年3月24日

学位授与の要件 数物科学研究科 統計科学専攻

学位規則第4条第1項該当

学 位 論 文 題 目 分散関数の仮定に基づく母数推定の基礎研究 (Natural指数型分布族の最適性とTilted指数型分布族と擬似尤度の関係)

論 文 審 査 委 員 主 査 教 授 松縄 規  
教 授 柳本 武美  
助 教 授 栗木 哲  
助 教 授 佐藤 俊哉  
講 師 椿 広計 (慶應義塾大学)

## 論文内容の要旨

最尤法は、尤度原理の観点において最も自然で受け入れやすい推定法であり、最尤推定量は、漸近一致性、漸近正規性、漸近有効性などといった望ましい性質を持つ。ただし、一般にこの種の漸近的最適性を議論する際には、データが従う分布に対してパラメータと確率変数の関係を表す確率分布モデル（分布）が正しく仮定されることが前提となっている。このような仮定はすべてのモーメント間の関係を仮定することとほぼ同値である。しかしながら、実際のデータ解析においては、こうした仮定を行うのに十分な情報を解析者が持っているとは限らない。そこで、推定の際に必要な仮定を緩和することを考える。このことを受けて、この論文では、データが従う分布に対して平均と分散の関係（分散関数）のみを仮定し、平均に関する一致推定を行うことが議論された。最尤法が唯一の分布を推定の対象とするのに対し、ここで議論された推定法は、同じ分散関数を持つ複数の分布を対象とすることになっている。

この論文の前半では、まず、分散関数のみの仮定の下で最尤法の手続きにしたがって平均の一致推定を行うことが考察された。こうした状況の下では、同じ分散関数を持つ分布からどの分布を最尤推定に用いるかが問題となる。少なくとも、用いる分布が与える最尤推定の結果は、仮にその分布がデータが従う分布と違っていても解釈可能でなければならない。そこで、尤度に対して、1) データが従う分布が仮定した分散関数を持つどの分布であっても、得られる推定量の漸近一致性を保証すること、2) 漸近分散をリスクと考えるときに同じ分散関数を持つ分布の中で、推定量がある種の漸近ミニマックス推定量となること、を要請することが考えられた。この要請に対して、この論文は、1変量データに対する平均の推定に話を制限するときに、対応するnatural指数型分布族に属する分布が存在する分散関数を仮定する場合、その分散関数に対応するnatural指数型分布族に属する分布がこれらの要請を満たす尤度となることを定理として与えた。

次に、対応する分布がnatural指数型分布族に存在しない分散関数を仮定する場合が考察された。Natural指数型分布族に属する分布を用いた平均の最尤推定の拡張である擬似尤度法は、こうした状況で前半の議論を行うとき、重要な役割を果たすことが考えられる。この推定法は擬似スコア方程式と呼ばれる推定方程式に基づいて推定を行う。最尤法におけるスコア方程式とは異なり、擬似スコア方程式は必ずしも分布から導かれたものではない。対応する分布がnatural指数型分布族に存在する分散関数を仮定するとき、擬似スコア方程式はその分散関数に対応するnatural指数型分布族に属する分布における平均に関するスコア方程式と同値である。しかしながら、そうでない分散関数を仮定するとき、その分散関

数を持つ分布の平均に関するスコア方程式と擬似スコア方程式とは一致しない。このとき擬似尤度は分布との関係を失ってしまう。そこで、この論文の後半では、擬似尤度と分布との関係に関する議論が行われた。この議論を行うために、分布の集合に対して定義される分布族である tilted 指数型分布族が新たに用意され、この分布族に関する9つの性質が研究された。この分布族は指数型分布族と似た性質を持ち、その平均のスコア関数は擬似スコア関数に酷似している。また、この分布族におけるパラメータの直交性は平均に関する推定を考察する際に重要な役割を担う。この論文では、これらの tilted 指数型分布族の性質に関する研究を通して擬似尤度と分布との関係が明らかにされた。

さらに、tilted 指数型分布族を平均の推定に利用することが研究された。あるパラメタライズされた分布の平均の推定に対して、その分布に対する tilted 指数型分布族による最尤推定を用いることが考察され、そのときの最尤推定量の漸近一致性の保証が補題として与えられた。また、このときのスコア関数に関しても考察が行われ、tilted 指数型分布族を用いた推定が与える平均のスコア関数と擬似スコア関数との漸近的關係が定理として与えられた。分散関数のみを仮定した平均の推定に対して、同一の分散関数を持つ分布に対する tilted 指数型分布族を用いるとき、その分散関数に対応する擬似スコア関数は、分散関数が同じである分布に対する tilted 指数型分布族のスコア関数と定理で与えた漸近的關係を満たす。このことから、分散関数のみを仮定した平均の推定に擬似尤度法を用いることに対する1つの妥当性が得られた。

## 論文の審査結果の要旨

本論文は、指数分布族による最尤法、擬似尤度法、Tilted指数型分布族、Tilted指数型分布族を用いた推定を、研究の対象としている。主な論点は、考察する分布に対して分散関数のみを特定化して、平均の一致推定を行うことを、その分散関数を持つようなnatural指数型分布族に属する分布が、(a)存在する場合と(b)存在しない場合、の二つについて論じたことにあり、結果として、見通しのよい研究に仕上げている。

主要な貢献は次の二点である：

1. これまで殆どなされていなかった、擬似尤度法の理論的研究の端緒を開いたこと。

擬似尤度法が平均に関する構造パラメータの推定に、経験的に広く用いられているにも拘わらず、種々な複雑さからこれまで理論的に殆ど解明されていなかった。これに対して、出願者は、特に、分布論から接近する事を出発点として、まずNatural指数型分布族を用いた平均の推定についてその意義を明確にした。その過程で、Natural指数型分布族を用いた平均の最尤推定量に関して、ある種の最適性である、ミニマックス性について優れた研究を展開していることは評価できる。

2. 擬似尤度法を論じるために新たにTilted指数型分布族を導入したこと。

Tilted指数型分布族に着目してその最尤法を考えるとと言うアイデアは特筆すべきもので、これによって擬似尤度法に新しい理論的解釈を与えることが出来た点は高く評価できる。

Tilted指数型分布族の性質として、パラメータの直交性などの興味深い結果も与えており、これからの研究の発展も十分に期待できる。

以上総合して、審査委員会は出願者からの論文を博士論文として十分なものと判断した。

また論文発表に伴って実施した試験に関しても、審査委員会は出願者が学位授与に叶う十分な学識を有するものと認め合格と判定した。