

氏 名 山 本 俊

学位（専攻分野） 博士(理学)

学位記番号 総研大甲第710号

学位授与の日付 平成15年3月24日

学位授与の要件 先導科学研究科 光科学専攻

学位規則第4条第1項該当

学位論文題目 Entanglement manipulation using linear optical
elements, photon detectors, and parametric
down-conversion -Proposal and Experiment-

論文審査委員 主査教授 石黒 真木夫
教授 井元 信之
助教授 佃 達哉
助教授 平野 琢也 (学習院大学)

Entangled states are physical states in terms of quantum mechanics, which are inseparable, states described in a Hilbert space. Especially, maximally entangled states can lead us to non-local feature and it ensures that there is a physical state can lead us to non-local feature and it ensures that there is a physical state that cannot be described using classical mechanics. The argument of Einstein, Podolsky, and Rosen is an example in which the non-local feature was hard to be accepted by us. Multipartite entangled states have been researched since the 1990s relating quantum non-locality. For two particles systems (or one particle systems), we can obtain this kind of a strange feature. For multiparticle systems, we can understand easily by classical statistical mathematics theories and physical systems in which the strange phenomenon, i.e., non-local feature, appears increases exponentially with the number of particles.

On the other hand, in the past several years, information theoretical applications utilizing mathematical structure of quantum mechanics using multipartite entangled states have investigated very much. Experimental realizations have been paid much attention by many physicists. The first step of this process is creating a multipartite entangled state. Several theoretical proposals concerning to creating multipartite entangled states were reported. This kind of science fields can be enable us to understand the non-local feature of quantum mechanics as feedback.

Thus, not only to get deeper understanding of quantum mechanics, but also to improve an information technogy, it is indeed necessary to research multipartite entangled states. Moreover, several experimental groups reported that they detected multipartite entangled state, for tripartite systems and for systems. At this stage, we should develop the mathematical theories that enable us to analyze experimental data. In this thesis, we propose the theories that are capable to judge whether the given quantum state is a multipartite entangled state or not. This thesis is organized as follows.

In Chapter 2, we review some basics of quantum theories. We first give the framework of the theories that we can get some knowledge for an input state from expectation values. Next, we can get some knowledge for an input state from expectation values. Next, we review the definition of entangled states for two-partite systems, which was proposed by Werner. According to his arguments, there are three kinds of states. The first one of these is uncorrelated states, which represent the physical state that the measurement outcomes with respect to the two-party system to be measured by two measurement apparatus, respectively, yield that the covariance of the measurement outcomes is zero. The second one is classically correlated states, which represent the physical state that the measurement outcomes are indeed correlated in such a way that the correlation can be described by random variables of probability space, and hence the correlation is interpreted in a classical manner. The remaining one is called entangled state, which cannot be written as both of uncorrelated states and classically correlated states. We define next the mathematical notation of multi-party entangled states. We mention the number of partition of the system, say k , and using it we define k separable states. The very important

tool to investigate the structure of composite systems is positivity of partial transpose; therefore, we mention about it.

In Chapter 3, we review historical backgrounds. We start with the argument by Einstein-Podolsky-Rosen. They invoked the physical reality in order to construct their argument, which says that the mathematical structure of quantum theories is not complete in the sense that it fails to refer to some physical reality that must exist logically. They suggest that the reason why we can predict only probability or the statistical phenomena with respect to measurement outcomes is due to the lack of completeness in a physical theory, i. e., due to the lack of completeness in quantum mechanics itself. Next, we see Bell's theorem relating physical reality in the following sense. He constructed his argument assuming that the measurement outcomes have entity. If we suppose the existence of the probability space, which can reproduce all the measurement outcomes, we get an upper bound as to a linear function of some set of correlations. However, the inequality (physicists call it as Bell inequality) cannot be satisfied when the measurement outcomes are given some two-party maximally entangled state by some measurement setup. We review Svetlichny inequality, which is the first inequality that classifies physical states into two classes, that is, only two-party entangled states are allowed or three-party entangled states exist. And then we review the multi-party Bell-Mermin inequality and the violation of this inequality by quantum mechanics. In his very famous work, published in 1990, Mermin derived Bell-type inequality that bounds the range of a linear function of correlations, assuming the measurement outcomes simulated by classical probability space, for a multiparticle state (he made use of a Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) state) and showed violations of his inequality grows exponentially with the number of particles. After this work, Werner and Wolf generalized Mermin's argument in 2000. Here, we mainly review the work along the arguments of Werner and Wolf. Finally, we review the theory of experiment of Pan and co-workers, whose experimental data will be analyzed by the theory in this thesis in Chapter 5.

In Chapter 4, we propose some formula that enables classification of a given quantum state using an expectation value. This formula gives us a sufficient condition that a given state is multipartite entangled state, which is that the fidelity to maximally entangled state, so called GHZ states is larger than $1/2$. The obtained formula about the fidelity helps us to see how we judge whether an input state is a multipartite entangled state in the following chapter.

In chapter 5, we deal the method how to analyze the fidelity to a GHZ state by some kind of expectation values. We get a formula that gives an upper bound and a lower bound for the fidelity. Applying the formula, we analyze experimental data by Pan *et al.* and we discuss that the observed state in the experiment is a tripartite entangled state under some assumptions. And we discuss, by minimum variance principle, the quantum state estimation problem as to the fidelity to a GHZ state.

In Chapter 6, we further generalize the theory in such a way that an auxiliary assumption that we are sure what observables are measured in a real experiment is excluded. For a detail relation among Chapters 4,5, and 6, see Appendix in this thesis. We derive the formula that enable us to judge whether or not a quantum state is a full n -partite entangled state using the

Bell-type experiments. The formula is described by an inequality of quadratic form in the expectation values. The formula is so useful such that the adaptation ability for analyzing experimental data is very wide, in fact, the fewest assumption is requested in theories proposed in this thesis in order to analyze experimental data. We also discuss that the formula is modified when we select some kind of observables in Bell type experiments.

Chapter 7 concludes research result of this thesis.

量子力学が古典力学と現象論的に決定的に異なる点として「分離した複数の系に関して起こる事象のうち、通常の単独確率、合成確率、周辺分布確率の組み合わせで説明できないものがある」ことが挙げられる。このことを最初に指摘したのはアインシュタイン・ポドルスキー・ローゼンの3人で、いわゆるEPRパラドクス(1935年)と呼ばれる。これが定量的に不等式で表現されたのは1960年代に入ってからであり、これは発見者の名をとってBell不等式と呼ばれる。この不等式が破れていれば、「遠くの系は分離している」という過程と「確率論的推論は正しい」のどちらかは間違っていることになり、実際1980年代になってAspectにより実験的に破れていることが示された。現在、物理学者の間では「確率論的推論」は正しく、「遠くの系は分離している」が間違っていると示されている。では間違っていない物理理論は何か？その一つの候補が量子力学であるが、現在では単なる候補という寄り絶対に近い信頼が寄せられている。「遠くの系が分離していない」ことを量子力学理論では「エンタングルメント」という概念で表す。これはまた、近年量子力学の不思議な性質を積極的に利用して新しい情報処理を試みる「量子情報処理」の研究が注目されているが、そこにおいて重大な役割を演ずる。

Bell方程式は2体の系に関する不等式であるが、3体あるいは n 体になると、Bell-Mermin方程式になる。これは、 n に関して指数的振る舞いを示す不等式なので、もし3体以上のエンタングルメントが簡単に手に入れば、古典力学で説明できない実験が非常に簡単にできることとなる。このBell方程式からBell-Mermin不等式の流れは「古典力学が決定的に間違っているような事象を実験的に示すクライテリオンを与えるための理論」という、単純ではあるが非常に基本をとという枠組みである。

一方、量子力学を認めた世界では、すなわちエンタングルメントという概念を認めてしまえば、更に豊穡な分類が必要となる。すなわち、 n 体のエンタングルメントの中には、「 n 体全部が分離せず絡まっている状態」から「2体だけ絡まっていて残りは分離している」ものまで、さまざまな形態のエンタングルメントが考える。これらを分類し判定するための不等式を求める理論がされてきた。特に n 体を k 個の組に分け($n \geq k \geq 1$)、それぞれの組の中ではエンタングルしている(絡まっている)かもしれないが少なくとも k の組は互いに分離している、という状態を k -separableと定義したとき、実験値から k -separableであるか否かを判定する不等式について理論的研究がなされてきた。この研究は簡単ではないため、種々の条件下での不等式とか、必要条件でなく十分条件のみ与える不等式が求められてきた。従ってこの分野では付帯条件を減らすこと、あるいは必要十分に近い十分条件(つまり緩められた十分条件)を求めることが進歩ということになる。

申請者はこの分野において三つの重要な仕事をした。その三つは互いに関連しあい、全体として統一感のある理論構築になっているが、それは以下のようなものである。

まず「実験値それを破れば k -separableでないと言える」ような不等式の一つが「 n 体のそれぞれが二準位系の場合」には過去(1999年、2000年)に求められてきた。申

請者はこの不等式が「多準位系」の場合にも使えることを理論的に証明した。つまり付帯条件を大幅にはずした。そしてその応用例として、「多準位のうち特定の二準位についてベル状態への忠実度(fidelity)が 0.5 以上なら、その系は 2-separable ではない」ことを導いた。

これを 3 体の GHZ 状態発生実験に適用すれば、忠実度を測定して 0.5 以上なら 3 体の GHZ 状態を発生したとあってよい、という実験向けの指針となる。以上の結果は *Physical Review* 誌に掲載され、博士論文の第 4 章に詳述されている。

次に、その忠実度を実験的に推定するにはそのような物理量を測定すればよいか、が問題になる。これに対し申請者は n 体のスピン系（同じことであるが n 個の偏光した光子系）をとりあげ、一般論を作った。それは「一般 GHZ 状態を生成する作用素群のある生成系およびその線形結合に対応する物理量」を測定すればよいことを謳っており、つまりはシュテルン・ゲルラッハのスピン実験や Aspect の光子実験がそれに含まれるのであるが、いわゆる Bell 測定一般化である。そして、そのような実験から得られた測定値（の期待値）から忠実度の取り得る値の範囲を与える式を導出した。これをウィーン大学の GHZ 状態の成分が含まれていることを明らかにした。以上の結果は *Physical Review* 誌に掲載され、博士論文の第 5 章に詳述されている。

上述の不等式はすべて測定値（の期待値）の 1 次式を含む不等式であるが、さらに必要十分条件に近い不等式として、2 次式による不等式が提唱されていた (*Phys.Rev.Lett.*2002)。ところがこの不等式の証明には不備があることを申請者は発見し、さらに正しい証明を与えた。実はこれは単なる不備補正の域を超え、難しく複雑な証明を一から行ったことに相当する。さらに申請者は m 個 ($n \geq k \geq m \geq 1$) までの粒子が一つ一つ分離している場合に適用される不等式(n と k と m を含む不等式)を発見した。更に特定の状況下(特定とは言え、実は従来全ての実験はこの状況に含まれるようなかなり一般の状況)において成り立つ、より優れた（実験的に扱いやすい）不等式も導いた。以上の結果は *Physical Review Letter* 誌に掲載され、博士論文の第 6 章に詳述されている。

以上のように本論文は、実験的に多体エンタングルメントの種類を推定するための有用な不等式をいくつも導き、その妥当性を数学的に証明したものである。この研究は現在注目を集めているエンタングルメントの理論的研究のみならず実験的研究に直接あるいは間接に大きく資するものである。したがって本論文は博士学位論文として十分に相応しい内容である。