

氏 名 織田 幸弘

学位(専攻分野) 博士(情報学)

学位記番号 総研大甲第 2494 号

学位授与の日付 2024 年 3 月 22 日

学位授与の要件 複合科学研究科 情報学専攻  
学位規則第6条第1項該当

学位論文題目 Cut-elimination and Completeness in Cyclic Proof Systems

論文審査委員 主 査 龍田 真  
情報学コース 教授  
蓮尾 一郎  
情報学コース 教授  
吉田 悠一  
情報学コース 教授  
関山 太朗  
情報学コース 准教授  
木村 大輔  
東邦大学 理学部 准教授

# 博士論文の要旨

氏 名 織田 幸弘

論文題目 Cut-elimination and Completeness in Cyclic Proof Systems

多くの証明体系において、証明図は木の形をしており、サイクルは含まない。それに対して、証明図にサイクルを含むことを許容するような証明体系を循環証明体系 (cyclic proof system) と言う。そのような証明体系のほとんどは無限降下法の一形式化とみなすことができる。それゆえ、循環証明体系は帰納法を含む証明体系の代替手段になり得る。それゆえ、循環証明体系は帰納的定義を含む論理のための証明体系であると言える。それにも関わらず、循環証明体系は帰納法を含まない。そのため、帰納法を適用する論理式を発見する必要がない。この点は、証明探索の観点から見て、循環証明体系が帰納法を含む証明体系よりも優れていることである。循環証明体系は自動証明などに応用があり、特にソフトウェア検証においても有用である。実際、循環証明体系をベースとした自動証明器がある。また、循環証明体系をベースとした自動証明器が、分離論理の自動証明の大会 (SL-COMP 2018) で優秀な成績をおさめている。

循環証明体系を応用するための研究は広く行われている。しかしその一方で、循環証明体系の理論的な性質の研究はまだ十分とは言い難く、より詳細な研究が循環証明体系の応用のためにも必要であると考えられる。本論文の目的は主に証明論の観点から循環証明体系の理論的な性質を明らかにすることである。より詳細には、カット除去性 (cut-elimination property) および、循環証明体系とそれに対応する帰納法を含む通常の証明体系の同等性についての結果を本論文では述べる。

カット除去性とは、すべての証明可能なシーケントはカットルール無しでも証明できるというシーケント計算型の証明体系の性質である。カット除去性は、証明論の観点から見て、基本的かつ望ましい性質である。たとえば、一階述語論理のシーケント計算のカット除去性からすみやかに、その無矛盾性、部分論理式特性、Craig の補間定理などが導かれることが知られている。また、循環証明体系がカット除去性を持つとき、証明図中に現れる論理式の種類を制限できることがわかる。このことは、カット除去性を持つ循環証明体系における効率的な証明探索方法の存在を示唆する。それゆえ、循環証明体系のカット除去性の研究は、証明論の観点からだけでなく、自動証明への応用という別の観点からも重要であると考えられる。

一般に、帰納法を含む通常の証明体系で証明可能なシーケントは対応する循環証明体系で証明可能であることが知られている。その理由は、循環証明体系で帰納法がシミュレーション可能だからである。しかしながら、その逆、つまり、帰納法を含む通常の証明体系で証明可能なシーケントが対応する循環証明体系で証明可能かどうかは、一般には明らかではない。現在知られている帰納法を含む証明体系と対応する循環証明体系の証明能力が一致するケースは、Peano Arithmetic という体系を含むか述語論理を含まない場合である。また、一致しない場合として、帰納的定義付き一階述語論理の循環証明体系であ

る CLKID<sup>o</sup> で証明可能であるが、対応する通常の証明体系では証明可能でないシーケエントの存在が知られている。

本論文で述べる貢献は循環証明体系の理論的性質についての 3 つの結果である。1 つ目の結果と 2 つ目の結果はカット除去性についての結果であり、3 つ目の結果は循環証明体系とその対応する帰納法を含む通常の証明体系の同等性についての結果である。

1 つ目の結果は、帰納的定義付き一階述語論理の循環証明体系である CLKID<sup>o</sup> におけるカット除去の反例を与えたことである。つまり、CLKID<sup>o</sup> においてカット除去性が成り立たないことを示す。CLKID<sup>o</sup> の循環証明体系においてカット除去性が成り立つかどうかはその重要性にも関わらず 15 年来、未解決であった。反例のシーケエントは自然数の加算を意味する述語から別の自然数の加算を意味する述語が帰結することを直観的には表している。このシーケエントがカット除去の反例になっている証明は背理法による。具体的にはシーケエントのカットなし証明図に無限道があることを示し、循環証明体系の有限性に矛盾させる。

2 つ目の結果は、CLKID<sup>o</sup> におけるカット除去の反例でより簡単なものを与える。1 つ目の結果の反例のシーケエントには、自然数の加算を直観的には意味する二種類の三項述語を含んでいた。それに対して、2 つ目の結果の反例には一項述語のみが含まれている。これにより、シーケエントに出現する述語記号を一項述語に制限しても CLKID<sup>o</sup> におけるカット除去が成り立たないことがわかる。この証明は 1 つ目の結果を示した際に利用した手法を応用して得られる。

3 つ目の結果は、Presburger Arithmetic に対応する循環証明体系である Cyclic Presburger Arithmetic を与え、Presburger Arithmetic と Cyclic Presburger Arithmetic の同等性を示す。Presburger Arithmetic は Peano Arithmetic から乗法を取り除くことで得られる形式的理論である。Presburger Arithmetic は完全かつ決定可能な理論としても広く知られている。また、Presburger Arithmetic にはソフトウェア検証への応用も知られており、情報科学の観点でも重要である。Presburger Arithmetic は Peano Arithmetic を含まないため、Presburger Arithmetic とそれに対応する循環証明体系の同等性は知られていなかった。この同等性は Presburger Arithmetic の完全性を用いて導かれる。

## 博士論文審査結果

Name in Full  
氏名 織田 幸弘

Title  
論文題目 Cut-elimination and Completeness in Cyclic Proof Systems

本論文は循環証明体系の理論的性質についての3つの結果を述べる。1つ目の結果はカット除去の反例を与え、2つ目の結果はより限定された状況での反例を与え、3つ目の結果はプレスバガー算術に関して循環証明体系とその対応する帰納法を含む通常の証明体系の同等性を証明する。循環証明体系とは帰納的定義を記述するための証明体系であり、証明図に循環を含むことを許容するような証明体系である。帰納法を適用する論理式を発見する必要がなく。証明探索のためには、循環証明体系は従来の証明体系よりも優れている。カット除去性とは、すべての証明可能なシークエントはカット無しでも証明できるという証明体系の性質であり、この性質は基本的で望ましい性質である。一般に、帰納法を含む証明体系で証明可能なシークエントは対応する循環証明体系で証明可能である。しかしながら、その逆は明らかではない。

本論文の第1章は序論であり循環証明体系および本論文の結果の意義を説明している。第2章は予備知識であり循環証明体系を定義している。第3章は1つ目の結果を述べ、帰納的定義付き一階述語論理の循環証明体系である  $\text{CLKID}_\omega$  においてカット除去の反例を与える。 $\text{CLKID}_\omega$  の循環証明体系においてカット除去性が成り立つかどうかはその重要性にも関わらず15年来、未解決であった。与える反例は、そのシークエントが自然数の加算を意味する述語から別の自然数の加算を意味する述語を帰結するものである。このシークエントがカット除去の反例になっている証明は、背理法により、カットなし証明図に無限道があることを示し、循環証明体系の有限性に矛盾させる。第4章は2つ目の結果を述べ、 $\text{CLKID}_\omega$  におけるカット除去の反例でより限定的なものを与える。この反例には一項述語のみが含まれている。これにより、シークエントに出現する述語記号を一項述語に制限しても  $\text{CLKID}_\omega$  におけるカット除去が成り立たないことがわかる。証明は1つ目の結果を一般化して得られる。第5章は3つ目の結果を述べ、Presburger 算術の循環証明体系である *Cyclic Presburger Arithmetic* を定義し、Presburger 算術と *Cyclic Presburger Arithmetic* の同等性を示す。Presburger 算術は Peano 算術から乗法を取り除くことで得られる体系であるが、Presburger 算術とその循環証明体系の同等性は知られていなかった。その同等性は Presburger 算術の完全性を用いて導かれる。第6章はまとめと今後の研究課題について述べる。公開発表会では審査委員および外部参加者から活発な質疑応答がなされ本出願者は適切に答えた。また、審査会では、背景知識、意義、定理の証明方法、応用性について審査委員より質疑応答がなされ本出願者は適切に答えた。また、第3章の内容は論文雑誌に、第4,5章の内容はそれぞれ国内会議査読付論文に発表され、学界においても成果が認められている。

以上のように、本論文は、循環証明体系に関するカット除去および従来体系との同等性を

明らかにし、これにより未解決問題に答えた研究であり、数理論理学および理論計算機科学の発展に対して十分な貢献をした。このため、本論文が博士論文として学位を与える水準に達していると全員一致で結論した。