氏　　　　名	渡辺　有祐
学位（専攻分野）	博士（学術）
学 位 記 番 号	総研大甲第1334号
学位授与の日付	平成２２年３月２４日
学位授与の要件	複合科学研究科　統計科学専攻 学位規則第６条第１項該当
学 位 論 文 題 目	Discrete geometric analysis of message passing algorithm on graphs

論 文 審 査 委 員	主　　査	准教授	池田　思朗
		教授	栗木　哲
		教授	土谷　隆
		教授	田中　利幸（京都大学）

論文内容の要旨

近年，グラフィカルモデルと呼ばれる確率モデルが様々な分野で用いられている．グラフィカルモデルは一般に複数の確率変数に関する同時分布を定めるが，実用上は各確率変数に関する周辺確率や分配関数が必要となることが多い，しかし，同時分布からこれらを求めることは計算量の観点から必ずしも簡単ではない．確率伝搬法はこれらを近似的に計算する効率の良い局所伝搬型のアルゴリズムであり，同等のアルゴリズムは古くから広く用いられている．本論文は確率伝搬法に関して渡辺氏の行った離散幾何学的観点からの数理的研究をまとめてある．英語で書かれており，全８章からなる．

第１章では，研究の背景と論文で必要となる基本的な概念を説明している．本論文で用いるグラフィカルモデルの定義を行い，古くから同様の記述が用いられている統計物理学との関係についても概説している．続いて確率推論の重要性，そして計算量の観点からの困難さを述べている．続いて確率伝搬法について説明している．確率伝搬法はグラフが木の場合には正しい推論を与えるが，ループのあるグラフィカルモデルに対しては近似的な計算手法となる．この近似的計算手法としての確率伝搬法（Loopy Belief Propagation，以下 LBP）を説明している．また，本章の最後の節において，本研究の特徴である離散幾何的アプローチに関する簡単な例と，離散幾何学を用いる理由について簡単な説明を与えている．

第２章は本論文で扱う問題を数学的に定式化している．本論文で必要となるグラフィカルモデルを定義し，確率分布，特に指数型分布のもつ性質を述べ，その後 LBP に関する既存の知見をまとめている．具体的には LBP と密接に関係しているベーテ自由エネルギーを説明し，確率伝搬法の更新則に対する固定点とベーテ自由エネルギー関数の停留点が一致するという重要な既存の結果を説明している．

本論文の主要結果はこの後に続く第３章から第７章にまとめられており，２部に分かれている．第１部は第３章から第５章である．ここでは渡辺氏が提案するグラフゼータ関数による LBP の解析に関する結果が述べられている．続く第２部は第６章と第７章であり，分配関数のループ展開に関する結果について論じている．

第３章では，グラフ理論の分野で定義されているグラフゼータ関数を示し，その拡張を行っている．グラフの幾何的性質を表現する量として，グラフの素サイクルを用いた多変数グラフゼータ関数を導入し，その行列式表示を２通りの方法で与える「伊原の公式」の多変数拡張を証明している．

第４章では渡辺氏が拡張したグラフゼータ関数と確率伝搬法の関係を議論している．まず，第３章で証明した行列式の関係を用い，ベーテ自由エネルギーのヘッセ行列の行列式を多変数グラフゼータ関数によって表す公式を証明している．この結果を応用してベーテ自由エネルギーのヘッセ行列が正定値となるための十分条件を示している．

確率伝搬法の固定点とベーテ自由エネルギー関数の停留点とは一致することから，このヘッセ行列の正定値性は確率伝搬法の安定性を解析のために重要である．第５章ではこの関係から LBP の固定点の局所安定性を示している．また，グラフィカルモデルのサイクルの個数と LBP の固定点の個数に関するこれまで知られていない理論的な結果を導いてい

る．

第２部では，主に分配関数のループ展開を扱っている．まず第６章において，正しい分配関数や周辺確率と，LBP によるそれらの近似との比を，グラフの一般化ループによって展開する方法について説明している．この展開方法は渡辺氏と米国のグループが同時期に独立に同等の結果を得たものである．この展開の応用として，マッチング問題に適用した例を示している．また，グラフゼータ関数との関係についても述べている．

第７章は，分配関数のループ展開から導かれるグラフ多項式について論じている．グラフ上の確率分布のパラメータを２変数や１変数に低減することにより，グラフ不変量となる多項式を定義し，それらがグラフのエッジの削除と縮約によって特定の関係式を満たす Tutte の V 関数というクラスに属することを示している．また，このグラフ多項式と，マッチング多項式やグラフゼータ関数を含めた既存のグラフ不変量との間のさまざまな関係を導いている．

第８章は論文のまとめである．本論文で示した内容についてまとめ，今後の課題について述べている．

博士論文の審査結果の要旨

渡辺有祐君の博士論文審査は平成 22 年 1 月 25 日午前 10 時より約 2 時間にわたり，本人および表記 5 名の委員全員の出席のもとに行われた．論文発表会および審査のための会議の結果，全員一致で同君の論文は博士（学術）を授与するに値するという結論に達した．審査結果の要旨は以下の通りである．

LBP は理論的な研究対象として，また工学的な応用においても重要な手法である．しかし，その数理的性質の理論的解明は困難であり，限定的な結果しか得られていない． 本論文の第 1 部で論じられているグラフゼータ関数を用いた LBP の解析は，既存の解析手法とは大きく異なる数理的手法の提案である．ここで得られた結果は，ループを 2 個含むグラフに対する LBP の固定点の一意性条件など，従来法では困難であった事実を明らかにしており，新たな手法としての理論的価値は十分に高い．また，グラフゼータ関数の導入に加え，微分位相幾何で知られている大域的な関数の性質を利用して凸性を議論するなど，幅広い分野にまたがる手法を用いた解析となっている．

第 2 部で論じられているループ展開は，LBP ないしはベーテ近似の性質をグラフの幾何的な量で展開している点に価値があり，LBP の近似精度などの難問に対して理論的基盤を与え得るものである．また，ループ展開から導かれたグラフ多項式は，従来からグラフ理論においてよく知られている Tutte の V 関数のクラスに属するものの，それがグラフィカルモデルの分配関数の近似と関連して自然に定義される点が理論的に興味深い．また，これらの結果を用いて，マッチング多項式やグラフゼータ関数など，既存の重要なグラフ不変量との関係を明らかにしている点から，本研究が端緒を開いた理論的基盤の構築へ向けての取り組みは今後の発展を期待できる．

以上のように，本論文は統計科学，統計物理，離散幾何，グラフ理論などにまたがる新たな方法論を確立した論文として評価できることから，統計科学を含めた学術的分野を主な内容とする論文として十分意義があると判断できる．