

金融リスクにおける確率分布の裾および
変量間の依存関係の影響と定量化

吉羽 要直

博士（統計科学）

総合研究大学院大学
複合科学研究科
統計科学専攻

平成 22 年度
(2010)

概要

本論文では、金融リスクの把握に際して、特に資産価格変動間の相関や依存構造に焦点を当てて分析を行う。本稿で扱う金融リスクは、資産価格変動に伴う市場リスクと貸出先の信用力の変化や担保価値の変動に伴う信用リスクであるが、そうしたリスクを捉えるリスク指標が持つべき性質の観点で金融実務で用いられているリスク指標を比較分析することに始まり、リスクをもたらすファクターの周辺分布だけでなく、相関や裾での依存関係がリスク指標に及ぼす影響をしていく。

まず、ファイナンスでのリスク指標として標準的になっているバリュー・アット・リスク (VaR) とそれに代わる指標として提唱されている期待ショートフォールなどを紹介し、その性質についていくつかの観点で比較分析を行う。そのうえで、リスク指標のテイルリスクに焦点を当て、リスクファクターとなる資産価格変動の相互依存関係を表すコピュラなどがテイルリスクに及ぼす影響を考察する。

次に、リスクファクターの相互依存関係を表すコピュラについて、その推定方法や特定化したコピュラに従う乱数の発生方法など実務で用いる場合に必要な技術をまとめる。そのうえで具体例として市場リスクを捉えるために株価変動のコピュラを推定し、VaRを算出したり、信用リスクを捉えるために資産変動のコピュラを想定したシミュレーションを行う。特に、2000年以降2007~2008年の金融危機に至るまで信用ポートフォリオのデリバティブであるCDO (collateralized debt obligation) のプライシングの標準的な手法となったコピュラ・アプローチについて、さまざまなコピュラを想定して比較分析することで裾での依存関係がCDOのプライシングやリスクに大きな影響を及ぼすことを示す。

さらに、信用リスクの把握においては、単に対象企業のデフォルト確率に注目するだけでは不十分であり、追加融資を行うことにより当該企業への貸出額が増大する可能性があることも考慮する必要がある。エクスポージャーの変化を合理的に捉え、デフォルト確率や当該企業がデフォルトした際の回収率の変化を構造的に把握して、期待損失やVaRを解析的に定量化する。また、デフォルト確率や回収率は満期までの期間の景気等の状況に応じて変化することを考慮して、担保付貸出を対象に、連続的に変化する非負のデフォルト強度過程とその強度と連続的に相関を持つ担保価値過程を想定し、担保付貸出の貸出価値を期待損失の形で解析的に評価するほか、損失の変動に関して標準偏差などの高次モーメントも解析的に評価する。

以上の分析を通じて、資産価格変動や信用の変動などさまざまなファクター間の相関や依存構造を捉え、それらが金融リスクに与える影響を定量的に把握する。

目次

序章	1
第1章 バリュアット・リスクと期待ショートフォールの比較分析	5
1.1 はじめに	5
1.2 VaR や期待ショートフォールなどのリスク指標	7
1.3 VaR と期待ショートフォールの比較分析	9
1.3.1 テイルリスクの排除	9
1.3.2 期待効用最大化原理との整合性	12
1.3.3 劣加法性	15
1.3.4 VaR と期待ショートフォールの推計値の安定性	18
1.4 多変量極値理論を用いた VaR と期待ショートフォールのテイルリスク	20
1.4.1 単変量極値理論を用いた理論分析	20
1.4.2 多変量極値理論を用いた理論分析	24
1.4.3 為替相場変動を用いた実証分析	30
1.5 結論	34
1.A 多変量分布の超過値が漸近的に極値コピュラに従うことの証明	36
1.B 損失額が一般化パレート分布に従う場合の VaR のテイルリスク	37
第2章 資産価格変動のコピュラとポートフォリオの信用リスク	39
2.1 はじめに	39
2.2 コピュラ	41
2.2.1 コピュラの定義	41
2.2.2 コピュラの典型例とその特徴	42
2.2.3 コピュラの性質：分布の裾での依存関係	44
2.2.4 コピュラの性質：順位相関 - 分布の全体での依存の程度	47
2.2.5 コピュラのパラメータ推定	49
2.2.6 コピュラを選択規準	50
2.2.7 コピュラを用いた乱数発生	51
2.3 正規コピュラとtコピュラ	52
2.3.1 正規コピュラ	52
2.3.2 tコピュラ	54
2.4 アルキメディアンコピュラ	58
2.4.1 アルキメディアンコピュラ	58
2.4.2 アルキメディアンコピュラに従う乱数の発生方法	58
2.4.3 クレイトンコピュラ	60
2.4.4 ガンベルコピュラ	61

2.4.5	フランクコピュラ	64
2.5	コピュラを用いた実証分析	66
2.5.1	貸出ポートフォリオの信用リスク	66
2.5.2	株式ポートフォリオの株価変動リスク	67
2.5.3	主要国株価変動の裾依存性とコピュラ	71
2.6	コピュラを用いた CDO の評価	73
2.6.1	1 期間構造モデルとコピュラ	73
2.6.2	等質な CDO の評価法	74
2.6.3	コピュラの違いが CDO の評価に及ぼす影響	75
2.6.4	コピュラの違いが CDO スクエアードの評価に及ぼす影響	78
2.6.5	CDO スクエアードにおける末端参照債務の重複度の影響	80
2.6.6	末端参照債務を考慮しない CDO スクエアード評価との比較	82
2.7	コピュラを巡るいくつかの留意点	84
2.7.1	タイデータが存在するときの周辺分布の扱い	84
2.7.2	変量間の負の依存関係の表現	85
2.7.3	t コピュラによる正規コピュラの近似精度	85
2.8	結論	86
2.A	2 変量コピュラの順位相関とパラメータの関係	88
2.A.1	2 変量アルキメディアンコピュラ	88
2.A.2	2 変量正規コピュラと t コピュラ	90
2.B	t コピュラと double-t コピュラの違い	90
2.C	アルキメディアンコピュラに従う乱数発生プログラム	91
第 3 章 追加融資を考慮した期待損失と VaR		93
3.1	はじめに	93
3.2	追加融資を考慮した EL	95
3.2.1	マートンモデルと銀行の損失関数	95
3.2.2	時点 t での EL	96
3.2.3	時点 t での EL を最小化する追加融資量	97
3.2.4	初期時点の EL	100
3.3	追加融資を考慮した VaR と UL	102
3.3.1	VaR とストレス時期待損失	102
3.3.2	ストレス時期待損失の算出	103
3.3.3	時点 t でのストレス時期待損失	104
3.3.4	初期時点でのストレス時期待損失	104
3.3.5	追加融資を考慮した EL と UL の数値例	106
3.4	結論	107
3.A	期中での追加融資の判定	108
3.A.1	追加融資が行われる資産価格の水準	108
3.A.2	パラメータの大小関係と追加融資の有無	110
3.A.3	追加融資量が有限であるための必要十分条件	110
3.A.4	追加融資量が有限であるためのパラメータの条件	111

3.B	時点 t での状態別の期待損失	112
3.C	追加融資がない場合の初期時点でのストレス時期期待損失	113
3.D	追加融資を考慮した各状態でのストレス時期期待損失	113
第 4 章	担保付貸出の損失分布モーメント評価	117
4.1	はじめに	117
4.2	担保付貸出の損失分布のモーメント評価	120
4.3	アフィン過程でのモデル化	122
4.3.1	デフォルト強度と担保価値の確率過程	122
4.3.2	生存確率の評価	123
4.3.3	期待回収担保価値の評価と期待損失	124
4.3.4	損失の m 次モーメントと標準偏差	126
4.3.5	数値計算	128
4.4	2 次ガウス過程でのモデル化	128
4.4.1	デフォルト強度と担保価値の確率過程	129
4.4.2	生存確率の評価	130
4.4.3	期待回収担保価値の評価と期待損失	131
4.4.4	損失分布の m 次モーメントと標準偏差	133
4.4.5	数値計算	134
4.4.6	デフォルト強度と担保価値の相関の符号条件	136
4.5	結論	138
4.A	基本アフィン形式とリッカチ型常微分方程式の解	139
4.A.1	平方根過程での生存確率の導出	139
4.A.2	リッカチ型常微分方程式の解	140
4.B	拡張アフィン形式による損失の期待値・ m 次モーメントの評価	141
4.C	測度変換による相関とブラウン運動の関係	145
4.C.1	2 次ガウス過程の場合	145
4.C.2	アフィン過程の場合	146
4.D	2 次ガウス形式の従う常微分方程式と解	148
終章		153
謝辞		155
参考文献		156

序章

本論文では、金融リスクの把握に際して、特に資産価格変動間の相関や依存構造に焦点を当てて分析を行う。本稿で扱う金融リスクは、資産価格変動に伴う市場リスクや貸出先の信用力の変化や担保価値の変動に伴う信用リスクである。まず、そうしたリスクを捉えるリスク指標はどのような性質を持つべきかをまとめ、金融実務で使われているリスク指標はそれらを満たしているかという観点で比較分析を行う。そのうえで、リスクをもたらすファクターの周辺分布だけでなく、リスクファクター間の相関、裾での相互依存関係や状況の変化に応じた貸し手の行動がリスク指標や価値に及ぼす影響を定量化していく。

金融実務において1990年代以降、バリュエーション・アット・リスク（以下、VaR）と呼ばれるリスク指標が用いられるようになってきた。こうした状況を踏まえ、1996年にはバーゼル銀行監督委員会での国際合意として、トレーディング勘定の価格変動リスクをVaRで計測することが認められ、国際的に活動する民間金融機関の自主的なリスク管理の指標を銀行が規制上保有しておかなければならない資本額に結び付けることが認められた。2005年には、銀行貸出などの信用リスクについてもVaRの考え方が一部に認められるようになった。VaRは想定するポートフォリオから生じる損益の分位点であるが、99%、99.9%といった高い信頼水準（損失方向に大きな水準）に設定されることが多い。

こうした金融実務でのリスク管理の変化に対応して、数理統計学的に分析していく必要性のあるテーマは多い。そもそも、リスク指標はどのような性質を持つべきであるか。金融実務で標準的なリスク指標であるVaRはそうした望ましい性質を満たしているのか。ポートフォリオのリスクを考えるにはリスクの源泉となるリスクファクターを複数特定していくことになるが、ファクター間の依存関係はポートフォリオのリスクに大きな影響を及ぼさないか。銀行の企業への貸出の信用リスクを考えるとき、当該企業のデフォルト確率を考えるだけで十分か。リスクの評価期間が長ければその期間に生じうる貸出額の変化を考える必要もあるかもしれないし、実際デフォルトが生じたときには想定していた回収率よりも低くなっている可能性もある。本論文は金融リスクを捉える際の確率統計学的な問題点について、リスクファクター間の相互依存関係を中心に分析する手法を与え、実証分析・数値分析を行う。

第1章では、ファイナンスでのリスク指標として金融業界で標準的になっているVaRとそれに代わる指標として提唱されている期待ショートフォールなどを紹介し、まず、山井・吉羽 [2001a,b,c, 2002a] に沿って、その比較分析を行う。比較分析の観点としては、(1) テイルリスクの排除、(2) 期待効用最大化原理との整合性、(3) 劣加法性（凸性）、(4) 推計値の安定性、の4つを挙げ、対象とするポートフォリオの損益分布が与えられた前提のもとで、VaRと期待ショートフォールがこれらの性質を満たしているかを比較分析する。その結果、(1)～(3)では期待ショートフォールの方がよい性質を持つ一方、(4)ではVaRの方がよい性質を持つ場合があることを示す。さらに、山井・吉羽 [2002b] に沿って、市場がストレス状態になることを多変量極値理論で表現し、ポートフォリオの損益分布を生成し、テイルリスクがどのようになるかを分析する。山井・吉羽 [2002b] は分析が多岐にわたっているため、その結果については、Yamai and

Yoshiba [2005] でサーベイされた内容にとどめることとする。分析の結果、テイルリスクの観点では、資産価格変動間の依存構造であるコピュラの裾での依存性が大きなリスクを引き起こす要因となるものの、信頼水準によっては VaR がそのリスクを捉えられないというテイルリスクを抱えることを具体的にエマージング市場の為替相場変動を例に挙げながら示す¹。

第2章では、第1章で用いた多変量極値理論のうち変量間の依存関係であるコピュラに注目する。特に、コピュラを実務で用いることを念頭におき、戸坂・吉羽 [2005] に沿って、(1) コピュラのパラメータの推定、(2) 特定化したコピュラに従う乱数の発生方法をまとめ、5変量コピュラを用いて株式ポートフォリオを分析したり、1万の与信ポートフォリオのリスク指標の算出などを試みる。さらに、2007～2008年の金融危機を踏まえ、新谷・山田・吉羽 [2010] に沿って、主要国の株価指数を対象に収益率分布の相互依存関係を分析し、データへの適合度の高いコピュラの種類を実証的に調べたうえで、この結果を踏まえて、コピュラを用いた CDO (collateralized debt obligation) のプライシングを試みる。

第3章では、バーゼル II (Basel Committee on Banking Supervision [2005a]) の適用を踏まえ、山下・吉羽 [2007] に沿って²、デフォルト確率だけでなく、回収率、エクスポージャ - の分析を試みる。具体的には、景気の後退期にデフォルト確率が上昇するとともに、回収率が低下するという相関をとらえたうえで、銀行が期待損失の最小化を念頭にエクスポージャ - を増大させることを考慮して期待損失や VaR がどのように変化しうるか分析する。そうした銀行の追加融資を考慮した期待損失や VaR の算出は解析的に行えることを示す。

第4章では、第3章と同様にバーゼル II での問題意識に立ち、景気を通じたデフォルト確率と回収率の負の相関に注目しつつ、第3章で用いた構造型モデルはデフォルトが連続的に生じうることを完全には考慮できない問題に注目し、山下・吉羽 [2010, 2011] に沿って³、瞬間的なデフォルト率に相当するデフォルト強度が回収率と負の相関を持ちながら連続的な確率過程に従うモデルを考察する。ここではデフォルト強度が負になりえないことにも注目し、デフォルト強度が非負性を保ちつつ、回収率との負の相関も持ち、そのうえで期待損失等の損失分布の性質が解析的に評価できることをデフォルト強度をアフィン過程や2次ガウス過程でモデル化することで示していく。

各章を構成する原論文は以下のとおりである。

第1章 バリュースコア・リスクと期待ショートフォールの比較分析

山井康浩・吉羽要直 [2001a], 「バリュースコア・リスクのリスク指標としての妥当性について 期待ショートフォールとの比較分析による理論的サーベイ」, 『金融研究』, 第20巻(第2号), 33-68頁。

山井康浩・吉羽要直 [2001b], 「期待ショートフォールによるポートフォリオのリスク計測 具体的な計算例による考察」, 『金融研究』, 第20巻(別冊第2号), 53-93頁。

山井康浩・吉羽要直 [2001c], 「リスク指標の性質に関する理論的整理 VaR と期待ショートフォールの比較分析」, 『金融研究』, 第20巻(別冊第2号), 95-131頁。

山井康浩・吉羽要直 [2002a], 「バリュースコア・リスクと期待ショートフォールの比較分析」, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 第45巻(第4号), 490-506頁。

¹山井・吉羽 [2001a,b,c, 2002b] に対応する英語論文は Yamai and Yoshiba [2002a,b,c,d] である。

²対応する英語論文は Yamashita and Yoshiba [2007] 。

³山下・吉羽 [2010] に対応する英語論文は Yamashita and Yoshiba [2010] 。

山井康浩・吉羽要直 [2002b], 「市場ストレス時におけるバリュー・アット・リスクと期待ショートフォールの比較：多変量極値分布のもとでの比較分析」, 『金融研究』, 第 21 巻 (別冊第 2 号), 111–170 頁 .

Yamai, Yasuhiro and Toshinao Yoshiba [2002a], “On the Validity of Value-at-Risk: Comparative Analysis with Expected Shortfall,” *Monetary and Economic Studies*, **20**(1), pp. 57–86.

Yamai, Yasuhiro and Toshinao Yoshiba [2002b], “Comparative Analyses of Expected Shortfall and VaR: Their Estimation Error, Decomposition, and Optimization,” *Monetary and Economic Studies*, **20**(1), pp. 87–122.

Yamai, Yasuhiro and Toshinao Yoshiba [2002c], “Comparative Analyses of Expected Shortfall and VaR (2): Expected Utility Maximization and Tail Risk,” *Monetary and Economic Studies*, **20**(2), pp. 95–115.

Yamai, Yasuhiro and Toshinao Yoshiba [2002d], “Comparative Analyses of Expected Shortfall and VaR (3): Their Validity under Market Stress,” *Monetary and Economic Studies*, **20**(3), pp. 181–237.

Yamai, Yasuhiro and Toshinao Yoshiba [2005], “Value-at-risk versus expected shortfall: A practical perspective,” *Journal of Banking & Finance*, **29**(4), pp. 997–1005.

第 2 章 資産価格変動のコピュラとポートフォリオの信用リスク

戸坂凡展・吉羽要直 [2005], 「コピュラの金融実務での具体的な活用方法の解説」, 『金融研究』, 第 24 巻 (別冊第 2 号), 115–162 頁 .

新谷幸平・山田哲也・吉羽要直 [2010], 「金融危機時における資産価格変動の相互依存関係：コピュラに基づく評価」, 『金融研究』, 第 29 巻 (第 3 号), 89–122 頁 .

第 3 章 追加融資を考慮した期待損失と VaR

山下智志・吉羽要直 [2007], 「追加融資を考慮した信用リスク：構造モデルによる EL と UL の解析解」, 『金融研究』, 第 26 巻 (別冊第 2 号), 103–136 頁 .

Yamashita, Satoshi and Toshinao Yoshiba [2007], “Analytical solutions for expected and unexpected losses with an additional loan,” IMES Discussion Paper Series No. 2007-E-21.

第 4 章 担保付貸出の損失分布モーメント評価

山下智志・吉羽要直 [2010], 「デフォルト率と回収率の負の相関を考慮した担保付貸出の損失評価：CIR 型ハザード率過程での解析的評価」, IMES Discussion Paper Series No.2010-J-10 .

山下智志・吉羽要直 [2011], 「2 次ガウス過程を用いた担保付貸出の解析的な損失分布のモーメント評価」, 『統計数理』, 第 59 巻 (第 1 号), 141–157 頁 .

Yamashita, Satoshi and Toshinao Yoshida [2010], “Analytical Solution for Expected Loss of a Collateralized Loan: A Square-root Intensity Process Negatively Correlated with Collateral Value,” IMES Discussion Paper Series No. 2010-E-10.

第1章 バリュース・アット・リスクと期待ショートフォールの比較分析

本章では、実務的なインプリケーションを引き出すことを念頭において、VaR (Value-at-Risk) と期待ショートフォールの持つ性質を比較した筆者のサーベイペーパー (山井・吉羽 [2002a]; Yamai and Yoshida [2005]) に沿って筆者の4つのオリジナル・ペーパー (山井・吉羽 [2001a,b,c, 2002b]) の内容を整理する。

本章ではまず、リスク指標として1990年代以降、金融機関のリスク管理で標準的に利用されるようになったVaRとその問題点を解決するリスク指標として提唱されている期待ショートフォールを定義し、その比較分析を行う。

まず、対象とするポートフォリオの損失分布が与えられたとして、VaRと期待ショートフォールの比較を行う。比較に際しては、リスク指標に望まれる性質として、(1) テイルリスクの排除、(2) 期待効用最大化原理との整合性、(3) 劣加法性 (凸性)、(4) 推計値の安定性、の4つを挙げ、VaRと期待ショートフォールがこれらの性質を満たしているかどうかによって比較分析を行うこととする。その結果、(1)~(3)では期待ショートフォールの方がよい性質を持つ一方、(4)ではVaRの方がよい性質を持つ場合があることを示す。

次に、多変量極値分布により市場ストレスが表現しうるとの前提に立ち、多変量極値分布を用いてリスクファクターの分布を表現したうえで、対象とするポートフォリオの損失分布を導出し、VaRと期待ショートフォールを求める。こうして求められるVaRと期待ショートフォールに対して、特に(1)のテイルリスクの観点での比較を行う。シミュレーションによる分析のほか、リスクファクターの特定に際しては為替相場を例に挙げ実証分析によってそのパラメータを特定化したうえでリスク指標の比較分析を行う。その結果、価格変動の裾が厚く大幅な損失の発生する可能性の高い証券であっても、VaRではリスクが小さいと判断される場合があることを示す。また、異なる種類のコピュラで表されるリスクファクター間の依存関係の相違は、VaRや期待ショートフォールでは適切に捉えられない場合があることを示す。

1.1 はじめに

ファイナンスおよび経済学の理論では、不確実性下の意思決定を分析する際、投資家はリスク回避的な効用関数を持ち、この効用の期待値を最大化するように行動すると仮定するのが一般的である (「期待効用最大化原理」)。しかし、個々の投資家の効用関数を特定することは困難であるため、期待効用最大化原理を実務に応用するのは難しい。

これに対し、Markowitz [1952] は、不確実性下の意思決定をリターン (収益の期待値) とリスク (収益の分散あるいは標準偏差) のトレードオフによって捉えるという「平均・分散アプローチ」の考え方を提唱した。このアプローチは、(1) 個々の投資家の効用関数を特定する必要がないこと、(2) 収益が正規分布に従う場合、期待効用最大化原理と整合的な意思決定が行

えること、(3) 分散という比較的計算の容易な指標に基づいていることなどから実務・理論面とも飛躍的な発展を遂げた。また、これを機にポートフォリオの収益の不確実性に関する情報を収益の分布からリスク指標として抽出し、このリスク（リスク指標）とリターン（期待収益）とのトレードオフによってポートフォリオ選択を行うという考え方も広がった。

その後、分散あるいは標準偏差が、理論上あるいは実務上で持つ問題点が指摘され、分散に代わるリスク指標としてさまざまなものが提唱されてきた。こうしたリスク指標としては、VaR や期待ショートフォールなどが挙げられる¹。

これらのリスク指標の中で、特に 1990 年代以降、金融機関のリスク管理で最も標準的に利用されているのが VaR である。VaR が金融機関に普及した最大の理由としては、ポートフォリオのリスクをカバーするための「所要自己資本」の算出根拠を与えるという他のリスク指標にはない特徴を持っている点が挙げられる。つまり、「信頼水準 $100(1 - \alpha)\%$ の VaR を予め与えられた自己資本の範囲内に収める」ことをメルクマールとすることは、「損失額が自己資本を上回り自社がデフォルトする確率を $100\alpha\%$ 以内に抑える」ことに等しいため、VaR は金融機関が抱えるリスク量の限度を与えていることになる²。

しかし、このように実務で最も標準的なリスク指標となっている VaR に対し、学界からは Artzner *et al.* [1997, 1999] を始めとしてその妥当性を問う声が挙がってきている。彼らは、VaR にはリスク指標としての理論上の問題点（信頼区間外のリスクを捉えられず、損失額分布の形状によっては劣加法性を満たさないなど）があり、VaR をリスク管理に用いるのは不適切な場合があるとの指摘を行っている。Artzner *et al.* [1997, 1999] は、VaR が抱えるこれらの問題点を内包しないリスク指標として、期待ショートフォールを提唱した³。期待ショートフォールとは、損失額が VaR 以上となることを条件とした損失額の条件付期待値である。期待ショートフォールは信頼区間外の損失も織り込んでおり、理論的に必ず劣加法性を満たす。そのため、期待ショートフォールは、VaR を代替ないし補完する可能性があるリスク指標として学界・実務界の関心を呼び、積極的な議論が行われている。

山井・吉羽 [2001a,b,c] では、こうした VaR と期待ショートフォールに関する議論の整理を通じて、これらのリスク指標の比較分析を行った。本章では、まず、山井・吉羽 [2001a,b,c] の内容をさらに整理し、山井・吉羽 [2002a] を基に実務的なインプリケーションを引き出すことを念頭において、VaR と期待ショートフォールとの比較分析に関するサーベイを行う。比較の観点としては、リスク指標が満たしていることが望ましいとされている性質のうち、(1) テイルリスクの排除、(2) 期待効用最大化原理との整合性、(3) 劣加法性（凸性）、(4) 推計値の安定性の 4 つを挙げ、VaR と期待ショートフォールがこれらの性質を満たしているかどうかという観点で比較分析を行う。

次に、(1) のテイルリスクの観点に注目しながら、リスク指標を構成するリスクファクターの分布を多変量極値分布を用いて表現する。こうして市場ストレスの状態を多変量極値分布に従うリスクファクターとして表現したうえで、対象とするポートフォリオの損失分布を導出して、VaR と期待ショートフォールを比較分析する。この結果は山井・吉羽 [2002b] に基づくものであるが、その中でも Yamai and Yoshiba [2005] でサーベイされた部分を中心にその結果を

¹このほか、期待効用最大化原理との整合性の見地から研究が進められたリスク指標として、safety first rule (Roy [1952])、絶対偏差 (Konno and Yamazaki [1991])、下半標準偏差、下方部分モーメント (Fishburn [1977]) などが挙げられる。

²ただし、このように VaR を自己資本算出の根拠とすることが経済学的にみて本当に妥当かどうかは議論の余地がある。詳細は Froot and Stein [1998] を参照。

³Artzner *et al.* [1997, 1999] では“tail conditional expectation”と呼ばれている。

示す。

本章の構成は以下のとおりである。まず、1.2 節では VaR と期待ショートフォールを数学的に定義する。1.3 節では、ポートフォリオの損失分布が与えられたという条件のもとで、(1) テイルリスクの排除、(2) 期待効用最大化原理との整合性、(3) 劣加法性（凸性）、(4) 推計値の安定性、の 4 つの観点で VaR と期待ショートフォールの比較分析を行う。次に、ポートフォリオの損失分布をリスクファクターの同時分布として具体的に構成していく。特に市場ストレスの状態を表現することを念頭に多変量極値分布でリスクファクターの分布を表現する。1.4 節ではその多変量極値分布の理論を整理し、シミュレーションにより、VaR と期待ショートフォールのテイルリスクの理論的な比較分析と、21 ヵ国の対米ドル為替相場の 8 年間の日次収益率を用いたテイルリスクの実証分析を行う。最後に、1.5 節では本章をまとめる。補論として、1.A 節では、多変量分布の超過値が漸近的に極値コピュラに従うことを証明し、1.B 節では、損失額が一般化パレート分布に従う場合の VaR のテイルリスクを考察する。

1.2 VaR や期待ショートフォールなどのリスク指標

まず、分析の対象となるリスク指標である VaR と期待ショートフォールを定義し、代表的なリスク指標の性質をまとめる。

ここでは、投資家は期初 ($t = 0$) にポートフォリオ構成を決定し、期末 ($t = T$) までポートフォリオ構成を変えないものとする。つまり、静的な 1 期間モデルを前提として説明を行う。期末までポートフォリオを保有した結果、期末のポートフォリオ価値が決まり、その結果この投資に伴う損失額 (= 期初の価値 - 期末の価値) が決定する。この損失額は、期初では未定であるが、期末に判明する事象によって値が確定することから、ポートフォリオの損失額は (期初では) 確率変数と考えることができる。

ここでは、損失額を表す確率変数を Z とする。信頼水準 $100(1 - \alpha)\%$ の VaR は以下のように定義される。

定義 1.1 (VaR). VaR は損失額分布の上側分位点として、以下のように定義される。

$$VaR_{\alpha}(Z) = \inf\{z | \Pr[Z \leq z] \geq \alpha\} \quad (1.1)$$

信頼水準 $100(1 - \alpha)\%$ の VaR は、「ポートフォリオから $100(1 - \alpha)\%$ の確率で投資期間中 ($t = 0$ から $t = T$ までの間) に発生しうる最大損失額」として解釈することができる。これはまた、「最悪時の $100\alpha\%$ の事象を除いた場合の最大損失額」として捉えることもできる。

一方、信頼水準 $100(1 - \alpha)\%$ の期待ショートフォールは以下のように定義される。

定義 1.2 (期待ショートフォール). 期待ショートフォールは損失額が VaR 以上になる条件下での損失額の期待値であり、以下のように定義される。

$$ES_{\alpha}(Z) = E[Z | Z \geq VaR_{\alpha}(Z)] \quad (1.2)$$

信頼水準 $100(1 - \alpha)\%$ の期待ショートフォールは「ポートフォリオから発生する損失額が VaR 以上となる場合、平均してどの程度の損失を被るか」を表していると解釈できる。

リスク管理で多用される正規分布の仮定のもとでは、期待ショートフォールは損失額の標準偏差の定数倍となる。これは、正規分布のもとでの期待ショートフォールを計算することで以下のよう

に示すことができる．ここで，正規分布のもとでは VaR が標準偏差の定数倍 ($VaR_\alpha(Z) = q_\alpha \sigma$ ，ただし q_α は標準正規分布の上側 $100\alpha\%$ 分位点) となることを利用している⁴．

$$\begin{aligned} ES_\alpha(Z) &= E[Z|Z \geq VaR_\alpha(Z)] \\ &= \frac{1}{\alpha\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{VaR_\alpha(Z)}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{\sigma}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{VaR_\alpha(Z)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{e^{-\frac{q_\alpha^2}{2}}}{\alpha\sqrt{2\pi}} \sigma \end{aligned} \quad (1.3)$$

したがって，損失額分布が正規分布である場合は VaR も標準偏差の定数倍であるため，期待ショートフォールと VaR は同等なリスク指標となり，これらは同じ性質を持つ．そこで，期待ショートフォールと VaR の比較を行う前提として，損失額分布が正規分布に従わず，いわゆるシミュレーション法によってリスク量を算出する必要がある場合を念頭において議論を進めることとする．

Artzner *et al.* [1997, 1999] では，リスク指標が満たすべき望ましい性質として次のコヒレント性を取り上げ，VaR は必ずしもコヒレント性を満たさないのに対し，期待ショートフォールはコヒレント性を満たすため，望ましいリスク指標であると議論している．

定義 1.3 (コヒレント性). リスク指標 $\rho(Z)$ がコヒレント性を満たす (coherent) とは，以下の 4 つの条件を満たすことを指す．

1. 単調性 (monotonicity): $Z_1 < Z_2$ ならば $\rho(Z_1) \leq \rho(Z_2)$.
2. 正の同次性 (positive homogeneity): 任意の正の定数 λ に対して $\rho(\lambda Z) = \lambda\rho(Z)$.
3. 平行移動等価性 (translation equivariance)⁵: 任意の正の定数 c に対して $\rho(Z + c) = \rho(Z) + c$.
4. 劣加法性 (subadditivity): $\rho(Z_1 + Z_2) \leq \rho(Z_1) + \rho(Z_2)$.

VaR や期待ショートフォールは，その定義から，単調性，正の同次性，平行移動等価性を満たすことは明らかであるが，劣加法性を満たすか否かは次節で考察する．

コヒレント性とともな 2 つの条件を満たすとき，Kusuoka [2001] が示した定理 1.1 のとおり，リスク指標は歪測度を用いて表現できることが知られている．

定理 1.1 (リスク指標の歪測度を用いた表現). リスク指標 $\rho(Z)$ がコヒレント性を満たし，かつ，

1. 法則不変性 (law invariance): 任意の 2 つの確率変数 Z_1 と Z_2 が同じ確率法則に従うならば， $\rho(Z_1) = \rho(Z_2)$ となる .
2. 共単調加法性 (comonotonic additivity): 任意の 2 つの確率変数 Z_1 と Z_2 が共単調 (comonotone) であるとき， $\rho(Z_1 + Z_2) = \rho(Z_1) + \rho(Z_2)$ となる .

⁴例えば，信頼水準 99% では，この式より期待ショートフォールは標準偏差の 2.67 倍となるが，これは信頼水準を 99.6% とした時の VaR に相当する．

⁵Artzner *et al.* [1997, 1999] では平行移動不変性 (translation invariance) と呼ばれているが，‘invariance’ は不適切との指摘がなされているため ‘equivariance’ と表現した．また，この仮定は損失額が増えればリスク指標の値がその分上がることを意味することから ‘cash invariance’ とも呼ばれる．

の2つの性質も満たすとき、リスク指標 $\rho(Z)$ は $[0,1]$ で定義された凸の歪測度 (convex distortion measure) $D(\cdot)$ を用いて、

$$\rho(Z) = \int_0^1 F^{-1}(u) dD(u) \quad (1.4)$$

と表現できる。ただし、 $F^{-1}(u)$ は Z の分布関数の逆関数であり、 $F^{-1}(u) = VaR_{1-u}(Z)$ で与えられる。

次節で示すように、期待ショートフォールはコヒレント性を満たす。また、法則不変性、共単調加法性も満たすため、定理 1.1 の凸の歪測度 $D(\cdot)$ が存在し、具体的には

$$D(u) = \frac{1}{\alpha} \max(u - (1 - \alpha), 0) \quad (1.5)$$

となる。VaR はコヒレント性を満たさないが、凸ではない歪測度 $D(\cdot)$ として $D(u) = 1_{[1-\alpha,1]}(u)$ を用いて、(1.4) 式で表現できる。Tsukahara [2009] は、歪測度が 1 パラメータで表されるいくつかのリスク指標を取り上げて統計分析を行っている。

1.3 VaR と期待ショートフォールの比較分析

本節では、前節で定義した VaR と期待ショートフォールが、(1) テイルリスクを排除できるか、(2) 期待効用最大化原理と整合的か、(3) 劣加法性 (凸性) を満たすか、(4) 推計値は安定的か、について比較分析する。

ここでは、それぞれの性質の定義と説明を行い、VaR と期待ショートフォールがこれらの性質を満たすかどうかを例を交えながら解説する。

1.3.1 テイルリスクの排除

(1) テイルリスクとは

定義から明らかなように、VaR は分布の分位点のみを測るため、VaR を超える大幅な損失を考慮に入れていない。したがって、VaR は分布の裾に関する重要な情報を見落とす可能性がある。Committee on the Global Financial System [2000] は、このようにリスク指標が分布の裾を考慮できないリスクを「テイルリスク」と呼び、リスク指標が持つ一般的な問題点として取り上げた。さらに、山井・吉羽 [2001c] は、「リスク指標が、損失額分布の裾 (テイル) 部分の損失に関する情報を完全には把握できていないことに伴い、リスクの大小関係を見誤る惧れがある」ことをテイルリスクとして定義し、分布の裾に関する情報、テイルリスク、およびリスク指標の関係を考察した。山井・吉羽 [2001c] では、確率優越の概念を用いてテイルリスクを数学的に定義し、VaR と期待ショートフォールがテイルリスクを排除できるための十分条件を調べた。この結果、以下の結論を得ている。

- VaR にテイルリスクが存在しないための条件は、損失額が楕円分布に従うこと、または投資対象となるポートフォリオが 1 次確率優越で比較可能であることである。
- 期待ショートフォールにテイルリスクが存在しないための条件は、投資対象となるポートフォリオが 2 次確率優越で比較可能であることである。

表 1.1: VaR でのテイルリスク事例

ポートフォリオ A	
損益額	確率
80	98.0%
-20	0.9%
-30	0.2%
-100	0.9%

これらの条件を比較すると、期待ショートフォールに関する十分条件は、VaR に関する十分条件より緩く、期待ショートフォールは VaR よりも幅広い条件下でテイルリスクを排除するリスク指標であることがわかる。ただし、投資対象となるポートフォリオが 2 次確率優越で比較不可能な場合は、期待ショートフォールにもテイルリスクが存在する。

以下では、VaR および期待ショートフォールがテイルリスクを排除できない簡単な例を示す。

(2) VaR でテイルリスクが発生する例

VaR がテイルリスクを排除できない典型的な例として、損失額分布が表 1.1 で表されるポートフォリオ A を考える。

ポートフォリオ A は、ほとんどのケース (98%) で収益 (80) が挙がるが、非常に低い確率で大幅な損失 (100) が発生する損失額分布を持っている。ポートフォリオ A の 99% 信頼水準の VaR を算出する際、大幅な損失額 (100) は無視され、2 番目に大きい損失に相当する値 30 が VaR となる。ここで、最大の損失 100 が 1,000 に増加したとしても、VaR は不変である。したがって、VaR はごく小さい確率で発生する損失を十分に織り込めないことがわかる。

こうした VaR の問題点は、VaR の定義上明らかではあるが、投資家による合理的な意思決定がテイルリスクにより歪む可能性を持つという点で重要な意味を持っている。この点は、1.3.2 節で詳しく述べる。

(3) 期待ショートフォールでテイルリスクが発生する例

期待ショートフォールは、定義上 VaR 以上の損失額を期待値として織り込んでいるため、VaR に比べてテイルリスクが発生する可能性は小さい。例えば、Acerbi and Tasche [2002] の定義に従って表 1.1 のポートフォリオ A の 99% 信頼水準の期待ショートフォールを算出すると 100 となる。仮に状態 1 の損失額が 1,000 に増加した場合は、期待ショートフォールは 1,000 に増加し、損失額分布の裾の変化を織り込んでいることがわかる。

しかし、期待ショートフォールでも完全にテイルリスクを排除できるわけではない。投資対象となるポートフォリオが 2 次確率優越で比較不可能な場合は、期待ショートフォールにもテイルリスクが存在する。

これを簡単な例でみてみよう。表 1.2 は、ある 2 つのポートフォリオ A と B の損益額分布を示したものである。それぞれの 2 つのポートフォリオの損益の発生は独立であるとする。ポートフォリオ A, B とともにほとんどの場合は損失が発生しないが、小さな確率で損失が発生する。特に、ポートフォリオ B はごくわずかな確率で大幅な損失が発生するポートフォリオとなって

表 1.2: 期待ショートフォールでもテイルリスクを排除できない例

ポートフォリオ A		ポートフォリオ B	
損益額	確率	損益額	確率
2.95	50.000%	0.95	50.000%
-2.05	49.000%	-0.05	49.000%
-47.05	1.000%	-7.05	0.457%
		-77.05	0.543%

表 1.3: ポートフォリオ A・B の VaR と期待ショートフォール

	ポートフォリオ A	ポートフォリオ B
VaR	47.05	7.05
期待ショートフォール	47.05	45.05

おり、こうした「破滅的」な損失を回避するのが望ましいと考えるならば、ポートフォリオ B の方がリスクが大きいといえる。

ポートフォリオ A, B の 99% 信頼水準の VaR と期待ショートフォールを計算すると、表 1.3 のように VaR, 期待ショートフォールの双方でポートフォリオ A のリスクの方が高いと判断されてしまう。これは、VaR と期待ショートフォールが損失額分布の裾の情報を必ずしも十分に捉えていないことを示している。

(4) 代替策： n 次下方部分モーメント

期待ショートフォールのテイルリスクを問題とするのであれば、さらに裾の情報を十分に捉えるリスク指標が必要となる。こうしたリスク指標の 1 つとして n 次下方部分モーメント ($n \geq 2$) を用いることができる。これは定義 1.4 で与えられる。

定義 1.4 (n 次下方部分モーメント). n 次下方部分モーメントは一定の閾値 K を超える損失額の n 次モーメントであり、以下のように定式化できる⁶。

$$LPM_{n,K}(Z) = E[\{\max(Z - K, 0)\}^n] = \int_K^\infty (u - K)^n dF(u) \quad (1.6)$$

n 次下方部分モーメント ($n \geq 2$) は、損失額の n 乗をとることで、低い確率で生じる大きな損失に対して期待ショートフォールよりも大きなウェイトを与えるリスク指標となっている。

表 1.4 は、表 1.2 のポートフォリオ A と B について、期待ショートフォールと 2 次下方部分モーメント (閾値 $K = 1$) を計算したものである。期待ショートフォールでは、ポートフォリオ A のリスクが高いと判断されているのに対し、2 次下方部分モーメントでは破滅的な損失の発生する可能性が比較的高いポートフォリオ B のリスクが大きいと判断されることがわかる。

一般的に、下方部分モーメントでモーメントの次数を高くすることにより、低い確率で発生する大幅な損失のウェイトが大きくなり、テイルリスクの発生がより抑えられる。

⁶ $F(\cdot)$ は損失額分布の分布関数。

表 1.4: ポートフォリオ A・B の期待ショートフォールと 2 次下方部分モーメント

	ポートフォリオ A	ポートフォリオ B
2 次下方部分モーメント	21.75	31.56
期待ショートフォール	47.05	45.05

1.3.2 期待効用最大化原理との整合性

(1) 期待効用最大化原理との整合性とは何か

1.1 節でも述べたとおり，ファイナンスおよび経済学の理論では，不確実性下の意思決定を分析する際，合理的な意思決定方法として「期待効用最大化原理」を前提とするのが一般的である．期待効用最大化原理では，投資家はリスク回避的な効用関数を持ち，この効用の期待値を最大化するように行動すると仮定する．

本節では，リスク指標が期待効用最大化原理と整合的な意思決定を導き出すかどうかを考察した山井・吉羽 [2001c] の結果を簡単に紹介し，具体的にリスク指標が期待効用最大化原理と整合的でない場合にどういった問題が生じるかを例によって示すこととする．

山井・吉羽 [2001c] では，テイルリスクについて考察したときと同様に，確率優越の概念を用いて，リスク指標と期待効用最大化原理との整合性を考察している．確率優越の概念を用いると，リスク回避性など効用関数の一般的な性質を利用し，効用関数を特定せずに異なる投資機会に対し選好の順序付けを行える．このことから，Fishburn [1977] などの先行研究でも，リスク指標と期待効用最大化原理との整合性を分析する際に，確率優越の概念が用いられてきている．山井・吉羽 [2001c] では，VaR と期待ショートフォールが期待効用最大化原理と整合的となるための十分条件として，以下の条件を示している．

- VaR が期待効用最大化原理と整合的となる条件は，損失額が楕円分布に従うこと，または投資対象となるポートフォリオが 1 次確率優越で比較可能であることである．
- 期待ショートフォールが期待効用最大化原理と整合的となる条件は，投資対象となるポートフォリオが 2 次確率優越で比較可能であることである．

したがって，期待ショートフォールは VaR よりも幅広い条件で期待効用最大化原理と整合的であることがわかる．

(2) VaR の期待効用最大化原理との不整合性

山井・吉羽 [2001a] は，VaR が一般的に期待効用最大化原理と整合的でなく，テイルリスクを排除できないために，VaR に依存したリスク管理は合理的な意思決定を歪めてしまうことを示した．ここでは，VaR が期待効用最大化原理と整合的でないために発生する問題の具体例として山井・吉羽 [2001a] で取り上げた例を示す．

ある投資家が与信ポートフォリオへの投資配分を選択するとする．投資家は，集中化が進んだポートフォリオと分散化が進んだポートフォリオとの間で，リスク指標を一定に抑えつつ期待効用を最大化するようポートフォリオ選択を行う．具体的には，投資総額 100 を表 1.5 で示される 4 種類の証券に投資するものとする．投資家の効用関数は対数型 $u(W) = \ln W$ と仮定

表 1.5: VaR がテイルリスクを持つ例：与信先の集中

	組入れ債券数	クーポン	デフォルト率	回収率
集中化ポート A	1	4.75%	4.00%	10%
集中化ポート B	1	0.75%	0.50%	10%
分散化ポート	100	5.50%	5.00%	10%
安全資産	1	0.25%	0.00%	

し、信頼水準 95%の VaR や期待ショートフォールを一定という制約を置いて、期待効用を最大化するように 4 種類の証券の配分（ポートフォリオ）を決定する。なお、各証券のデフォルトは互いに独立とする。

表 1.6 は、(1) リスク指標による制約がない場合、(2) VaR による制約がある場合、(3) 期待ショートフォールによる制約がある場合、の 3 つについて期待効用を最大化する最適ポートフォリオを求めた結果である。リスク指標による制約がない場合とある場合とでポートフォリオ構成がどう変化するかを比較する。VaR による制約をおいた場合をみると、制約がない場合に比べて集中化ポート A への投資が増加（7.4% → 20.1%）していることがわかる。一方、期待ショートフォールによる制約をおいた場合では、集中化ポート A と B への投資が減少（7.4% → 4.9%）している。

損益額の累積確率分布の裾を示した図 1.1 は、VaR による制約をおくと、VaR を超える大規模な損失が発生する可能性が増加するのに対して、期待ショートフォールによる制約をおくと、大規模な損失発生が抑えられることがわかる。

この例は、期待効用を最大化する合理的な投資家に VaR による制約を課すと、投資家に歪んだインセンティブが与えられ、大規模な損失が発生する可能性が増大するようなポートフォリオが組成されることを示している。

このような VaR による歪んだインセンティブは、VaR の期待効用最大化原理との不整合とテイルリスクの問題から発生している。VaR の期待効用最大化原理との不整合は、VaR で捉えられたポートフォリオの「リスク」と、期待効用最大化原理で捉えられた「リスク」との間の不整合につながる。したがって、VaR で表現される「リスク」と期待効用最大化原理で捉えられる「リスク」とは、矛盾してしまう可能性がある。さらに、VaR は一般的に裾に関する情報を十分に織り込んでいないために、分布の裾に関するミスリーディングな情報を投資家に与えてしまう。このため、VaR が減少しても、裾において大幅な損失が発生する可能性が増加する場合が存在する。こうした VaR の 2 つの問題点が重なることにより、VaR は合理的な意思決定を歪めてしまうのである。

このように VaR の導入によって大幅な損失が生じる可能性が増大するのは、小さな確率で大幅な損失が生じるような資産が投資機会として存在する場合に起こりやすい（山井・吉羽 [2001a] を参照）。こうした特徴を持つポートフォリオとしては、大口与信への集中が進んだ与信ポートフォリオのほか、ファー・アウト・オブ・ザ・マネーのオプション⁷を含むポートフォリオや、デ

⁷現時点でオプションの権利を行使しても買い手に利益が発生しないオプションをアウト・オブ・ザ・マネー・オプションという。特に、こうしたアウト・オブ・ザ・マネーのオプションの中で現在の原資産価格と権利行使価格が非常に離れているオプションは、将来時点で買い手に利益が発生する可能性は低く、ファー・アウト・オブ・ザ・マネー・オプションと呼ばれる。ファー・アウト・オブ・ザ・マネーのオプションでは、買い手に利益が発生する確率が低いのでオプション価格（プレミアム）も低い。トレーダーは、こうしたファー・アウト・オブ・ザ・マネー・オプションを大量に売ることにより、大抵の場合は受入プレミアム分の利益が生じるが、小さい確率で大

表 1.6: 与信先の集中：最適ポートフォリオ

		制約なし	VaR による制約	期待ショートフォール による制約
ポート構成	集中化ポート A	7.4%	20.1%	2.9%
	集中化ポート B	0.0%	0.0%	2.0%
	分散化ポート	92.6%	79.9%	95.1%
	安全資産	0.0%	0.0%	0.0%
リスク指標	VaR	3.35	3.00	2.75
	期待ショートフォール	5.26	14.35	3.50

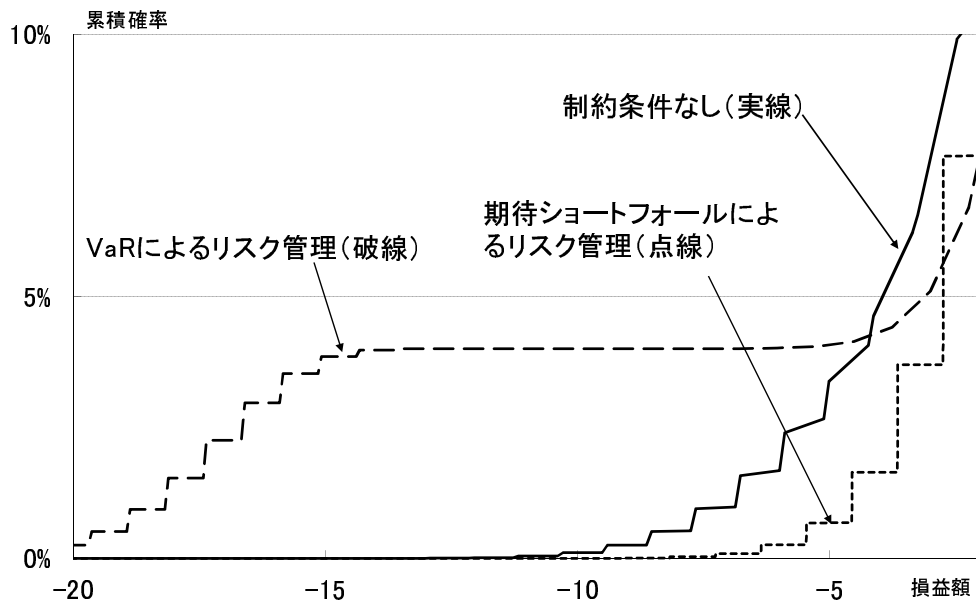


図 1.1: 与信先の集中：損益額分布

フォルト事象の相関の高い与信ポートフォリオが挙げられる。また，Basak and Shapiro [2001] は，投資家が株式と債券を連続時点で動的に取引を行う場合にも，こうした問題が一般的に発生することを示している⁸。

1.3.3 劣加法性

(1) 劣加法性と凸性

定義 1.3 の 4 で定義された劣加法性は，全体のポジションのリスク量が個別ポジションのリスク量の和を下回ることを表している。直観的には，「リスク指標はポートフォリオ分散効果によるリスク削減効果を織り込むべきである」という要請を定式化したものと考えられる。

一方，リスク指標の凸性は以下のように定義される。

定義 1.5 (凸性)．リスク指標 $\rho(Z)$ が凸性を満たすとは，どのような損失額変数 Z_1, Z_2 に対しても，任意の $0 \leq \lambda \leq 1$ の定数 λ に関して， $\rho(\lambda Z_1 + (1 - \lambda)Z_2) \leq \lambda\rho(Z_1) + (1 - \lambda)\rho(Z_2)$ が成立することである。

リスク指標の凸性で重要な点は，凸性が満たされる場合，そのリスク指標を用いたポートフォリオの最適化が比較的容易になることである。具体的には，目的関数および制約式が凸性を持つ凸計画問題では，局所最適解が大域的最適解となるため，凸性を満たすリスク指標によるポートフォリオ最適化は局所最適解を求めることに帰着する。

ここで，劣加法性と凸性には密接な関係があることが知られている⁹。具体的には，定義 1.3 の 2 で表される正の 1 次同次性が成立していれば，劣加法性と凸性は同値となることが知られている（証明は例えば 山井・吉羽 [2001c] を参照）。したがって，劣加法性と正の 1 次同次性を満たすリスク指標は凸性も満たし，ポートフォリオの最適化が容易となるという利点があることがわかる。VaR や期待ショートフォールは正の 1 次同次性を満たしているため，この 2 つのリスク指標に関しては，劣加法性と凸性を同じものとして扱ってよいことになる。

(2) VaR が劣加法性を満たす十分条件（楕円型分布族）

VaR が劣加法性を満たす条件を説明する。まず，損失額が正規分布に従う場合は VaR は劣加法性を満たす。これは，正規分布の下で VaR が損失額の標準偏差の定数倍であることと，標準偏差が一般的に劣加法性を満たすことから自明である。Embrechts, McNeil and Straumann [2001] は，これを一般化して，損失額が楕円型分布族の分布（以下，楕円分布）に従っている場合，VaR が劣加法性を満たすことを示した¹⁰。楕円分布は，正規分布のほか，t 分布，パレー

きな損失を被るポジションを組成できる。

⁸Basak and Shapiro [2001] のモデルでは，資産価格が対数正規分布（幾何ブラウン運動）に従うことが仮定されているが，投資家が動的に取引を行うことで非線形のポートフォリオを構成し，正規分布に従わない損失額分布を生成できることから，テイルリスクが発生する。簡単な解説は山井・吉羽 [2001a] を参照。

⁹劣加法性と期待効用最大化原理との整合性は，いずれも関数の凸性に関わっているという点で密接な関係があるように思われる。しかし，劣加法性と期待効用最大化原理との整合性は必ずしも同値の性質ではない。これらの同値性の反例としては，損失額がパレート分布に従い裾指数が 1 以上である場合が挙げられる（Embrechts, McNeil and Straumann [2001] の Example 7 を参照）。

¹⁰楕円型分布族の（1 変量）分布とは，確率密度関数 $f(x)$ が，ある関数 $\phi(\cdot)$ によって

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

と表される分布である。

表 1.7: VaR が劣加法性を満たさない例

状態	確率	ポートフォリオ		
		A	B	A+B
1	98.0%	80	80	160
2	0.9%	-20	-100	-120
3	0.2%	-30	-30	-60
4	0.9%	-100	-20	-120

ト分布等を含む。したがって、損失額が楕円分布に従っている場合には VaR は劣加法性を満たす。

(3) VaR が劣加法性を満たさない例

しかし、損失額（損益額）が楕円分布に従わない場合は、VaR の劣加法性は一般的に保証されない。ここでは、VaR が劣加法性を満たさない比較的簡単な例を示す。表 1.1 で示したポートフォリオ A に対応して表 1.7 のようにポートフォリオ B を加えて考える。

ポートフォリオ A の 99%信頼水準の VaR は 30 である。一方、ポートフォリオ B では、損失の大きい方から考えると確率 0.9% で 100（状態 2）、次に確率 0.2% で 30（状態 3）であるため、99%信頼水準の VaR は 30 である。ここで、ポートフォリオ A と B を統合したポートフォリオ A+B を考える。統合ポートフォリオ A+B では、確率 1.8% で 120（状態 2 及び 4）の損失であるため、99%信頼水準の VaR は 120 である。結局、

$$120 = VaR(A + B) > VaR(A) + VaR(B) = 30 + 30 = 60 \quad (1.7)$$

となり、劣加法性は満たされない¹¹。

この例は、人為的にみえるかもしれないが、大口与信やファー・アウト・オブ・ザ・マネーのオプションを含むポートフォリオなど、実務上よくみられるようなポートフォリオでも、同様に VaR が劣加法性を満たさない例を構成することができる（山井・吉羽 [2001a] ないし Artzner *et al.* [1997, 1999] を参照）。

また、このように VaR が一般的には劣加法性を満たさないことから、凸性も一般的に満たさないことがわかる。したがって、このような場合には、VaR に基づくポートフォリオの最適化も容易ではない。Mausser and Rosen [1998] では、シミュレーションによりリスク量を計測する場合の VaR の最適化を試みている。そこでは、一般的に VaR がポジション量に対して凸関数ではないため、VaR に基づくポートフォリオ最適化が困難であることが示されている。

(4) 期待ショートフォールの劣加法性

期待ショートフォールは劣加法性を満たすことが知られている（Acerbi, Nordio and Sirtori [2001]; Acerbi and Tasche [2002] を参照）¹²。

¹¹この例からわかるように、2つの分布の裾（A の状態 4, B の状態 2）が重く、分布の依存関係が複雑（一方の裾が状態 4, もう一方の裾が状態 2）な場合には、劣加法性を満たさないという状況が生じる。

¹²期待ショートフォールの定義、あるいは、そのベースとなる VaR の定義次第では、損失額分布が不連続な分布の場合に期待ショートフォールの劣加法性が満たされないことがありうる。

期待ショートフォールが劣加法性を満たすことの証明は Acerbi, Nordio and Sirtori [2001] が簡明である．ここでは，連続分布の場合を示しておく．

$$\bar{x}_\alpha \equiv \frac{1}{\alpha} E[X 1_{\{X \geq VaR_\alpha(X)\}}] \quad (1.8)$$

とすると， \bar{x}_α は損失額 X の期待ショートフォールを表す．2つのポートフォリオの損失額をそれぞれ X, Y とし，新たに確率変数 $Z = X + Y$ を考える．期待ショートフォールの劣加法性を示すには， $\bar{y}_\alpha, \bar{z}_\alpha$ を \bar{x}_α と同様に定義し，

$$\bar{z}_\alpha \leq \bar{x}_\alpha + \bar{y}_\alpha \quad (1.9)$$

を証明すればよい．ここで，次の関係に注目する．

$$\begin{cases} 1_{\{Z \geq VaR_\alpha(Z)\}} - 1_{\{X \geq VaR_\alpha(X)\}} \leq 0 & \text{if } X \geq VaR_\alpha(X) \\ 1_{\{Z \geq VaR_\alpha(Z)\}} - 1_{\{X \geq VaR_\alpha(X)\}} \geq 0 & \text{if } X < VaR_\alpha(X) \end{cases} \quad (1.10)$$

すなわち， $(1_{\{Z \geq VaR_\alpha(Z)\}} - 1_{\{X \geq VaR_\alpha(X)\}})(X - VaR_\alpha(X)) \leq 0$ である．よって，

$$\begin{aligned} \alpha(\bar{z}_\alpha - \bar{x}_\alpha - \bar{y}_\alpha) &= E[Z 1_{\{Z \geq VaR_\alpha(Z)\}} - X 1_{\{X \geq VaR_\alpha(X)\}} - Y 1_{\{Y \geq VaR_\alpha(Y)\}}] \\ &= E[X(1_{\{Z \geq VaR_\alpha(Z)\}} - 1_{\{X \geq VaR_\alpha(X)\}}) + Y(1_{\{Z \geq VaR_\alpha(Z)\}} - 1_{\{Y \geq VaR_\alpha(Y)\}})] \\ &\leq VaR_\alpha(X) E[(1_{\{Z \geq VaR_\alpha(Z)\}} - 1_{\{X \geq VaR_\alpha(X)\}})] \\ &\quad + VaR_\alpha(Y) E[(1_{\{Z \geq VaR_\alpha(Z)\}} - 1_{\{Y \geq VaR_\alpha(Y)\}})] \\ &= VaR_\alpha(X)(\alpha - \alpha) + VaR_\alpha(Y)(\alpha - \alpha) = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

が成立し，期待ショートフォールの劣加法性は示される．

(5) 期待ショートフォールの凸性を利用したポートフォリオ最適化

期待ショートフォールは劣加法性を満たすうえ，定義より明らかに正の1次同次性を満たすことから，期待ショートフォールは凸性をも満たす．したがって，期待ショートフォールに基づくポートフォリオ最適化は比較的容易である．

Rockafellar and Uryasev [2000] は，期待ショートフォールの凸性を利用し，シミュレーションにより推定される期待ショートフォールを最小化するポートフォリオを探索する問題を考えた．その結果，その最適ポートフォリオを求める問題は線形計画問題に帰着することを示した．線形計画問題に対しては，伝統的なシンプレックス法や内点法など効率的なアルゴリズムが知られており，そうしたアルゴリズムを実装したソフトも多数あるため，比較的容易に最適ポートフォリオを求められる．このアルゴリズムのポイントは，期待ショートフォールが， n 資産 X_1, \dots, X_n への配分ベクトル（ポートフォリオ構成）を ω として，

$$F(\omega, \beta) = (1 - \alpha)\beta + \int \cdots \int \left(\sum_{i=1}^n X_i \omega_i - \beta \right)^+ p(X_1, X_2, \dots, X_n) dX_1 dX_2 \cdots dX_n \quad (1.12)$$

を最小化する問題に帰着するという点である¹³（簡単な解説は山井・吉羽 [2001b] を参照）．最小化されたときの β が VaR を， ω が最適ポートフォリオ構成を示していることになる．ここ

¹³ $(\cdot)^+ \equiv \max(\cdot, 0)$ である．

で、 α は信頼水準であり、 $p(X_1, X_2, \dots, X_n)$ は各資産価格が X_1, \dots, X_n という値をとる確率を示す確率密度関数である。(1.12) 式の積分は、モンテカルロ法でその確率密度に従った乱数を発生させたうえで、平均をとることに他ならない。したがって、(1.12) 式は発生させた乱数の線形和となり、線形計画問題に帰着する¹⁴。ただし、期待ショートフォールを厳密に求めようとするると多くの乱数を発生させる必要があるため、その分だけ線形計画問題の変数の数や次元が増えていくことになり、問題が解きにくくなることには注意が必要である。

1.3.4 VaR と期待ショートフォールの推計値の安定性

これまでの VaR と期待ショートフォールとの比較分析では、期待ショートフォールの方が VaR よりも優れた性質を持つとの結果が得られた。しかし、概念的に優れたリスク指標であっても、その推計が困難であれば実務に応用することは容易ではない。そこで、山井・吉羽 [2001b] は、期待ショートフォールと VaR とでいずれの推計誤差が大きくなるかをシミュレーションにより評価した。その結果、損失額分布の裾が重いと VaR の推計誤差よりも期待ショートフォールの推計誤差が大きくなってしまふことが示された。

本小節では、VaR および期待ショートフォールの推計誤差の統計的性質について簡単に述べた後、山井・吉羽 [2001b] でのシミュレーションによる誤差の評価結果を示す。

(1) VaR と期待ショートフォールの推計誤差の統計的性質

まず、VaR の推計誤差は漸近的に正規分布に従い、その漸近的標準偏差には簡明な解析解があることが知られている。 N 回のシミュレーションで得た $100(1 - \alpha)\%$ 信頼水準の VaR の推計値は漸近的に正規分布に従い、その標準偏差は次式で表される (Stuart and Ord [1994], pp.356-358 を参照)。

$$\sigma_{VaR_\alpha(X)} = \frac{1}{f(VaR_\alpha(X))} \sqrt{\frac{\alpha(1 - \alpha)}{N}}, \quad (1.13)$$

ただし、 $f(x)$ は損失額分布の確率密度関数である。

一方、期待ショートフォールの場合、推計値が確率 1 で真値に収束することは知られているが (Acerbi and Tasche [2002], Proposition 3.1), その誤差の漸近的性質は知られていない。そこで、山井・吉羽 [2001b] は、シミュレーションにより VaR と期待ショートフォールの推計誤差を比較評価した。

(2) シミュレーションによる推計誤差の評価

山井・吉羽 [2001b] では、損失額分布として裾が非常に重いものを考え、裾の重さの変化によって VaR と期待ショートフォールの推計値の誤差がどの程度異なってくるかをシミュレーションによって考察した。ここでは、裾の重い損失額分布として対称安定分布を仮定した。対称安定分布とは、確率変数 Z の特性関数が、

$$E[e^{i\theta Z}] = \exp \left\{ - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^\alpha |\theta|^\alpha \right\} \quad (1.14)$$

¹⁴このアルゴリズムに基づき具体的な計算を行っている文献としては、Andersson *et al.* [2001] を参照。

表 1.8: 対称安定分布での VaR (上段) の推計値と期待ショートフォール (下段) の推計値の相対標準偏差

$\tilde{\alpha}$	推計値の 平均値 (a)	推計値の 標準偏差 (b)	相対標準偏差 (c)=(b)/(a)	推計値の信頼区間 (95%)
2.0	2.30	0.12	0.05	[2.09, 2.54]
	2.62	0.14	0.05	[2.36, 2.90]
1.9	2.57	0.20	0.08	[2.25, 3.03]
	3.94	3.68	0.93	[2.70, 7.02]
1.5	5.41	1.08	0.20	[3.81, 8.00]
	15.16	89.50	5.91	[6.31, 37.93]
1.1	15.53	4.63	0.30	[9.09, 26.85]
	181.77	8,653.26	47.61	[19.63, 351.63]

で与えられるものであり, $\tilde{\alpha} = 2$ で正規分布, $\tilde{\alpha} = 1$ でコーシー分布となる。つまり, $\tilde{\alpha}$ を 2 から 1 に近づけることにより, 分布の裾を重くすることができる。誤差の評価は, VaR と期待ショートフォールの水準の差を調整するために, 相対標準偏差 (= 標準偏差 / 期待値) で行った。

α の変化に応じて VaR や期待ショートフォールの推計値の相対標準偏差 (及び推計値の 95% 信頼区間) がどのように変化するかをシミュレーションによって求めた結果が表 1.8 である¹⁵ (より詳細な結果は山井・吉羽 [2001b] を参照)。表 1.8 では上段が VaR の結果, 下段が期待ショートフォールの結果である。

表 1.8 より, 極めて裾が重い場合 ($\tilde{\alpha} = 1.1$) には, 相対標準偏差は VaR に比して期待ショートフォールでは 160 倍 ($47.61/0.30 \simeq 160$) となる。このように損失額分布の裾が非常に重い場合は, 期待ショートフォールを正確に求めることは困難になる。したがって, 期待ショートフォールの推計においてある小さな誤差しか許容できない場合には, VaR を推計する場合よりもサンプルサイズを大きくし, 推計値の誤差を小さくするようにしなければならない。これは実務的には大きなコストと考えられる。

これを実務への応用を念頭に置いて考えると, 実務で扱われるポートフォリオで損失額分布の裾がどの程度の重さになりうるか, また, それが期待ショートフォールの推定誤差にどの程度影響を与えるかが問題となる。実務で扱われる全てのポートフォリオの損失額分布を先見的に知ることはできないため, これを一般的に評価することはできない。しかし, 金融実務で損失額分布の裾が重くなるようなポートフォリオを想定し, そのポートフォリオの誤差を評価して実務上の一定のインプリケーションを得ることは可能である。山井・吉羽 [2001b] では, こうした裾の重い損失額分布を持つ典型的なポートフォリオとして, ファー・アウト・オブ・ザ・マネー・オプションを含むポートフォリオと与信集中の進んだ与信ポートフォリオを取り上げ, シミュレーションにより VaR と期待ショートフォールの誤差の評価を行った。その結果, 期待ショートフォールの相対標準偏差は VaR の相対標準偏差の 1.5 倍程度であった。この例から, 実務で取り扱う典型的なポートフォリオでは, 期待ショートフォールの推定誤差は VaR のそれの数倍程度になりうると思われる。

¹⁵安定分布に従う乱数の生成は Chambers, Mallows and Stuck [1976] が示した Fortran のコードを C のコードに直して行った。

1.4 多変量極値理論を用いた VaR と期待ショートフォールのテイルリスク

本節では、多変量極値理論 (multivariate extreme value theory), 特に超過値の確率的性質について述べた POT 法 (peaks-over-threshold method) に基づいて VaR と期待ショートフォールのテイルリスクについて理論的な分析と為替相場変動を用いた実証分析を行う。

なお、本節では 2 変量極値理論を利用するため、多変量極値理論の説明は 2 変量で行う。ただし、3 変量以上の場合も基本的な考え方は 2 変量の場合と同じである。

1.4.1 単変量極値理論を用いた理論分析

多変量の分析を行うが、まず各変量の単変量の分析から始める。ここでは、単変量での極値理論とそれに基づく VaR と期待ショートフォールのテイルリスクをまとめる。

(1) 単変量極値理論

まず、単変量の超過値の確率的性質を説明する。 Z を確率変数、 F を Z の分布関数とする。閾値を θ ($\theta > 0$) としたときの Z の超過値を $m_\theta(Z) = \max(Z, \theta)$ と定義する。 Z が θ を超える確率を p とすると、 $p = 1 - F(\theta)$ が成り立つ。 θ を超えるという条件下で $(Z - \theta)$ の分布関数 (ここでは「超過分布関数」と呼ぶ) F_θ は以下で表される。

$$F_\theta(x) = \Pr\{Z - \theta \leq x | Z > \theta\} = \frac{F(x) - F(\theta)}{1 - F(\theta)}, \quad \theta \leq x \quad (1.15)$$

一般に超過分布関数は分布関数 F が特定されない限り定まらないが、以下の Pickands-Balkema-de Haan の定理により、 θ が大きくなればこの超過分布関数は一般化パレート分布 ($G_{\xi, \sigma}$) に収束することが知られている^{16,17}。

$$G_{\xi, \sigma}(x) = 1 - (1 + \xi \cdot \frac{x}{\sigma})^{-1/\xi}, \quad x \geq 0 \quad (1.16)$$

したがって、 θ が十分大きいときには、 $Z > \theta$ のときの Z 、つまり超過値 $m_\theta(Z)$ の分布 $F_m(x)$ は以下で近似することができる。本節では、分布 $F_m(x)$ を「超過値分布」と呼ぶことにする。

$$F_m(x) \approx (1 - F(\theta))G_{\xi, \sigma}(x - \theta) + F(\theta) = 1 - p(1 + \xi \cdot \frac{x - \theta}{\sigma})^{-1/\xi}, \quad x \geq \theta \quad (1.17)$$

この分布で、裾指数 ξ は分布の裾の厚さを表し、 ξ が大きいほど分布の裾は厚い (図 1.2 を参照)。また、尺度パラメータ σ は分布の散らばり度合いを表し、 σ が大きいほど分布の散らばり度合いが大きい (図 1.3 を参照)。

¹⁶この定理の詳しい説明は Coles [2001]; 森本 [2000] を参照。

¹⁷ここでは、 $\xi \neq 0$ として議論を進める。

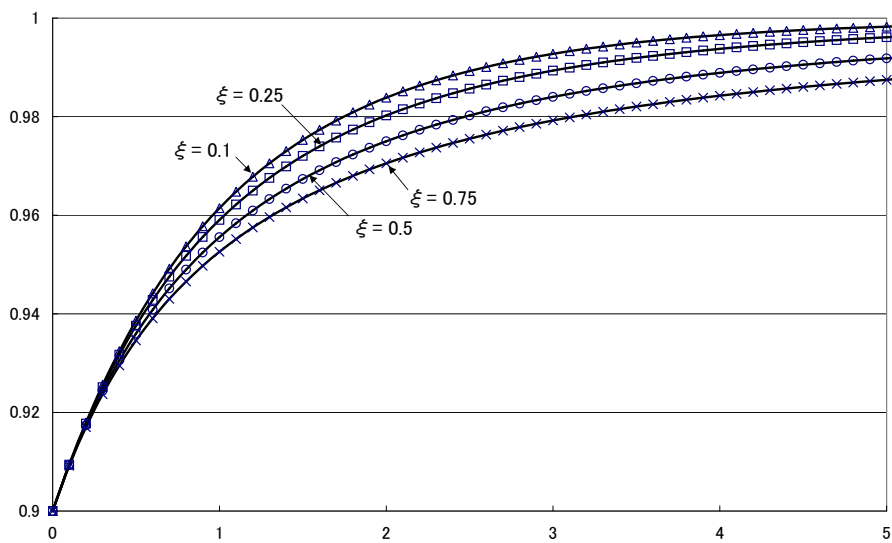


図 1.2: 裾指数の変化に対する超過値分布の分布関数の変化

備考: 超過値の割合を $p = 0.1$, 閾値を $\theta = 0$, 尺度パラメータを $\sigma = 1$ に設定.

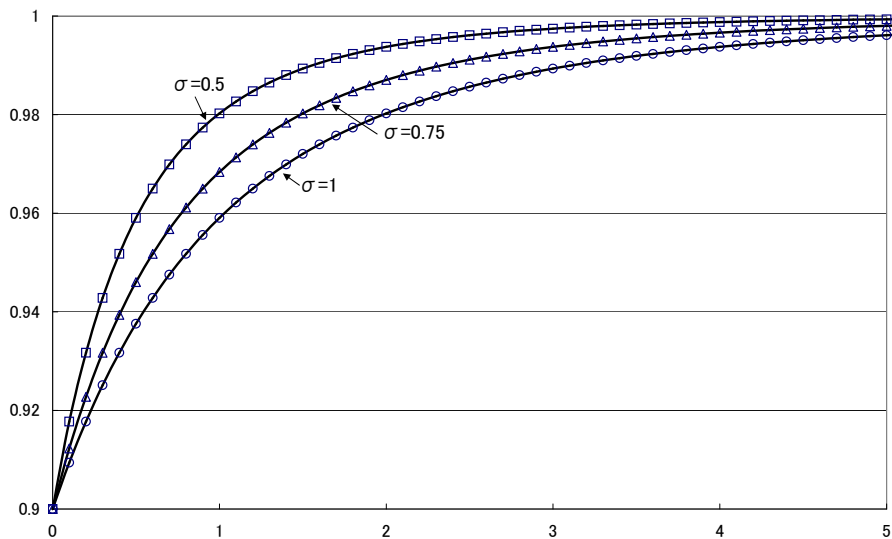


図 1.3: 尺度パラメータの変化に対する超過値分布の分布関数の変化

備考: 超過値の割合を $p = 0.1$, 閾値を $\theta = 0$, 裾指数を $\xi = 0.25$ に設定.

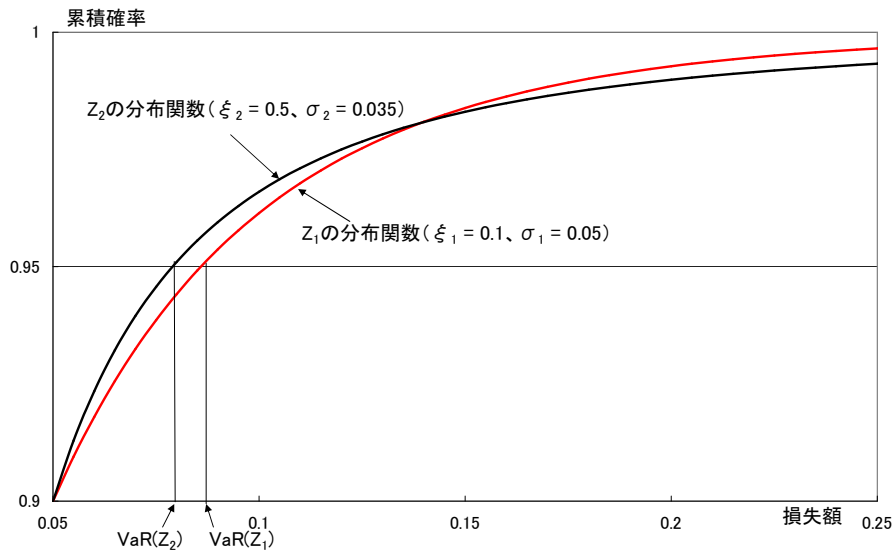


図 1.4: 超過値の分布の数値例

備考: 超過値の割合を $p_1 = p_2 = 0.1$, 閾値を $\theta_1 = \theta_2 = 0.05$ に設定 .

(2) 単変量でのテイルリスクの分析

ここでは、単変量の超過値分布を使って VaR のテイルリスクの有無を調べる．具体的には、「一定の閾値を超える単変量の超過値は、漸近的に一般化パレート分布を変形した超過値分布に従う」との極値理論に基づいて、市場ストレス時の損失額分布が超過値分布に従うとの前提に立って議論を進める．

ここでは、2つの資産の VaR を (1.17) 式の超過値分布を用いて算出した場合、VaR にテイルリスクが発生するかどうかを考察する．この分析では、単変量の確率変数である VaR を比較するため、単変量極値理論の枠組みを用いる．

まず、(1.17) 式の超過値分布から算出される VaR にテイルリスクが発生する数値例を与えよう．2つの証券があり、それぞれの損失額が Z_1, Z_2 で与えられ、それぞれ以下で表される超過値分布に従っているとするとする．

$$F_{m(Z_1)}(x) = 1 - p_1 \left(1 + \xi_1 \cdot \frac{x - \theta_1}{\sigma_1} \right)^{-1/\xi_1} \quad (1.18)$$

$$F_{m(Z_2)}(x) = 1 - p_2 \left(1 + \xi_2 \cdot \frac{x - \theta_2}{\sigma_2} \right)^{-1/\xi_2} \quad (1.19)$$

ここで、超過値の割合 $p_1 = p_2 = 0.1$, 閾値 $\theta_1 = \theta_2 = 0.05$, 裾指数 $\xi_1 = 0.1, \xi_2 = 0.5$, 尺度パラメータ $\sigma_1 = 0.05, \sigma_2 = 0.035$ とする．図 1.4 は、このパラメータ値のもとで超過値の分布関数をプロットしたものである．

図 1.4 からは、VaR にテイルリスクが発生していることがわかる．まず、 Z_2 の方が裾指数が大きいので Z_1 よりも裾の厚い分布となっている．つまり、 Z_2 の方が大幅な損失が発生する可能性が高い．しかし、信頼水準 95% の VaR は Z_1 が Z_2 より大きく、裾の厚い分布を持つ Z_2 の方のリスクが小さいと判断される．ここでも、VaR の信頼水準の外側で分布関数が交差する形で VaR のテイルリスクが発生している．

一般に，超過値分布の前提のもとでは，テイルリスクが発生する条件を不等式として簡便に表すことができる．まず，McNeil [2000] に倣い，超過値分布 (1.17) 式から VaR と期待ショートフォールを算出する．損失額 Z の信頼水準 $(1 - \alpha)$ の VaR を $VaR_\alpha(Z)$ とすると，VaR は損失額分布の $(1 - \alpha)$ 分位点であるから，これらを (1.17) 式に代入して以下を得る．

$$1 - \alpha \approx 1 - p(1 + \xi \cdot \frac{VaR_\alpha(Z) - \theta}{\sigma})^{-1/\xi} \quad (1.20)$$

これより，VaR は以下で表される．

$$VaR_\alpha(Z) \approx \theta + \frac{\sigma}{\xi} \left(\left(\frac{p}{\alpha} \right)^\xi - 1 \right) \quad (1.21)$$

さらに，信頼水準 $(1 - \alpha)$ の期待ショートフォールを $ES_\alpha(Z)$ とすると，

$$\begin{aligned} ES_\alpha(Z) &= E[Z | Z \geq VaR_\alpha(Z)] \\ &= VaR_\alpha(Z) + E[(Z - \theta) - (VaR_\alpha(Z) - \theta) | Z - \theta \geq VaR_\alpha(Z) - \theta] \\ &= VaR_\alpha(Z) + \frac{\sigma + \xi \cdot (VaR_\alpha(Z) - \theta)}{1 - \xi} \\ &= \frac{\sigma - \xi\theta}{1 - \xi} + \frac{VaR_\alpha(Z)}{1 - \xi} \approx \theta + \frac{\sigma}{1 - \xi} \left\{ 1 + \frac{1}{\xi} \left(\left(\frac{p}{\alpha} \right)^\xi - 1 \right) \right\} \end{aligned} \quad (1.22)$$

となる¹⁸．

ここで，(1.18)，(1.19) 式で表される Z_1, Z_2 にテイルリスクが発生するための条件を考える．まず， Z_2 の方が Z_1 よりも裾が厚い，つまり $\xi_2 > \xi_1$ と仮定する．信頼水準 $(1 - \alpha)$ の VaR にテイルリスクが生じる場合は，裾の厚い Z_2 の VaR が Z_1 の VaR を下回るため，以下の不等式が成立する．

$$VaR_\alpha(Z_1) > VaR_\alpha(Z_2). \quad (1.23)$$

簡単のために， $\theta_1 = \theta_2, p_1 = p_2 = p$ として (1.21) 式の結果を代入して解くと以下を得る．

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} > \bar{\kappa}_{VaR}, \quad \text{ただし, } \bar{\kappa}_{VaR} = \frac{\xi_1}{\xi_2} \left(\frac{(p/\alpha)^{\xi_2} - 1}{(p/\alpha)^{\xi_1} - 1} \right) \quad (1.24)$$

山井・吉羽 [2002b] では，超過値の割合を $p = 0.1, 0.05$ として，(1.24) 式を用いて， $\bar{\kappa}_{VaR}$ の値を信頼水準 95% と 99% の VaR について計算し表にしている．

一方，信頼水準 $(1 - \alpha)$ の期待ショートフォールにテイルリスクが発生する場合とは，裾の厚い方の期待ショートフォールが他方のそれを下回る場合である．

$$ES_\alpha(Z_1) > ES_\alpha(Z_2) \quad (1.25)$$

簡単のために， $\theta_1 = \theta_2, p_1 = p_2 = p$ として (1.21) 式の結果を代入して解くと以下を得る．

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} > \bar{\kappa}_{ES} \quad \text{ただし } \bar{\kappa}_{ES} = \frac{1 - \xi_1}{1 - \xi_2} \left(\frac{1 + ((p/\alpha)^{\xi_2} - 1)/\xi_2}{1 + ((p/\alpha)^{\xi_1} - 1)/\xi_1} \right) \quad (1.26)$$

山井・吉羽 [2002b] では，超過値の割合を $p = 0.1, 0.05$ として，(1.26) 式の $\bar{\kappa}_{ES}$ の値を信頼水準 99% の期待ショートフォールで計算した表を掲載している．これらの表を比較し，期待ショートフォールにテイルリスクが発生する条件が，VaR にテイルリスクが発生する条件より

¹⁸3 つ目の等号は，Embrechts, Klüppelberg and Mikosch [1997] の Theorem 3.4.13, (e) に基づく．

も厳しいことを示している。つまり、期待ショートフォールでは VaR に比べてテイルリスクが発生し難いという指摘（山井・吉羽 [2001c]）を改めて確認することができる。

以上の結果から、一般化パレート分布のもとで単変量の損失額分布を比較する場合は、パラメータの値の組合せによっては、VaR、期待ショートフォールともに裾における大幅な損失の発生の確率を見誤る可能性があることが示された。

1.4.2 多変量極値理論を用いた理論分析

(1) 多変量極値理論

ここではまず多変量極値理論の概要を整理する¹⁹。まず、「2変量の確率変数の超過値」を定義する。これは、2つの確率変数を $Z = (Z_1, Z_2)$ 、閾値を $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ として次式で定義される値である。

$$m_{(\theta_1, \theta_2)}(Z_1, Z_2) = (\max(Z_1, \theta_1), \max(Z_2, \theta_2)) \quad (1.27)$$

Ledford and Tawn [1996] は、この超過値のコピュラ (copula) が²⁰、閾値を大きくすると、次式で与えられるコピュラに収束することを示した（解説は 1.A 節を参照）。

$$C(u_1, u_2) = \exp\left\{-V\left(-\frac{1}{\ln u_1}, -\frac{1}{\ln u_2}\right)\right\} \quad (1.28)$$

ただし、 $V(z_1, z_2) = \int_0^1 \max\{sz_1^{-1}, (1-s)z_2^{-1}\}dH(s)$ であり、 H は $[0, 1]$ 上の非負の測度で

$$\int_0^1 s dH(s) = \int_0^1 (1-s) dH(s) = 1 \quad (1.29)$$

を満たす。以下では、Heffernan [2000] に倣い、このコピュラを「2変量極値コピュラ (bivariate extreme value copula)」あるいは「極値コピュラ」と呼ぶこととする²¹。

一方、2変量の超過値の周辺分布は、単変量の超過値における結果から、超過値分布に収束する。したがって、2変量の超過値は、周辺分布が超過値分布、コピュラが極値コピュラで表される2変量分布に収束する。

なお、超過値の分布が特定の分布（一般化パレート分布）に収束することが示されている単変量の場合と違い、多変量では超過値の分布が特定の分布に収束することは保証されていない。したがって、極値コピュラの条件を満たすコピュラは無数に存在し²²、その中から適当なコピュラを選択する必要がある。

こうした極値コピュラの中で、統計学や金融への応用研究で最も標準的に利用されているのが次式で表されるガンベルコピュラ (Gumbel copula) である (Gumbel [1960]; Tawn [1988]; Embrechts, McNeil and Straumann [2001]; McNeil [2000]; Longin and Solnik [2001])。

$$C(u_1, u_2) = \exp\left\{-\left[(-\ln u_1)^\gamma + (-\ln u_2)^\gamma\right]^{1/\gamma}\right\} \quad (1.30)$$

¹⁹多変量極値理論のより詳細な説明は、Coles [2001] Ch.8; Kotz and Nadarajah [2000] Ch.3; McNeil [2000]; Resnick [1987] Ch.5などを参照。

²⁰コピュラとは、周辺分布から同時分布を構成する関数を指す。すなわち、2変量の同時分布関数 $F(x_1, x_2)$ を考える際、各変量の周辺分布関数を $F_1(x_1), F_2(x_2)$ とするとき、 $C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = F(x_1, x_2)$ で表される関数 $C(\cdot)$ がコピュラである。詳細は第2章を参照。

²¹極値コピュラは、任意の $t > 0$ に対して、 $C(u_1^t, u_2^t) = C^t(u_1, u_2)$ を満たすコピュラとしても特徴付けられる (Joe [1997]; 塚原 [2008] を参照)。

²²これまでに提唱されたガンベルコピュラ以外の極値コピュラの詳細は、例えば Joe [1997]; Kotz and Nadarajah [2000] を参照。

このとき，(1.28) 式中の関数 V は以下の形となる．

$$V(z_1, z_2) = (z_1^{-\gamma} + z_2^{-\gamma})^{1/\gamma} \quad (1.31)$$

このガンベルコピュラの主たる長所としては，(1) 各周辺分布が，独立であるケース ($\gamma = 1$) と完全に依存しているケース ($\gamma = \infty$) を包含していること，(2) 単一のパラメータ γ で依存関係を表すことができることの2つが挙げられる (Longin and Solnik [2001])．また，コピュラの式がわかりやすい形で表されているため，最尤推計やシミュレーション上の扱いやすいという特徴がある．そこで本節の分析でも，こうした扱いやすさなどから，極値コピュラとしてガンベルコピュラを採用して分析を行う．なお，以下本節では，(1.30) 式における γ を「ガンベルコピュラの依存パラメータ」と呼ぶ．

(2) 裾における依存関係

複数の極値の依存関係を分析する際に重要な概念となるのは，分布の裾における漸近的な依存関係である．ここでは，この漸近的な依存関係を説明する．まず，2つの同じ周辺分布 F に従う確率変数 (Z_1, Z_2) について，以下の指標 χ を定義する．

$$\chi \equiv \lim_{z \rightarrow z^+} \Pr\{Z_1 > z \mid Z_2 > z\} \quad (1.32)$$

ただし， z^+ は F の右端とする．

χ は，一方の値が大きいきに他方の値も大きくなる確率の漸近的な値であり，分布の裾で2つの確率変数が依存している度合いを表している． $\chi = 0$ のときは， (Z_1, Z_2) は「漸近独立 (asymptotically independent)」と呼ばれる．一方， $\chi > 0$ のとき， (Z_1, Z_2) は「漸近従属 (asymptotically dependent)」と呼ばれる．

χ は， (Z_1, Z_2) が異なる周辺分布 F_{Z_1}, F_{Z_2} を持つときも次式で定義できる．

$$\chi \equiv \lim_{u \rightarrow 1} \Pr\{F_{Z_1}(Z_1) > u \mid F_{Z_2}(Z_2) > u\} \quad (1.33)$$

さらに，

$$\chi(u) \equiv 2 - \frac{\ln \Pr\{F_{Z_1}(Z_1) < u, F_{Z_2}(Z_2) < u\}}{\ln \Pr\{F_{Z_1}(Z_1) < u\}}, \text{ for } 0 \leq u \leq 1 \quad (1.34)$$

と定義すると， $\chi = \lim_{u \rightarrow 1} \chi(u)$ という関係があることが示される (Coles, Heffernan and Tawn [1999])．

ここで2つの確率変数の依存関係が極値コピュラで表される場合は，以下のように $\chi(u)$ は定数となる．

$$\chi(u) = \chi = 2 - V(1, 1) \quad (1.35)$$

しかし，実証分析からは，指標 χ だけでは，実際の極値データの挙動を十分に表現できないとの問題提起がなされている (Ledford and Tawn [1996, 1997]; Coles, Heffernan and Tawn [1999])．これらの研究結果によると，超過値や最大値の依存関係を分析すると，漸的には (裾の端では) 独立 ($\chi = 0$) である一方，裾の途中では依存関係がある ($u < 1$ で $\chi(u) > 0$) というケースが存在する．この場合，(1.35) 式のように $\chi(u)$ が u の値に拘わらず定数となる極値コピュラでは，独立の度合い (依存の度合い) がわからないという意味で，依存関係が必ずしも十分には表現されないことになるため，これを用いて極値の推計を行うと分位点などの評価を誤る可能性がある．

こうした問題意識から，Coles, Heffernan and Tawn [1999] は，確率変数の依存関係を表すもう一つの指標として，次式で表される指標 $\bar{\chi}$ を提唱した．

$$\bar{\chi} \equiv \lim_{u \rightarrow 1} \bar{\chi}(u) \quad (1.36)$$

ただし，

$$\bar{\chi}(u) \equiv \frac{2 \ln \Pr\{F_{Z_1}(Z_1) > u\}}{\ln \Pr\{F_{Z_1}(Z_1) > u, F_{Z_2}(Z_2) > u\}} - 1 \quad (1.37)$$

である．

$\bar{\chi}$ は，確率変数が漸近従属している場合は $\bar{\chi} = 1$ ，漸近独立の場合は $-1 < \bar{\chi} < 1$ となる性質を持っている．また，確率変数が互いに独立である場合は $\bar{\chi} = 0$ となる．

2つの指標 ($\chi, \bar{\chi}$) を同時に用いれば多様な依存関係を表現することができる (表 1.9 を参照)．例えば，上述のように漸近独立の場合は $\chi = 0$ となり， χ のみでは独立の度合い (依存度合い) を表現できないが， $\bar{\chi}$ の値 (漸近独立の場合は $-1 < \bar{\chi} < 1$ の範囲の値をとる) で依存度合いを表現することができる．また，漸近従属している場合は $\bar{\chi} = 1$ となるため， $\bar{\chi}$ のみでは依存関係を表現できないが， χ の値 (漸近従属している場合は $0 < \chi \leq 1$ の範囲の値をとる) で依存度合いを表現することができる．

なお，ガンベルコピュラでは， $\chi = 2 - 2^{1/\gamma}$ ($\gamma \geq 1$)， $\bar{\chi} = 1$ という関係が成立する (表 1.10 を参照)．

表 1.9: 漸近従属と $\chi, \bar{\chi}$ の関係

	独立	漸近独立	漸近従属
χ	$\chi = 0$	$\chi = 0$	$0 < \chi \leq 1$
$\bar{\chi}$	$\bar{\chi} = 0$	$-1 < \bar{\chi} < 1$	$\bar{\chi} = 1$
	極値コピュラで表現可	極値コピュラで表現不可	極値コピュラで表現可

備考: 独立ならば $\bar{\chi} = 0$ であるが，逆は必ずしも正しくない．

(3) 本節で用いるコピュラとその性質

Ledford and Tawn [1996, 1997]; Heffernan [2000] は，極値コピュラでは実際の統計データの依存関係を十分に表現できない場合があるため，漸近独立なコピュラを用いることが実務的には有用であると指摘している．

Heffernan [2000] は，こうした漸近独立のコピュラを多数挙げている．本節では，このうち以下の2つのコピュラを用いて分析を行う．

正規コピュラ：

$$C(u, v) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)) \quad (1.38)$$

ただし， $\Phi_\rho(\cdot)$ は相関係数 ρ の2変量標準正規分布の分布関数， $\Phi^{-1}(\cdot)$ は単変量標準正規分布の分布関数の逆関数．

フランクコピュラ：

$$C(u, v) = -\frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{1 - e^{-\delta} - (1 - e^{-\delta u})(1 - e^{-\delta v})}{1 - e^{-\delta}} \right) \quad (1.39)$$

このうち、正規コピュラ ($-1 < \rho < 1$) は、 $\chi = 0$ (漸近独立なコピュラ) であり、また $\bar{\chi} = \rho$ であるため、 ρ によって依存関係を表現することができる。

一方、フランクコピュラの場合は、 $\chi = \bar{\chi} = 0$ であるため、正規コピュラよりも独立度合いが高い裾の依存関係を表現できる²³。

なお、本節では (1.38) 式の ρ を「正規コピュラの依存パラメータ」、(1.39) 式の δ を「フランクコピュラの依存パラメータ」と呼ぶ。

本節で用いる 2 変量コピュラの性質をまとめると、表 1.10 のようになる。

表 1.10: 本節で用いる 2 変量コピュラの性質

	$C(u, v)$	依存関係	χ	$\bar{\chi}$
ガンベル	$\exp\{-((-\ln u)^\gamma + (-\ln v)^\gamma)^{1/\gamma}\}$	$\gamma = 1$ で独立 $\gamma = \infty$ で完全従属	$2 - 2^{1/\gamma}$ ($\gamma \geq 1$)	1
正規	$\Phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$	$\rho = 0$ で独立 $\rho = \pm 1$ で完全従属	0 ($\rho \neq 1$)	ρ
フランク	$-\frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{1 - e^{-\delta} - (1 - e^{-\delta u})(1 - e^{-\delta v})}{1 - e^{-\delta}} \right)$	$\delta = 0$ で独立 $\delta = \pm\infty$ で完全従属	0	0

(4) 2 変量でのテイルリスクの分析

ここでは、2 変量極値分布のもとで VaR と期待ショートフォールのテイルリスクを調べる。具体的には、2 つの証券からなるポートフォリオのリスクを測る際に、VaR と期待ショートフォールが 2 証券の損失額の依存関係を的確に捉えられるかを考察する。

リスク指標がリスクファクター間の相関の上昇を的確に織り込めないと、それは深刻なテイルリスクの問題につながる可能性がある。この点について、ここで紹介した多変量極値分布のもとでも発生するかを調べる。つまり、損失額の超過値が一般化パレート分布に従い、コピュラが極値コピュラなどで表される場合、ポートフォリオの損失額の依存関係の変化を VaR と期待ショートフォールが適切に捉えられるかどうかを調べる。

ただし、(1) の多変量の超過値に関する分析をそのままポートフォリオのリスク量算出に用いることはできない。単変量の場合は、超過値の分位点は元の確率変数の分位点に一致するため、超過値分布のみから直接 VaR を求めることができた。しかし、2 変量の場合は「超過値の和」は必ずしも「和の超過値」に一致しないため、超過値分布のみだけでは VaR を求めることはできない^{24,25}。すなわち、確率変数の和の分位点を正確に計算するためには、ある閾値を超えた部分の分布をモデル化するだけでなく、閾値以下の部分の分布も考える必要がある。

損失額の周辺分布が、閾値を超えた部分は (1.17) 式の超過値分布に、閾値を超えない部分は標準正規分布にそれぞれ従うと仮定する。具体的には、超過値の割合を p として、周辺分布の

²³ 裾における依存関係の数学的な定義などの詳細な議論、および各コピュラの $\chi, \bar{\chi}$ の導出は Ledford and Tawn [1996, 1997]; Coles, Heffernan and Tawn [1999]; Heffernan [2000] を参照。

²⁴ この問題は、多変量の最大値を多変量の一般化極値分布 (generalized extreme value distribution) でモデル化した場合にも生じる。なお、Hauksson *et al.* [2001]; Bouyé [2002] は、多変量の一般化極値分布を用いてポートフォリオの VaR あるいは期待ショートフォールを算出する方法を提唱しているが、ここで指摘した問題点に対する具体的な対応方法に関する記述はない。

²⁵ 超過値の和の分位点と元の確率変数の和の分位点が一致する例外的なケースとして、確率変数が完全従属している場合がある。

分布関数は以下で表されるとする．

$$F(x) = \begin{cases} \Phi(x), & x < \Phi^{-1}(1-p) \\ 1-p \left(1 + \xi \frac{x - \Phi^{-1}(1-p)}{\sigma}\right)^{-1/\xi}, & x \geq \Phi^{-1}(1-p) \end{cases} \quad (1.40)$$

ただし、 $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数であり、 $\Phi^{-1}(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数の逆関数である．

閾値を超えない部分の周辺分布としては、データから生成された経験分布、あるいは t 分布などとする事も考えられるが²⁶、ここでは閾値を超えない部分は通常時の市場価格変動に相当すると考え正規分布を仮定する．

ここでは、(1.40) 式の周辺分布を前提として、依存関係の相違をコピュラの種類の相違で表現したうえで、VaR と期待ショートフォールが依存関係の変化を的確に捉えられるか否かをシミュレーション²⁷を通じて調べる²⁸．

なお、確率変数の依存関係が VaR とテイルリスクの性質に与える影響をみるため、2つの確率変数が同じ周辺分布に従うものと仮定して議論を行う²⁹．また、ここでの分析は裾指数が $0 < \xi < 1$ の場合に限定して分析する．

(1.40) 式で表される同一の周辺分布に従う2つの確率変数が、ガンベル、正規、フランクの3種類のコピュラで表現される依存構造を持つという3つの場合を仮定し、各々 VaR と期待ショートフォールを計算して比較する．

各コピュラのパラメータは、スピアマン (Spearman) のロー (ρ_S) が一致するように設定した³⁰．ここで、スピアマンのローとは、2変量確率変数の依存関係を表す指標で、いわゆる「順位相関」の一種である．具体的には、確率変数を周辺分布関数で変換した値の線形相関として、次式で定義される．

$$\rho_S(Z_1, Z_2) \equiv \frac{\text{cov}(F_{Z_1}(Z_1), F_{Z_2}(Z_2))}{\sqrt{\text{var}[F_{Z_1}(Z_1)]\text{var}[F_{Z_2}(Z_2)]}} \quad (1.41)$$

このスピアマンのローは、分布の裾における依存関係のみを表す χ 、 $\bar{\chi}$ とは異なり、分布全体の依存関係を1つの数値として表現するものである³¹．図 1.5(a) は、 $\xi = 0.5$ 、 $\sigma = 1$ 、 $\rho_S = 0.5$ 、 $p = 0.1$ として、ガンベル、正規、フランクの各コピュラのもとで、各100万回のシミュレーションにより生成した和の分布のうち累積確率 99.5%以上の部分をプロットしたものである．

まず、相対的に漸近的な依存関係が強い ($\chi > 0$ 、 $\bar{\chi} = 1$) ガンベルコピュラの裾が最も厚く、相対的に依存度合いの小さい ($\chi = 0$ 、 $\bar{\chi} = 0$) フランクコピュラの裾が最も薄い³²．つまり、各コピュラを用いてリスクを計測すると、フランクコピュラのリスクが最も小さく、ガンベルコ

²⁶分布全体が (1.16) 式で表される一般化パレート分布に従うと仮定することも考えられる．このときは、正則変動する分布関数に関する畳込みの定理を用いて、完全従属の場合と独立の場合を比較するという形で、VaR が依存関係の変化を捉えられるかどうかを解析的に分析することができる．この詳細は 1.B 節を参照．

²⁷本節のシミュレーションでは、一様乱数の生成にメルセンヌツイスターを、一様乱数の正規乱数への変換に Box-Müller 法を用いた．各コピュラに従う乱数の生成方法については第 2 章を参照．

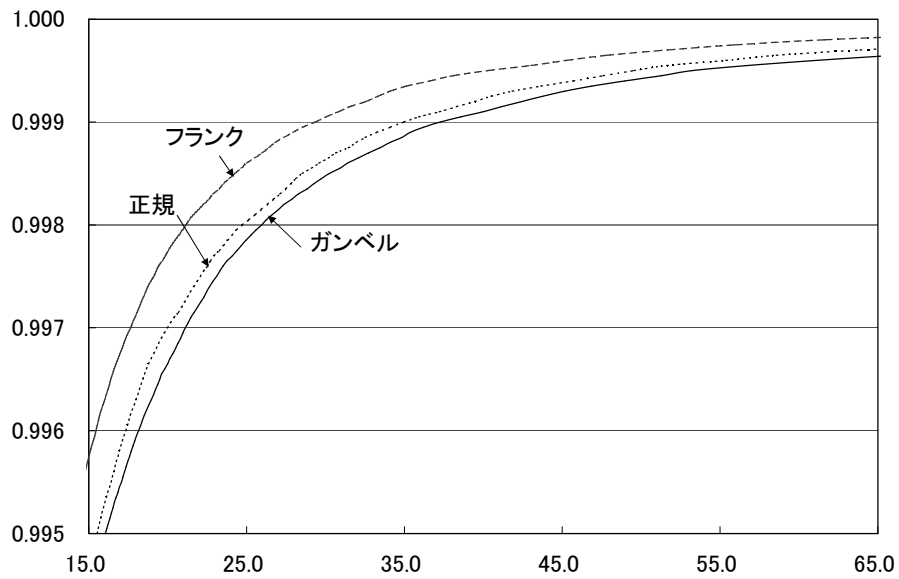
²⁸山井・吉羽 [2002b] では、依存関係に特定のコピュラ (ガンベル、正規、フランク) を仮定したうえで、各コピュラの依存パラメータの水準の相違に伴うリスク指標の挙動についても議論している．

²⁹山井・吉羽 [2002b] では、周辺分布が異なる場合についても議論を行っている．

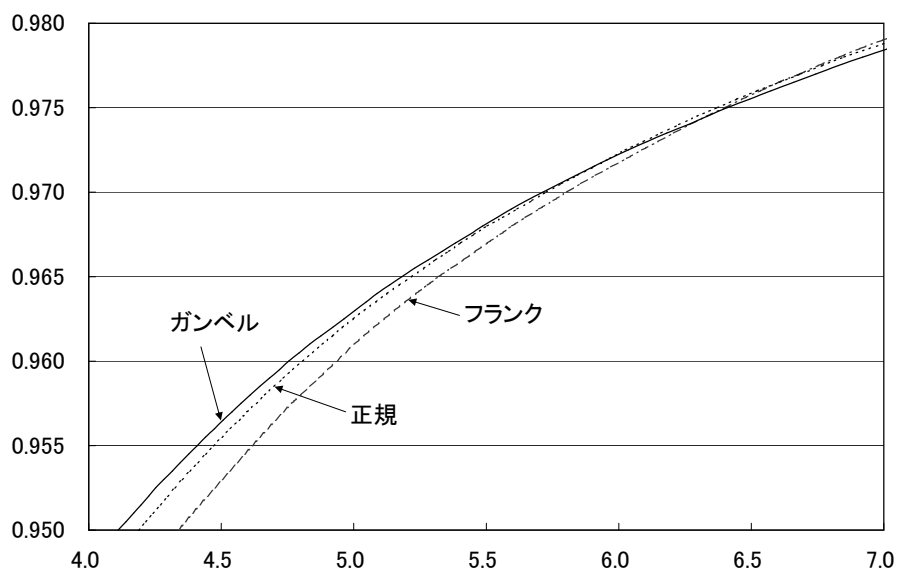
³⁰各コピュラのパラメータは、Joe [1997] が計算した値 (p.147, Table 5.2) を用いた．

³¹スピアマンのローと周辺分布から同時分布が一意に定まるわけではないため、スピアマンのローは依存関係を完全に表すものではない．特に、 χ や $\bar{\chi}$ が表現している漸近的な依存関係は表現できない．しかし、分布全体の依存関係を表現する単一の指標としては比較的優れた指標である (Embrechts, McNeil and Straumann [2001] を参照)．

³²各コピュラの χ と $\bar{\chi}$ は表 1.10 を参照．



(a) 累積確率 99.5%以上の部分



(b) 累積確率 95 ~ 98%の部分

図 1.5: ガンベル, 正規, フランク・コピュラのもとでの経験分布

備考: 周辺分布のパラメータを $\xi = 0.5$, $\sigma = 1$, $p = 0.1$ に設定し, 100 万回のシミュレーションにより経験分布を生成. コピュラのパラメータはスピアマンのローが $\rho_S = 0.5$ となるように設定.

ピュラのリスクが最も大きいという順序付けになる。仮に、VaR あるいは期待ショートフォールでリスクを計測した際に、これとは異なる順序付けがなされるとすると、リスク指標にテイルリスクが発生していることになる。図 1.5(b) は、上記の経験分布のうち累積確率 95 ~ 98% の部分をプロットしたものである。これから、信頼水準 95% の VaR は、ガンベル、正規、フランクのコピュラの順に大きくなっており³³、VaR にテイルリスクが発生していることがわかる。

表 1.11 は、図 1.5 の設定のうち、周辺分布の裾指数を $\xi = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ 、スピアマンのローを $\rho_S = 0.2, 0.5, 0.8$ とし、各コピュラのもとで各 100 万回のシミュレーションにより VaR と期待ショートフォールを算出した結果である。まず、スピアマンのローが同じであっても、コピュラの種類によって、リスク指標の値が大きく変わることがわかる。これは、漸近従属関係の有無や関係の強さが、リスクの水準に影響を与えることを意味している。

また、裾が厚く、スピアマンのローが大きい場合には、95% 信頼水準の VaR にテイルリスクが発生していることがわかる。例えば、 $\xi = 0.5$ 、 $\rho_S = 0.8$ の信頼水準 95% の VaR を比較すると、ガンベル、正規、フランクのコピュラの順に大きくなっている。つまり、裾が薄く大幅な損失が発生する可能性の最も低いフランクコピュラのリスク (VaR) が最も大きいと判断されることになる。

さらに、表 1.11 からは、信頼水準 95% の VaR では各変量の周辺分布の裾の厚さが $\xi = 0.25$ 以上でテイルリスクが発生しているが、信頼水準 99% および 99.9% の VaR では $\xi = 0.75$ と分布の裾が極めて厚い場合を除けばテイルリスクは発生していないことがわかる。

また、期待ショートフォールでは、いずれの信頼水準でも、 $\xi = 0.75$ と分布の裾が極めて厚い場合を除けばテイルリスクは発生しない。この結果から、期待ショートフォールは、VaR に比べて、より幅広い条件でテイルリスクのないリスク指標であるという結論 (山井・吉羽 [2001c]) を確認できる。

1.4.3 為替相場変動を用いた実証分析

ここまでで、単変量および多変量極値分布のもとで、VaR と期待ショートフォールのテイルリスクを考察し、以下の結論を得た。

1. 単変量分布では、裾指数の異なる分布を比較した場合に、VaR と期待ショートフォールにテイルリスクが発生する可能性がある。このテイルリスクが発生する条件は、簡単な解析式で表すことができる。
2. 周辺分布の裾が厚い場合、VaR と期待ショートフォールは、漸近従属度合いの相違 (コピュラの相違) に伴うリスクプロファイルの相違を的確に捉えられず、テイルリスクが発生することがある。

そこで、本小節では実際の市場データを用いた実証分析によって、VaR のテイルリスクが顕著となる状況が実際に発生しうるか分析する。具体的には、次の 2 点を考察する。

1. 市場データの周辺分布に、VaR にテイルリスクが発生するほどの裾の厚さの違いがあるか。

³³ここでの VaR 算出の対象は原資産のみからなるポートフォリオである。これに対し、ポートフォリオに先物やオプション等を含む場合は、依存構造の違いによる影響はさらに大きくなり、各コピュラで求めた VaR の差異はより広がることもありうる。

表 1.11: 異なる漸近従属構造を持つコピュラ (ガンベル, 正規, フランク) での VaR と期待ショートフォール (ES) の比較

ξ	コピュラ	ρ_S	VaR(95%)	VaR(99%)	VaR(99.9%)	ES(95%)	ES(99%)	ES(99.9%)
0.1	独立	0	2.971	5.165	8.748	4.357	6.715	10.670
	フランク	0.2	3.212	5.493	9.152	4.651	7.080	11.098
	正規	0.2	3.261	5.709	9.784	4.804	7.454	11.897
	ガンベル	0.2	3.245	6.080	11.426	5.069	8.381	14.566
	フランク	0.5	3.547	5.982	9.770	5.073	7.617	11.728
	正規	0.5	3.594	6.463	11.425	5.416	8.575	14.027
	ガンベル	0.5	3.601	7.024	13.184	5.766	9.653	16.500
	フランク	0.8	3.869	6.529	10.478	5.531	8.235	12.477
	正規	0.8	3.851	7.236	13.207	6.005	9.792	16.399
ガンベル	0.8	3.858	7.526	13.836	6.185	10.261	17.312	
	完全従属	1	3.993	7.703	14.219	6.352	10.502	17.613
0.25	独立	0	3.125	6.065	12.465	5.083	8.858	17.463
	フランク	0.2	3.369	6.403	12.914	5.387	9.248	17.927
	正規	0.2	3.422	6.643	13.728	5.561	9.691	18.944
	ガンベル	0.2	3.389	6.988	15.598	5.822	10.707	22.383
	フランク	0.5	3.711	6.934	13.600	5.831	9.843	18.659
	正規	0.5	3.747	7.455	15.861	6.214	10.998	21.830
	ガンベル	0.5	3.720	7.979	18.086	6.566	12.284	25.647
	フランク	0.8	4.031	7.544	14.456	6.320	10.544	19.551
	正規	0.8	3.974	8.263	18.334	6.851	12.544	25.735
ガンベル	0.8	3.949	8.526	19.090	7.020	13.106	27.229	
	完全従属	1	4.071	8.735	19.778	7.206	13.454	27.837
0.5	独立	0	3.442	8.441	27.131	7.419	17.092	53.729
	フランク	0.2	3.684	8.812	27.657	7.742	17.527	54.353
	正規	0.2	3.748	9.105	28.750	7.989	18.277	57.226
	ガンベル	0.2	3.672	9.325	31.444	8.172	19.177	60.376
	フランク	0.5	4.031	9.407	28.422	8.224	18.232	55.300
	正規	0.5	4.052	9.988	31.896	8.736	20.062	62.854
	ガンベル	0.5	3.947	10.332	34.770	8.993	21.384	67.848
	フランク	0.8	4.347	10.100	29.790	8.766	19.087	56.502
	正規	0.8	4.211	10.798	36.249	9.459	22.322	71.084
ガンベル	0.8	4.119	10.888	36.572	9.518	22.757	72.817	
	完全従属	1	4.213	11.115	38.301	9.755	23.448	75.100
0.75	独立	0	3.847	12.654	68.724	14.106	45.232	232.931
	フランク	0.2	4.092	13.022	69.291	14.459	45.778	234.268
	正規	0.2	4.157	13.465	71.011	15.131	48.589	255.050
	ガンベル	0.2	4.028	13.288	73.602	14.429	45.581	224.180
	フランク	0.5	4.433	13.722	70.411	14.989	46.666	235.724
	正規	0.5	4.424	14.411	77.312	16.260	52.397	278.633
	ガンベル	0.5	4.222	14.188	79.041	15.348	48.795	243.099
	フランク	0.8	4.737	14.512	72.461	15.578	47.691	237.134
	正規	0.8	4.496	14.932	83.944	16.830	54.489	284.102
ガンベル	0.8	4.326	14.549	80.106	16.057	51.537	261.953	
	完全従属	1	4.373	14.720	83.395	16.517	53.579	275.707

備考: 周辺分布の裾指数 ξ を第 1 列の値, 他のパラメータを $\sigma = 1, p = 0.1$ に設定し, 100 万回のシミュレーションにより VaR と期待ショートフォールを算出.

2. 市場データの依存関係に，VaR と期待ショートフォールのテイルリスクが発生するような性質があるか．

以下では，先進国およびエマージング諸国の対米ドル為替レートを用いて，具体的な分析を行う．

(1) データ

分析に用いたデータは，先進国（3カ国）およびエマージング諸国（18カ国）の対米ドル為替レート³⁴の日次対数変化率の8年間（1993年11月1日～2001年10月29日）のデータである³⁵．

(2) 単変量における分析

まず，各国の為替レートの対数変化率に対して，単変量の一般化パレート分布の最尤推計を行った³⁶．具体的には，まず，全データ数に対する超過値数の割合が1%，2%，…，10%となるように閾値を決め，パラメータ推計を行った．さらに，推計されたパラメータを用いて，95%および99%信頼水準のVaRと期待ショートフォールを算出した．

山井・吉羽 [2002b] にはその全推計結果が表で示されているが，ここでは Yamai and Yoshida [2005] でまとめられた結果に沿って，日本円と6カ国のエマージング諸国の裾指数と95%信頼水準のVaRを表1.12に示す．裾指数をみると，ここで取り上げた6カ国のエマージング諸国の裾指数は日本円の裾指数を大きく上回っており，こうした通貨の保有が大きな損失を生む可能性が高いことがわかる．ところが，95%信頼水準のVaRをみてみると，日本円のVaRの方が6カ国のエマージング諸国のVaRを下回っており，95%信頼水準のVaRにはテイルリスクが発生していることがわかる．

表 1.12: 対米ドル為替レート日次対数変化率の裾指数と VaR

	日本 円	マレーシア リンギット	韓国 ウォン	タイ バーツ	チリ ペソ	メキシコ ペソ	ベネズエラ ボリバル
ξ	0.080	0.737	0.685	0.430	0.177	0.646	0.862
VaR(95%)	1.00%	0.43%	0.73%	0.77%	0.52%	0.84%	0.34%

備考: 為替レートのデータはブルームバーグから取得した．対象期間は，1993年11月1日～2001年10月29日までの8年間である．

³⁴日本・円，独・マルク，英・ポンド，香港・ドル，インドネシア・ルピア，マレーシア・リンギット，フィリピン・ペソ，シンガポール・ドル，韓国・ウォン，新台湾ドル，タイ・バーツ，チェコ・コルナ，ハンガリー・フォリント，ポーランド・ズロチ，スロバキア・コルナ，ブラジル・レアル，チリ・ペソ，コロンビア・ペソ，メキシコ・ニュー・ペソ，ペルー・ヌエボ・ソル，ベネズエラ・ボリバル．

³⁵休日の為替レートは，休前日と同じとした．このため，休日の対数変化率はすべてゼロとなっている．なお，パラメータ推計は超過値のみを対象にして行っているため，この休日調整は推計結果にほとんど影響を与えていないと考えられる．

³⁶1.4節で説明した極値理論は，独立かつ同一の分布に従うデータに限らず，一定の条件を満たした定常性を持つデータの極値の推計にも応用することができる．詳細は Coles [2001] の第4章等を参照．

(3) 2変量における分析

次に、2変量のケースで VaR のテイルリスクが為替レートデータのデータに発生しうる例を示す。ここでは、計算例として、東南アジアの5通貨（インドネシア・ルピア、マレーシア・リングギット、フィリピン・ペソ、シンガポール・ドル、タイ・バーツ）を分析の対象とする。

まず、多変量極値分布のパラメータを、Longin and Solnik [2001] の方法を用いて推計する。ここでは 1.4.2 節での分析に従い、2変量超過値の周辺分布が一般化パレート分布（厳密には (1.17) 式で表される超過値分布）に従い、コピュラはガンベルコピュラであると仮定する³⁷。この仮定のもとでは、超過値の割合 (p_1, p_2) を所与とすると、周辺分布の裾指数 (ξ_1, ξ_2) と尺度パラメータ (σ_1, σ_2)、閾値 (θ_1, θ_2)、ガンベルコピュラの依存パラメータ (γ) により超過値の同時分布が決定する。

超過値の割合を 10% として、東南アジア 5 通貨の各組合せについて、最尤法³⁸を用いてこれらのパラメータを推計した。表 1.13 はその結果である。

表 1.13: 東南アジア通貨の日次対数変化率の依存関係の 2 変量極値分布による推計結果

通貨		γ	ξ_1	σ_1	θ_1	ξ_2	σ_2	θ_2
インドネシア	マレーシア	1.2658	0.4088	0.0128	0.0084	0.7371	0.0030	0.0016
インドネシア	フィリピン	1.3056	0.4088	0.0128	0.0084	0.4156	0.0046	0.0035
インドネシア	シンガポール	1.3316	0.4088	0.0128	0.0084	0.3256	0.0020	0.0028
インドネシア	タイ	1.3855	0.4088	0.0128	0.0084	0.4298	0.0051	0.0035
マレーシア	フィリピン	1.2578	0.7371	0.0030	0.0016	0.4156	0.0046	0.0035
マレーシア	シンガポール	1.5288	0.7371	0.0030	0.0016	0.3256	0.0020	0.0028
マレーシア	タイ	1.3186	0.7371	0.0030	0.0016	0.4298	0.0051	0.0035
フィリピン	シンガポール	1.3120	0.4156	0.0046	0.0035	0.3256	0.0020	0.0028
フィリピン	タイ	1.4267	0.4156	0.0046	0.0035	0.4298	0.0051	0.0035
シンガポール	タイ	1.4364	0.3256	0.0020	0.0028	0.4298	0.0051	0.0035

備考: 為替レートのデータはブルームバーグから取得した。対象期間は、1993年11月1日～2001年10月29日までの8年間である。
この結果は分布の右裾の推計結果である。超過値の割合は $p_1 = p_2 = 0.1$ とした。

この推計結果を基に、VaR と期待ショートフォールが実際に漸近的な依存度合いを捉えられるかを確認した。1.4.2 節と同じ方法で VaR と期待ショートフォールを算出する。まず、各為替レートのペアについて、推計されたパラメータ値のもとで、超過値分布とガンベルコピュラにより為替レートの対数変化率をシミュレートする。さらに、超過値分布と正規コピュラおよびフランクコピュラのもとで為替レートの対数変化率をシミュレートする。正規コピュラおよびガンベルコピュラのもとでシミュレートする際は、ガンベルコピュラとスピアマンのロー (ρ_S) が等しくなるように正規コピュラとフランクコピュラの依存パラメータを設定する。次に、 N 回のシミュレーションで生成した各為替レートの対数変化率データ ($X_{i,1}, X_{i,2}$) ($i = 1, \dots, N$) から VaR と期待ショートフォールを計算する。ここでは、Yamai and Yoshiba [2005] に沿って、シミュレーション回数を $N = 1$ 千万回として、信頼水準 95% と 99% の VaR の結果を表 1.14

³⁷ここでは、依存構造がガンベルコピュラで表されると仮定したが、データからノンパラメトリックにコピュラを推計する方法の研究も進んでいる。詳細は Capéraà, Fougères and Genest [1997] とその参考文献を参照。

³⁸尤度関数の生成方法は、Longin and Solnik [2001]; Ledford and Tawn [1996] 等を参照。

に示す．ここで計算した各通貨の組合せでは，信頼水準 95%の VaR で正規コピュラにおける VaR がガンベルコピュラにおける VaR よりも大きくなっており，信頼水準 95%の VaR にテイルリスクが発生していることがわかる．これは，実際の金融データで，VaR が漸近的な依存度合いを見落としている例として考えることができる．一方，信頼水準 99%の VaR ではテイルリスクは発生していない．

表 1.14: 為替レート変動の和の VaR

通貨		VaR(95%)			VaR(99%)		
		フランク	正規	ガンベル	フランク	正規	ガンベル
インドネシア	マレーシア	2.337%	2.331%	2.257%	6.852%	6.958%	7.041%
インドネシア	フィリピン	2.464%	2.464%	2.408%	6.573%	6.746%	7.002%
インドネシア	シンガポール	2.118%	2.133%	2.132%	5.993%	6.094%	6.270%
インドネシア	タイ	2.562%	2.551%	2.482%	6.788%	7.015%	7.298%
マレーシア	フィリピン	1.161%	1.154%	1.111%	3.427%	3.504%	3.570%
マレーシア	シンガポール	0.844%	0.834%	0.811%	2.442%	2.558%	2.677%
マレーシア	タイ	1.232%	1.220%	1.166%	3.692%	3.778%	3.850%
フィリピン	シンガポール	1.043%	1.047%	1.035%	2.497%	2.588%	2.720%
フィリピン	タイ	1.455%	1.440%	1.395%	3.650%	3.802%	3.992%
シンガポール	タイ	1.114%	1.114%	1.102%	2.754%	2.882%	3.037%

1.5 結論

本章では，まず，VaR や期待ショートフォールなどのリスク指標を定義したうえで，(1) 劣加法性（凸性），(2) テイルリスク，(3) 期待効用最大化原理との整合性，(4) 推計値の安定性に焦点を当て，VaR と期待ショートフォールの比較分析を行った．その結果，(1)～(3)については，期待ショートフォールは VaR よりも幅広い条件でこれらの性質を満たし，概念的には VaR よりも優れたリスク指標であることを示した．しかし，(4)については，損失額分布の裾が重い場合に期待ショートフォールの推計誤差が VaR よりも大きくなるとの結論を得た．期待ショートフォールは裾の情報を平均値として織り込んでいることから VaR 以上のリスクに関する情報を持っており，このため，劣加法性，テイルリスクの排除，期待効用最大化原理との整合性の3つの点で優れている．しかし，裾の推計という難しい課題を抱えている分だけその推計は VaR よりも難しい．すなわち，VaR と期待ショートフォールとの間にはどの性質を満たすかについてトレードオフが存在する．

こうしたトレードオフは，リスク指標一般に当てはまる議論でもある．これは，「単一のリスク指標で分布の性質の全てを表すことはできないため，すべての望ましい性質を満たすような完全なリスク指標は存在しない」という事実に基づいている．例えば，Breitmeyer *et al.* [1999]では，所得格差の計測方法に関する考察を基に，リスク指標が満たすべき性質として 28 個もの公理を挙げている．もちろん，これら 28 個のすべてを満たすリスク指標は存在しない．

このように，リスク指標自体完全なものではないため，リスク管理では以下の 2 点に留意する必要があると考えられる．第 1 に，それぞれが抱えるリスクの性質や経営陣の関心に応じた

リスク指標の選択を行うことが重要である。まず、保有ポートフォリオの損失額分布の性質を踏まえることが重要であろう。仮に保有ポートフォリオの損失額分布が正規分布あるいは楕円分布に近いものであるならば、VaR のリスク指標としての問題点は基本的に顕現化しない。したがって、VaR に加えて期待ショートフォールを用いる必要性はほとんどない。しかし、損失額分布が楕円分布でない場合は、VaR を用いたリスク計量では上述のような問題が発生しうるため、例えば期待ショートフォールを用いる必要も生じてくる。また、経営陣やリスク管理担当者がどういったリスクを重視するかを認識することも重要である。例えば、経営陣がデフォルト確率のみならず、デフォルト時の損失規模にも関心があるのであれば、楕円分布以外の損失額分布では、VaR はその関心に答えられない。

第2に、特定のリスク指標のみに頼ったリスク管理は危険であり、適当な補完手段を用いてポートフォリオのリスク特性を分析することが重要である。例えば、1.3 節では、VaR のみに依存したリスク管理は VaR 以上の損失が発生する可能性を高めることがあることを示した。こうした VaR の問題点に対しては、まずは、VaR の代わりに期待ショートフォールを用いることが考えられる。しかし、損失額分布の裾が厚い場合にはその推計が難しくなる。さらに、1.3 節でも述べたように、期待ショートフォールにもテイルリスクが存在する場合があります。期待ショートフォールに頼ったリスク管理が常に万全というわけではない。このため、ポジションやキャッシュフローのデスクレベルでのモニタリング、与信ポートフォリオの与信集中度合いのチェックなどで、リスクの性質を肌目細かく把握することは有効な補完手段となる。

また、本章ではポートフォリオの損失分布を生成する各リスクファクターの同時分布について、市場ストレス状態を表現しうるものとして多変量極値理論を用いて構成し、具体的にテイルリスクに関して VaR と期待ショートフォールの比較分析を行った。その結果、一般化パレート分布のもとで VaR あるいは期待ショートフォールがリスクを適切に表現できないことがあることを示した。VaR と期待ショートフォールのテイルリスクは、分布の裾指数、尺度パラメータ、超過値の割合、信頼水準、損失の依存関係、などのさまざまな条件の相互作用によって発生することが示された。

また、為替レート of 極値理論を用いた実証分析により、実際に VaR にテイルリスクが発生しうることも示した。

特に、多変量極値理論を用いた分析からは、VaR が捉えられない情報として、リスクファクターの分布の裾の厚さの違い、および漸近的な依存関係の有無が重要であることを示した。したがって、VaR でリスク管理を行っている場合は、これらにも目を配る必要があると考えられる。

また、この結果は、VaR のリスク管理への広範な利用が市場の不安定化につながる可能性があることを示唆している³⁹。Basak and Shapiro [2001] は、投資家が VaR を用いたリスク管理を行っている場合、テイルリスクにより VaR がリスクに関するミスリーディングな情報を与えるため、投資家が最適化行動の結果として大幅な損失が発生し易いポジションを組成することを示した。さらに、こうした投資家行動の結果、市場価格のボラティリティが上昇して市場が不安定化することを示した。本章では、一般化パレート分布の前提のもとで、VaR では大幅な損失が発生する可能性や漸近的な依存関係を捉えられない場合があることを示した。これは、VaR のテイルリスクにより市場が不安定化する可能性があることを示している。

次章では、多変量極値理論を用いた分析で利用したコピュラについて、代表的なコピュラとそのパラメータ推定方法、乱数発生方法などをまとめ、3 変量以上で本章で扱った市場リスクに加え、信用リスクの分析を進めていく。

³⁹VaR が市場の安定性に与える影響に関する実務家の見方は、Dunbar [2000] を参照。

1.A 多変量分布の超過値が漸近的に極値コピュラに従うことの証明

本補論では，Ledford and Tawn [1996] が示した，多変量分布の超過値が従うコピュラの導出を説明する．

まず，最大値が漸近的に従う分布を考える．以下の命題は，多変量確率変数の最大値が漸的に従う分布が満たすべき条件を示したものであり，多変量極値理論で最も重要な定理である（証明は Resnick [1987] の Proposition 5.11 を参照）．

命題 1.1. $\{(Z_{1j}, Z_{2j}); j = 1, \dots, n\}$ を，独立で同一の分布に従う 2 変量確率変数の観測値であるとする．また，この 2 変量確率変数は，周辺分布がフレシェ分布である分布関数 F に従うとする．つまり，各 ij に対して $\Pr[Z_{ij} \leq z_{ij}] = \exp(-1/z_{ij})$ であるとする．また，各変量の最大値を $M_{Z_i, n} = \max(Z_{i1}, Z_{i2}, \dots, Z_{in})$ と定義する．

このとき，以下が成立する．

$$\Pr\left[\frac{M_{Z_1, n}}{n} \leq z_1, \frac{M_{Z_2, n}}{n} \leq z_2\right] = F^n(nz_1, nz_2) \rightarrow G(z_1, z_2) \text{ as } n \rightarrow \infty$$

ここで， $G(z_1, z_2) = \exp\{-V(z_1, z_2)\}$ であり，

$$V(z_1, z_2) = \int_0^1 \max\{sz_1^{-1}, (1-s)z_2^{-1}\} dH(s) \quad (1.42)$$

ただし， H は $[0, 1]$ 上の非負の測度で以下を満たす．

$$\int_0^1 s dH(s) = \int_0^1 (1-s) dH(s) = 1$$

次に，周辺分布がフレシェ分布に従う 2 変量確率変数の超過値の分布も G に従うことを示す（Ledford and Tawn [1996]）．

Z_1, Z_2 を互いに独立で同一のフレシェ分布に従う確率変数であるとする．つまり，各 i で $\Pr[Z_i \leq z_i] = \exp(-1/z_i)$ であるとする．これら変数の同時分布を F_* とする．ここで，Resnick [1987] の Proposition 5.15 により， F_* が G_* の吸引域に属する，すなわち，適当に正規化された最大値が G_* に属することは以下と同値である．

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\ln F_*(tz_1, tz_2)}{-\ln F_*(t, t)} = \frac{-\ln G_*(z_1, z_2)}{-\ln G_*(1, 1)} \quad (1.43)$$

これは漸近的結果であるが，十分大きな値 $t = t_c$ では等号が成り立っているとする．すると，各 $t_c z_j$ も大きくなるため， $z'_j = t_c z_j$ として，十分大きな閾値を超える値 z'_j に対して以下が成り立つと考えることができる．

$$\ln F_*(z'_1, z'_2) = \ln F_*(t_c, t_c) \frac{\ln G_*(z'_1/t_c, z'_2/t_c)}{\ln G_*(1, 1)} \quad (1.44)$$

ここで， G_* は極値分布であるから以下が成り立つ．

$$G(z'_1, z'_2) = \exp\{-V(z'_1, z'_2)\} \quad (1.45)$$

ただし， $V(z_1, z_2)$ は (1.42) 式で与えられる．よって，以下の関係が得られる（以下では z'_i を z_i と表記し直す）．

$$F_*(z_1, z_2) = \exp\left\{V(z_1, z_2) \frac{t_c \ln F_*(t_c, t_c)}{V(1, 1)}\right\} = \exp\{V(z_1, z_2)K\} \quad (1.46)$$

ただし, K はある定数である .

K を求めるため, 閾値 θ_j における F_* の値を考える . この閾値はフレシエ分布の閾値であるとする, $\theta_j = -1/\ln(1 - \lambda_j)$ が成り立つ . ここで, $z_1 = \theta_1 = -1/\ln(1 - \lambda_1)$, $z_2 = \infty$ とすると,

$$F_*(-1/\ln(1 - \lambda_1), \infty) = \exp\{V(-1/\ln(1 - \lambda_1), \infty)K\} \quad (1.47)$$

が成り立つ . (1.47) 式左辺は $(1 - \lambda_j)$ 分位点における分布関数の値であるから, 分布関数の定義により $1 - \lambda_j$ に等しい . 一方, (1.47) 式右辺は, 以下により $\exp\{-K \ln(1 - \lambda_1)\}$ に等しい .

$$\begin{aligned} V(-1/\ln(1 - \lambda_1), \infty) &= \int_0^1 \max\{-s \ln(1 - \lambda_1), (1 - s)/\infty\} dH(s) \\ &= -\ln(1 - \lambda_1) \int_0^1 s dH(s) = -\ln(1 - \lambda_1) \end{aligned} \quad (1.48)$$

したがって, $1 - \lambda_1 = \exp\{-K \ln(1 - \lambda_1)\}$ より, $K = -1$ である .

以上より, 周辺分布がフレシエ分布であるような多変量確率変数の超過値は漸近的に以下の分布になる .

$$F_*(z_1, z_2) = \exp\{-V(z_1, z_2)\} \quad (1.49)$$

ただし, $V(z_1, z_2)$ は (1.42) 式で与えられる . この結果は, 周辺分布がフレシエ分布に従うことを前提にして同時分布が満たすべき性質を導出している . しかし, 周辺分布がフレシエ分布でない場合でも, 変数変換を用いて最大値が漸近的に従うコピュラを導き出すことができる . これは「周辺分布を変換してもコピュラは不変」というスクラーの定理を用いることで可能となる⁴⁰ . 具体的には, $u_i \equiv \Pr\{Z_i \leq z_i\} = \exp(-1/z_i)$ として, $z_i = -1/\ln u_i$ を $G(z_1, z_2) = \exp\{-V(z_1, z_2)\}$ に代入して以下のコピュラを得る .

$$C(u_1, u_2) = \exp\left\{-V\left(-\frac{1}{\ln u_1}, -\frac{1}{\ln u_2}\right)\right\} \quad (1.50)$$

1.B 損失額が一般化パレート分布に従う場合の VaR のテイルリスク

本補論では, Feller の安定分布の畳み込みの定理を用いて, 周辺分布が同一の裾指数を持つ一般化パレート分布に従う場合の VaR のテイルリスクを分析する .

周辺分布が同一の裾指数を持つ一般化パレート分布に従う独立な確率変数の和の性質に関しては, 正則変動する分布関数に関する畳み込みの定理 (Feller [1971] の p.278, Embrechts, Klüppelberg and Mikosch [1997] の Lemma 1.3.1) を使った考察がなされている (Geluk, Peng and Vries [2000]; Embrechts, McNeil and Straumann [2001]; Hyung and de Vries [2002]) . ここでは, その考察の結論をテイルリスクという観点を織り込んで説明する .

一般化パレート分布に従う互いに独立な 2 つの確率変数 Z_1, Z_2 があり, その分布関数は以下で表されるとする .

$$G_{\xi, \sigma}(x) = 1 - \left(1 + \xi \cdot \frac{x}{\sigma}\right)_+^{-1/\xi} \quad (1.51)$$

このとき, 2 つの確率変数の和 $Z_1 + Z_2$ の分布関数は, (1.51) 式の畳み込みとして以下で表すことができる .

$$H(x) \equiv \Pr\{Z_1 + Z_2 \leq x\} \equiv \int_0^x G_{\xi, \sigma}(x - y) dG_{\xi, \sigma}(y) \quad (1.52)$$

⁴⁰この変数変換を用いた考え方が妥当であることは, Resnick [1987] の Proposition 5.10 で証明されている .

ここで、 $\bar{G}_{\xi,\sigma}(x) \equiv 1 - G_{\xi,\sigma}(x)$ で定義される Z_1, Z_2 の関数 $\bar{F}_m(x)$ について、以下が成り立つ。

$$\bar{G}_{\xi,\sigma}(x) = \left(1 + \xi \cdot \frac{x - \theta}{\sigma}\right)_+^{-1/\xi} = x^{-1/\xi} \left(\frac{1}{x} + \frac{\xi(x - \theta)}{x\sigma}\right)_+^{-1/\xi} \quad (1.53)$$

ここで、(1.53) 式の最右辺のうち $(1/x + \xi(x - \theta)/x\sigma)_+^{-1/\xi}$ は緩慢変動する関数⁴¹であることから、Feller [1971] の p.278 (あるいは、Embrechts, Klüppelberg and Mikosch [1997] の Lemma 1.3.1) の結果により、 x が十分に大きいとき、関数 $\bar{H}(x) \equiv 1 - H(x)$ に関して以下が成り立つ。

$$\bar{H}(x) \approx x^{-1/\xi} \left\{ \left(\frac{1}{x} + \frac{\xi(x - \theta)}{x\sigma}\right)_+^{-1/\xi} + \left(\frac{1}{x} + \frac{\xi(x - \theta)}{x\sigma}\right)_+^{-1/\xi} \right\} = 2 \left(1 + \xi \cdot \frac{x - \theta}{\sigma}\right)_+^{-1/\xi} \quad (1.54)$$

したがって、2つの互いに独立な確率変数の和 $Z_1 + Z_2$ の分布関数は以下で表される。

$$H(x) \approx 1 - 2 \left(1 + \xi \cdot \frac{x}{\sigma}\right)_+^{-1/\xi} \quad (1.55)$$

一方、同じ一般化パレート分布に従う完全に依存する2つの確率変数の和は、 $2Z_1$ と同じ分布に従う。したがって、完全に依存する2つの確率変数の和の分布関数 $I(x)$ は、次のように求められる。

$$I(x) \equiv \Pr\{2Z_1 \leq x\} = \Pr\{Z_1 \leq x/2\} = G_{\xi,\sigma}(x/2) = 1 - \left(1 + \xi \cdot \frac{x}{2\sigma}\right)_+^{-1/\xi} \quad (1.56)$$

さて、一般的に、2つの分布関数 $H(x), I(x)$ に交点が存在する ($H(x) = I(x)$ に解が存在する) と、VaR の信頼水準をその交点での分布の累積確率よりも低くする場合、VaR にテイルリスクが発生する。 $\xi < 1$ では $H(x) = I(x)$ には解が存在し、この解からこの交点における分布の累積確率 $p(\xi)$ を求めることができる⁴²。

$$p(\xi) = 1 - 2 \left(1 + \frac{2^\xi - 1}{1 - 2^{\xi-1}}\right)_+^{-1/\xi} \quad (\xi < 1) \quad (1.57)$$

(1.57) 式の ξ に具体的な値を代入して計算すると、通常 VaR の信頼水準である 95 ~ 99% 信頼水準でテイルリスクが発生するためには、裾指数が 0.9 以上でなければならないことがわかる。裾指数が 0.9 以上というのは、1.1 次モーメントが発散するという非常に裾の厚い分布であり、少なくとも金融データではこうした分布は存在しにくいと考えられる。したがって、各証券の損失額が同一の一般化パレート分布に従う場合は、信頼水準を十分に高くとれば、VaR にテイルリスクは存在しないことがわかる。

⁴¹ 緩慢変動する関数とは、任意の $x > 0$ について、以下を満たす関数 $L(x)$ のことである。詳細は Feller [1971] を参照。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1$$

⁴² $\xi \geq 1$ の場合は、すべての x で $H(x) < I(x)$ が成立しているため、完全従属の場合が独立の場合を 1 次確率優越している。これは、単調増加な効用関数を持つ任意の投資家が完全従属の場合を常に選好することを意味している。したがって、この場合はポートフォリオ分散効果が働かず、むしろ逆に、ポートフォリオ分散が望ましくない結果をもたらす。このとき、VaR は劣加法性を満たさないが、常に 1 次確率優越しているポートフォリオのリスクが小さいと判断しているという意味で、テイルリスクは存在しない。なお、これと同様のケースは、Embrechts, McNeil and Straumann [2001] の Example 7 でも考察されている。

第2章 資産価格変動のコピュラとポートフォリオの信用リスク

本章では、前章でも扱った複数の変量間の関係を表現するコピュラを用いて、資産価格変動の相互依存構造に関する分析を行う。

まず、戸坂・吉羽 [2005] に沿って、コピュラの基本概念と比較指標などを整理し、正規、 t 、クレイトン、ガンベルおよびフランクコピュラを対象に、それらの性質を説明し、具体的なパラメータ推定方法や乱数発生方法等を整理して示すことで実務での具体的な利用方法を示す。パラメータ推定については、通常の教科書では2変量程度でしか示されていない尤度関数について、5変量までに対応できるように尤度関数を展開している。

次に、これらの技術を用いて資産価格変動などの実証分析を行う。戸坂・吉羽 [2005] で示された実例に加え、新谷・山田・吉羽 [2010] で主要国の株価指数を対象に収益率分布の相互依存関係を分析し、データへの適合度の高いコピュラの種類を実証的に調べた結果を示す。

こうした資産変動間のコピュラを踏まえ、新谷・山田・吉羽 [2010] に沿って、債務担保証券 (collateralized debt obligation; CDO) の信用スプレッドを評価する。特に、実務上用いられることが多い正規コピュラ以外のコピュラも用いて CDO 評価を行い、コピュラの種類の違いが評価結果に及ぼす影響を考察する。分析対象としては、通常の CDO と、その一部のトランシェから再証券化を行った CDO スクエアードを扱う。これらの分析の結果、ポートフォリオのリスク管理や CDO 評価においては、金融危機の可能性を考慮するならば、下方に裾依存性の強いコピュラを用いてモデル化を行う必要性が高いことを示す。最後に、コピュラを巡るいくつかの留意点を説明し、本章の結びとする。

2.1 はじめに

金融資産ポートフォリオの価格付けやリスク管理では、複数のリスクファクターが多変量確率分布に従うとして評価を行うことが多い。ここで重要な点は、各変量を単体で評価した分布 (周辺分布) の特徴と、周辺分布間の相互依存関係の特徴を正確に捉えることである。一般に、金融資産収益率の周辺分布については、正規分布と比べ厚い裾を持つ場合が多い。また、周辺分布間の相互依存関係については、分布の場所 (中心部か裾かなど) によって依存度合いが異なることが知られている。例えば、市場に何らかのストレスが生じると、多くの株価等が同日に急速に下落するケースが多く、2007年夏の米国サブプライム住宅ローン問題再燃時や2008年秋のリーマンショックなど金融危機と呼ばれる時期ではこうした現象が明確に観察されている。こうした事例は、複数の資産価格変動が下落する状態では依存度合いが強まるということを示唆する。

金融実務では、周辺分布間の多様な依存構造を扱うツールの1つとして、各変量の周辺分布と多変量の同時分布をつなぐ関数であるコピュラ (copula) が利用されることがある。コピュ

ラは、同時分布に含まれる情報の中から周辺分布間の相互依存関係だけを取り出して表現したものと考えることができる。多数の資産価格変動の同時分布を考える際には、各資産価格変動の分布を周辺分布として与えるとともに、資産価格変動間の相互依存関係をパラメトリックなコピュラで与えることにより、多資産価格変動の同時分布を構成することができる。このため、コピュラは、多数の資産からなるポートフォリオのリスク管理や信用リスクを有する多数の企業向け債務を原資産とする債務担保証券 (collateralized debt obligation; CDO) 等の商品評価でよく用いられている。

ポートフォリオのリスク管理や CDO 評価において最も頻繁に用いられているコピュラの種類は、正規コピュラである。正規コピュラでは相関パラメータを高く設定することにより、各変量の分布全体の依存度合いを強めることができるが、各変量の分布の裾での依存度合いだけを制御することはできない。すなわち、各変量が分布の中央付近にある通常の状態では依存度合いがさほど強くないのに対して、金融危機などが生じ、各変量が相互に依存度合いを強めつつ同時に分布の裾に陥るような現象は想定することができない。これは、正規コピュラを基にしたモデルでは、金融危機の可能性を十分に考慮することが難しいという問題を示唆している。

このようにコピュラは金融実務で注目されてきたが、コピュラのパラメータ推定や乱数の発生方法について包括的に解説した文献があまりなかったことから、戸坂・吉羽 [2005] ではコピュラの基本概念と比較指標などを整理し、正規、 t 、クレイトン (Clayton)、ガンベル (Gumbel) およびフランク (Frank) コピュラといった代表的なコピュラについて、パラメータ推定や乱数の発生方法を整理している。本章ではまずその内容を示し、活用事例を示す。

多変量の資産価格の非対称な変動を捉える実証研究としては Longin and Solnik [2001] や Poon, Rockinger and Tawn [2004] などが知られており、最近では Tsafack [2009] が米国とカナダの 2004 年までの週次株価収益率を用いて適合度の高いコピュラについて実証分析を行っている。この点について、本章では、日米欧の株価の日次収益率について最近の金融危機時を含めた 2009 年 9 月までのデータを用いて、収益率分布の裾での依存性がどのように推移したかを分析し、適合度の高いコピュラを分析する。その結果、収益率分布は下側裾依存性が強く、Tsafack [2009] の結果と同様に反転ガンベルコピュラの適合度が高いほか、自由度の低い t コピュラなど下側依存性の強いコピュラの適合度が総じて高いことを示す。

コピュラを用いた CDO の信用スプレッドの評価については、Li [2000] がその手法を提示した後、iTraxx などの CDO の市場価格に適合するコピュラの種類観点でさまざまな研究が進められている。最近では、Burtschell, Gregory and Laurent [2009] は、少数のパラメータで表現されるさまざまなコピュラを用いた CDO 評価モデルについて、金融危機前の 2005 年 8 月における iTraxx の CDO の市場価格データを説明しうるモデルを比較検討している。一方、本章では、CDO の市場価格データへのフィッティングを扱うのではなく、CDO に含まれる各債務の相互依存関係をヒストリカルデータから特定できる場合に、利用するコピュラの種類の違いによって CDO の信用スプレッドがどのように変化するかを比較検討する。具体的には、前述のように日米欧の株価収益率のヒストリカルデータは下側裾依存性が強かったことを踏まえ、株価と一定の関係を持つクレジット資産状態にも同様の特性が存在すると想定する。こうした問題意識のもと、CDO の信用スプレッド評価において通常用いられる正規コピュラに代えて、下側裾依存性の強いコピュラを用いた場合に評価結果がどのように変わるのかを比較検討する。さらに、CDO のメザインタランシェから再証券化された CDO スクエアードについても、コピュラの違いが信用スプレッドの評価結果に及ぼす影響を考察する。その結果、正規コピュラのような下側裾依存性の弱いコピュラでは CDO トランシェの損失率を過小評価する可能性を

示し、CDO スクエアドでは参照するインナー CDO に含まれる末端参照債務の重複度もこうした過小評価を広げる可能性があることを示す。

本章の構成は以下のとおりである。まず、2.2 節では、コピュラの定義、性質に加え、パラメータ推定方法と乱数発生方法を概説する。2.3 節、2.4 節では、正規および t コピュラ、クレイトン、ガンベルおよびフランクコピュラを対象に、それらの性質、具体的なパラメータ推定方法や乱数発生方法等を示す。2.5 節では、コピュラを用いた実証分析を行い、若干の考察を加える。また、日米欧の 2000 年以降の日次株価収益率に関して、下側裾依存性の推計を行うとともに、データへの適合度の高いコピュラを実証的に調べる。2.6 節では、コピュラを用いて CDO の信用スプレッドを評価する問題を取り上げ、コピュラの種類の違いにより、各トランシェの信用スプレッドがどのように変化するかを検討する。2.7 節では、コピュラを巡るいくつかの留意点を説明する。最後に、2.8 節で本章をまとめる。

2.2 コピュラ

2.2.1 コピュラの定義

n 種類のリスクファクターを想定し、それらを確率変数 X_1, \dots, X_n で表す。複数のリスクファクターの確率的変動を同時に捉えることは、確率変数 X_1, \dots, X_n の同時分布関数 $F(x_1, \dots, x_n)$ の挙動を表すことに等しい。周辺分布関数 F_1, \dots, F_n と、同時分布関数 $F(x_1, \dots, x_n)$ の間には、次の関係がある。

スカラー (Sklar) の定理 周辺分布関数 F_1, \dots, F_n を持つ連続な n 変量同時分布関数を F とすると、

$$\Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (2.1)$$

を満たす関数 C が一意に存在する。

この $C(\cdot)$ がコピュラと呼ばれる関数である¹。つまり、コピュラ $C(\cdot)$ に周辺分布関数 F_1, \dots, F_n を適用することで生成される $C(F_1, \dots, F_n)$ は、周辺分布を区間 $[0,1]$ の一様分布とする同時分布関数である。これにより、連続な多変量分布関数は、リスクファクター単独の挙動を表現する周辺分布関数 F_1, \dots, F_n とそれらリスクファクター間の依存構造 (コピュラ C) に分解することができる。

さらに、この定理から次のことがわかる。 n 変量同時分布関数 F が、周辺分布関数 F_1, \dots, F_n とコピュラ C を持つとすれば、任意の $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ (ただし、 $u_i \in [0, 1]$) で、(2.2) 式の関係を得る。

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)) \quad (2.2)$$

この C は、各周辺分布が区間 $[0,1]$ の一様分布の同時分布関数となる。また、コピュラの密度関数として $c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n}$ 、 X_i の確率密度関数を $f_i(x_i)$ 、同時分布関数 F の密度関数を f とすると、(2.1) 式から次式を得る。

$$f(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \quad (2.3)$$

¹コピュラの数学的な定義や性質の詳細は、Nelsen [2006]; Bouyé *et al.* [2000] を参照。なお、塚原 [2008] では「接合分布関数」と訳されている。

2.2.2 コピュラの典型例とその特徴

以下では、コピュラ $C(\cdot)$ の典型例をいくつか挙げて、その特徴を説明する。まず、変量間の相関構造を行列で表現するコピュラがある。そうしたコピュラの代表例としては、正規コピュラ、 t コピュラが挙げられる。次に、変量間の相関構造を1種類のパラメータで表現するコピュラがある。この代表例としては、1パラメータのアルキメディアンコピュラがあり、それには、主な例として、クレイトンコピュラ、ガンベルコピュラ、フランクコピュラが含まれる。具体的には、これら5つのコピュラは以下の式で表現される。

$$\text{正規コピュラ: } C(u_1, \dots, u_n) = \Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)) \quad (2.4)$$

$$t \text{コピュラ: } C(u_1, \dots, u_n) = t_{\nu, \Sigma}(t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_n)) \quad (2.5)$$

$$\text{クレイトンコピュラ: } C(u_1, \dots, u_n) = \left(\sum_{j=1}^n u_j^{-\alpha} - n + 1 \right)^{-1/\alpha}, \alpha > 0 \quad (2.6)$$

$$\text{ガンベルコピュラ: } C(u_1, \dots, u_n) = \exp\left\{-\left(\sum_{j=1}^n (-\ln u_j)^{\gamma}\right)^{1/\gamma}\right\}, \gamma > 1 \quad (2.7)$$

$$\text{フランクコピュラ: } C(u_1, \dots, u_n) = -\frac{1}{\delta} \ln \left(1 + \frac{\prod_{j=1}^n (e^{-\delta u_j} - 1)}{(e^{-\delta} - 1)^{n-1}} \right), \delta > 0 \quad (2.8)$$

ただし、 $\Phi_{\Sigma}(\cdot)$ は相関行列 Σ の n 変量標準正規分布関数²、 $\Phi^{-1}(\cdot)$ は1変量標準正規分布関数の逆関数、 $t_{\nu, \Sigma}(\cdot)$ は自由度 ν 、相関行列 Σ の n 変量 t 分布関数³、 $t_{\nu}^{-1}(\cdot)$ は自由度 ν の1変量 t 分布関数の逆関数である。

これら5つのコピュラ（正規、 t 、クレイトン、ガンベルおよびフランク）における、各変量間の依存関係の特徴を概観しよう。順位相関（詳細は後述する）が等しい2変量乱数 (u_1, u_2) を、5つの2変量コピュラを用いて1,000個発生させて、それらを2次元の散布図にしたものが図2.1である⁴。ここで、 $u_i \rightarrow 0$ と $u_i \rightarrow 1$ は周辺分布関数の両裾の極限に対応している。図2.1からは、コピュラによって、変量間の依存構造が異なっていることがわかる。

まず、正規コピュラと t コピュラに注目してみよう。それらの (u_1, u_2) 平面の $(1,1)$ 付近と $(0,0)$ 付近をみると、いずれのコピュラでも、サンプルは45度線付近に比較的集まっているが、正規コピュラの方がばらつき度合いが大きいに窺われる。これは、図の右上側（各変量とも1に近い側）と左下側（同0に近い側）で、 t コピュラは、正規コピュラに比べて、相対的に、一方の変量で大きな変動が起きたときに他方の変量に同方向の変動が起こりやすいことを示している。その一方で、 $(1,1)$ 付近と $(0,0)$ 付近から外れた領域では、 t コピュラでは、 $(0,1)$ あるいは $(1,0)$ に近いサンプルも発生している。これは、 t コピュラは、正規コピュラと比較して、相対的に、一方の変量で大きな変動が起きたときには他方の変量に逆方向の変動も起こりやすいことを示唆している。

² $\Phi_{\Sigma}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{|\Sigma|}} \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \exp\left(-\frac{1}{2}(z_1, \dots, z_n)\Sigma^{-1}(z_1, \dots, z_n)^{\top}\right) dz_1 \dots dz_n$ である。

³ $t_{\nu, \Sigma}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\Gamma((\nu+n)/2)}{\Gamma(\nu/2)(\nu\pi)^{n/2} \sqrt{|\Sigma|}} \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \left(1 + \frac{1}{\nu}(z_1, \dots, z_n)\Sigma^{-1}(z_1, \dots, z_n)^{\top}\right)^{-\frac{\nu+n}{2}} dz_1 \dots dz_n$ である。ただし、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数で、 $\Gamma(x) \equiv \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ で定義される。また、 $|\Sigma|$ は相関行列 Σ の行列式であり、 $(z_1, \dots, z_n)^{\top}$ はベクトル (z_1, \dots, z_n) の転置を表す。

⁴ここでは、全てのコピュラで、順位相関を表す「ケンドールのタウ」が0.75となるようにパラメータを設定した。具体的には、正規コピュラの相関係数を0.9239、 t コピュラの相関係数を0.9239、自由度を3、クレイトンコピュラの α を6、ガンベルコピュラの γ を4、フランクコピュラの δ を14.14とした。

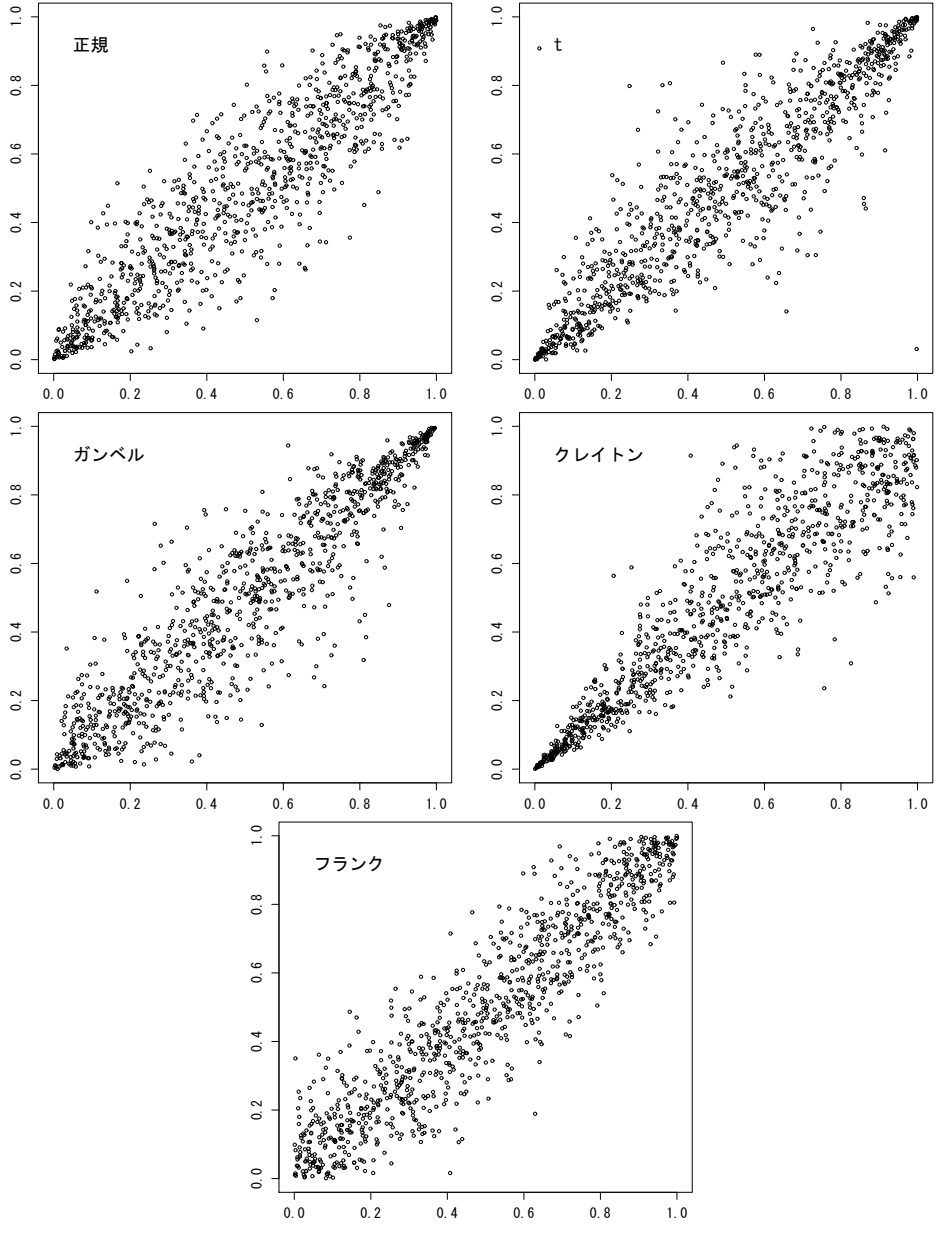


図 2.1: 各種 2 変量コピュラに従う乱数の散布図 (横軸: u_1 , 縦軸: u_2)

次に、残りの3種類のコピュラをみてみよう。クレイトンコピュラでは、変量間の依存度合いは、相対的に左下側で強く、右上側で弱い。ガンベルコピュラでは、クレイトンコピュラとは逆に、変量間の依存度合いは、相対的に左下側で弱く、右上側で強い。これらに対し、フランココピュラでは、変量間の依存度合いが強い領域はみられない。

コピュラで規定される同時分布のイメージを掴むため、2変量の同時分布で各周辺分布を標準正規分布とし、5種類のコピュラを用いて構成される同時分布の密度関数の等高線を描くと図2.2のようになる⁵。

このように、コピュラによって、表現される変量間の依存関係に特徴がある。したがって、市場等で実際に観測される各リスクファクターの変動から、それらの間に一定の依存関係を推論することができたならば、そのような依存関係を近似的に表すことが可能なコピュラを適切に選択すればよい。それによって、リスクファクター間の依存関係を織り込んで、リスクファクターの将来的な確率変動をシミュレーションによって表現することができる。

2.2.3 コピュラの性質：分布の裾での依存関係

ここでは、2変量を仮定し、コピュラを用いて、分布の裾での変量間の依存関係を考察する。以下、分布の裾での変量間の依存関係を示す指標を定義する。

連続な分布関数 F_1, F_2 に従う確率変数をそれぞれ X_1, X_2 とする。 X_1, X_2 の「上側裾依存係数」を次の極限值として定義する。

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} \Pr[F_2(X_2) > u \mid F_1(X_1) > u] \quad (2.9)$$

(2.9) 式は、閾値 u を1に近づけた際、 X_1 の分布関数が u より大きい ($F_1(X_1) > u$) という条件で、 X_2 の分布関数が u より大きい ($F_2(X_2) > u$) 確率である。このとき、 $0 < \lambda_U \leq 1$ ならば、 X_1, X_2 は「上側で漸近従属」の関係にあるといい、 $\lambda_U = 0$ ならば、 X_1, X_2 は「上側で漸近独立」の関係にあるという。(2.9) 式右辺を変形すると、 X_1, X_2 のコピュラを C とすることで、以下を得る。

$$\begin{aligned} & \lim_{u \rightarrow 1^-} \Pr(X_2 > F_2^{-1}(u) \mid X_1 > F_1^{-1}(u)) \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - \Pr(X_1 \leq F_1^{-1}(u)) - \Pr(X_2 \leq F_2^{-1}(u)) + \Pr(X_1 \leq F_1^{-1}(u), X_2 \leq F_2^{-1}(u))}{1 - \Pr(X_1 \leq F_1^{-1}(u))} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} \end{aligned} \quad (2.10)$$

(2.10) 式右辺の分子、分母ともに $u \rightarrow 1^-$ で0に収束することから、 $C(u_1, u_2)$ が u_1, u_2 いずれについても $(0, 1)$ の区間で微分可能な関数であるとすると、ロピタル (L'Hospital) の公式から⁶、(2.11) 式に変形することができる。

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \left\{ \left(1 - \frac{\partial}{\partial s} C(s, t) \Big|_{s=t=u} \right) + \left(1 - \frac{\partial}{\partial t} C(s, t) \Big|_{s=t=u} \right) \right\} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \{ \Pr(U_2 > u \mid U_1 = u) + \Pr(U_1 > u \mid U_2 = u) \} \end{aligned} \quad (2.11)$$

⁵ここでは、全体の依存度合いを調整するためケンドールのタウを0.5に固定し、tコピュラの自由度は3とした。

⁶ロピタルの公式が適用できる条件については、Rudin [1976] の Theorem 5.13 を参照。

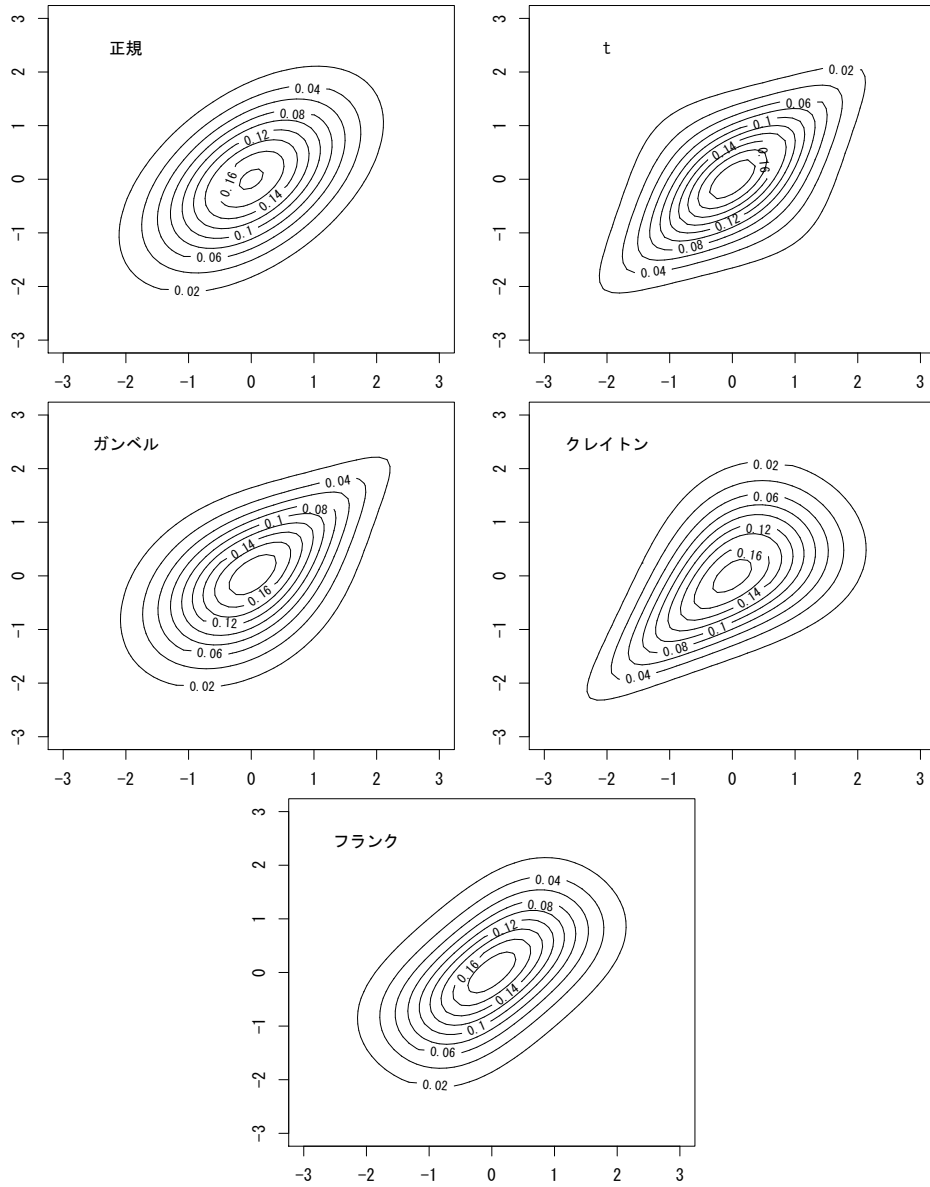


図 2.2: 2 変量同時密度の等高線

備考: Yan [2007] の copula パッケージを用いて作成 .

ここで、 U_1, U_2 は区間 $[0,1]$ の一様分布に従う確率変数である。このとき、 $C(u_1, u_2) = C(u_2, u_1)$ であるならば、次式が得られる。

$$\lambda_U = 2 \lim_{u \rightarrow 1^-} \Pr(U_1 > u | U_2 = u) \quad (2.12)$$

同様に、 X_1, X_2 の「下側裾依存係数」を (2.13) 式で定義する。

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \Pr[F_2(X_2) < u | F_1(X_1) < u] \quad (2.13)$$

(2.13) 式は、閾値 u を 0 に近づけた際、 X_1 の分布関数が u より小さい ($F_1(X_1) < u$) という条件で、 X_2 の分布関数が u より小さい ($F_2(X_2) < u$) 確率である。上側の場合と同様、 $0 < \lambda_L \leq 1$ ならば、 X_1, X_2 は「下側で漸近従属」の関係にあるといい、 $\lambda_L = 0$ ならば、 X_1, X_2 は「下側で漸近独立」の関係にあるという。(2.10) 式と同様の変形により、次式を得る。

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u} \quad (2.14)$$

$C(u_1, u_2) = C(u_2, u_1)$ であるならば、以下の関係を得る。

$$\lambda_L = 2 \lim_{u \rightarrow 0^+} \Pr(U_1 < u | U_2 = u) \quad (2.15)$$

なお、上側でも下側でも漸近独立である場合、 X_1, X_2 は「漸近独立」の関係にあるという。

本章では、下側裾依存性の推計の際、極限をとった (2.13) 式の代わりに一定の確率 u を条件とした

$$\lambda_L(u) = \Pr[F_2(X_2) < u | F_1(X_1) < u] \quad (2.16)$$

を下側裾依存性の推計値として用いる。(2.16) 式の条件付き確率は同時分布 $F(\cdot, \cdot)$ やコピュラ $C(\cdot, \cdot)$ を用いると次式で書き直すこともできる。

$$\lambda_L(u) = \frac{F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(u))}{u} = \frac{C(u, u)}{u} \quad (2.17)$$

2 変数のコピュラについて、(2.17) 式の下側裾依存性 $\lambda_L(u)$ とその極限值である (2.13) 式の下側裾依存係数 λ_L を示すと表 2.1 のとおりである。t コピュラでは自由度 ν が低いほど大きな下側裾依存係数となっているが、正規コピュラでは下側裾依存係数は 0 になり漸近独立となることがわかる（導出の詳細は 2.3 節を参照）。クレイトンコピュラでは下側で漸近従属し上側では漸近独立となっている。ガンベルコピュラでは逆に下側では漸近独立であり上側では漸近従属している。フランクコピュラでは上側でも下側でも漸近独立である（クレイトン、ガンベル、フランクの各コピュラでの裾依存係数の導出は 2.4 節を参照）。リスク管理上は下側で漸近従属することが問題となる場合が多い。そこで、下側で漸近従属するようにガンベルコピュラを反転させた反転ガンベル (rotated Gumbel) コピュラを導入する⁷。反転ガンベルコピュラは (2.18) 式で表現される。

$$\text{反転ガンベルコピュラ: } C(u_1, \dots, u_n) = \sum_{j=1}^n u_j^{-1} + \exp\left\{-\left(\sum_{j=1}^n (-\ln(1 - u_j))^\gamma\right)^{1/\gamma}\right\} \quad (2.18)$$

表 2.1 に示すように、反転ガンベルコピュラの裾依存係数はガンベルコピュラの裾依存係数とは上側・下側がちょうど逆になっていることがわかる。

⁷反転ガンベルコピュラは、下側での裾依存性を考慮する際によく用いられる (Tsafack [2009]; 小宮 [2003] など)。

表 2.1: 2 変量コピュラの下側裾依存係数

コピュラ	下側裾依存性 $\lambda_L(u)$	下側裾依存係数 λ_L
正規	$\Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(u))$	0
t	$\frac{t_{\nu, \Sigma}(t_{\nu}^{-1}(u), t_{\nu}^{-1}(u))}{u}$	$2t_{\nu+1} \left(-\sqrt{\frac{(1-\rho)(\nu+1)}{(1+\rho)}} \right)$
クレイトン	$(2 - u^{\alpha})^{-1/\alpha}$	$2^{-1/\alpha}$
ガンベル	$u^{2^{1/\gamma}-1}$	0
反転ガンベル	$2 + \frac{(1-u)^{2^{1/\gamma}-1}}{u}$	$2 - 2^{1/\gamma}$
フランク	$-\frac{1}{\delta u} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\delta u} - 1)^2}{(e^{-\delta} - 1)} \right)$	0

備考: 正規コピュラ, t コピュラのパラメータ Σ は非対角要素を相関パラメータ ρ とした 2×2 の行列である.

2.2.4 コピュラの性質：順位相関 - 分布の全体での依存の程度

2.2.3 節では, 分布の裾での変量間の依存関係に注目した. しかし, 変量間の依存関係といえ
ば, 一般的には, 分布全体での変量間の依存関係を表すことが多い. ここでは, 分布全体での
変量間の依存関係と, 分布の裾での変量間の依存関係の間にどのような関連性があるのかを説
明する.

変量間の依存度合いを表す指標として最もよく使われているものは, 「線形相関 (相関係数)」
である. N 個の 2 変量データ $(x_1^1, x_2^1), (x_1^2, x_2^2), \dots, (x_1^N, x_2^N)$ を観測したとすると, これらの
データの線形相関は次式で推定される.

$$\rho = \frac{\sum_{j=1}^N (x_1^j - \bar{x}_1)(x_2^j - \bar{x}_2)}{\sqrt{\sum_{j=1}^N (x_1^j - \bar{x}_1)^2} \sqrt{\sum_{j=1}^N (x_2^j - \bar{x}_2)^2}}, \quad \text{ただし } \bar{x}_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_i^j \quad (2.19)$$

線形相関は, 2 つの変量の間, 線形 (直線的) な関係を捉える指標であって, その点で, 直
線的な関係にない変量間の依存関係を表現することは基本的にできない⁸. 線形相関のこうした
問題を回避する, 変量間の依存度合いを表す別の指標として, 「順位相関」と呼ばれる相関があ
る. 順位相関は, 各変量のデータの値そのものではなく, 何らかの規準による各変量のデー
タの「順位」に基づく相関である⁹.

順位相関にはいくつかの種類が考えられているが, 実務でよく用いられるものに, 「ケン
ドールのタウ (τ_K)」と「スピアマンのロー (ρ_S)」がある.

ここで, (X_1^i, X_2^i) と (X_1^j, X_2^j) を同時分布関数 $F(x_1, x_2)$, 周辺分布 $F_1(x_1), F_2(x_2)$ に従う確
率変数ベクトルとする.

まず, ケンドールのタウは, 2 つの確率変数ベクトルを用いて, 次式で定義される指標である.

$$\begin{aligned} \tau_K &\equiv \Pr\{(X_1^i - X_1^j)(X_2^i - X_2^j) > 0\} - \Pr\{(X_1^i - X_1^j)(X_2^i - X_2^j) < 0\} \\ &= 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x_1, x_2) dF(x_1, x_2) - 1 \end{aligned} \quad (2.20)$$

⁸これを Mina and Xiao [2001] での具体例で示す. Z を確率変数とし, これを変換した確率変数 $X = \exp(Z)$, $Y = \exp(5Z)$ を考える. X と Y には, 非線形ではあるが, 明らかに非常に強い依存関係がある. しかし, 線形相関を計算すると, その値は 0.0004 と非常に小さく, X と Y の間には依存関係はほとんどないことになる.

⁹順位相関の詳細は, 柳川 [1982]; Kruskal [1958]; Joe [1997]; Nelsen [2006] 等を参照.

X_1 と X_2 の間に, $X_1^i > X_1^j$ かつ $X_2^i > X_2^j$ という関係が常に成立する (concordant <調和>) ならば, $\tau_K = 1$ となり, $X_1^i > X_1^j$ かつ $X_2^i < X_2^j$ という関係が常に成立する (discordant <非調和>) ならば, $\tau_K = -1$ となる. また, $-1 \leq \tau_K \leq 1$ が成立する.

一方, スピアマンのロー ρ_S は, 周辺分布 $F_1(x_1), F_2(x_2)$ の線形相関として, 以下のように定義される ($-1 \leq \rho_s \leq 1$ である) ^{10,11,12}.

$$\begin{aligned}\rho_S &\equiv \frac{\text{cov}(F_1(X_1), F_2(X_2))}{\sqrt{\text{var}(F_1(X_1))}\sqrt{\text{var}(F_2(X_2))}} \\ &= 12\text{cov}(F_1(X_1), F_2(X_2)) \quad (2.21) \\ &= 12 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{F(x_1, x_2) - F_1(x_1)F_2(x_2)\} dF_1(x_1)dF_2(x_2)\end{aligned}$$

ケンドールのタウとスピアマンのローは, コピュラを用いて表現することができる. $u_1 = F_1(x_1)$, $u_2 = F_2(x_2)$ と置いて, コピュラを $C(u_1, u_2)$ とすると, これらの関係は以下のように書き換えられる¹³.

$$\tau_K = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1 \quad (2.22)$$

$$\rho_S = 12 \int_0^1 \int_0^1 \{C(u_1, u_2) - u_1 u_2\} du_1 du_2 \quad (2.23)$$

つまり, コピュラの関数形が与えられれば, ケンドールのタウとスピアマンのローは, それぞれ (2.22) 式と (2.23) 式で求めることができる^{14,15}. 2.2.2 節で示した各コピュラのパラメータとケンドールのタウ τ_K には表 2.2 の関係が成立する (導出は 2.A 節を参照).

表 2.2: コピュラのパラメータと順位相関

コピュラ	パラメータ	ケンドールのタウ τ_K
正規	ρ	$(2/\pi) \arcsin \rho$
t	ρ, ν	$(2/\pi) \arcsin \rho$
クレイトン	α	$\alpha/(\alpha + 2)$
ガンベル	γ	$1 - 1/\gamma$
反転ガンベル	γ	$1 - 1/\gamma$
フランク	δ	$1 + (4/\delta)\{D_1(\delta) - 1\}$

備考: 表中の $D_1(\delta)$ は 1 次のデバイ (Debye) 関数で $D_1(\delta) \equiv \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \frac{t}{e^t - 1} dt$ で与えられる.

¹⁰(2.21) 式の 2 番目の等号で出てくる「12」という値は, 一様分布の分散 (1/12) に由来するものである.

¹¹スピアマンのローは, 上述したケンドールのタウの定義で用いられる 'concordant' と 'discordant' の考え方を使って定義することも可能である. その詳細は, 例えば, Nelsen [2006] を参照.

¹²脚注 8 の例では, X と Y の順位相関は, ケンドールのタウでもスピアマンのローでも 1 となる.

¹³詳細は, Schweizer and Wolff [1981]; Nelsen [2006] 等を参照.

¹⁴上述の図 2.1 を作成するに当たっては, 分布全体での 2 変量間の依存度合いを一定としたうえで各コピュラの依存関係を比較することができるように, ケンドールのタウを定数 (0.75) として与えて, 各コピュラのパラメータを定めた. 図 2.2 ではケンドールのタウを 0.5 として与えた.

¹⁵このように, ケンドールのタウやスピアマンのローといった順位相関は, コピュラで表現可能である一方, 線形相関は, 周辺分布にも依存し, コピュラだけでは表現されない. つまり, 線形相関は, 変量間の依存構造 (コピュラ) と各変量特有の構造 (周辺分布) を分けて捉えていない. したがって, 線形相関は変量間の依存構造を示す指標としては必ずしも十分であるといえないことになる.

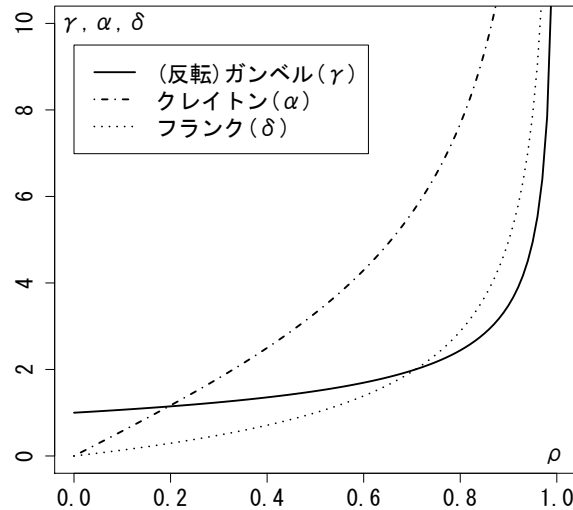


図 2.3: 正規コピュラの ρ と同一のケンドールのタウ τ_K を持つパラメータ

表 2.2 より, (1) 上記 5 つのコピュラには, ケンドールのタウの解析的な表現があること, (2) クレイトン, ガンベル, フランク, 正規の 4 つのコピュラでは, コピュラのパラメータとケンドールのタウ τ_K が 1 対 1 に対応することがわかる. (2) からは, これらの 2 変量コピュラでは, ヒストリカルデータからケンドールのタウ τ_K を求め, それと表 2.2 で示された式からコピュラのパラメータを推定できることになる. ケンドールのタウ (またはスピアマンのロー) は, 周辺分布の形状を特定することなく, ヒストリカルデータから計算され¹⁶, コピュラのパラメータを求めることができるという利点がある¹⁷. 上記 5 つのコピュラでは, 表 2.2 の関係が, 2 変量の場合だけでなく, 多変量の場合でも, 「任意の 2 変量のケンドールのタウ」で成立する.

一般的には, 正規コピュラのパラメータ ρ で相関を把握することが多いことから, 2.6 節の分析では順位相関を正規コピュラのパラメータ ρ で表示する. 具体的に正規コピュラの ρ と同一のケンドールのタウ τ_K を持つ他のコピュラのパラメータは図 2.3 のように与えられる.

2.2.5 コピュラのパラメータ推定

以降では, 2.2.2 節で説明したコピュラを対象に, コピュラの各種パラメータの推定方法や, それらのコピュラを用いたポートフォリオのリスク量の算出手法について具体例を交えて示す.

実務でコピュラを用いる際には, まずは, リスク評価の対象とするポートフォリオの特性等に基づいて, 適当と考えられるコピュラを選択することになる. 次に必要となるのが, そのコ

¹⁶ N 個のヒストリカルデータ $(x_1^1, x_2^1), \dots, (x_1^N, x_2^N)$ が与えられたとし, タイデータはないと仮定する. $(x_1^i - x_1^j)(x_2^i - x_2^j) > 0 (< 0)$ となる (i, j) の組合せの数を $P (Q)$ とすると, (2.20) 式のケンドールのタウの推定値 $\hat{\tau}_K$ は, 次式で求められる.

$$\hat{\tau}_K = \frac{P - Q}{P + Q} = \frac{2(P - Q)}{N(N - 1)}$$

この推定は基本的な統計量の算出であり, 例えば R では標本相関を求める標準関数にオプション指定を行うことで求められる.

¹⁷ コピュラのパラメータ推定を, 順位相関をデータから求めたうえで行う場合には, 周辺分布を直接用いる必要はない. 一方, コピュラのパラメータ推定を, 最尤法を用いて行う際には, 周辺分布を仮定する必要がある.

ピュラの各種パラメータを推定することである。

ここでは、コピュラの選択が行われたとしたうえで、このコピュラのパラメータ推定手法を取り上げる。実務で一般的に用いられているコピュラのパラメータ推定手法は、リスクファクターのヒストリカルデータを用いる方法である。

ヒストリカルデータを用いたパラメータ推定は、例えば、以下のように最尤法を用いて行える。 n 個の変量を仮定する。このとき、各変量は N 個のヒストリカルデータを持つとする。第 i 変量の第 j 番目のヒストリカルデータを x_i^j と表す ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, N$)。第 i 変量の周辺分布関数を、パラメータを ψ_i として $F_i(\cdot; \psi_i)$ 、コピュラの密度関数を、 ξ をパラメータとして $c(\cdot; \xi)$ とする。このとき、対数尤度関数は、(2.3) 式を用いることで、(2.24) 式で与えられる。

$$l(\psi_1, \dots, \psi_n, \xi) = \sum_{j=1}^N \ln c((F_1(x_1^j; \psi_1), \dots, F_n(x_n^j; \psi_n); \xi) + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \ln f_i(x_i^j; \psi_i) \quad (2.24)$$

(2.24) 式で最尤推定を行うということは、コピュラのパラメータの推定と周辺分布の確率密度関数のパラメータの推定を同時に行うことにほかならない。しかし、この方法は、全てのパラメータを同時に推定しようとするため、最適化の計算が複雑になり、計算負荷が大きいという難点を有する。このため、先行研究では、まず周辺分布を特定したうえで、その後にコピュラのパラメータ推定を行うことが多い。例えば、周辺分布のパラメータ (ψ_i) を先に最尤推定したうえで、(2.24) 式に与え、(2.24) 式を最大化するパラメータ (ξ) を推定する方法 (Mashal and Naldi [2002] 等) や、周辺経験分布関数 $\hat{F}_i(\cdot)$ を求めてから、(2.24) 式右辺第 1 項を最大化するパラメータ (ξ) を推定する方法 (Romano [2002] 等) が提案されている。

Bouyé *et al.* [2000] では、周辺分布が指数分布とガンマ分布、依存構造が正規コピュラである 2 変量同時分布を対象に、(2.24) 式で最尤推定を行う方法とその代替方法でそれぞれ推定されたパラメータの比較を行っている。具体的には、次のような手続きを採用している。まず、(a) 与えられた同時分布に従う乱数を 1,000 個発生させる。次に、(b) この乱数データを用いて、(2.24) 式で最尤推定を行う方法とその代替方法で、それぞれパラメータを推定する。この (a) と (b) の手続きを 2,500 回繰り返す。Bouyé *et al.* [2000] は、こうして各方法で得られたパラメータ推定値の分布の形状を比較した結果、それらにはほとんど差がないことを示した。このことから、上記のような代替方法を用いて、(2.24) 式のパラメータを求めることは、実務的には一定の範囲で許容されると考えられる。

以下では、上述の代替方法のうち、周辺分布のパラメータを最尤推定したうえで、コピュラのパラメータを最尤推定する方法 (Mashal and Naldi [2002] 等) を採用する¹⁸。

2.2.6 コピュラの選択規準

前小節では、コピュラの選択が行われたとしたうえで、このコピュラのパラメータ推定手法を説明した。次に、コピュラを選び出す規準に焦点を当てる。その選択規準の 1 つとして、対象とする実際のデータ (ヒストリカルデータ) の経験的な同時分布と、コピュラによって求められた同時分布との相違が最も少ないことが考えられる。以下では、この規準を検討する。

¹⁸いくつかのコピュラについては、(2.20) あるいは (2.22) 式を基に、2 変量データのケンドールのタウとコピュラのパラメータとの解析的関係を求めることができるため、周辺分布を仮定することなく、コピュラのパラメータの推定が行える (2.A 節を参照)。

経験的な同時分布から，周辺分布をその経験分布で与えて導いたコピュラを「経験コピュラ」と呼ぶ．

経験コピュラは，次のように求められる． N 個の n 変量データ $(x_1^1, \dots, x_n^1), \dots, (x_1^N, \dots, x_n^N)$ を観測したとする．第 i 変量の値を小さい順に並べ替え， x_i^k ($k = 1, \dots, N$) が r_i^k 番目になったとする (r_i^k は $1, \dots, N$ の整数をとる)．これから，第 i 変量が $X_i \leq x_i^k$ となる頻度は r_i^k/N となることを用いることで，第 i 変量の周辺経験分布を得ることができる．次に，同時分布は，周辺経験分布関数の値が t_i/N ($t_i = 1, \dots, N$) であるという条件で，コピュラ C を用いて $C(t_1/N, \dots, t_n/N)$ となる．この同時分布は， $(r_1^k \leq t_1, \dots, r_n^k \leq t_n)$ を満たすデータ k の数をデータの総数 N で除した値を用いて，推定可能である．したがって，コピュラ $C(t_1/N, \dots, t_n/N)$ に対応する経験コピュラ $\hat{C}(t_1/N, \dots, t_n/N)$ は，次式で表される．

$$\hat{C}(t_1/N, \dots, t_n/N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \prod_{i=1}^n 1_{\{r_i^k \leq t_i\}} \quad (2.25)$$

上述のように，コピュラを選択する規準としては，(2.25) 式の経験コピュラとの相違が最も少ないコピュラを選択することが考えられる．先行研究 (Romano [2002]) では，対象とするコピュラの集合を $\{C_l\}_{1 \leq l \leq L}$ として，その「相違」を (2.26) 式で定義し，それを最小化する C_l を採用することを提案している¹⁹．

$$d_n(\hat{C}, C_l) \equiv \sqrt{\sum_{t_1=1}^N \cdots \sum_{t_n=1}^N \left[\hat{C}\left(\frac{t_1}{N}, \dots, \frac{t_n}{N}\right) - C_l\left(\frac{t_1}{N}, \dots, \frac{t_n}{N}\right) \right]^2} \quad (2.26)$$

以上，コピュラを選択規準の一例として，経験コピュラとの「相違」を最小にするコピュラを選択するという考え方を説明したが，この規準には，1 点留意すべきことがある．それは，比較を行う各コピュラのパラメータ数あるいは自由度が同程度であるとの前提が暗に置かれている点である．つまり，この規準は，同程度のパラメータ数を持つコピュラを候補に考えたときに，その中で最も望ましいコピュラを選び出すために使用すべき規準である．これに対し，互いに異なるパラメータ数を有するコピュラを前提として，Breymann, Dias and Embrechts [2003] は，対数尤度をパラメータ数で調整した指標である AIC (Akaike information criteria) を，コピュラを選択規準としている．同様の考え方で，包含関係のないモデルの選択への対応も考えて，BIC (Schwarz の Bayesian information criteria) をコピュラを選択規準とする場合もある．例えば Tsafack [2009] では，AIC と BIC の双方をコピュラを選択規準に用いている．

2.2.7 コピュラを用いた乱数発生

金融商品の価格やリスクの特性を評価する際，各リスクファクター (確率変数) の分布が個別に求められれば，あるコピュラを特定することにより，それらの組合せで表現される同時分布から金融商品の価格やリスクの特性を評価することが可能となる．解析的な評価が難しい場合でも，求めた同時分布 (コピュラと各周辺分布) に従う乱数を発生させ，シミュレーションによって評価を行うことができる．ここでは，その手順を説明する．

一般に，ある分布関数 F に従う乱数 X を発生させるには， $[0,1]$ の一様分布に従う乱数 U を用いて， $X = F^{-1}(U)$ と変換すればよいことが知られている²⁰．一方，コピュラは，周辺分布

¹⁹ここでは，(2.26) 式をコピュラを選択規準として用いたが，(2.26) 式は，あるコピュラのパラメータが未知である場合に，その推定に用いることもできる．具体的には，(2.26) 式を最小化するパラメータを推定量とすればよい．

²⁰この方法を逆関数法と呼ぶ．詳しくは伏見 [1989] を参照．

として $[0,1]$ の一様分布関数を持ち、特定の依存構造を持つ同時分布関数である。つまり、コピュラ $C(u_1, \dots, u_n)$ に従う一様乱数 U_1, \dots, U_n を発生させることができれば、任意の周辺分布関数 F_i で、 $X_i = F_i^{-1}(U_i)$ と変換することで、任意の各周辺分布関数 F_1, \dots, F_n に従い、かつ当該コピュラの依存構造を持つ乱数 X_1, \dots, X_n を発生させることができる。 $C(u_1, \dots, u_n)$ に従う一様乱数 U_1, \dots, U_n の具体的な発生手順は、コピュラの種類に応じて後述する。

2.3 正規コピュラとtコピュラ

2.3.1 正規コピュラ

(1) 定義

正規コピュラは、多変量正規分布と同じ依存構造を持つコピュラである。確率変数 X_1, \dots, X_n が、相関行列を Σ とする n 変量標準正規分布に従うとき、その分布関数を $\Phi_{\Sigma}(x_1, \dots, x_n)$ と表すことにする²¹。 n 変量標準正規分布の周辺分布は (1 変量) 標準正規分布であるから、1 変量標準正規分布の分布関数を $\Phi(\cdot)$ とすれば、スクラーの定理から、

$$\Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \Phi_{\Sigma}(x_1, \dots, x_n) = C(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)) \quad (2.27)$$

のように、各周辺分布関数を結び付けるコピュラ $C: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ が一意に存在する。ここで、 $C(u_1, \dots, u_n)$ を (2.4) 式のようにと置けば、これは、(2.27) 式を満たしていることを確認することができ、(2.4) が n 変量正規分布のコピュラになっていることがわかる。このコピュラは、多変量正規分布の各変量間の依存関係を示していることから「正規コピュラ」と呼ばれる。

正規コピュラの密度関数 $c(u_1, \dots, u_n)$ は、(2.3) 式により、

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^{\top} \Sigma^{-1} \mathbf{x}\right) = c(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)) \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} x_i^2\right) \quad (2.28)$$

という関係を満たす。よって、 $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)^{\top} = (\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))^{\top} = \Phi^{-1}(\mathbf{u})$ と置き、単位行列を \mathbf{I} とすれば、以下を得る。

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \omega^{\top} (\Sigma^{-1} - \mathbf{I}) \omega\right), \quad \omega = \Phi^{-1}(\mathbf{u}) \quad (2.29)$$

正規コピュラを用いれば、周辺分布を 1 変量標準正規分布とすることで多変量正規分布が得られる。また、周辺分布を 1 変量標準正規分布以外の分布とすることで、多変量正規分布とは異なる同時分布を得る。

(2) 正規コピュラに従う乱数の発生方法

正規コピュラに従う乱数は次のアルゴリズムで発生させることができる。

1. コレスキー分解法等を用いて、相関行列 Σ の n 変量標準正規分布に従う乱数 x_1, \dots, x_n を発生させる²²。

²¹ n 変量標準正規分布の分布関数は脚注 2 のとおりに表される。

²² 正規分布に従う乱数の発生方法は伏見 [1989] を参照。

2. 1 変量標準正規分布の分布関数 $\Phi(\cdot)$ により, $u_i = \Phi(x_i)$ とする ($i = 1, \dots, n$).

i 番目の周辺分布を任意の分布 (分布関数 F_i) とするとき, 各変量の依存構造が正規コピュラに従う乱数を発生させるには, アルゴリズムの 2. で発生させた各 u_i を用いて, $F_i^{-1}(u_i)$ とすればよい.

(3) 正規コピュラのパラメータ推定方法

正規コピュラに従う乱数を発生させるには, そのパラメータ (相関行列) Σ を別途推定する必要がある. ここでは, その推定に最尤法を用いる.

正規コピュラ対数尤度関数は, (2.29) 式により, ヒストリカルデータの数 N のときには, 次式で与えられる.

$$l(\Sigma) = -\frac{N}{2} \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \omega^j \top (\Sigma^{-1} - \mathbf{I}) \omega^j, \quad \omega^j = \Phi^{-1}(\mathbf{u}^j) \quad (2.30)$$

この対数尤度関数を相関行列の逆行列 Σ^{-1} で微分すると²³,

$$\frac{\partial l(\Sigma)}{\partial \Sigma^{-1}} = \frac{N}{2} \Sigma - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \omega^j \omega^j \top \quad (2.31)$$

となるから, Σ の最尤推定量 $\hat{\Sigma}$ は

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \omega^j \omega^j \top \quad (2.32)$$

となる²⁴. 以上より, 正規コピュラのパラメータは次の手順で求められる.

アルゴリズム (正規コピュラのパラメータ推定)

1. 変量数 n , データ数 N の原データ x_i^j ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, N$) を, 周辺分布ごとに $[0,1]$ の一様分布 $u_i^j = F_i(x_i^j)$ に変換する.
2. u_i^j を $\omega_i^j = \Phi^{-1}(u_i^j)$ ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, N$) により正規分布に従うデータに変換する.
3. $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \omega_i^j \omega_k^j$ ($i, k = 1, \dots, n$) を計算し, これを推定量 $\hat{\Sigma}_{i,k}$ (相関行列 Σ の i 行 k 列成分の推定量) とする.

²³ Σ (相関行列) は対称行列であるから, Σ^{-1} も対称行列であり, Σ^{-1} の余因子を $\tilde{\sigma}_{ij}$ とすると $\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\sigma}_{ji}$ となる. 行列式の余因子展開および逆行列の余因子表現を考えれば, 以下を得る.

$$\frac{\partial(-\ln |\Sigma|)}{\partial \Sigma^{-1}} = \frac{\partial(\ln |\Sigma^{-1}|)}{\partial \Sigma^{-1}} = \frac{1}{|\Sigma^{-1}|} \frac{\partial |\Sigma^{-1}|}{\partial \Sigma^{-1}} = \frac{1}{|\Sigma^{-1}|} (\{\tilde{\sigma}_{ij}\}) = \frac{1}{|\Sigma^{-1}|} (\{\tilde{\sigma}_{ji}\}) = (\Sigma^{-1})^{-1} = \Sigma$$

ここで, $(\{\tilde{\sigma}_{ij}\})$ は $\tilde{\sigma}_{ij}$ からなる行列である. なお, 行列の微分演算は Magnus and Neudecker [1999] に詳しい.

²⁴相関行列の対角要素は, 定義により 1 であるが, (2.32) 式で推定された相関行列は, 推定誤差を伴うため, 対角要素が 1 になるとは必ずしも限らない. そこで, ここでは, 先行研究 (Bouyé *et al.* [2000]) に倣い, (2.32) 式で推定された相関行列を便宜的に分散共分散行列とみなすことで, そこから対角要素が 1 の相関行列を導出することにした.

(4) 正規コピュラの裾の依存

多変量正規分布の分布関数を基に表現される正規コピュラは，実務では，その単純さや取り扱いの容易さから多用されている．しかし，正規コピュラは，同時分布に正規性を仮定しているため，実務上，特にリスクファクターの分布の裾での変量間の依存関係を捉え切れない場合があるという問題がある．(2.9) 式の上側裾依存係数を用いて，この点を考察する．正規コピュラの上側裾依存係数は (2.12) 式で計算される．相関 ρ の 2 変量正規分布に従う確率変数 (X_1, X_2) は， $X_2 = x$ の条件の下で， X_1 が 1 変量正規分布 $N(\rho x, 1 - \rho^2)$ に従うことから，

$$\begin{aligned}\lambda_U &= 2 \lim_{u \rightarrow 1^-} \Pr(U_1 > u | U_2 = u) = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \Pr(\Phi^{-1}(U_1) > x | \Phi^{-1}(U_2) = x) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \Pr(X_1 > x | X_2 = x) = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \Phi \left(\frac{x - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \right) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \Phi \left(x \sqrt{\frac{1 - \rho}{1 + \rho}} \right) \right)\end{aligned}\quad (2.33)$$

となる．同様に，下側裾依存係数は，(2.13) 式から，

$$\lambda_L = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi \left(x \sqrt{\frac{1 - \rho}{1 + \rho}} \right) \quad (2.34)$$

となる． $-1 < \rho < 1$ の場合には，これらの極限值は 0 となる．つまり，正規コピュラでは，上側，下側のいずれでも漸近独立である²⁵．このことは，正規コピュラでは，リスクファクターの分布の裾での依存事象とみなすことが可能な事象，例えば，複数のデフォルトの同時的な発生，関連会社の株価の同時的な大幅変動といった事象を十分に表現しえないことを示唆している．したがって，リスクファクター間で分布の裾での依存関係が強い場合には，正規コピュラを用いたリスク計量は必ずしも適当ではないことになる．

2.3.2 t コピュラ

(1) 定義

分布の裾での変量間の依存関係が強い場合に，その依存関係を正規分布よりもうまく表現しうるコピュラとして，「t コピュラ」を考える．t コピュラは，正規分布よりも厚い裾を持つ分布である t 分布を基にしたコピュラである．具体的には，自由度 ν ，相関行列 Σ の n 変量 t 分布の分布関数²⁶ を $t_{\nu, \Sigma}(\cdot)$ ，自由度 ν の 1 変量 t 分布の分布関数を $t_\nu(\cdot)$ として，(2.5) 式のように定義される．ただし，自由度 ν は 3 以上である．t コピュラの密度関数は，(2.3) 式により， $\omega^\top = (\omega_1, \dots, \omega_n) = (t_\nu^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_n))$ として，次式のように表せる．ここで， $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である²⁷．

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+n}{2}) [\Gamma(\frac{\nu}{2})]^n (1 + \frac{1}{\nu} \omega^\top \Sigma^{-1} \omega)^{-\frac{\nu+n}{2}}}{\sqrt{|\Sigma|} \Gamma(\frac{\nu}{2}) [\Gamma(\frac{\nu+1}{2})]^n \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\omega_i^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}}\quad (2.35)$$

²⁵ $\rho = 1$ では漸近従属となる．

²⁶ 具体的な関数は脚注 3 を参照．

²⁷ ガンマ関数の定義は脚注 3 を参照．

(2) t コピュラの裾の依存

分布の裾での t コピュラの依存関係を考察するため、t コピュラの裾依存係数を計算する。自由度 ν 、相関 ρ を持つ 2 変量 t 分布に従う確率変数 (X_1, X_2) を考える。 $X_2 = x$ のとき、 X_1 は、自由度 $\nu + 1$ の t 分布になり、その平均、分散はそれぞれ $E[X_1|X_2 = x] = \rho x$ 、 $\text{var}[X_1|X_2 = x] = \left(\frac{\nu+x^2}{\nu+1}\right)(1-\rho^2)$ である。これらの関係を用いれば、上側裾依存係数は、自由度 $\nu + 1$ の t 分布の分布関数を $t_{\nu+1}(\cdot)$ として、(2.12) 式より次式で計算される。

$$\begin{aligned}\lambda_U &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \Pr(X_1 > x | X_2 = x) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - t_{\nu+1} \left(x(1-\rho) \sqrt{\frac{(\nu+1)}{(1-\rho^2)(\nu+x^2)}} \right) \right) \\ &= 2 \left(1 - t_{\nu+1} \left(\sqrt{\frac{(1-\rho)(\nu+1)}{(1+\rho)}} \right) \right)\end{aligned}\tag{2.36}$$

同様に、下側裾依存係数は、(2.13) 式より、

$$\begin{aligned}\lambda_L &= 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(t_{\nu+1} \left(x(1-\rho) \sqrt{\frac{(\nu+1)}{(1-\rho^2)(\nu+x^2)}} \right) \right) \\ &= 2 t_{\nu+1} \left(-\sqrt{\frac{(1-\rho)(\nu+1)}{(1+\rho)}} \right)\end{aligned}\tag{2.37}$$

となる。上側下側裾依存係数は、 $-1 < \rho < 1$ のとき、0 にならない。つまり、t コピュラでは、2 つの変量が上側でも下側でも漸近従属する²⁸。したがって、リスクファクターの分布の裾での依存関係が強いときには、依存関係の表現には、上側、下側とも漸近独立となる正規コピュラよりも、t コピュラを用いる方が適当である。

(3) t コピュラに従う乱数の発生方法

t コピュラの変量間の依存関係は、多変量 t 分布の依存関係と等しい。また、多変量 t 分布は、周辺分布が 1 変量 t 分布であり、かつその依存関係が多変量 t コピュラで表現される分布であるとみなせる。したがって、多変量 t 分布に従う各周辺分布を、それぞれ $[0,1]$ の一様分布に変換したものが t コピュラに従う変量となる。

多変量 t 分布に従う乱数は、多変量正規分布に従う乱数と、自由度 ν の χ^2 分布に従う乱数を用いることで発生させることができる²⁹。自由度 ν 、相関行列 Σ を持つ t コピュラに従う乱数は、次のアルゴリズムによって得られる。

アルゴリズム (t コピュラに従う乱数発生)

1. 相関行列 Σ を持つ多変量正規分布に従う乱数 Y_1, \dots, Y_n を発生させる。
2. Y_i とは独立に、自由度 ν の χ^2 分布に従う乱数 Z を発生させる。

²⁸正規コピュラと同様に、 $\rho = 1$ では漸近従属である。

²⁹独立に 1 変量標準正規分布に従う ν 個の乱数 X_1, \dots, X_ν を用いれば、 $Z = \sum_{k=1}^{\nu} X_k^2$ が自由度 ν の χ^2 分布に従う乱数となる。

3. $X_i = \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{Z}} Y_i$ を求める (X_1, \dots, X_n は自由度 ν , 相関行列 Σ を持つ t 分布に従う) .
4. $u_i = t_\nu(X_i)$ を計算する .

(4) t コピュラのパラメータ推定方法

t コピュラに従う乱数を発生させる際には, そのパラメータである ν と Σ を指定する必要がある. 以下では, 正規コピュラのケースと同様に, ヒストリカルデータから, 最尤法によりパラメータ推定を行う方法を検討する.

t コピュラは, 自由度 ν と相関行列 Σ をパラメータとして持つ. それらを同時に推定することは容易でないので, ここでは, 自由度 ν に複数の値を外生的に与えたうえで, それぞれの行列 Σ の推定量 $\hat{\Sigma}_\nu$ を求める. こうして得られた ν と $\hat{\Sigma}_\nu$ の組合せのうち, 対数尤度が最大になる組合せを最尤推定量とする.

自由度 ν が所与のときの対数尤度関数は, データ数を N とすると, (2.35) 式により次式で表せる.

$$l(\Sigma, \nu) = N \left[\ln \Gamma \left(\frac{\nu+n}{2} \right) - \ln \Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) \right] + nN \left[\ln \Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) - \ln \Gamma \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \right] - \frac{N}{2} \ln |\Sigma| - \frac{\nu+n}{2} \sum_{j=1}^N \ln \left(1 + \frac{\omega^j \Sigma^{-1} \omega^j}{\nu} \right) + \frac{\nu+1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{(\omega^j)_i^2}{\nu} \right) \quad (2.38)$$

ここで, $(\omega^j)_i = t_\nu^{-1}((\mathbf{u}^j)_i)$ である. これを逆行列 Σ^{-1} で微分すると,

$$\frac{\partial l(\Sigma, \nu)}{\partial \Sigma^{-1}} = \frac{N}{2} \Sigma - \frac{\nu+n}{2} \sum_{j=1}^N \frac{\omega^j \omega^j \top}{\nu + \omega^j \top \Sigma^{-1} \omega^j} \quad (2.39)$$

となることから,

$$\hat{\Sigma}_\nu = \frac{\nu+n}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\omega^j \omega^j \top}{\nu + \omega^j \top \hat{\Sigma}_\nu^{-1} \omega^j} \quad (2.40)$$

となる $\hat{\Sigma}_\nu$ が自由度 ν が所与のときの最尤推定量となる. ただし, この $\hat{\Sigma}_\nu$ は, (2.40) 式の右辺に $\hat{\Sigma}_\nu$ を含み, 解析的に求められないので, 数値的な反復計算で求める.

以上から, t コピュラのパラメータは次の手順で求められる.

1. ν に外生的に値を与えて, (2.40) 式を満たす $\hat{\Sigma}_\nu$ を求め, (2.38) 式により, 対数尤度 $l(\hat{\Sigma}_\nu, \nu)$ を求める.
2. 1. をさまざまな ν で行い, 対数尤度 $l(\hat{\Sigma}_\nu, \nu)$ を最大化する ν , $\hat{\Sigma}_\nu$ を t コピュラのパラメータの推定量とする.

上記概略の 1. で (2.40) 式を満たす $\hat{\Sigma}_\nu$ は解析的には求められないことから, それを数値計算により求めるとすると, 具体的なアルゴリズムは次のようになる.

アルゴリズム (t コピュラのパラメータ推定法)

1. 原データ ($\mathbf{x} : n \times 1$ 行列) を, 仮定した周辺分布関数を用いて $[0,1]$ の一様分布 \mathbf{u} に変換する ($\mathbf{u} = F(\mathbf{x})$).
2. 正規分布に従うデータに変換する ($\mathbf{w} = \Phi^{-1}(\mathbf{u})$).
3. 変換後のデータ \mathbf{w} を用いて相関行列を計算し $\hat{\Sigma}(0)$ とする.
4. $\omega = t_{\nu}^{-1}(\mathbf{u})$ によりデータを自由度 ν の t 分布に従う確率変数に変換する.
5. 以下の漸化式により $\hat{\Sigma}(m+1)$ を計算し, 3. と同様に相関行列に変換する.

$$\hat{\Sigma}(m+1) = \frac{\nu+n}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\omega^j \omega^{j\top}}{\nu + \omega^{j\top} \hat{\Sigma}(m)^{-1} \omega^j}$$

6. 5. を収束するまで反復し, 収束値を $\hat{\Sigma}_{\nu}$ とする.
7. 4. から 6. までは, $\nu = 3, 4, \dots$ で計算し, 対数尤度を最大化する ν と対応する $\hat{\Sigma}_{\nu}$ を ν , Σ の推定量とする.

(5) t コピュラのパラメータ推定の数値例

ここでは, 上述した t コピュラのパラメータ推定方法の数値例を示す. 上記アルゴリズムの 1. で, データを一様分布に変換するための分布を「経験分布」とし, パラメータ推定を行う. 4 変量 t コピュラでパラメータ推定を試みる. 自由度を $\nu = 6$, 相関行列を (2.41) 式とする 4 変量 t コピュラに従う乱数を 2,000 個発生させる.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.6 & 0.8 & 0.3 \\ -0.6 & 1.0 & -0.2 & 0.4 \\ 0.8 & -0.2 & 1.0 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.4 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

以下では, この乱数データがパラメータが未知の 4 変量 t コピュラに従うとの前提で, このデータからパラメータを推定する. 自由度 $\nu = 3, 4, \dots$ で, $\hat{\Sigma}_{\nu}$ と対数尤度を求める. 自由度 ν に対して対数尤度が大きくなる自由度を求めると, 自由度 ν は 6 と推定される.

また, 自由度 $\nu = 6$ で推定された相関行列 $\hat{\Sigma}_{\nu}$ は, (2.42) 式のような³⁰. $\hat{\Sigma}_{\nu}$ は, (2.41) 式で仮定した相関行列とほぼ等しいことが確認される. これは, ここで示したアルゴリズムが有効であることを示唆している.

$$\hat{\Sigma}_{\nu} = \begin{bmatrix} 1.0000000 & -0.5940476 & 0.7853495 & 0.3217245 \\ -0.5940476 & 1.0000000 & -0.1849204 & 0.3891923 \\ 0.7853495 & -0.1849204 & 1.0000000 & 0.4020530 \\ 0.3217245 & 0.3891923 & 0.4020530 & 1.0000000 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

³⁰脚注 24 と同様に, 推定相関行列の対角要素が 1 となるような操作を施している (t コピュラのパラメータ推定法の 5. を参照).

2.4 アルキメディアンコピュラ

2.4.1 アルキメディアンコピュラ

コピュラの1つのクラスとして, $\phi(1) = 0, \forall u \in (0, 1), \phi'(u) < 0, \phi''(u) \geq 0$ を満たす生成関数と呼ばれる関数 $\phi(\cdot)$ を用いて, (2.43) 式で表現されるアルキメディアンコピュラがある.

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_n)) \quad (2.43)$$

このクラスに属するコピュラは, それに従う乱数を発生させる方法が知られている等, 実務的にも扱いやすいといわれている. 本節では, アルキメディアンコピュラの中でもよく使われるコピュラとして, 1パラメータで表現可能なクレイトン, ガンベル, フランクの3つのコピュラを取り上げる.

2.4.2 アルキメディアンコピュラに従う乱数の発生方法

(1) 逆関数法

コピュラ $C(u_1, \dots, u_n)$ に従う乱数の発生方法として, 1変量分布に従う乱数の発生法である「逆関数法」を多変量の場合に拡張することが考えられる.

最初に, 2変量 ($n=2$) の場合で検討する. コピュラ $C(u_1, u_2)$ に従う乱数 (u_1, u_2) を発生させる. まず, コピュラ $C(u_1, u_2)$ に関係なく, $[0,1]$ の一様分布に従う乱数 u_1 を発生させる. 次に, コピュラ $C(u_1, u_2)$ を用いて, u_2 を構成する. ここで, コピュラ $C(u_1, u_2)$ は確率変数 (U_1, U_2) の分布関数であり, 密度関数は $c(u_1, u_2)$ で表されることに注意する. u_1 が所与のときの u_2 の条件付分布関数 $C_2(u_2|u_1)$ は, 次式で表される.

$$C_2(u_2|u_1) \equiv \Pr(U_2 \leq u_2|U_1 = u_1) = \frac{\int_0^{u_2} c(u_1, u) du}{\int_0^1 c(u_1, u) du} \quad (2.44)$$

$C_2(u_2|u_1)$ は1変量の分布関数であるから, その逆関数を $C_2^{-1}(\cdot|u_1)$ とすると, 逆関数法を用いて, $[0,1]$ の一様乱数 v で $u_2 = C_2^{-1}(v|u_1)$ とすれば, u_2 を得ることができる.

3変量以上の場合でも, 同様の考え方で, 各変量 u_3, \dots, u_n を得ることができる. $C_i(u_1, \dots, u_i) \equiv C(u_1, \dots, u_i, 1, \dots, 1)$, $c_i(u_1, \dots, u_i) \equiv \frac{\partial^i C_i(u_1, \dots, u_i)}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_i}$ とすれば,

$$\begin{aligned} C_{i+1}(u_{i+1}|u_1, \dots, u_i) &\equiv \Pr(U_{i+1} \leq u_{i+1}|U_1 = u_1, \dots, U_i = u_i) \\ &= \frac{\int_0^{u_{i+1}} c_{i+1}(u_1, \dots, u_i, u) du}{c_i(u_1, \dots, u_i)} \end{aligned} \quad (2.45)$$

となる. よって, (2.45) 式の逆関数 $C_{i+1}^{-1}(\cdot|u_1, \dots, u_i)$ が逐次的に得られれば, $[0,1]$ の一様乱数 v で $u_{i+1} = C_{i+1}^{-1}(v|u_1, \dots, u_i)$ として, 乱数 (u_1, u_2, \dots, u_n) を求めることができる. アルキメディアンコピュラで, (2.45) 式の $C_{i+1}(u_{i+1}|u_1, \dots, u_i)$ を計算する. ϕ^{-1} の i 階微分を $\phi^{(-i)}$ として,

$$c_i(u_1, \dots, u_i) = \phi^{(-i)}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_i)) \prod_{k=1}^i \phi'(u_k) \quad (2.46)$$

を得るので、さらに $\psi_i \equiv \phi(u_1) + \dots + \phi(u_i)$ とすると、次式を導出する。

$$C_{i+1}(u_{i+1}|u_1, \dots, u_i) = \frac{\int_0^{u_{i+1}} \phi^{-(i+1)}(\psi_i + \phi(u))\phi'(u)du}{\phi^{-(i)}(\psi_i)} = \frac{\phi^{-(i)}(\psi_i + \phi(u_{i+1}))}{\phi^{-(i)}(\psi_i)}. \quad (2.47)$$

(2.47) 式の逆関数 $C_{i+1}^{-1}(\cdot|u_1, \dots, u_i)$ が求められれば、上記の手続きで、アルキメディアンコピュラに従う乱数を発生させることができる。しかし、一般には、(2.47) 式の逆関数 $C_{i+1}^{-1}(\cdot|u_1, \dots, u_i)$ は複雑な形になるため、逆関数法に基づいて乱数を発生させようとすると、重い計算負荷が生ずるという難点がある。

(2) マーシャル・オルキン法

(2.47) 式による逆関数法に比べて、より簡単に乱数を発生させる方法として、マーシャル・オルキン法がある (Marshall and Olkin [1988])。Marshall and Olkin [1988] は、同時分布関数が 1 つの潜在変数 θ を使って (2.48) 式で表せるとき、コピュラに従う乱数を効率的に発生させるアルゴリズムを提案している。

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= E_\theta[H_1(x_1)^\theta H_2(x_2)^\theta \cdots H_n(x_n)^\theta] \\ &= \zeta(\zeta^{-1}(F_1(x_1)) + \cdots + \zeta^{-1}(F_n(x_n))) \end{aligned} \quad (2.48)$$

ここで、 $\zeta(\cdot)$ は潜在変数 θ のラプラス変換である ($\zeta(s) = E_\theta[e^{-s\theta}]$)。

アルキメディアンコピュラの場合では、(2.43) 式より $\zeta(\cdot)$ が生成関数の逆関数 $\phi^{-1}(\cdot)$ に対応していることがわかる。ここで、 $\zeta(s) = E_\theta[e^{-s\theta}]$ に注目すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \zeta(\zeta^{-1}(F_1(x_1)) + \cdots + \zeta^{-1}(F_n(x_n))) &= E_\theta[\exp(-(\zeta^{-1}(F_1(x_1)) + \cdots + \zeta^{-1}(F_n(x_n)))\theta)] \\ &= E_\theta[\exp(-\zeta^{-1}(F_1(x_1))\theta) \cdot \exp(-\zeta^{-1}(F_2(x_2))\theta) \cdots \exp(-\zeta^{-1}(F_n(x_n))\theta)] \end{aligned} \quad (2.49)$$

(2.48) 式から、

$$H_i(x_i)^\theta = \exp(-\zeta^{-1}(F_i(x_i))\theta) \quad (2.50)$$

という対応関係があることがわかる。また、 $H_i(x_i)^\theta$ を確率変数とすると、これは $[0,1]$ の一様分布に従い、(2.48) 式の最初の等号関係から、 $H_1(x_1)^\theta, \dots, H_n(x_n)^\theta$ を独立にサンプリングすればよいことがわかる。つまり、シミュレーションでアルキメディアンコピュラに従う n 変量の乱数ベクトル (U_1, \dots, U_n) ($U_i = F_i(X_i)$) を 1 つ発生させるには、次の手続きを用いればよいことになる。

アルゴリズム (マーシャル・オルキン法)

1. ラプラス変換 $E_\theta[e^{-s\theta}]$ が $\phi^{-1}(s)$ ($=\zeta(s)$) となるような確率分布に従う潜在変数 θ のサンプル θ_0 を 1 つ発生させる。
2. θ_0 とは独立に $[0,1]$ の一様分布に従う確率変数 I_1, \dots, I_n を発生させる。
3. $i = 1, \dots, n$ で $U_i \leftarrow \zeta(-\theta_0^{-1} \ln(I_i))$ として U_1, \dots, U_n を生成する。

アルキメディアンコピュラに属するコピュラでは、ラプラス変換が $\zeta(s) = \phi^{-1}(s)$ となる潜在変数 θ_0 を発生させることができれば、上記のアルゴリズムを用いて、比較的簡単に、乱数を発生させることができる。

2.4.3 クレイトンコピュラ

クレイトンコピュラは, Clayton [1978] で示されたコピュラで, $\alpha (> 0)$ をパラメータとして (2.6) 式で表される.

(1) クレイトンコピュラの裾依存係数

2 変量 ($n = 2$) のクレイトンコピュラの裾依存係数は, 上側では, $C(u_1, u_2)$ が u_1, u_2 いずれについても $(0, 1)$ の区間で微分可能な関数であるから, ロピタルの公式を用いて,

$$\begin{aligned}\lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + (2u^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}}{1 - u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{-2 + 2u^{-\alpha-1}(2u^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha-1}}{-1} = 0\end{aligned}\quad (2.51)$$

となり, 漸近独立である. 一方, 下側では,

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{(2u^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} (2 - u^\alpha)^{-1/\alpha} = 2^{-1/\alpha}\quad (2.52)$$

となり, $\alpha > 0$ より, 漸近従属する. つまり, クレイトンコピュラは, 分布の両裾で異なる依存関係を持っている.

(2) クレイトンコピュラに従う乱数の発生方法

クレイトンコピュラの生成関数は $\phi(u_i) = u_i^{-\alpha} - 1$ であるので, その逆関数は $\phi^{-1}(s) = \zeta(s) = (s + 1)^{-1/\alpha}$ で与えられる. 一方, 標準ガンマ分布 $G(1/\alpha)$ に従う確率変数 θ のラプラス変換は $\zeta(s) = E[e^{-s\theta}] = (s + 1)^{-1/\alpha}$ である³¹. よって, 標準ガンマ分布 $G(1/\alpha)$ に従う乱数 θ_0 を発生させれば³², 2.4.2 節で示したマーシャル・オルキン法を適用することができる. 具体的には, 以下のアルゴリズムでクレイトンコピュラに従う乱数を発生させることができる.

アルゴリズム (クレイトンコピュラに従う乱数発生法)

1. 標準ガンマ分布 $G(1/\alpha)$ に従う乱数 θ_0 を 1 つ発生させる.
2. θ_0 とは独立な $[0, 1]$ の一様乱数 I_1, \dots, I_n を発生させる.
3. $i = 1, \dots, n$ で $U_i \leftarrow \{1 - (1/\theta_0) \ln I_i\}^{-1/\alpha}$ として U_1, \dots, U_n を生成する.

(3) パラメータ推定方法

クレイトンコピュラに従う乱数を発生させる際には, そのパラメータ α を決める必要がある. 以下では, 正規コピュラの場合と同様に, ヒストリカルデータから, 最尤法により, このパラメータを推定する方法を説明する.

³¹標準ガンマ分布 $G(1/\alpha)$ の確率密度関数は, $f(x) = x^{1/\alpha-1} e^{-x} / \Gamma(1/\alpha)$ で与えられる. ここで, $\Gamma(1/\alpha)$ は $1/\alpha$ でのガンマ関数 (脚注 3 を参照) の値である.

³²標準ガンマ分布に従う乱数の発生方法は伏見 [1989] を参照.

n 変量クレイトンコピュラの密度関数は，一般に，

$$\frac{\partial^n C(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_1 \cdots \partial u_n} = \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} (1 + i\alpha) \right\} \left\{ \prod_{i=1}^n u_i^{-\alpha-1} \right\} \left\{ \sum_{i=1}^n u_i^{-\alpha} - n + 1 \right\}^{-1/\alpha-n} \quad (2.53)$$

と表現可能である．データ数を N とするとき，各周辺分布の経験分布関数により一様分布に変換されたデータを (u_1^j, \dots, u_n^j) ($j = 1, \dots, N$) とすると，対数尤度関数 $l(\alpha)$ は次式で表せる．

$$l(\alpha) = N \sum_{i=1}^{n-1} \ln(1 + i\alpha) - \sum_{j=1}^N \left\{ (\alpha + 1) \ln \left(\prod_{i=1}^n u_i^j \right) + (1/\alpha + n) \ln \left(\sum_{i=1}^n (u_i^j)^{-\alpha} - n + 1 \right) \right\} \quad (2.54)$$

推定は，(2.54) 式の α に関する偏微分係数が 0 となる α を求めればよい．しかし，(2.54) 式右辺最終項の α に関する偏微分係数は α の複雑な関数になるため，ここから α を解析的に求めるのは困難である．そこで，(2.54) 式を最大化する α を数値計算で求める³³．

2.4.4 ガンベルコピュラ

ガンベルコピュラは，Gumbel [1960] で示されたコピュラで， $\gamma (> 1)$ をパラメータとして (2.7) 式で表される．1.4.2 節で考察したように，各変量について最大値を考えたときに，その同時分布から構成されるコピュラは極値コピュラと呼ばれ，リスク管理上も意義深いコピュラであるが，ガンベルコピュラはアルキメディアンコピュラで唯一の極値コピュラであることが知られている (Genest and Rivest [1989]) ．

(1) ガンベルコピュラの裾依存係数

2 変量 ($n = 2$) のガンベルコピュラの裾依存係数は，上側では， $C(u_1, u_2)$ が u_1, u_2 いずれについても $(0, 1)$ の区間で微分可能な関数であるから，ロピタルの公式を用いて，

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = \lim_{u \rightarrow 1-} \frac{1 - 2u + \exp\{-2(-\ln u)^\gamma\}^{1/\gamma}}{1 - u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1-} \frac{-2 + 2^{1/\gamma} u^{2^{1/\gamma} - 1}}{-1} = 2 - 2^{1/\gamma} \end{aligned} \quad (2.55)$$

となる． $\gamma > 1$ より $\lambda_U > 0$ となるので，上側では漸近従属することがわかる．一方，下側では， $2^{1/\gamma} > 1$ より，

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{C(u, u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{u^{2^{1/\gamma}}}{u} = \lim_{u \rightarrow 0+} u^{2^{1/\gamma} - 1} = 0 \quad (2.56)$$

となる (漸近独立) ．つまり，ガンベルコピュラは，分布の両裾で異なる依存関係を持っている．

³³推定に統計言語 R を用いる場合には，最適化 (最大化) 関数の 1 つである optimize に対数尤度 (2.54) 式を適用することで α が得られる (なお，推定するパラメータが複数のときには，R では optim という関数を用いる) ．

(2) ガンベルコピュラに従う乱数の発生法

ガンベルコピュラの生成関数は $\phi(u_i) = (-\ln u_i)^\gamma$ となるため、その逆関数は $\phi^{-1}(s) = \exp(-s^{1/\gamma})$ で与えられる。マーシャル・オルキン法を適用するには、潜在変数 θ のラプラス変換 $\zeta(s)$ が以下の関係を満たせばよい。

$$\zeta(s) = \exp(-s^{1/\gamma}) \quad (2.57)$$

ラプラス変換が (2.57) 式で表されるような確率変数 θ が従う分布は「安定指数 $1/\gamma$ ($0 < 1/\gamma \leq 1$)、歪みパラメータ 1 の正值安定分布」となることが知られている³⁴。この分布に従う乱数 θ_0 は、 $[0, \pi]$ の一様乱数 V と標準指数分布に従う乱数 W を独立に生成し³⁵、

$$\theta_0 \leftarrow \left(\frac{\sin((\gamma-1)V/\gamma)}{W} \right)^{\gamma-1} \frac{\sin(V/\gamma)}{\sin(V)^\gamma} \quad (2.58)$$

とすればよい (Kanter [1975])。したがって、(2.58) 式に従って乱数 θ_0 を発生させて、マーシャル・オルキン法を適用すれば、ガンベルコピュラに従う乱数を発生させることができる。具体的なアルゴリズムは次のようになる。

アルゴリズム (ガンベルコピュラに従う乱数発生法)

1. $[0, \pi]$ の一様乱数 V と標準指数分布に従う乱数 W を独立に発生させ、潜在変数 θ_0 を (2.58) 式で生成する。
2. θ_0 とは独立な $[0, 1]$ の一様乱数 I_1, \dots, I_n を発生させる。
3. $i = 1, \dots, n$ で $U_i \leftarrow \exp(-(-\theta_0^{-1} \ln(I_i))^{1/\gamma})$ として U_1, \dots, U_n を生成する。

(3) ガンベルコピュラのパラメータ推定法

以下では、ヒストリカルデータを用いた最尤法によって、ガンベルコピュラのパラメータ (γ) を推定する方法を検討する。

まず、2 変数の場合で考える。ガンベルコピュラは、

$$C(u_1, u_2) = \exp(-((- \ln u_1)^\gamma + (- \ln u_2)^\gamma)^{1/\gamma}) \quad (2.59)$$

³⁴一般に、安定指数 $\tilde{\alpha}$ 、歪みパラメータ β 、位置パラメータ μ 、尺度パラメータ σ を持つ安定分布は、その確率変数 X の特性関数が次のように表せる。ここで、 i は虚数単位であり、 $0 < \tilde{\alpha} \leq 2$ 、 $-1 \leq \beta \leq 1$ 、 $\sigma \geq 0$ である。詳細は Samorodnitsky and Taqqu [1994] を参照。

$$E[e^{itX}] = \begin{cases} \exp[-\sigma^{\tilde{\alpha}}|t|^{\tilde{\alpha}}\{1 - i\beta\text{sign}(t)\tan(\pi\tilde{\alpha}/2)\} + i\mu t] & \text{for } \tilde{\alpha} \neq 1 \\ \exp[-\sigma|t|\{1 + (2/\pi)i\beta\text{sign}(t)\ln t\} + i\mu t] & \text{for } \tilde{\alpha} = 1 \end{cases}$$

³⁵標準指数分布の分布関数は $F(x) = 1 - e^{-x}$ で与えられるため、それに従う乱数 w は、 $[0, 1]$ の一様乱数を u として、 $w = F^{-1}(u) = -\ln(1 - u)$ で生成することができる。

と書けるので，密度関数 $\frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$ は以下ようになる．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} &= \frac{\partial \{C(u_1, u_2)((-\ln u_1)^\gamma + (-\ln u_2)^\gamma)^{1/\gamma-1}(-\ln u_1)^{\gamma-1}/u_1\}}{\partial u_2} \\
&= \frac{(-\ln u_1)^{\gamma-1}}{u_1} \times [C(u_1, u_2)\{((-\ln u_1)^\gamma + (-\ln u_2)^\gamma)^{1/\gamma-1}\}^2(-\ln u_2)^{\gamma-1}/u_2 \\
&\quad + C(u_1, u_2)((-\ln u_1)^\gamma + (-\ln u_2)^\gamma)^{1/\gamma-2}(\gamma-1)(-\ln u_2)^{\gamma-1}/u_2] \\
&= C(u_1, u_2) \frac{\{(\ln u_1)(\ln u_2)\}^{\gamma-1}}{u_1 u_2} \{(-\ln u_1)^\gamma + (-\ln u_2)^\gamma\}^{1/\gamma-2} \\
&\quad \times \{[(-\ln u_1)^\gamma + (-\ln u_2)^\gamma]^{1/\gamma} + \gamma - 1\}
\end{aligned} \tag{2.60}$$

これより，対数尤度は，データ数が N の場合， $\hat{u}_1 \equiv -\ln u_1$ ， $\hat{u}_2 \equiv -\ln u_2$ とすると，

$$\begin{aligned}
&\ln \prod_{j=1}^N \left(\frac{\partial^2 C(u_1^j, u_2^j)}{\partial u_1^j \partial u_2^j} \right) \\
&= \sum_{j=1}^N \left[-((\hat{u}_1^j)^\gamma + (\hat{u}_2^j)^\gamma)^{1/\gamma} + \ln \left\{ \frac{(\hat{u}_1^j \hat{u}_2^j)^{\gamma-1}}{u_1^j u_2^j} ((\hat{u}_1^j)^\gamma + (\hat{u}_2^j)^\gamma)^{1/\gamma-2} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \ln \{(\gamma-1) + ((\hat{u}_1^j)^\gamma + (\hat{u}_2^j)^\gamma)^{1/\gamma}\} \right]
\end{aligned} \tag{2.61}$$

となる．(2.61) 式を最大化する γ は，数値計算で求められる．

次に，3変量以上のガンベルコピュラでも，同様の手続きで，密度関数と対数尤度を求められる．ただし， n 変量の密度関数を一般的な形では表現することができないため，逐次微分して密度関数を具体的に求める必要がある．

以下では，3～5変量のガンベルコピュラの対数尤度関数を示す．表記を簡単にするため， $i = 1, \dots, 5$ で， $\hat{u}_i \equiv -\ln u_i$ ， $\psi_i^j \equiv ((\hat{u}_1^j)^\gamma + (\hat{u}_2^j)^\gamma + \dots + (\hat{u}_i^j)^\gamma)^{1/\gamma}$ と記す．

● 3変量ガンベルコピュラ

$$\begin{aligned}
&\ln \prod_{j=1}^N \left(\frac{\partial^2 C(u_1^j, u_2^j, u_3^j)}{\partial u_1^j \partial u_2^j \partial u_3^j} \right) \\
&= \sum_{j=1}^N \left[-\psi_3^j + \ln \left\{ \frac{(\hat{u}_1^j \hat{u}_2^j \hat{u}_3^j)^{\gamma-1}}{u_1^j u_2^j u_3^j} (\psi_3^j)^{1-3\gamma} \right\} + \ln \{(2\gamma-1)(\gamma-1) + 3(\gamma-1)\psi_3^j + (\psi_3^j)^2\} \right]
\end{aligned} \tag{2.62}$$

● 4変量ガンベルコピュラ

$$\begin{aligned}
&\ln \prod_{j=1}^N \left(\frac{\partial^2 C(u_1^j, u_2^j, u_3^j, u_4^j)}{\partial u_1^j \partial u_2^j \partial u_3^j \partial u_4^j} \right) \\
&= \sum_{j=1}^N \left[-\psi_4^j + \ln \left\{ \frac{(\hat{u}_1^j \hat{u}_2^j \hat{u}_3^j \hat{u}_4^j)^{\gamma-1}}{u_1^j u_2^j u_3^j u_4^j} (\psi_4^j)^{1-4\gamma} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \ln \left\{ (3\gamma-1)(2\gamma-1)(\gamma-1) + (11\gamma-7)(\gamma-1)\psi_4^j + 6(\gamma-1)(\psi_4^j)^2 + (\psi_4^j)^3 \right\} \right]
\end{aligned} \tag{2.63}$$

• 5 変量ガンベルコピュラ

$$\begin{aligned} & \ln \prod_{j=1}^N \left(\frac{\partial^2 C(u_1^j, u_2^j, u_3^j, u_4^j, u_5^j)}{\partial u_1^j \partial u_2^j \partial u_3^j \partial u_4^j \partial u_5^j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^N \left[\begin{array}{l} -\psi_5^j + \ln \left\{ \frac{(\hat{u}_1^j \hat{u}_2^j \hat{u}_3^j \hat{u}_4^j \hat{u}_5^j)^{\gamma-1}}{u_1^j u_2^j u_3^j u_4^j u_5^j} (\psi_5^j)^{1-5\gamma} \right\} \\ + \ln \left\{ \begin{array}{l} (4\gamma-1)(3\gamma-1)(2\gamma-1)(\gamma-1) + 5(5\gamma-3)(2\gamma-1)(\gamma-1)\psi_5^j \\ + 5(7\gamma-5)(\gamma-1)(\psi_5^j)^2 + 10(\gamma-1)(\psi_5^j)^3 + (\psi_5^j)^4 \end{array} \right\} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (2.64)$$

5 変量までのガンベルコピュラのパラメータは，以下のアルゴリズムによって，推定することができる．

アルゴリズム（ガンベルコピュラのパラメータ推定）

1. まず，データ数 N ，変量数 n の原データ x_i^j ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, N$) を，周辺分布ごとに $[0,1]$ の一様分布系列 u_i^j に変換する ($u_i^j = F_i(x_i^j)$) ．
2. $\hat{u}_i^j = -\ln u_i^j$ ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, N$) を計算する ．
3. 対数尤度関数を定義する（変量数 n に応じて，(2.61) ~ (2.64) 式の 1 つを選択） ．
4. 最大化アルゴリズムにより，対数尤度関数を最大化するパラメータを求める ．

ここで，上記のアルゴリズムによる具体的なパラメータの推定事例を挙げる．まず， $\gamma = 4$ のガンベルコピュラを用いて，5 変量乱数を 1,000 個発生させる．次に，ガンベルコピュラのパラメータの値を未知として，この乱数データからパラメータを最尤推定すると，パラメータの推定値は $\hat{\gamma} = 3.984$ となり，真値 ($\gamma = 4$) にほぼ等しい結果が得られた ．

2.4.5 フランクコピュラ

フランクコピュラは，Frank [1979] で示されたコピュラで， $\delta (> 0)$ をパラメータとして (2.8) 式で表される ．

(1) フランクコピュラの裾依存係数

このコピュラでは，

$$\frac{\partial C(u, u)}{\partial u} = \frac{2e^{-\delta u}(1 - e^{-\delta u})}{(1 - e^{-\delta}) - (1 - e^{-\delta u})^2} \quad (2.65)$$

となることを用いれば，上側裾依存係数，下側裾依存係数は，それぞれ

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = 2 - \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{\partial C(u, u)}{\partial u} = 2 - \frac{2e^{-\delta}(1 - e^{-\delta})}{e^{-\delta}(1 - e^{-\delta})} = 0 \quad (2.66)$$

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\partial C(u, u)}{\partial u} = \frac{0}{1 - e^{-\delta}} = 0, \quad (2.67)$$

となる³⁶．つまり，フランクコピュラでは，分布の両裾で漸近独立である ．

³⁶(2.65) 式のとおり， $C(u_1, u_2)$ が u_1, u_2 いずれについても $(0, 1)$ の区間で微分可能な関数であり，(2.66) 式の第 2 式は分子，分母ともに $u \rightarrow 1^-$ で 0 に収束し，(2.67) 式の第 2 式は分子，分母ともに $u \rightarrow 0^+$ で 0 に収束することから，ロピタルの公式を適用でき，各式の第 3 式に展開できる（Rudin [1976] の Theorem 5.13 を参照） ．

(2) フランクコピュラに従う乱数の発生方法

フランクコピュラの生成関数は $\phi(u_j) = -\ln(e^{-\delta u_j} - 1) + \ln(e^{-\delta} - 1)$ となり、その逆関数が $\phi^{-1}(s) = -\ln(1 + e^{-s}(e^{-\delta} - 1))/\delta$ で与えられる。マーシャル・オルキン法を適用するには、潜在変数 θ のラプラス変換が以下のような関係を満たせばよい。

$$\zeta(s) = \phi^{-1}(s) = -\ln(1 + e^{-s}(e^{-\delta} - 1))/\delta \quad (2.68)$$

ラプラス変換が (2.68) 式で表される確率変数 θ の分布は「パラメータ $\beta = 1 - e^{-\delta}$ の対数級数分布 (定義域は正の整数)」であることが知られている (Frees and Valdez [1998] を参照)。その確率関数は

$$\Pr[Y = k] = \frac{-1}{\ln(1 - \beta)} \frac{\beta^k}{k} \quad (2.69)$$

で与えられる。

パラメータ β の対数級数分布に従う乱数の発生方法は Kemp [1981] などいくつかの手法が考察されている。その中で比較的単純な手法の LB 法では、 $-\delta = \ln(1 - \beta)$ と 2 つの独立な $[0,1]$ 一様乱数 V, W を用いて、

$$\theta_0 \leftarrow \text{int}\left[1 + \frac{\ln(V)}{\ln(1 - e^{-\delta W})}\right] \quad (2.70)$$

としてパラメータ β の対数級数分布に従う乱数 θ_0 を発生させる。ただし、 $\text{int}[\cdot]$ は小数部分を切り捨てて整数にする関数である。したがって、フランクコピュラに従う乱数 U_1, \dots, U_n は以下のアルゴリズムで発生させることができる。

アルゴリズム (フランクコピュラに従う乱数発生法)

1. 2 つの $[0,1]$ 一様乱数 V, W を独立に発生させ、潜在変数 θ_0 を (2.70) 式で生成する。
2. θ_0 とは独立な $[0,1]$ の一様乱数 I_1, \dots, I_n を発生させる。
3. $j = 1, \dots, n$ で $U_j \leftarrow -\ln(1 + I_j^{1/\theta_0}(e^{-\delta} - 1))/\delta$ として U_1, \dots, U_n を生成する。

(3) フランクコピュラのパラメータ推定方法

多変量のフランクコピュラのパラメータを推定するためには、対数尤度を計算して、そこから最尤推定量を求めればよい。 $w_i = e^{-\delta u_i} - 1$ と置き、5 変量までのフランクコピュラの密度関数を求めると以下のようなになる³⁷。

• 2 変量フランクコピュラ

$$\frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{-\delta(w_1 + 1)(w_2 + 1)(e^{-\delta} - 1)}{\{(e^{-\delta} - 1) + w_1 w_2\}^2} \quad (2.71)$$

• 3 変量フランクコピュラ

$$\frac{\partial^3 C(u_1, \dots, u_3)}{\partial u_1 \cdots \partial u_3} = \frac{\delta^2(w_1 + 1)(w_2 + 1)(w_3 + 1)(e^{-\delta} - 1)^2 \{(e^{-\delta} - 1)^2 - w_1 w_2 w_3\}}{\{(e^{-\delta} - 1)^2 + w_1 w_2 w_3\}^3} \quad (2.72)$$

³⁷4 変量までの密度関数の式は、Cherubini, Luciano and Vecchiato [2004] にも示されている。

• 4変量フランクコピュラ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 C(u_1, \dots, u_4)}{\partial u_1 \cdots \partial u_4} &= -\delta^3 (w_1 + 1)(w_2 + 1)(w_3 + 1)(w_4 + 1)(e^{-\delta} - 1)^3 \\ &\times \frac{(e^{-\delta} - 1)^6 - 4(e^{-\delta} - 1)^3 w_1 w_2 w_3 w_4 + w_1^2 w_2^2 w_3^2 w_4^2}{\{(e^{-\delta} - 1)^3 + w_1 w_2 w_3 w_4\}^4} \end{aligned} \quad (2.73)$$

• 5変量フランクコピュラ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5 C(u_1, \dots, u_5)}{\partial u_1 \cdots \partial u_5} &= \delta^4 (w_1 + 1)(w_2 + 1)(w_3 + 1)(w_4 + 1)(w_5 + 1)(e^{-\delta} - 1)^4 \times \\ &\frac{(e^{-\delta} - 1)^{12} - 11(e^{-\delta} - 1)^8 w_1 w_2 w_3 w_4 w_5 + 11(e^{-\delta} - 1)^8 w_1^2 w_2^2 w_3^2 w_4^2 w_5^2 - w_1^3 w_2^3 w_3^3 w_4^3 w_5^3}{\{(e^{-\delta} - 1)^4 + w_1 w_2 w_3 w_4 w_5\}^5} \end{aligned} \quad (2.74)$$

2.5 コピュラを用いた実証分析

本節では、コピュラを用いたリスク計量の具体的な応用例として、(1) 貸出ポートフォリオの信用リスク、(2) 株式ポートフォリオの株価変動リスクを算出し、(3) 主要国株価指数変動の裾依存性とコピュラの分析を行う³⁸。

2.5.1 貸出ポートフォリオの信用リスク

N 社の企業への貸出債権から構成されるポートフォリオを考える。時点0（現在）と1の2時点（1期間）モデルを考える。時点1での企業 i の企業価値を X_i で表し、各企業は X_i が一定の閾値 k_i を下回ったときにデフォルトすると考える。つまり、 N 社が同時にデフォルトする確率は $\Pr(X_1 \leq k_1, \dots, X_N \leq k_N)$ で与えられる。ここで、 N 社が全て同一の格付を有しており、デフォルト確率 $\Pr(X_i \leq k_i)$ は一律0.5%であるとする。また、企業価値の相関係数 $\rho(X_i, X_j)$ も一律 ρ であるとする。Frey, McNeil and Nyfeler [2001]では、こうした設定のもとで、正規コピュラとさまざまな自由度のtコピュラを想定し、デフォルト先数の分布を算出している。ここでは、Frey, McNeil and Nyfeler [2001]を参考に、正規、t（自由度10）、クレイトン、反転ガンベルの4種類のコピュラを想定し、 $N=10,000$ として、コピュラごとに、デフォルト先数の分布を算出する。具体的には、まず、1回の試行で1万変量の一様乱数（ $[0,1]$ ）を発生させ、その値がデフォルト確率を下回る変量の個数をデフォルト先数であるとする。次に、これを10万回繰り返すことで、デフォルト先数の分布を得る³⁹。

各コピュラのパラメータは、ケンドールのタウ τ_K が一致するように定める。ここでは、相関係数 ρ が与えられているので、まず、正規、tコピュラで、 $\tau_K = (2/\pi) \arcsin \rho$ の関係があることを用いて、ケンドールのタウ τ_K を求める。なお、正規、tコピュラのパラメータは、それぞれ ρ 、 ρ と自由度（10）である。次に、ケンドールのタウ τ_K を所与として、クレイトン、反転ガンベルコピュラのパラメータ（それぞれ α, γ ）を、 $\alpha = 2\tau_K / (1 - \tau_K)$ 、 $\gamma = 1 / (1 - \tau_K)$ という関係⁴⁰から算出する。

³⁸この他の応用例としては、資産担保証券等のバスケット型の信用リスク商品がある。具体的には、2.6節のほか、Li [2000]; Schönbucher and Schubert [2001]; Schmidt and Ward [2002]; Overbeck and Schmidt [2005]; 小宮 [2003]等を参照。

³⁹この考え方はコピュラを用いてCDOの評価を行う考え方の基礎となっている。2.6節でより詳細に分析を行う。

⁴⁰2.A節を参照。

以上の設定により、4種類のコピュラを用いて得られるデフォルト先数の分布を算出する⁴¹。そこから、分位点とその分位点以下のデフォルト先数を表にしたものが表 2.3 である⁴²。

表 2.3: デフォルト先数の分布

(a) 相関係数 0.2									
	0.10%	1%	5%	10%	50%	90%	95%	99%	99.9%
正規	0	0	1	2	20	126	198	435	913
t	0	0	0	0	3	112	244	812	2,070
反転ガンベル	5	8	11	13	21	55	97	467	5,578
クレイトン	0	0	0	0	0	63	208	1179	3,822
(b) 相関係数 0.038									
	0.10%	1%	5%	10%	50%	90%	95%	99%	99.9%
正規	4	8	14	19	43	90	109	155	227
t	0	0	0	0	9	133	240	586	1,305
反転ガンベル	22	27	31	33	42	56	66	156	1,176
クレイトン	0	0	2	3	26	122	179	343	643

表 2.3 より、(1) 高い信頼水準 (95%~) でのデフォルト先数は、相関係数が大きいほど、多いこと、(2) 特に高い信頼水準 (99.9%) でのデフォルト先数は、分布の裾での依存度合いが大きいコピュラ (t, 反転ガンベル, クレイトン) で、非常に多いことがわかる。

2.5.2 株式ポートフォリオの株価変動リスク

次に、株式ポートフォリオを対象に、株価変動リスクを VaR (リスク評価期間: 1日) で算出する。ここでは、同業種間では株価の相関が強いと考えられることから、(1) 電機メーカー 5 銘柄 (日立製作所, 東芝, 三菱電機, 日本電気, 三洋電機) のポートフォリオと、(2) 総合商社 5 銘柄 (伊藤忠商事, 丸紅, 三井物産, 住友商事, 三菱商事) のポートフォリオを対象とする。

まず、周辺分布とコピュラのパラメータを推定する。電機 5 銘柄では、1999 年初~2001 年末の、商社 5 銘柄では、2002 年初~2004 年末の、それぞれ日次収益率データを用いる。

周辺分布には、確率密度関数が次式で表される両側指数分布を用いる。この分布は、分布の裾が厚いという特徴を有している。

$$f(x) = \frac{1}{2q} \exp\left(-\left|\frac{x-p}{q}\right|\right), \quad q > 0 \quad (2.75)$$

この分布の平均と分散はそれぞれ p , $2q^2$ であるので、この関係を日次収益率データに適用してパラメータ p, q を推定する。

電機 5 銘柄, 商社 5 銘柄の日次収益率データから p, q を求めたところ、表 2.4 の結果を得た。推定された p, q を用いた両側指数分布と対応する経験分布の例 (日本電気株の日次収益率データ) を図示したのが図 2.4 である。両側指数分布が経験分布の裾の特徴を比較的よく捉えてい

⁴¹各企業のデフォルト確率が 0.5%, 貸出先数が 1 万であるため、デフォルト先数の期待値は 50 となる。

⁴²相関係数 0.038 は、Frey, McNeil and Nyfeler [2001] でも用いられている値である。

表 2.4: 両側指数分布のパラメータ

(a) 電機 5 銘柄					
	日立製作所	東芝	三菱電機	日本電気	三洋電機
p	0.000438	-0.000509	0.000522	0.000359	0.000820
q	0.018179	0.019241	0.020787	0.021139	0.020076

(b) 商社 5 銘柄					
	伊藤忠商事	丸紅	三井物産	住友商事	三菱商事
p	0.000586	0.001671	0.000470	0.000473	0.000565
q	0.019388	0.021396	0.015097	0.017520	0.014676

ることがわかる．したがって，ここで，周辺分布に両側指数分布を近似的に採用することは妥当であるといえる．

電機 5 銘柄，商社 5 銘柄の 2 つの株式ポートフォリオに対して，正規， t ，反転ガンベルおよびクレイトンの 4 つのコピュラを用いて，それらのパラメータを推定する．

まず，電機 5 銘柄の 1999～2001 年日次収益率についてコピュラのパラメータを推定すると，正規コピュラについては，相関行列 Σ が

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0.539405 & 0.536943 & 0.569717 & 0.383190 \\ 0.539405 & 1 & 0.597219 & 0.621137 & 0.414482 \\ 0.536943 & 0.597219 & 1 & 0.553996 & 0.443241 \\ 0.569717 & 0.621137 & 0.553996 & 1 & 0.393412 \\ 0.383190 & 0.414482 & 0.443241 & 0.393412 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

と推定され， t コピュラの自由度 ν ，相関行列 Σ_ν は，

$$\hat{\nu} = 6, \quad \hat{\Sigma}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0.584118 & 0.571661 & 0.607913 & 0.426034 \\ 0.584118 & 1 & 0.638485 & 0.667614 & 0.450915 \\ 0.571661 & 0.638485 & 1 & 0.597704 & 0.477843 \\ 0.607913 & 0.667614 & 0.597704 & 1 & 0.448515 \\ 0.426034 & 0.450915 & 0.477843 & 0.448515 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

と推定され，反転ガンベルコピュラのパラメータ γ とクレイトンコピュラのパラメータ α はそれぞれ

$$\hat{\gamma} = 1.380645, \quad \hat{\alpha} = 0.723174 \quad (2.78)$$

と推定された．

次に，商社 5 銘柄の 2002～2004 年日次収益率についてコピュラのパラメータを推定すると，正規コピュラについては，相関行列 Σ が

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0.601223 & 0.619590 & 0.633444 & 0.600060 \\ 0.601223 & 1 & 0.490336 & 0.515077 & 0.489257 \\ 0.619590 & 0.490336 & 1 & 0.688552 & 0.692295 \\ 0.633444 & 0.515077 & 0.688552 & 1 & 0.639953 \\ 0.600060 & 0.489257 & 0.692295 & 0.639953 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

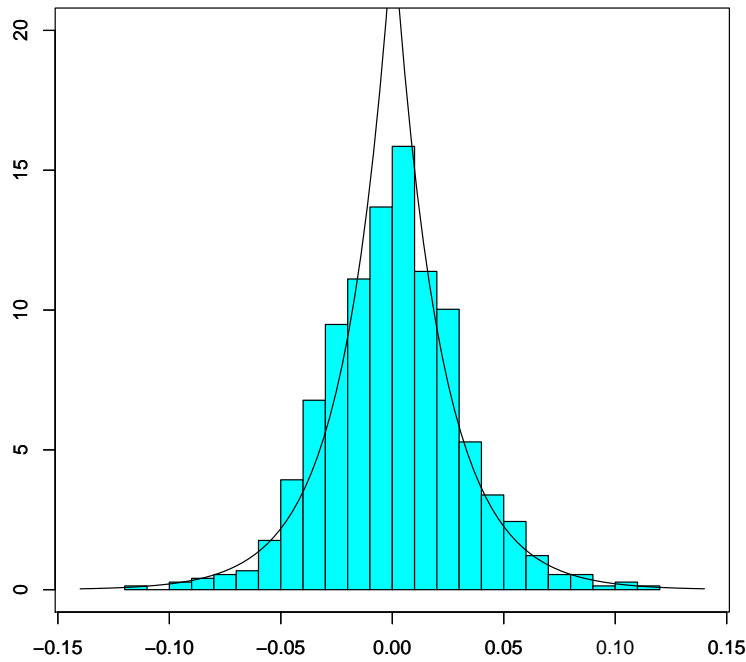


図 2.4: 経験分布と両側指数分布の例 (日本電気株)

と推定され, t コピュラの自由度 ν , 相関行列 Σ_ν は,

$$\hat{\nu} = 7, \quad \hat{\Sigma}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0.633637 & 0.640580 & 0.655596 & 0.627849 \\ 0.633637 & 1 & 0.510512 & 0.537244 & 0.517830 \\ 0.640580 & 0.510512 & 1 & 0.711757 & 0.715000 \\ 0.655596 & 0.537244 & 0.711757 & 1 & 0.666125 \\ 0.627849 & 0.517830 & 0.715000 & 0.666125 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

と推定され, 反転ガンベルコピュラのパラメータ γ とクレイトンコピュラのパラメータ α はそれぞれ

$$\hat{\gamma} = 1.512989, \quad \hat{\alpha} = 0.839844 \quad (2.81)$$

と推定された.

電機 5 銘柄, 商社 5 銘柄の各株式ポートフォリオは, リスク評価期間の初期時点で, ポートフォリオ内の各銘柄の価値が等しいとする. 表 2.4 のパラメータを持つ両側指数分布を周辺分布として, (2.76) ~ (2.78), (2.79) ~ (2.81) 式のパラメータを各種コピュラに適用して, 50 万回の試行で日次収益率分布を作成し, VaR と期待ショートフォール (ES) を算出した. それらの値をリスク評価期間 (1 日) の初期時点のポートフォリオの価値に対する比率で表示したものが, 表 2.5 である.

表 2.5 からは, 正規コピュラとその他のコピュラの相違に関して, 以下の諸点を指摘することができる. まず, 各コピュラの中では, 正規コピュラが最小のリスク量を導出している. 正規コピュラは, その他のコピュラに比べ, 99.99% の信頼水準では 2 ~ 4% ポイント程度低い値を算出している. また, 正規コピュラによるリスク量とその他コピュラによるそれとの相違は, 信頼水準が大きいほど大きい. 特に, ES でその傾向が顕著である.

表 2.5: ポートフォリオの VaR と期待ショートフォール

(a) 電機 5 銘柄

コンピュータ	VaR (99%)	VaR (99.5%)	VaR (99.9%)	VaR (99.99%)
	ES (99%)	ES (99.5%)	ES (99.9%)	ES (99.99%)
正規	5.43%	6.27%	8.17%	10.7%
	6.61%	7.43%	9.29%	11.7%
t	5.82%	6.86%	9.33%	13.1%
	7.34%	8.40%	10.9%	14.3%
反転ガンベル	6.23%	7.46%	10.4%	14.4%
	8.03%	9.27%	12.2%	16.3%
クレイトン	6.27%	7.48%	10.3%	14.4%
	8.01%	9.23%	12.1%	15.9%

(b) 商社 5 銘柄

コンピュータ	VaR (99%)	VaR (99.5%)	VaR (99.9%)	VaR (99.99%)
	ES (99%)	ES (99.5%)	ES (99.9%)	ES (99.99%)
正規	5.10%	5.91%	7.75%	10.1%
	6.25%	7.04%	8.81%	11.2%
t	5.39%	6.47%	8.58%	12.1%
	6.78%	7.74%	10.0%	13.6%
反転ガンベル	5.75%	6.86%	9.64%	13.1%
	7.36%	8.48%	11.1%	14.8%
クレイトン	5.75%	6.87%	9.41%	13.0%
	7.34%	8.44%	11.0%	14.6%

2.5.3 主要国株価変動の裾依存性とコピュラ

ここでは、データとしては、2000年1月から2009年9月までの米国、欧州、日本の株価インデックス（米国はS&P500、欧州はユーロストックス50、日本は日経平均）の日次収益率を用いて、分布の裾依存性と各種コピュラの適合度に関する分析を行う。

(2.16)式で示した下側裾依存性をデータに基づき、周辺分布 $F_1(\cdot)$ 、 $F_2(\cdot)$ を経験分布にして、ノンパラメトリックに推計し、各種コピュラでの計算値と比較する。裾として認識する水準を5%、1%とした $\lambda_L(0.05)$ 、 $\lambda_L(0.01)$ を推計する⁴³。その結果は、表2.6のとおりである。表では、 $\lambda_L(u)$ の推計値と各コピュラを用いた $\lambda_L(u)$ の計算値を表示している。コピュラを用いた計算値において各コピュラのパラメータについては、まず、ケンドールのタウ τ_K を推計し、そのケンドールのタウ τ_K と一致するパラメータを表2.2の関係式から求めている。また、tコピュラの自由度は3あるいは6で固定している。どの国のペアを見ても、データに基づく推計値は、正規コピュラでの計算値より高いことが確認できる。5%水準では、米国と欧州の推計値は、自由度3のtコピュラの水準に達し、米国と日本の推計値および欧州と日本の推計値は、自由度6と自由度3のtコピュラの間位置している。1%水準では、いずれの推計値も自由度6と自由度3のtコピュラの間位置している。このことから、この分析期間においては、正規コピュラでは捉えられない下側裾依存性が存在することが確認できる⁴⁴。

表 2.6: 株価指数間の下側裾依存性と各コピュラに基づく計算値

		推計値	正規	t(6)	t(3)	反転ガンベル	クレイトン
$\lambda_L(0.05)$	米国と欧州	0.39	0.25	0.32	0.37	0.47	0.52
	米国と日本	0.35	0.20	0.30	0.36	0.40	0.43
	欧州と日本	0.24	0.13	0.20	0.25	0.30	0.28
$\lambda_L(0.01)$	米国と欧州	0.27	0.13	0.24	0.33	0.43	0.51
	米国と日本	0.29	0.09	0.23	0.32	0.36	0.41
	欧州と日本	0.18	0.05	0.14	0.22	0.24	0.23

以上より、日米欧の株価変動は何らかのストレス事象が発生すると下側裾依存性が強まり、正規コピュラのような裾の依存性の低いコピュラでは株価変動間の相互依存関係を十分に表現できなくなることが示唆される。一方、そうしたストレス事象発生時の下側裾依存係数は、tコピュラ、反転ガンベルコピュラ、クレイトンコピュラなど下側で漸近従属しているコピュラでの理論値に近い値になっており、ストレス事象の発生を考慮するには下側で漸近従属しているコピュラでモデル化する必要があると考えられる。

次に、同じデータを用いて、各種コピュラの最尤推計を行い、適合度を比較する。最尤推計の結果は、表2.7のとおりである。表2.7では最尤推計により求めた最大尤度から適合度を評価するため、パラメータ数 p とサンプルサイズ（観測データの数） N で調整を行ったBICを算

⁴³下側裾依存係数は、推計方法が簡単な反面、観測データのうち数%のデータ（ここでは下側5%水準ないし1%水準）のみから推計を行うため、推計の精度に限界があることは留意する必要がある。

⁴⁴新谷・山田・吉羽 [2010] では、全期間での推定のほかに過去1年間を観測期間とした $\lambda_L(0.05)$ のローリング推計を行っており、市場にストレスが発生した時期には、下側裾依存性の弱いコピュラ、例えば、正規コピュラに基づく計算値では説明できない水準に達している。すなわち、反転ガンベルやクレイトンといった裾依存性の強いコピュラに基づく計算値に近い水準まで達していることを示している。

出し，下段の () で表示している．パラメータの集合をベクトル $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p)$ で表現し対数尤度を $\ell(\xi)$ とすると，BIC は，求めた最尤推定量 $\hat{\xi}$ を用いて，

$$BIC = -2 \ln \ell(\hat{\xi}) + p \ln N \quad (2.82)$$

と定義される．BIC は値が低いほど適合度が高いことを意味する．どの国のペアを見ても正規コピュラの適合度は相対的に低いことがわかる．これに対し t コピュラや下側裾依存性の強い反転ガンベルコピュラの適合度は高いことが確認できる．このように，適合度の観点でも，本分析期間においては，正規コピュラでは捉えられない下側裾依存性が存在することが確認できる．

表 2.7: 株価指数間のコピュラパラメータと BIC

	正規	t	反転ガンベル	クレイトン	ガンベル
	ρ	ρ ν	γ	α	γ
米国と欧州	0.519 (-785)	0.520 3 (-1, 055)	1.539 (-868)	0.831 (-695)	1.533 (-887)
米国と日本	0.443 (-544)	0.427 5 (-637)	1.389 (-583)	0.640 (-488)	1.366 (-542)
欧州と日本	0.270 (-183)	0.273 5 (-253)	1.220 (-248)	0.387 (-217)	1.180 (-165)

備考: 各セルの上段は各パラメータの最尤推定値，下段の括弧内の値は尤度から求めた BIC .

参考として，コピュラを介さずに直接的に推計した順位相関 τ_K を導出する一方⁴⁵，表 2.7 で推計された各パラメータから表 2.2 の関係式を用いて順位相関（ケンドールのタウ）を算出すると，表 2.8 のようになる．どのコピュラのパラメータ推計値も，直接的に推計した順位相関とほぼ同じ値になることがわかる⁴⁶．したがって，コピュラの種類によって異なるのは，分布全体の依存性でなく，表 2.6 で確認した裾など分布の一部の依存性の強さであるといえる．

表 2.8: 順位相関 τ_K の直接推定とコピュラパラメータからの間接推定

	順位相関	正規	t	反転ガンベル	クレイトン	ガンベル
米国と欧州	0.339	0.348	0.348	0.350	0.293	0.348
米国と日本	0.273	0.292	0.281	0.280	0.242	0.268
欧州と日本	0.175	0.174	0.176	0.180	0.162	0.153

以上の結果は，コピュラの適合度を実証分析した先行研究とも整合的な結果である．例えば，Tsafack [2009] は，米国とカナダの株価指数を用いて各種コピュラの適合度を分析している．具体的には，1985 年 1 月から 2004 年 12 月の 20 年間を分析期間として，週次収益率を用いて正規コピュラ， t コピュラ，反転ガンベルコピュラ，クレイトンコピュラの適合度を AIC と BIC

⁴⁵算出方法は脚注 16 のとおりである．

⁴⁶コピュラのパラメータ推定はここでは最尤推定を採用したが，順位相関を用いた積率法による推定も考えられる．例えば，McNeil, Frey and Embrechts [2005] を参照．

により評価している。その結果、ここでの分析と同様、正規コピュラより反転ガンベルコピュラやtコピュラの適合度が高いことを示している。

2.6 コピュラを用いたCDOの評価

CDOの価値評価は、実務的には正規コピュラを用いたモデルが標準的に用いられている⁴⁷。しかし、前述のように、正規コピュラは変数間の裾の依存性を表現できないため、CDOの信用スプレッド評価に用いた場合、上位トランシェの損失の見積もりが甘くなる可能性がある。本節では、正規コピュラも含め、さまざまなコピュラを用いてCDOを評価する場合に、コピュラの種類の違いで生じる評価上の問題を議論する。

稲村・白塚 [2008] や藤井・竹本 [2009] は、標準的な正規コピュラを用いて、5年満期の等額面、等回収率、等資産相関 ρ のCDOやそのトランシェから再証券化されたCDOスクエアードの損失分布評価を行っている。再証券化されたCDOスクエアードについて稲村・白塚 [2008] は、各トランシェの期待損失の資産相関 ρ に対する感応度を求め、上位トランシェでは再証券化により資産相関 ρ に対する感応度が高くなることを示している。

これらの研究と同様の設定のもと、本節では、正規コピュラのほかに、裾での依存性の強いコピュラ（クレイトンコピュラ、反転ガンベルコピュラ、tコピュラ）や弱いコピュラ（フランクコピュラ）を用いることで各トランシェの期待損失率評価の違いを考察する。

2.6.1 1期間構造モデルとコピュラ

コピュラを用いた評価法では、 n 個の債務からなるCDOプールの第 j 債務の満期における資産状態変数を X_j として評価を行う。各状態変数の分布関数を $F_j(x)$ として、 $U_j = F_j(X_j)$ と変数変換すると、 U_j は一様分布に従うが、この確率変数 U_j が、設定した満期までのデフォルト確率 p よりも低いか否かで各債務のデフォルトを判定する。このとき、多変量一様確率変数 (U_1, \dots, U_n) の同時分布関数が設定したコピュラ関数となる。

例えば、正規コピュラモデルは、相関行列 Σ を持つ正規コピュラで上記の評価を行ったものである。正規コピュラモデルの中でも最も単純で代表的なモデルである1ファクターシングルインデックス正規コピュラモデルは、 n 個の債務からなるCDOプールの第 j 債務の状態変数（第 j 債務者の資産状態変数）を

$$X_j = \sqrt{\rho}V + \sqrt{1 - \rho}\varepsilon_j \quad (2.83)$$

と置いてモデル化する。ただし、 V と ε_j は独立に標準正規分布に従う確率変数であり、 $\rho > 0$ である。状態変数は満期 T での資産状態を表しているものと考えられ、満期 T で状態変数 X_j が負債の状態を表す閾値 K_j を下回っていればデフォルトと考える。すなわち（1変量）標準正規分布の分布関数を $\Phi(\cdot)$ として、

$$p = \Pr(X_j \leq K_j) = \Phi(K_j) \quad (2.84)$$

となることから、デフォルト閾値は

$$K_j = \Phi^{-1}(p) \quad (2.85)$$

⁴⁷CDO評価法については、さまざまな種類のコピュラを用いた方法を含め、室町 [2007] が詳しい。

で与えられるが、このデフォルトの判断 $X_j \leq K_j$ は、

$$U_j = \Phi(X_j) \leq p \quad (2.86)$$

と同値であり、コピュラモデルの特殊ケースになっていることを確認できる。

正規コピュラ以外のコピュラに従うモデルを考える場合は、想定するコピュラに従う多変量一様確率変数 (U_1, \dots, U_n) を構成し、第 j 債務のデフォルトは (2.86) 式のように $U_j \leq p$ の成否で判断すればよいということになる。

2.6.2 等質な CDO の評価法

参照債務数 n の等質な CDO プールを考える。すなわち、CDO プールの額面を 1 に標準化し、各参照債務のエクスポージャーは等しく $1/n$ とする。各参照債務の満期までのデフォルト確率は一定で p 、各参照債務のデフォルト時損失率 (1-回収率) も一定で LGD 、参照債務間の資産状態変数の相関は一定で $\rho (> 0)$ とする。

CDO プールの損失率 L ($L \in [0, 1]$) は、第 j 債務のデフォルト事象を $U_j \leq p$ と表現できることから、

$$L = \frac{LGD}{n} \sum_{j=1}^n 1_{\{U_j \leq p\}} \quad (2.87)$$

と表現される。各トランシェの期待損失率や信用スプレッドの評価は、デフォルト件数の評価に帰着する。デフォルト件数は数値積分によっても評価できるが、ここでは、より一般的なアプローチとして、検討するコピュラに従う乱数を用いて各債務の損失をシミュレーションによって評価する方法を採用する。

まず、CDO プールの期待損失率について考える。各債務のデフォルト時損失率 (1-回収率) は一定で LGD で与えられるとし、CDO プール全体の元本は 1 であるとする。シミュレーションの第 i 番目のパスでの乱数を $(U_1^{(i)}, \dots, U_n^{(i)})$ で表記すると、第 i 番目のパスでの CDO プールの損失率は

$$L^{(i)} = \frac{LGD}{n} \sum_{j=1}^n 1_{\{U_j^{(i)} \leq p\}} \quad (2.88)$$

で表現されるため、 N 個のパスによるシミュレーションで CDO プールの期待損失率は

$$E[L] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L^{(i)} = \frac{LGD}{Nn} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n 1_{\{U_j^{(i)} \leq p\}} \quad (2.89)$$

と評価される⁴⁸。ここで、アタッチメント A_M 、デタッチメント D_M のトランシェ M を考えると、その損失率は

$$L_M = \frac{\max(L - A_M, 0) - \max(L - D_M, 0)}{D_M - A_M} \quad (2.90)$$

で与えられる。この損失率の期待値は、(2.88) 式を用いて

$$E[L_M] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\max(L^{(i)} - A_M, 0) - \max(L^{(i)} - D_M, 0)}{D_M - A_M} \quad (2.91)$$

⁴⁸こうしたアプローチは、2.5.1 節で示した与信ポートフォリオの評価モデルと同じである。なお、2.5.1 節では、与信ポートフォリオの損失分布について期待値だけでなく分位点 (value-at-risk) も算出しコピュラの違いの影響を計測している。また、小宮 [2003] は、正規コピュラと反転ガンベルコピュラの違いが各トランシェの損失率に及ぼす影響を考察している。

と評価される．各トランシェの信用スプレッドは後掲 (2.96) 式にこの (2.91) 式を代入して評価される．次に，(2.90) 式の損失率で与えられる同額のトランシェ M を K 個参照する CDO スクエアードを評価する場合には， K 個のトランシェ M が参照する末端債務に重複がないと仮定するならば， Kn 変量の乱数 $(U_{1,1}^{(i)}, \dots, U_{1,n}^{(i)}, \dots, U_{K,1}^{(i)}, \dots, U_{K,n}^{(i)})$ を用いて評価を行う．第 i 番目のパスでの当該 CDO スクエアードのプールの損失率 $L_K^{\text{sq},M,(i)}$ は，

$$L_K^{\text{sq},M,(i)} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{\max(L_k^{(i)} - A_M, 0) - \max(L_k^{(i)} - D_M, 0)}{D_M - A_M} \quad (2.92)$$

ただし，

$$L_k^{(i)} = \frac{LGD}{n} \sum_{j=1}^n 1_{\{U_{k,j}^{(i)} \leq p\}} \quad (2.93)$$

で与えられ，CDO スクエアードのアタッチメント A_S ，デタッチメント D_S のトランシェ S の損失率 $L_S^{\text{sq},M}$ の期待値は

$$E[L_S^{\text{sq},M}] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\max(L_K^{\text{sq},M,(i)} - A_S, 0) - \max(L_K^{\text{sq},M,(i)} - D_S, 0)}{D_S - A_S} \quad (2.94)$$

で与えられる．

このようにして得られた CDO および CDO スクエアードの各トランシェの損失率を用いて，市場取引されるプレミアムを評価する．簡単化のため，市場はリスク中立的であるとし，CDO トランシェのプロテクションの売り手はプレミアムを定期的に受け取るのではなく，割引債形式のスプレッドとして期初に一括して受け取るものとして評価する．すなわち，満期での CDO プールの損失率を L とし，トランシェ M の信用スプレッド s_M は無リスク金利を r として

$$e^{-(r+s_M)T} = (1 - E[L_M])e^{-rT} \quad (2.95)$$

を満たすことから

$$s_M = -\frac{1}{T} \ln(1 - E[L_M]) \quad (2.96)$$

で与えられる．CDO スクエアードのトランシェについても同様に信用スプレッドを定義できる．取引される CDO の満期は通常 5 年程度であり，この信用スプレッドは取引対象のトランシェの期待損失率を連続複利表示の年率で表示したものと解釈できる．

2.6.3 コピュラの違いが CDO の評価に及ぼす影響

コピュラの違いが CDO の評価に与える影響を考察するため，2.2 節で示した (1) 正規，(2) t ，(3) 反転ガンベル，(4) クレイトン，(5) フランクの 5 つのコピュラを比較する．等質な CDO を評価するため，(1)，(2) の正規コピュラ， t コピュラでは相関行列のすべての非対角要素が一定の ρ であるとする．(2) の t コピュラでは自由度については先験的に与え，具体的には 20，6，3 の 3 種類を考える．したがって，対象とするコピュラはすべて 1 パラメータとなる．

資産価格のヒストリカルデータを用いて価格変動間のコピュラのパラメータを決定することを考えると，パラメータは 2.5.2，2.5.3 節で考察したように対象となる観測期間全てのデータを用いて最尤推計等により求めたり，あるいは，パラメータが 1 つだけであれば順位相関に合

わせてパラメータを求めることができる．ここでは，順位相関としてケンドールのタウに合わせてパラメータを求めることとする．

考察する等質な CDO の具体的な設定は，稲村・白塚 [2008] と同様に参照債務数： $n = 100$ ，満期： $T = 5$ （年）とし，各債務については一般的な回収率の設定（40% 一定）と比較的高めなデフォルト確率（5年で5%）を考える．典型的な正規コピュラの ρ としては 0.15 を考える．このとき，ケンドールのタウ τ_K は 0.096 であり，この順位相関を持つ各コピュラのパラメータはクレイトンコピュラ： $\alpha = 0.21$ ，反転ガンベルコピュラ： $\gamma = 1.11$ ，フランクコピュラ： $\delta = 0.87$ で与えられる⁴⁹．トランシェの分け方は，典型的な $\rho = 0.15$ の正規コピュラを想定した場合にスーパーシニアが AAA 格以上，シニアが AA～AAA 格程度，メザニンが BBB～A 格程度を確保できるよう表 2.9 のようにトランシングする．

表 2.9: CDO のトランシング

トランシェ	エクイティ	メザニン	シニア	スーパーシニア
アタッチメント	0%	6%	18%	36%
デタッチメント	6%	18%	36%	100%

このとき，各トランシェの期待損失率から計算される (2.96) 式のスプレッドは表 2.10 のようになる．以下すべてのシミュレーションは 100 万回のパスで評価している．t コピュラについては自由度 20, 6, 3 での結果が，それぞれ $t(20)$, $t(6)$, $t(3)$ の行に示されている．表 2.10 より，下側裾依存性の弱いフランク，正規コピュラではエクイティのスプレッドを高め推定するものの，シニア，スーパーシニアといった上位トランシェのスプレッドについては低めに推定してしまうことがわかる．例えば，シニアのスプレッドは正規コピュラでは 0.65 であるのに対し，自由度 3 の t コピュラでは 21.81，反転ガンベルコピュラでは 19.04 となっており，裾依存性の認識の差が上位トランシェのリスク認識に大きな違いを生じさせることがわかる⁵⁰．

図 2.5 は，CDO の各トランシェについて，想定するコピュラの種類ごとに，参照資産の順位相関を変えた場合にスプレッドの評価値がどのように変化していくかを図示したものである．横軸は順位相関を正規コピュラの相関 ρ に換算して表示しており，縦軸は各コピュラに基づき計算されたスプレッドを表している．

図 2.5 より，エクイティでは裾依存性の弱いフランクや正規コピュラでのスプレッドが高いが，シニアでは裾依存性の弱いフランクや正規コピュラでのスプレッドは低く見積もられることがわかる．相関 ρ に対する感応度の観点では，エクイティではどのコピュラでも相関の上昇に伴いスプレッドは下落している一方，上位のトランシェでは相関の上昇に伴いスプレッドは上昇している⁵¹．仔細にみると，メザニントランシェでは相関 ρ が 0.05 と低いときに正規コピュ

⁴⁹t コピュラのケンドールのタウ τ_K は，表 2.2 で示しているように自由度 ν に依存せず，正規コピュラと同じ形式で表現される．このため， $t(20)$, $t(6)$, $t(3)$ とともに $\rho = 0.15$ のケースが $\tau_K = 0.096$ に対応する．

⁵⁰Burtschell, Gregory and Laurent [2009] でも，同じようにコピュラを用いた CDO 評価法の比較を行っている．ただし，Burtschell, Gregory and Laurent [2009] ではコピュラ間の比較に際して順位相関を一致させるのではなく，1 パラメータのコピュラについてエクイティのスプレッドが等しくなるようにパラメータを設定し，上位トランシェの市場価格を説明できるモデルを考察している．すなわち，1 つのパラメータで全てのトランシェの市場価格を説明できるコピュラモデルはどのモデルかを検討している．一方，本節の分析はトランシェの市場価格を所与とするのではなく，各債務の状態を表す資産状態変数の順位相関が株価の過去の変動などに基づいて推定されるような場合に，コピュラによってトランシェの市場価格がどのように変化するかという観点から考察している．

⁵¹小宮 [2003] でも指摘されているように，相関に対する感応度の観点では，相関を強めることに伴い上位のトランシェに損失リスクがより多く配分される結果として，エクイティのスプレッドは下落する．一方，シニアでは，相関を強めると損失リスクがより大きく及ぶこととなりスプレッドは上昇する．

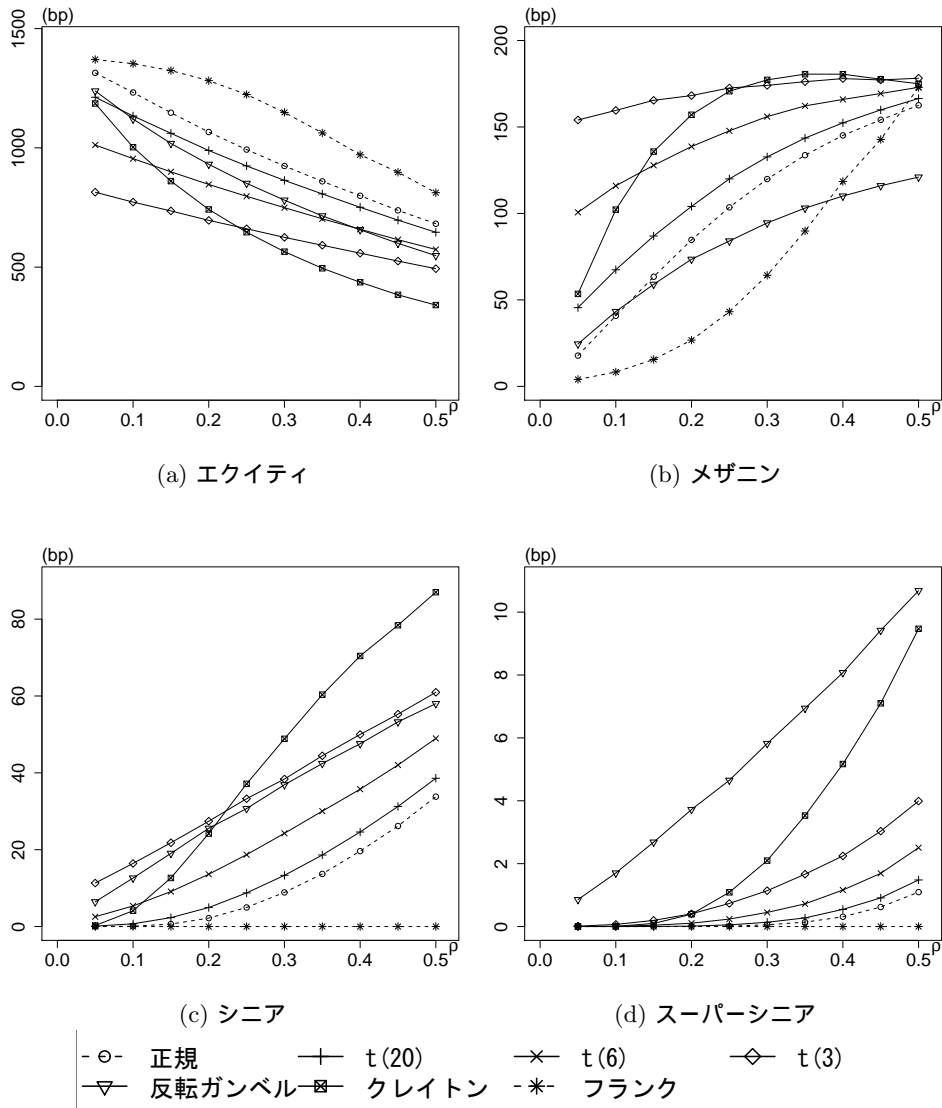


図 2.5: 相関に応じたスプレッド

備考: 横軸は順位相関を正規コピュラの相関 ρ に換算して表示したもの。縦軸は対応する各コピュラに基づくスプレッドの評価値 (単位: bp)

表 2.10: 各トランシェのスプレッド ($\rho = 0.15$) 単位: bp

コピュラ	エクイティ	メザニン	シニア	スーパーシニア
正規	1,147.43	63.38	0.65	0.000
t(20)	1,061.07	86.94	2.33	0.002
t(6)	899.52	127.82	9.11	0.043
t(3)	735.55	165.40	21.81	0.196
反転ガンベル	1,018.34	59.01	19.04	2.685
クレイトン	860.61	135.77	12.65	0.099
フランク	1,324.02	15.54	0.00	0.000

ラではほぼ0のスプレッドを算出してしまいが、下側裾依存性の強い自由度3のtコピュラでは150bp程度と非常に高いスプレッドを算出する⁵²。シニアトランシェでは自由度の低いtコピュラや反転ガンベルではスプレッドが高く見積もられ、相関 ρ の高まりに対してほぼ線形にスプレッドが上昇するが、正規コピュラや自由度の高いtコピュラでは下に凸の形状となっており、相関 ρ の高まりに対して期待損失率の認識が急激に高まることを示唆している⁵³。

ここで、各トランシェを期待損失が一定の金額になるように保有することを考える。スプレッドが小さいときにはそのトランシェについて多額の元本を保有することになる。このとき、相関 ρ が変化したときのスプレッド変化率が大きいと、元本が多額であることから期待損失額の見積もりも大きくなる。そうした状況で当該トランシェを保有し続けるには、多額の資金を調達する必要が生じてしまう。そこで、図2.5の結果を用いて相関 ρ を0.05上昇させた際のメザニンおよびシニアにおけるスプレッドの変化率をフランク以外のコピュラについてみると、表2.11のとおりとなる⁵⁴。例えば、シニアの $\rho = 0.15$ での正規コピュラの値7.74は、 $\rho = 0.15$ のスプレッドと $\rho = 0.10$ のスプレッドとの比である。この表から、正規コピュラに基づくスプレッド変化率が相対的に大きいことがわかる。すなわち、正規コピュラモデルが他のt、反転ガンベル、クレイトンといった下側依存性の強いコピュラに基づくモデルに比べて相関 ρ の変化に対して脆弱な判断を導きやすいと考えられる⁵⁵。

2.6.4 コピュラの違いがCDOスクエアードの評価に及ぼす影響

コピュラの違いがCDOスクエアードの評価に及ぼす影響を考察するため、2.6.3節で検討したCDOのメザニンのトランシェを10個参照する再証券化商品(CDOスクエアード)を構

⁵²tコピュラでは相関 ρ が0に近づいたときに、変量間は無相関になるものの独立になるわけではない。これはシステムティックファクターと個別ファクターそれぞれにt分布を考えた状態変数で表現されるdouble-tコピュラと異なる点である。詳細は2.B節を参照。

⁵³Burtschell, Gregory and Laurent [2009]では脚注50のような比較を正規、t、クレイトンなどのコピュラについて行い、これら3つのコピュラでは上位トランシェの市場価格評価にあまり違いが生じなかったとしている。このことは、図2.5でエクイティのスプレッドを800bpに合わせるようにパラメータを設定したと仮定して、上位トランシェのスプレッドをコピュラ間で比較することによっても確認できる。このとき、Burtschell, Gregory and Laurent [2009]では検討されていない反転ガンベルの結果は正規、t、クレイトンの結果とは異なり、メザニンのスプレッドを相対的に低く、シニア、スーパーシニアのスプレッドを相対的に高く見積もることがわかる。

⁵⁴フランクコピュラでは、考察している相関の範囲ではシニアのスプレッドがほとんど0となり、相関の変化に関するスプレッド変化率を求められないため、分析から除外した。

⁵⁵同様の感応度分析は2.6.4節で扱うCDOスクエアードについても行うことができる。その結果の詳細は省略するが、定性的には、本小節のCDOに対する分析結果と同様である。

表 2.11: 相関の変化に対する CDO トランシェの спреッド比率

ρ	正規	t(20)	t(6)	t(3)	反転ガ ンベル	クレイ トン
	メザニン					
0.1	2.29	1.48	1.15	1.04	1.76	1.91
0.15	1.55	1.29	1.10	1.04	1.36	1.33
0.2	1.34	1.20	1.09	1.02	1.25	1.16
0.25	1.22	1.15	1.07	1.03	1.14	1.09
0.3	1.16	1.11	1.06	1.01	1.12	1.04
0.35	1.12	1.08	1.04	1.01	1.09	1.02
0.4	1.09	1.06	1.02	1.01	1.07	1.00
0.45	1.06	1.05	1.02	1.00	1.05	0.98
0.5	1.05	1.04	1.02	1.01	1.04	0.99
	シニア					
0.1	158.60	6.48	2.10	1.45	1.96	15.40
0.15	7.74	3.25	1.70	1.33	1.51	3.08
0.2	3.35	2.13	1.50	1.26	1.34	1.91
0.25	2.26	1.77	1.37	1.21	1.20	1.53
0.3	1.79	1.52	1.30	1.15	1.20	1.32
0.35	1.54	1.40	1.24	1.16	1.15	1.24
0.4	1.43	1.32	1.19	1.12	1.12	1.17
0.45	1.33	1.27	1.18	1.11	1.12	1.11
0.5	1.29	1.23	1.16	1.10	1.09	1.11

成し、スプレッドの評価を行う。この CDO スクエアードが参照するトランシェを構成する各 CDO プール（インナー CDO）はそれぞれ 100 個の債務から構成されるとする。CDO スクエアードを以下のように 3 つのトランシェに分ける。

表 2.12: CDO スクエアードのトランシング

トランシェ	エクイティ	メザニン	シニア
アタッチメント	0%	20%	80%
デタッチメント	20%	80%	100%

まず、インナー CDO が参照する債務には重複がないものとする。すなわち、CDO スクエアードが参照している末端の債務は総計で 1,000 個あるとし、各債務の状態変数は、(1) 正規、(2) t 、(3) ガンベル、(4) 反転ガンベル、(5) クレイトンの 5 種類のいずれかのコピュラで関係付けられているとする。基本ケースとして正規コピュラの相関 ρ を 0.15 とし、表 2.12 に示したトランシェのスプレッドを各コピュラに基づき評価すると表 2.13 のようになる。シニアについては、この例のようにアタッチメントを 80% と高水準に設定しても、正規コピュラで 3.22bp、正規以外の下側裾依存性の強いコピュラではさらに 1 桁大きいスプレッドとなるなど、高めの期待損失率が見込まれる点が特徴的である。この点、同じ CDO スクエアードについて、後掲 2.6.6 節のような簡便な評価手法を適用すると、本小節の評価結果に比べ著しく小さな期待損失と評価されるのと対照的な結果である。

表 2.13: CDO スクエアードの各トランシェ・スプレッド ($\rho = 0.15$) 単位: bp

コピュラ	エクイティ	メザニン	シニア
正規	217.87	34.02	3.22
$t(20)$	257.25	58.46	10.06
$t(6)$	303.95	104.45	31.51
$t(3)$	324.82	147.91	61.82
反転ガンベル	113.11	50.53	29.70
クレイトン	306.63	115.52	39.63
フランク	78.85	0.00	0.00

次に、図 2.5 と同様に相関を変化させたときに、CDO スクエアードの各トランシェのスプレッドが考察対象のコピュラごとにどのように変化していくかをみると、図 2.6 のようになる。横軸は、図 2.5 と同様に、順位相関を正規コピュラの相関 ρ で換算した表示となっている。メザニンおよびシニアをみると、相関 ρ の上昇に伴うスプレッドの上昇度合いは、フランクコピュラを除くと正規コピュラが一番大きいように見える。

2.6.5 CDO スクエアードにおける末端参照債務の重複度の影響

CDO スクエアードは、参照するトランシェがさらに多くの銘柄から構成される CDO（インナー CDO）で構成されるため、参照している末端参照債務数は非常に大きな数となる。この場合、実際にはそれだけ多数の末端参照債務が全て相異なるとは限らず、暗黙のうちにくつ

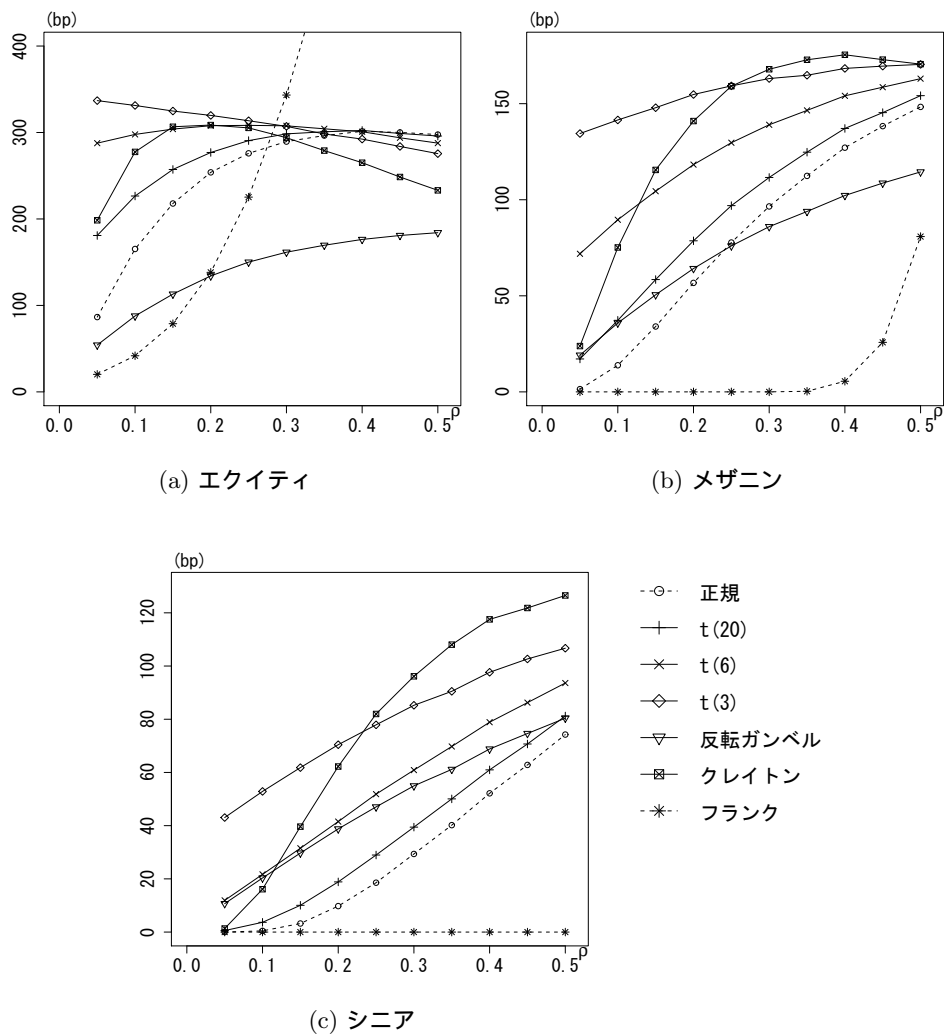


図 2.6: 相関に応じた CDO スクエアードの спреッド

備考: 横軸は順位相関を正規コピュラの相関 ρ に換算して表示したもの. 縦軸は対応する各コピュラに基づく спреッドの評価値 (単位: bp)

かの債務を重複して参照している可能性がある。こうした重複が存在すると、想定した相関よりも実質的に高い相関が発生してしまっている可能性がある⁵⁶。

そこで、ここでは各 100 銘柄を参照している 10 個のインナー CDO について、100 銘柄のうち m 銘柄は互いに共通の債務を参照していると想定する。正規コピュラの相関 ρ については基本ケースの 0.15 で考え、重複している銘柄数 m を 0 から 100 まで変化させたとき、各トランシェのスプレッドがどのように変化していくかを図示すると図 2.7 のとおりとなる⁵⁷。図 2.7 より、エクイティでは重複銘柄数の増加に伴い損失率が減少するのに対し、メザニンとシニアでは重複銘柄数の増加に伴い損失率が増大することがわかる。これは、エクイティでは相関の上昇に伴い損失率が減少する一方、シニアでは相関の上昇に伴い損失率が増加するという図 2.5 の現象と同じであり、重複銘柄数の増加は実質的な相関の上昇を意味していることがわかる。また、シニアについてコピュラごとに重複銘柄数の増加に伴うスプレッド比率の増加をみると、正規コピュラでは完全重複でほぼ 2 倍のスプレッドとなる一方、裾依存性の強いコピュラについてはスプレッド比率の増加は相対的に抑えられていることがわかる。

2.6.6 末端参照債務を考慮しない CDO スクエアード評価との比較

2.6.4, 2.6.5 節では、CDO スクエアードの損失評価に際して、末端参照債務の相互依存関係を考慮して評価を行ったが、より簡便な評価方法としては、CDO スクエアードが参照している各 CDO トランシェをそれぞれ 1 つの債務とみなして評価を行うことも考えられる。本小節では、そのような簡便な評価を行った場合に CDO スクエアードの各トランシェの期待損失率がどう評価されるかを考察する。

2.6.4, 2.6.5 節で扱った CDO スクエアードでは、メザニントランシェ 10 個を参照しているが、末端参照債務を考慮せず、このメザニントランシェと同一のデフォルト確率、回収率を持つ 10 個の債務について CDO を構成したと考えて評価を行う。表 2.10 より $\rho = 0.15$ の正規コピュラでのメザニンのスプレッドは $s_M = 63.38$ (bp) と与えられている。これを踏まえ、CDO スクエアードの参照資産について、満期 $T = 5$ (年)、 $LGD = 0.6$ (回収率 40%) として、5 年間のデフォルト確率を算出すると、

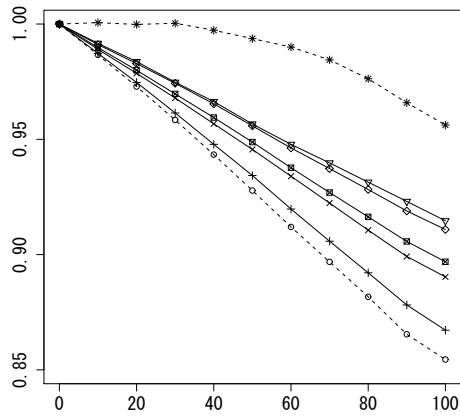
$$p = (1 - e^{-s_M T / 10000}) / LGD \cong 5.20\% \quad (2.97)$$

となる。このデフォルト確率を有する債務 10 個を参照する CDO として、CDO スクエアードの各トランシェの信用スプレッドを評価する。その際、相関 ρ は 0.15 とし、正規コピュラに基づき評価を行う。また、同様に、自由度 20, 6, 3 の t コピュラ、反転ガンベルコピュラ、クレイトンコピュラ、フランクコピュラの各コピュラについても表 2.10 で得られているスプレッドを (2.97) 式で 10 個の債務のデフォルト確率に変換し、相関 $\rho = 0.15$ で各コピュラに基づいて CDO スクエアードを評価すると、表 2.14 のとおりとなる。

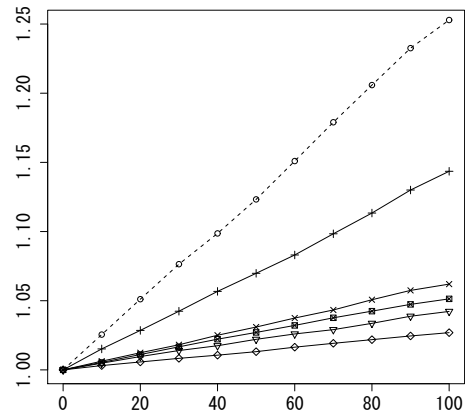
表 2.14 と表 2.13 を比較すると、フランクコピュラ以外では、末端参照債務を考慮した場合よりもメザニンとシニアを大幅に過小評価してしまうことがわかる。特に、表 2.14 では、シニアについてはどのコピュラでも評価しても末端参照債務を考慮しない場合には期待損失率をゼロとしか評価できず、リスクを過小評価してしまうことがわかる。

⁵⁶池上 [2005] や Whetten and Adelson [2005] でも CDO スクエアードの重複度に注目し、正規コピュラを用いてその効果を検証している。

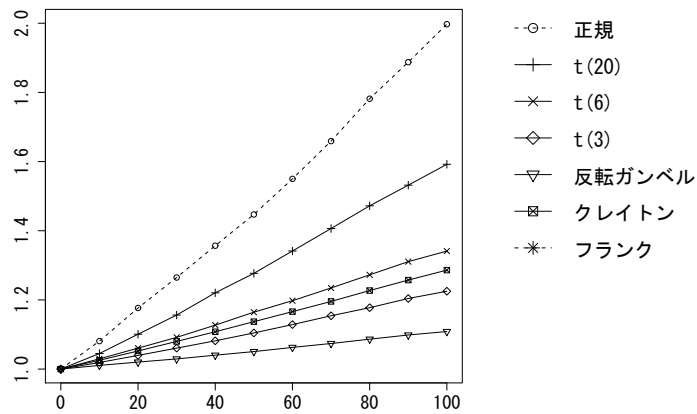
⁵⁷フランクコピュラについては、メザニンおよびシニアでは重複のないケースでのスプレッドが 0 となってしまう比率を定義できないため、分析から除外している。



(a) エクイティ



(b) メザニン



(c) シニア

- 正規
- + t(20)
- × t(6)
- ◇ t(3)
- ▽ 反転ガンベル
- クレイトン
- * フランク

図 2.7: 重複銘柄数に対する各トランシェのスプレッドの変化

備考: 横軸は重複銘柄数 (0~100). 縦軸は重複銘柄数 0 のケースを基準としたスプレッドの比率. 各コピュラについて正規コピュラの $\rho = 0.15$ と同じ順位相関で算出.

表 2.14: 末端参照債務を考慮しない場合のスプレッド ($\rho = 0.15$) 単位: bp

コピュラ	5年デフォルト率 p	エクイティ	メザニン	シニア
正規	5.20%	334.62	1.72	0.00
t(20)	7.09%	458.92	5.40	0.00
t(6)	10.32%	667.44	17.55	0.00
t(3)	13.23%	845.49	35.75	0.00
反転ガンベル	4.85%	284.80	8.48	0.00
クレイトン	10.94%	697.67	23.08	0.00
フランク	1.29%	765.89	6.97	0.00

備考: 5年デフォルト確率 p は表 2.10 の各コピュラに基づくメザニスプレッド s_M を (2.97) 式でデフォルト確率に変換したものである。

2.7 コピュラを巡るいくつかの留意点

本節では、コピュラを用いた分析を行ううえでの留意点として、(1) タイデータが存在するときの周辺分布の扱い、(2) 変量間の負の依存関係の表現、(3) t コピュラによる正規コピュラの近似精度、を説明する。

2.7.1 タイデータが存在するときの周辺分布の扱い

コピュラのパラメータを推定する際には、周辺分布に何らかの分布を仮定する。周辺分布として経験分布を仮定する場合には、データにタイデータ（同一の値）が存在する可能性に留意する必要がある。

例として、トヨタ株とホンダ株の 2001 年 1 月～2004 年 12 月の日次終値対数収益率を経験分布に変換し、トヨタ株の収益率経験分布値を横軸に、ホンダ株のそれを縦軸としてプロットしたものが図 2.8 である。

図 2.8 では、株価の終値が複数日にわたり同一である場合があり、それに伴い収益率 0 という複数のデータが存在する。このため、図 2.8 では、トヨタ株でもホンダ株でも、図の縦横中央付近に、データが直線状に並んでいる箇所がある⁵⁸。したがって、これらの周辺分布は、 $[0,1]$ の一様分布には必ずしも従っていないことになる。

$[0,1]$ の一様分布に従わないということになると、それを前提としたコピュラのパラメータ推定が適切に行われなくなる可能性があることになる。このため、データの分布を予めチェックして、タイデータが多いと判断するならば、周辺分布に経験分布をそのまま用いることなく、例えば、経験分布の平滑化を行う等の、各変量の周辺分布関数の値が $[0,1]$ の一様分布に従うようにするための操作を加えることが考えられる。

⁵⁸ データを経験分布に変換する際には、データに大きさ順に番号を振り、その番号に従って $[0,1]$ の区間に等間隔にデータを並べていく。このとき、タイデータがあると、そのデータには同じ番号が振られることになるため、2 変量の場合では、図 5 のように縦横に直線状のデータの並びがみられる。また、この場合、直線状のデータの並びに隣接して、データがない空白の部分が生じる。これは、次の背景による。例えば、100 個のデータがあるとして、値の大きさ順に上から 50 番目となるデータが 10 個あるとする。仮に、この 10 個のデータに全て 50 番の番号を付すとすると、51～59 の番号を持つデータはなく、10 個のデータの次に値が小さいデータには 60 番の番号が付く。よって、空白部分が生じる。

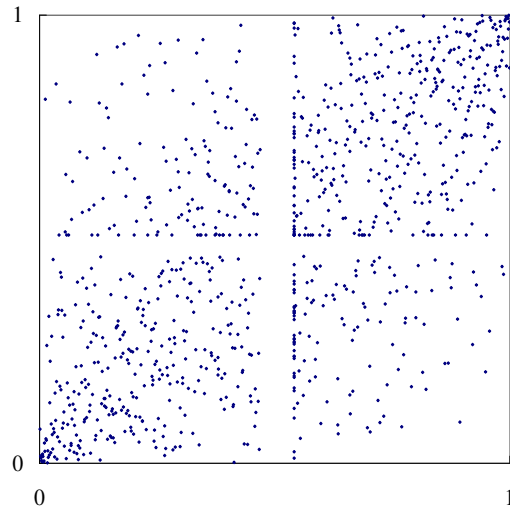


図 2.8: 経験分布変換後の散布図 (横軸: トヨタ, 縦軸: ホンダ)

2.7.2 変量間の負の依存関係の表現

正規, t コピュラは, 相関行列を用いて, 変量間の負の依存関係を柔軟に表現可能である. 一方, 任意の 2 変量に注目したとき, 負の依存関係が表現できるとは, $(-1, 0)$ の負の順位相関を表現できることとすると, 本章で扱った 3 つのアルキメディアンコピュラについては, コピュラの関数形を変えずにパラメータの範囲を拡張することで負の依存関係を表現できるものではないものがある. まず, ガンベルコピュラではパラメータの範囲を変えることでは負の依存関係を表現することはできない⁵⁹. フランクコピュラ, クレイトンコピュラについては, パラメータをそれぞれ $\delta < 0$, $-1 < \alpha < 0$ と設定することで負の依存関係を表現できる⁶⁰.

また, 3 変量以上のデータをガンベル, フランク, クレイトン等の 1 パラメータのコピュラで捉えようとする, 柔軟な依存構造を実現することは不可能である. こうしたことから, 多変量データの負の依存構造を含めて依存構造を柔軟に設定する必要があるときは, 正規, t コピュラ等の相関行列を用いるコピュラを使う方が望ましいと考えられる.

2.7.3 t コピュラによる正規コピュラの近似精度

t 分布は, 自由度が大きくなると正規分布に収束する. 同様に, t コピュラは, 自由度が大きくなると正規コピュラに収束する.

しかし, コピュラの変数数が大きいほど, t コピュラと正規コピュラの相違が大きいことが, Chen, Fan and Patton [2004] で示されている. ここでは, 2.5.2 節の貸出ポートフォリオの信用リスク量の算出事例 (変数数は 10,000) を用いて, 変数数が大きいときの, 正規コピュラと t コピュラ (自由度 40) との相違を考察する. 相関係数に, 0.1, 0.3, 0.6 の 3 つを与えて, それぞれ, デフォルト先数の分布を求め, 各信頼水準でのデフォルト先数を算出した (表 2.15).

⁵⁹ パラメータを $\gamma < 1$ にすると, $\partial^2 C(u_1, u_2) / \partial u_1 \partial u_2$ で表現される密度関数に負になる部分が生じ, 同時分布関数としてのコピュラの性質を満たさなくなる.

⁶⁰ クレイトンコピュラでは, 生成関数を $\phi(u_i) = (u_i^{-\alpha} - 1) / \alpha$ とすれば, $-1 < \alpha < 0$ でも生成関数の条件を満たす. 後述の (2.110) 式を用いて, ケンドールのタウを計算すれば, フランクでは $\delta < 0$, クレイトンでは $-1 < \alpha < 0$ とパラメータを設定することで $(-1, 0)$ のケンドールのタウが表現されることがわかる.

表 2.15: デフォルト先数の分布 (正規/t は信頼水準 95%以上の場合のみ)

	0.10%	1%	5%	10%	50%	90%	95%	99%	99.9%
相関 0.1									
正規	0	2	5	8	33	111	154	268	472
t	0	0	1	3	23	126	190	387	765
正規/t							0.81	0.69	0.61
相関 0.3									
正規	0	0	0	0	10	126	231	618	1,507
t	0	0	0	0	7	124	239	718	1,827
正規/t							0.96	0.86	0.82
相関 0.6									
正規	0	0	0	0	0	62	203	1,163	4,060
t	0	0	0	0	0	54	190	1,206	4,396
正規/t							1.12	0.96	0.92

表 2.15 から、以下の 2 つの傾向を指摘することができる。まず、相関係数が低いほど、正規コピュラ、t コピュラによる推定値の間の相違が大きくなる。また、信頼水準が高くなるほど、推定値の間の相違が大きくなる。

したがって、t コピュラを正規コピュラで不用意に近似することは危険であるといえる。

2.8 結論

本章では、金融実務で近年注目されている、周辺分布と周辺分布間の依存構造を扱う場合の 1 つのツールであるコピュラの活用方法を解説した。具体的には、正規、t、クレイトン、ガンベルおよびフランクコピュラを対象に、各コピュラが表現する依存構造の違いを説明するとともに、各コピュラのパラメータの推定方法と各コピュラの下での乱数の発生方法を説明した。このように、コピュラは、金融実務において金融商品の価格付けやリスク評価を行う際に、非常に有効なツールの 1 つとなりうる。

実証分析としては、貸出ポートフォリオの信用リスクを分析し、5 変量の株式ポートフォリオの株価変動リスクをパラメータ推定も含めて分析した後、日米欧の株価指数の動きを分析した。株価指数に代表される資産価格変動の裾依存性は、平時に比べ金融危機時に強まることを確認したうえで、BIC 規準でみた適合度は、自由度の小さい t コピュラや反転ガンベルコピュラが高く、主要国の株価指数変動の間には強い下側裾依存性が存在することが示された。

こうした資産変動の下側裾依存性を踏まえて、コピュラを用いた CDO 評価における問題点を検討した。具体的には、資産価格変動の間の全体的な依存性を示す順位相関を固定して、コピュラの種類だけを変えた場合の CDO スプレッドの評価結果の違いについて分析した。その結果、標準的に用いられる正規コピュラでは CDO の上位トランシェの損失率を過小に見積もってしまう傾向があることが示された。再証券化商品である CDO スクエアードについても同様の結果を得たほか、末端参照債務の重複度の影響も考慮すると相関 ρ の変化に対するスプレッドの感応度は正規コピュラの方が下側裾依存性の強いコピュラよりも大きく、正規コピュラに

基づく評価モデルが相対的に脆弱である可能性が示された。すなわち、CDO 評価においても、金融危機のような下側裾依存性が強くなる状況を勘案するには、下側漸近従属のコピュラを用いた評価が必要になることが示唆された。

研究面での今後の課題としては、CDO 評価等に用いるうえで適切なコピュラの特長が挙げられる。2.5.3 節の分析では、株価収益率に適合するコピュラの種類について幾つかの候補を示したが、適合度の高低は観測時期に強く依存しており、実用的なコピュラの種類を特定するには至らなかった。また、CDO の分析では本来、企業等の資産価値の変動に関する相互依存関係を評価すべきであり、それは 2.5.3 節で扱った株価収益率とは異なる。このため、資産価値の変動特性を直接コピュラで分析することも課題である。このほか、本研究の拡張の方向性としては、(1) 適用するデータの工夫、(2) 適用する期間の工夫が挙げられる。(1) に関しては、例えば、価格変動そのものではなく、それをシステムティックな変動要因と個別変動要因に分解したうえで後者に対してコピュラを適用して分析することが考えられる。(2) に関しては、Okimoto [2008] などでも考察されているように、分析期間を平時と金融危機時の 2 つのレジームに分けて、それぞれ異なる種類のコピュラを適用するようなモデル化も考えられる。

本章で得られた結果を踏まえつつ、2007～2008 年の金融危機を振り返って実務上の含意を考察すると以下のように整理できる。CDO の市場価格は、それにフィットする正規コピュラの相関 ρ を算出した指標で表現されることが多い。これは、インプライドコリレーションと呼ばれ、オプション価格がブラック・ショールズモデルに基づきインプライドボラティリティで表現されるのと同様である。このように、正規コピュラの相関は信用デリバティブ市場でいわば「共通言語」となっている面もあり、そのインプライドコリレーションがトランシェごとに異なるというコリレーションスマイルは、金融危機以前から観察されていた。このことは、市場参加者は必ずしも正規コピュラに全面的に依拠して CDO を評価していたのではなかったことを示唆している。一方、CDO を組成したり、その格付けを付与したりする際には、正規コピュラを用いて評価がなされていたことも多かったといわれている。そうした市場慣習と前述のような市場参加者の認識のギャップを埋めるためにも、本章で扱ったようにコピュラを利用した分析の幅を広げていくことは有益であろう。

ただし、コピュラを実際に扱うに当たっては、本章で指摘したような、主としてコピュラに特有のさまざまな留意点がある。このほか、コピュラには、一般的なこととして予め認識しておくべき点もある。例えば、コピュラのパラメータをヒストリカルデータを用いて推定する場合には、データの観測期間の長さや期間内のデータ分布の形状に推定値が依存することになるため、目的に応じて、適当な観測期間を定める必要がある。ここで指摘した例と同様のことは、コピュラに限らず、価格付けやリスク評価に用いられる他の前提や道具立てにもいえることである。したがって、コピュラを実際に活用しようとする場合には、コピュラについてのみならず、用いることが適当であると考えられる前提や道具立ての内容を包括的に検討する必要があると考えられる。

本章で考察したように、リスクファクターの依存関係が CDO 評価を決めるトランシェの期待損失や VaR などの損失の振れに及ぼす影響は大きい。本章ではリスクファクターとして資産価格変動あるいは CDO 評価においてはデフォルト確率についてその依存関係を考察したが、他にも依存関係を考慮すべきリスクファクターがある。次章では、信用リスクを定めるもう 2 つの要素であるエクスポージャーや回収率との依存関係について考察を進める。

2.A 2変量コピュラの順位相関とパラメータの関係

いくつかの2変量コピュラでは，そのパラメータとケンドールのタウの解析的關係を導くことができる．

2.A.1 2変量アルキメディアンコピュラ

2変量のアルキメディアンコピュラは

$$\phi(C(u_1, u_2)) = \phi(u_1) + \phi(u_2) \quad (2.98)$$

と表せるので，(2.98)式の両辺を u_1 で偏微分すると，以下を得る．

$$\phi'(C(u_1, u_2)) \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} = \phi'(u_1) \quad (2.99)$$

さらに，(2.99)式の両辺を u_2 で偏微分すると，次式を得る．

$$\phi''(C(u_1, u_2)) \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_2} + \phi'(C(u_1, u_2)) \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} = 0 \quad (2.100)$$

(2.100)式で，

$$\frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} = \phi^{-1'}(\phi(u_1) + \phi(u_2))\phi'(u_1) \quad (2.101)$$

となるが， $y \equiv \phi^{-1}(x)$ と置いて， $\phi^{-1'}(x)$ を計算すると，

$$\phi^{-1'}(x) = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1} = \left(\frac{d\phi(y)}{dy}\right)^{-1} = \frac{1}{\phi'(y)} = \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(x))} \quad (2.102)$$

となることから，

$$\frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} = \frac{\phi'(u_1)}{\phi'(\phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2)))} = \frac{\phi'(u_1)}{\phi'(C(u_1, u_2))} \quad (2.103)$$

となる．同様に，

$$\frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_2} = \frac{\phi'(u_2)}{\phi'(C(u_1, u_2))} \quad (2.104)$$

となる．よって，(2.100)式より，以下の關係を得る．

$$\frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} = -\frac{\phi''(C(u_1, u_2))\phi'(u_1)\phi'(u_2)}{\{\phi'(C(u_1, u_2))\}^3} \quad (2.105)$$

(2.105)式を用いて，(2.22)式で表されるケンドールのタウを計算する．

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) &= \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} du_1 du_2 \\ &= -\int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) \frac{\phi''(C(u_1, u_2))\phi'(u_1)\phi'(u_2)}{\{\phi'(C(u_1, u_2))\}^3} du_1 du_2 \end{aligned} \quad (2.106)$$

となるが， $v \equiv u_1$ ， $w \equiv C(u_1, u_2)$ と変数変換すると，積分範囲は $0 \leq w \leq v \leq 1$ となり，ヤコビアンは，(2.103)，(2.104)式等を用いて，

$$\frac{\partial(v, w)}{\partial(u_1, u_2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\phi'(u_1)}{\phi'(w)} & \frac{\phi'(u_2)}{\phi'(w)} \end{vmatrix} = \frac{\phi'(u_2)}{\phi'(w)} \quad (2.107)$$

となるから，以下の関係が得られる⁶¹．

$$\int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) = - \iint_{0 \leq w \leq v \leq 1} w \frac{\phi''(w)\phi'(v)}{\{\phi'(w)\}^2} dv dw = \int_0^1 w \frac{\phi''(w)\phi(w)}{\{\phi'(w)\}^2} dw \quad (2.108)$$

(2.108) 式を部分積分すると，

$$\begin{aligned} \int_0^1 w \frac{\phi''(w)\phi(w)}{\{\phi'(w)\}^2} dw &= \left[\frac{-w\phi(w)}{\phi'(w)} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\phi(w) + w\phi'(w)}{\phi'(w)} dw \\ &= 0 + \int_0^1 \frac{\phi(w)}{\phi'(w)} dw + \int_0^1 w dw = \int_0^1 \frac{\phi(w)}{\phi'(w)} dw + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.109)$$

となる．したがって，(2.22) 式よりケンドールのタウは，次式となる．

$$\tau(u_1, u_2) = 4 \left\{ \int_0^1 \frac{\phi(w)}{\phi'(w)} dw + \frac{1}{2} \right\} - 1 = 4 \int_0^1 \frac{\phi(w)}{\phi'(w)} dw + 1. \quad (2.110)$$

代表的なアルキメディアンコピュラで，(2.110) 式を用いて，ケンドールのタウを計算する．ガンベルコピュラで $\phi(w) = (-\ln w)^\gamma$ ，クレイトンコピュラで $\phi(w) = w^{-\alpha} - 1$ ，フランクコピュラで $\phi(w) = -\ln(e^{-\delta w} - 1) + \ln(e^{-\delta} - 1)$ であることを用いる．

ガンベルコピュラでは，

$$\int_0^1 \frac{\phi(w)}{\phi'(w)} dw = \frac{1}{\gamma} \int_0^1 w \ln w dw = \frac{1}{\gamma} \left\{ \left[\frac{w^2}{2} \ln w \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{w^2}{2} \frac{1}{w} dw \right\} = \frac{1}{\gamma} \left\{ 0 - \frac{1}{4} \right\} = -\frac{1}{4\gamma} \quad (2.111)$$

となるから，(2.110) 式より，ケンドールのタウは，次式となる．

$$\tau_K(u_1, u_2) = 1 - \frac{1}{\gamma} \quad (2.112)$$

クレイトンコピュラでは，

$$\int_0^1 \frac{\phi(w)}{\phi'(w)} dw = - \int_0^1 \frac{w^{-\alpha} - 1}{\alpha w^{-\alpha-1}} dw = \frac{-1}{\alpha} \left\{ \int_0^1 w dw - \int_0^1 w^{\alpha+1} dw \right\} = \frac{-1}{2(\alpha+2)} \quad (2.113)$$

となるから，同様にケンドールのタウとして，次の関係を得る．

$$\tau_K(u_1, u_2) = \frac{-2}{\alpha+2} + 1 = \frac{\alpha}{\alpha+2} \quad (2.114)$$

フランクコピュラでは，

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\phi(w)}{\phi'(w)} dw &= - \int_0^1 \frac{e^{-\delta w} - 1}{\delta e^{-\delta w}} \ln \left(\frac{e^{-\delta w} - 1}{e^{-\delta} - 1} \right) dw = \frac{1}{\delta} \int_0^1 (e^{\delta w} - 1) \ln \left(\frac{e^{-\delta w} - 1}{e^{-\delta} - 1} \right) dw \\ &= \frac{1}{\delta} \left\{ -1 - \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \frac{z}{1 - e^z} dz \right\}, \end{aligned} \quad (2.115)$$

という関係を得る．ここで， $D_k(\delta) \equiv \frac{k}{\delta^k} \int_0^\delta \frac{t^k}{e^t - 1} dt$ で定義されるデバイ (Debye) 関数を用いると，ケンドールのタウ τ_K は，次式で表されることがわかる．

$$\tau_K(u_1, u_2) = 1 + \frac{4}{\delta} \{ D_1(\delta) - 1 \} \quad (2.116)$$

⁶¹(2.108) 式の変形には， $\int_w^1 \phi'(v) dv = \phi(1) - \phi(w) = -\phi(w)$ を用いた．

2.A.2 2変量正規コピュラとtコピュラ

まず，正規コピュラでは，線形相関 ρ とケンドールのタウ τ_K の間に， $\tau_K = (2/\pi) \arcsin \rho$ という関係があることを示す．

(2.20) 式に基づいてケンドールのタウ τ_K を計算する． (X_1^i, X_2^i) と (X_1^j, X_2^j) はそれぞれ期待値 0，分散 1 (線形) 相関 ρ の 2 変量正規分布に独立に従っているとすると，

$$(\bar{Z}_1, \bar{Z}_2) \equiv (X_1^i - X_1^j, X_2^i - X_2^j) \quad (2.117)$$

も正規分布に従い，期待値は 0，各変量の分散は 2，相関は ρ となることが確認される．ここで， $r \cos \theta \equiv \bar{z}_1/\sqrt{2}$ ， $r \sin \theta \equiv (\bar{z}_2 - \rho \bar{z}_1)/\sqrt{2(1-\rho^2)}$ と置き，正規分布の対称性を利用すると，1 変量標準正規分布の密度関数を $n(\cdot)$ として，

$$\begin{aligned} \Pr\{(X_1^i - X_1^j)(X_2^i - X_2^j) > 0\} &= \Pr\{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 > 0\} = 2 \Pr\{\bar{Z}_1 > 0, \bar{Z}_2 > 0\} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^\infty \int_0^\infty n(\bar{z}_1/\sqrt{2}) n\left(\frac{\bar{z}_2 - \rho \bar{z}_1}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\right) d\bar{z}_1 d\bar{z}_2 \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-r^2/2) r dr \int_{-\arcsin \rho}^{\pi/2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \rho \end{aligned} \quad (2.118)$$

となる．また，

$$\Pr\{(X_1^i - X_1^j)(X_2^i - X_2^j) < 0\} = 1 - \Pr\{(X_1^i - X_1^j)(X_2^i - X_2^j) > 0\} \quad (2.119)$$

となることから，(2.109) 式より，以下を得る．

$$\tau_K = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \rho \right) - 1 = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho \quad (2.120)$$

(2.120) 式の関係は，正規コピュラ，tコピュラを含む楕円コピュラと呼ばれるクラスに属するコピュラで成立し，tコピュラでも自由度に関係なく成立することが知られている (Lindskog, McNeil and Schmock [2003]) ．

2.B tコピュラとdouble-tコピュラの違い

tコピュラを構成する n 変数の多変量 t 分布の確率変数 (X_1, \dots, X_n) は，独立に標準正規分布に従う確率変数 Y, Z_i と自由度 ν のカイ 2 乗分布に従う確率変数 W を用いて

$$X_i = \frac{\nu(\sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}Z_i)}{\sqrt{W}} \quad (2.121)$$

と表現される．この表現から $\rho = 0$ であっても X_1, \dots, X_n は独立にならないことがわかる．しかしながら， $n=2$ として X_1, X_2 の共分散を計算すると， $x_1 = r \cos \theta$ ， $x_2 = r \sin \theta$ という変数変換を行うことで，

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_1, X_2) &= E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2] = E[X_1 X_2] \\ &= \frac{\Gamma((\nu+2)/2)}{(\nu\pi)\Gamma(\nu/2)} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty x_1 x_2 \left(1 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^\infty r^2 \left(1 + \frac{r^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} r dr = 0 \end{aligned} \quad (2.122)$$

となり, X_1, X_2 が無相関になっていることがわかる.

一方, double-t コピュラは, 独立に自由度 ν_U の t 分布に従う確率変数 U と自由度 ν_V の t 分布に従う確率変数 V_i を用いて, 多変量確率変数 (X_1, \dots, X_n) を

$$X_i = \sqrt{\frac{\nu_U - 2}{\nu_U}} \sqrt{\rho} U + \sqrt{\frac{\nu_V - 2}{\nu_V}} \sqrt{1 - \rho} V_i \quad (2.123)$$

として構成するコピュラであり, Hull and White [2004] で CDO 評価に用いられたコピュラである. (2.123) 式の表現より $\rho = 0$ では V_1, \dots, V_n の独立性から X_1, \dots, X_n が独立になることを確認できる. double-t コピュラの特例として $\nu_U = \nu_V = \nu$ の場合を考え, そのコピュラを $t(\nu) - t(\nu)$ コピュラと表記することとする. $t(\nu) - t(\nu)$ コピュラでは (2.123) 式のファクター表現は

$$X_i = \sqrt{\nu(\nu - 2)} \left\{ \frac{\sqrt{\rho} Y}{\sqrt{W_0}} + \frac{\sqrt{1 - \rho} Z_i}{\sqrt{W_i}} \right\} \quad (2.124)$$

と整理される. ただし, Y, Z_i は独立に標準正規分布に従う確率変数, W_0, W_i は独立に自由度 ν のカイ 2 乗分布に従う確率変数である.

(2.121) 式の t コピュラのファクター表現と (2.124) 式の double-t コピュラ ($t(\nu) - t(\nu)$) のファクター表現を比較すると, カイ 2 乗分布に従う確率変数 W を共通ファクターと個別ファクターで共通化しているか否かの点が違っている. なお, 係数 ν と $\sqrt{\nu(\nu - 2)}$ の違いは周辺分布に吸収され, コピュラについての差にはならない.

2.C アルキメディアンコピュラに従う乱数発生プログラム

本補論では, 本章で対象としたコピュラのうち, ガンベル, 反転ガンベル, クレイトン, フランクの 4 つのコピュラに従う n 変量の乱数の発生方法について, 具体的な R のプログラム例を示す⁶².

```
# 安定指数, 歪みパラメータ 1 の正値安定分布に従う乱数
# Kanter [1975] の方法
rposStable<-function(simNum,alpha){
  v<-runif(simNum,min=0,max=pi);w<-rexp(simNum,rate=1);
  xx<-sin(alpha*v)/(sin(v)^(1/alpha))*((sin((1-alpha)*v)/w)^(1/alpha-1));
  return(xx)
}

# パラメータ の対数級数分布に従う乱数
# Kemp [1981] の LB 法
rlogarithmic<-function(simNum,beta){
  h<-log(1-beta);
  u1<-runif(simNum); u2<-runif(simNum);
  xx<-trunc(1+log(u2)/log(1-exp(u1*h)));
  return(xx)
}

# メインプログラム
# [0,1] 一様乱数 simNum x ndim
```

⁶²ここでは, $n=ndim$ とし $simNum$ 回のシミュレーションを行うことを念頭に $simNum$ 行 $ndim$ 列の形式で各コピュラに従う乱数を発生させている.

```

ii<-matrix(runif(simNum*ndim),nrow=simNum,ncol=ndim);

# ガンベルコピュラに従う乱数 uu
theta<-rposStable(simNum,1/gamma);
uu<-exp(-(-log(ii)/theta)^(1/gamma));

# 反転ガンベルコピュラに従う乱数 uu
theta<-rposStable(simNum,1/gamma);
uu<-1-exp(-(-log(ii)/theta)^(1/gamma));

# クレイトンコピュラに従う乱数 uu
theta<-rgamma(simNum,shape=1/alpha,rate=1);
uu<-(1-log(ii)/theta)^(-1/alpha);

# フランクコピュラに従う乱数 uu
beta<-1-exp(-delta);
theta<-rlogrithmic(simNum,beta);
uu<--log(1-beta*exp(log(ii)/theta))/delta;

```

第3章 追加融資を考慮した期待損失と VaR

前章では、CDO 評価において、マートン型構造モデルをベースとしたコピュラ・アプローチを想定し、デフォルト確率の依存関係をさまざまなコピュラで表現してその効果を定量化した。本章では、デフォルト確率だけではなく、エクスポージャーの変化やそれに伴う回収率の変化も構造モデルで取り込んでそれらの間の関係を考慮して信用リスクを評価する。

具体的には、マートン型構造モデルにおいて、期待損失 (expected loss; EL) を最小化するような追加融資行動を想定し、貸出量の変動がデフォルト確率、デフォルト時損失、金利収入の変化を通じて、EL や VaR (Value-at-Risk) あるいは非期待損失 (unexpected loss; UL) に及ぼす影響を解析的に把握する。さらに、融資初期時点における EL と VaR が、2次元正規分布を用いて解析的に評価でき、数値解が容易に計算可能なことを示す。また、この結果を用いて、期待損失の最小化 (金利収入とデフォルト時損失から構成される期待収益の最大化) が UL の拡大を招くことを定量的に評価する。

3.1 はじめに

2006 年度末よりバーゼル II (Basel Committee on Banking Supervision [2005a]) の段階的適用が始まった。先進的内部格付手法を採用した金融機関は、デフォルト確率 (probability of default; PD) に加えて、7年以上の過去データを用いてデフォルト時損失率 (loss given default; LGD) とデフォルト時エクスポージャー (exposure at default; EaD) の推計を行い、所要自己資本を算出することが 2007 年度末より求められている。

信用リスクの計量分析は、まず、PD のモデル化から始まり、バーゼル II の導入を契機に LGD のモデル化も進展している (Frye [2000]; Pykhtin [2003]; Peura and Jokivouille [2005] 等)。一方、バーゼル II の先進的内部格付手法では PD, LGD, EaD の推計が求められるにもかかわらず、EaD のモデル化があまり進んでいない。実際、EaD については、当初の融資額を所与として固定し、確率的な要素としては扱わない場合が多い。その理由としては以下の点が考えられる。(1)EaD は銀行がある程度コントロール可能な変数であること、(2) そのコントロールは将来時点の資産価値などを参照して行われ、以後の PD, LGD に影響を及ぼしうること、(3) 企業の借入需要や他の金融機関との競争も EaD の変動に関係すること、(4) 貸出量だけでなく貸出金利によってもリスクリターンの調整が行われる可能性が高いことなどである。このように、EaD をモデル化しようとする、さまざまな制約のもとでの動的的最適化問題を取り扱うことになり、その扱いは容易ではない。

EaD のモデル化は試みられるようになってきている (Moral [2006]; Kupiec [2008]; Jiménez and Mencía [2009])。しかしながら、これらは、EaD の過去データを用いた簡単な回帰分析であったり、共通ファクターとの関係を考慮しながら EaD を確率分布として捉える手法にとどまっており、EaD を銀行がコントロールできる内生的な変数として捉えるアプローチではな

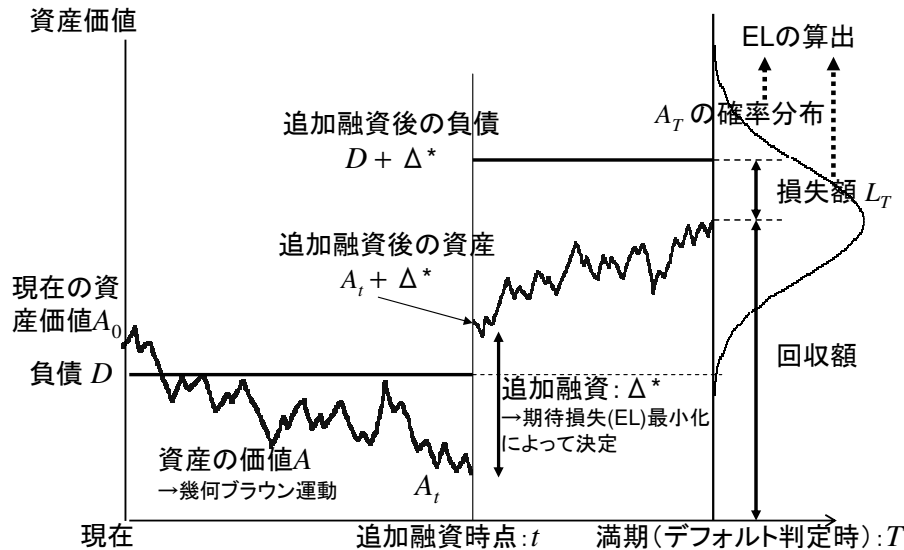


図 3.1: 最適追加融資と損失額

い¹。

本章では、信用リスクの動学的な把握への第一歩として、銀行が所与のタイミングで追加融資を1回行う場合を想定し、EaDの変化とPDやLGDの変化との構造的な相互関係を考慮したモデル化を行う。そのうえで、ELやULを導出する。

具体的には、融資の満期時点でデフォルトの有無を判定するマートン型の構造モデルを用いて、期中での追加融資によってEaDに変化が生じた際、PDやLGDの変化を通じて、ELやULがどのように変化するかを考察する。その際、期中での追加融資は、その時点でELを最小化するように行われるものとする。これをイメージ図で表すと図3.1のようになる。

本章では、こうしたモデル化により、追加融資を考慮した場合のELやULが2次元正規分布の分布関数を用いて解析的に表現でき、数値解が容易に計算可能なことを示す²。ここで、ULはVaRからELを差し引いたものとして定義される。このモデルでは、追加融資の判断や追加融資に伴うELやULの変化を明確に特徴付けることができる。

まず、追加融資の判断時点で、企業の資産価値に応じて、銀行の対応が3つに分かれることを示す。資産価値が一定値よりも下落した場合は、追加融資によりPDを低下させELを抑制できるため、銀行は追加融資を行う。一方、資産価値が一定値よりも上昇した場合も、貸出金利と調達金利の差による金利収入の増加を通じてELを抑制(期待収益を増大)できるため、銀行は追加融資を行う。両者の中間では、追加融資しないことが最適な判断となる。

ところが、EL最小化行動に伴う追加融資は、ULの拡大に繋がりがやすい。本章では、上記の

¹銀行が企業にコミットメントラインを提供しているときには、EaDは銀行がコントロールできる変数とはならない。本章の問題意識とは異なるが、業績や資金繰りが悪化した企業がコミットメントラインを行使することによる信用リスクの増大はEaDの確率モデルを迫る重要な問題として検討され始めている(例えば、Schuermann [2004]; Gruber and Parchert [2006]を参照)。

²企業の債券や株式価値の解析的な評価という観点からは、Geske [1977]や池田・小林・高橋 [2005]が関連した分析を行っている。Geske [1977]では、企業が短期債と長期債の2種類の債券を発行している際に、短期債の満期での償還は増資によって行われると仮定することで、株式価値、債券価値を2次元正規分布の分布関数を用いて評価している。一方、池田・小林・高橋 [2005]では、短期債の満期で新たな短期債を発行することで資金調達を行ったり、短期債の償還を猶予するモデルへの拡張を行っている。

モデルにより数値例を用いて EL の低下と UL の上昇を定量的に評価している。EL 最小化に伴う追加融資が UL の拡大をもたらす現象は、銀行が融資の信用リスクを動的に管理しようとした場合、期待収益（損失）とその分散あるいは VaR のトレードオフに対して、どのような選好を持つかという問題に直面することを示唆している。

本章の構成は以下のとおりである。まず、3.2 節では、追加融資を考慮したモデルを構築し、追加融資の条件や融資後の PD 等を考察したうえで、EL を解析的に評価する。3.3 節では、一定の条件下で VaR（の寄与）を求めることとストレス時期待損失（SEL）を求めることが同値になることを示したうえで、SEL を解析的に評価し、SEL から EL を差し引いて UL を導出する。3.4 節では、本章をまとめる。

3.2 追加融資を考慮した EL

3.2.1 マートンモデルと銀行の損失関数

ある企業の資産価値 A_t は次の幾何ブラウン運動に従うとする。

$$dA_t = \mu A_t dt + \sigma A_t dW_t \quad (3.1)$$

この資産価値 A_t は、企業の持つ資産を流動化したときの価値を表すものとする。

マートンモデル（Merton [1974]）と同様に、この企業に対してある 1 つの銀行が時点 T を満期とする額面 D の貸出を行うとする。銀行は、割引率 r_{L0} （貸出金利）で割引債の形で貸出を行うものとする。したがって、時点 0 での貸出量は $De^{-r_0 T}$ となる。満期 T で資産価値が負債額面 D を下回っているときには、企業はデフォルトし、その資産価値で負債の返済が行われるものとする³。

(3.1) 式より、時点 0 での資産価値を A_0 とすると、満期 T で資産価値 A_T は、

$$\ln A_T \sim N(\ln A_0 + (\mu - \sigma^2/2)T, \sigma^2 T) \quad (3.2)$$

となる。このとき、当該企業のデフォルト確率 PD は、

$$PD = \Pr(A_T < D) = \Pr(\ln A_T < \ln D) = \Phi(d_0) \quad (3.3)$$

$$d_0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left\{ \ln \frac{D}{A_0} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right\} \quad (3.4)$$

で与えられる。ここで、 $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数である。

銀行は、企業に貸し出す資金を市場で割引債の形で調達するものとする。その際の調達金利は r_{M0} とする。つまり、銀行は、額面 $De^{(r_{M0}-r_{L0})T}$ 、金額では $De^{-r_0 T}$ の調達を行い、全額を企業に貸し出す。満期 T で、銀行は $De^{(r_{M0}-r_{L0})T}$ を市場に返済する一方で、当該企業から D

³先行研究では、担保付の融資を考え、LGD は担保の償却によってカバーできない部分としてモデル化されることが多い（Frye [2000]; Pykhtin [2003]; Peura and Jokivuolle [2005] 等）。本章では、より単純に、融資全体のうち残余資産でカバーできない部分を LGD として捉える。デフォルトのモデルでは、ある閾値に到達した時点でデフォルトが生じるとした初到達時間モデル（Black and Cox [1976] 等）が採用されることが多いが、閾値を融資額に設定すると LGD が 0 になってしまうため、本章では採用しない。また、Leland [1994] や Leland and Toft [1996] で考慮されている法人税やデフォルトコストについては、簡単化のため捨象した。

の返済を受ける。ただし、当該企業がデフォルトした場合 ($A_T < D$) には、その時の資産価値 A_T を流動化して、市場への返済に充てることになる。つまり、満期時の銀行の損失 L_T は、

$$L_T = D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1) + (D - A_T)^+ \quad (3.5)$$

で表され⁴、時点 0 での期待損失 EL は、

$$\begin{aligned} E_0[L_T] &= D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1) + E_0[(D - A_T)^+] \\ &= D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1) + D\Phi(d_0) - A_0e^{\mu T}\Phi(d_0 - \sigma\sqrt{T}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

と表すことができる⁵。ここで、(3.6) 式右辺第 1 項の $D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1)$ は銀行の金利コスト額を示している。通常、 $r_{M0} < r_{L0}$ であるため金利収入（負の金利コスト）と解釈できる。第 2 項以下は、ブラック・ショールズモデルで行使価格を D としたときのプットオプション価格に対応している。

以上の議論は、追加融資されない条件下での EL の評価であった。次に、時点 t において追加融資が行われた場合の EL の評価を行う。

3.2.2 時点 t での EL

期中時点 t ($0 < t < T$) で、銀行は貸出先企業の資産価値 A_t を観察できるものとする。また、当該企業の資産価値 A_t が貸出額面 D を下回っていても、当該企業はデフォルトしない。

銀行は時点 t で追加融資できるものとする⁶。追加融資の期間は $\tau = T - t$ とし、時点 T で期初の貸出と併せて回収を行う。時点 t で銀行が企業に融資する貸出金利は r_L 、市場からの調達金利は r_M とする⁷。

時点 t で、額面 $\Delta \geq 0$ の追加融資（割引貸出）を行ったとすると、当該企業には $\Delta e^{-r_L\tau}$ のキャッシュが入り、企業の資産価値はそれだけ上昇する。すなわち、企業の資産価値は時点 t より $A_t + \Delta e^{-r_L\tau}$ を初期値と設定し直して幾何ブラウン運動に従うことになる。

貸出量変化後の当該企業のデフォルト確率 $PD_t(\Delta)$ は、

$$PD_t(\Delta) = \Pr(A_T < D + \Delta) = \Phi(d_t(\Delta)) \quad (3.7)$$

$$d_t(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left\{ \ln \frac{D + \Delta}{A_t + \Delta e^{-r_L\tau}} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right\} \quad (3.8)$$

となる。貸出量変化後の満期における銀行の損失は、

$$L_T(\Delta) = D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1) + \Delta e^{(r_M-r_L)\tau} - D - \Delta + (D + \Delta - A_T)^+ \quad (3.9)$$

と表現されることから、時点 t での期待損失 EL は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} E_t[L_T(\Delta)] &= D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1) + \Delta(e^{(r_M-r_L)\tau} - 1) + (D + \Delta)\Phi(d_t(\Delta)) \\ &\quad - (A_t + \Delta e^{-r_L\tau})e^{\mu\tau}\Phi(d_t(\Delta) - \sigma\sqrt{\tau}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

⁴ $(X)^+$ は X の正の部分を表す。すなわち、 $(X)^+ = \max(X, 0)$ である。

⁵(3.6) 式から期待 LGD ($E_0[(D - A_T)^+]/D$) は、 $\Phi(d_0) - (A_0/D)e^{\mu T}\Phi(d_0 - \sigma\sqrt{T})$ で与えられる (Altman, Resti and Sironi [2001] を参照)。本章では、貸出債権のプライシングを行うわけではないため、リスク中立測度ではなく現実の観測測度で議論を行っている。

⁶時点 t での早期（部分）回収は考えない。

⁷本章では、追加融資のタイミング t 、追加融資に適用される貸出金利 r_L を固定して、追加融資量を最適化する問題を考えるが、追加融資量を固定して貸出金利を最適化する問題や、追加融資のタイミング t を最適化する問題への拡張も可能である。

3.2.3 時点 t での EL を最小化する追加融資量

次に、時点 t での追加融資により、期待損失が低下する場合があること、期待損失を最小化する最適な追加融資量が算出できることを示す。

(3.10) 式で表される銀行の期待損失 $E_t[L_T(\Delta)]$ の追加融資量 Δ に関する微分は、

$$\frac{\partial E_t[L_T(\Delta)]}{\partial \Delta} = e^{(r_M - r_L)\tau} - 1 + \Phi(d_t(\Delta)) - e^{(\mu - r_L)\tau} \Phi(d_t(\Delta) - \sigma\sqrt{\tau}) \quad (3.11)$$

となる⁸。(3.11) 式を一般化して

$$f(d) \equiv e^{(r_M - r_L)\tau} - 1 + \Phi(d) - e^{(\mu - r_L)\tau} \Phi(d - \sigma\sqrt{\tau}) \quad (3.12)$$

と置くと、最適追加融資量が有限な正の値という条件のもとでは、 $r_L > r_M$ ならば $f(d_1^*) = 0$ となる $d = d_1^*$ が存在し(ケース1)、 $\mu > r_M$ ならば $f(d_2^*) = 0$ となる $d = d_2^*$ が存在する(ケース2)ことがわかる(ただし、 $d_1^* < d_2^*$)。この d_1^*, d_2^* は、数値計算で簡単に求めることができる(詳細は3.A節を参照)。そこで、 $t, T, r_M, r_L, \mu, \sigma$ を所与とし、追加融資が行われる2つのケースについて、最適な追加融資量や最小化された期待損失を求める。

まず、ケース1は、 $r_L > r_M$ のもとで、 $A_t > D\xi_1^*$ の場合に追加融資が行われることを示している。ここで ξ_1^* は、

$$\xi_1^* \equiv e^{-d_1^* \sigma \sqrt{\tau} - (\mu - \sigma^2/2)\tau} \quad (3.13)$$

で定義される。最適な追加融資量 Δ_1^* は、

$$\Delta_1^* = \frac{A_t - D\xi_1^*}{\xi_1^* - e^{-r_L\tau}} \quad (3.14)$$

となる。最適な追加融資量 Δ_1^* のもとでデフォルト確率は、

$$\Phi(d_t(\Delta_1^*)) = \Phi(d_1^*) \quad (3.15)$$

となり、銀行の期待損失は(3.10)、(3.15)式より次式で表せる。

$$E_t[L_T(\Delta_1^*)] = D(e^{(r_{M0} - r_{L0})T} - 1) + D\Phi(d_1^*) - A_t e^{\mu\tau} \Phi(d_1^* - \sigma\sqrt{\tau}) \quad (3.16)$$

次に、ケース2は、 $\mu > r_M$ のもとで、 $A_t < D\xi_2^*$ の場合に追加融資が行われることを示している。このとき、最適な追加融資量は、

$$\Delta_2^* = \frac{A_t - D\xi_2^*}{\xi_2^* - e^{-r_L\tau}} \quad (3.17)$$

デフォルト確率は、

$$\Phi(d_t(\Delta_2^*)) = \Phi(d_2^*) \quad (3.18)$$

⁸この微分の計算では、標準正規分布の密度関数を $\phi(\cdot)$ とした場合に、

$$\frac{\phi(d_t(\Delta) - \sigma\sqrt{\tau})}{\phi(d_t(\Delta))} = \exp\left(\frac{2d_t(\Delta) - \sigma\sqrt{\tau}}{2} \sigma\sqrt{\tau}\right) = \frac{D + \Delta}{(A_t + \Delta e^{-r_L\tau})e^{\mu\tau}}$$

という関係式が成立することから、

$$(D + \Delta)\phi(d_t(\Delta)) \frac{\partial d_t(\Delta)}{\partial \Delta} = (A_t + \Delta e^{-r_L\tau})e^{\mu\tau} \phi(d_t(\Delta) - \sigma\sqrt{\tau}) \frac{\partial \{d_t(\Delta) - \sigma\sqrt{\tau}\}}{\partial \Delta}$$

となることを利用している。

となり，銀行の期待損失は，

$$E_t[L_T(\Delta_2^*)] = D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1) + D\Phi(d_2^*) - A_t e^{\mu\tau} \Phi(d_2^* - \sigma\sqrt{\tau}) \quad (3.19)$$

となる．ただし，

$$\xi_2^* \equiv e^{-d_2^* \sigma \sqrt{\tau} - (\mu - \sigma^2/2)\tau} \quad (3.20)$$

である（詳細は 3.A 節を参照）．

以下では，企業の期待資産成長率 μ や貸出金利 r_L が銀行の調達金利 r_M よりも大きいという状況を考える⁹．このとき，以下の 3 つの状態が存在する¹⁰．

状態 I： $A_t > D\xi_1^*$ で追加融資が行われる（金利差による期待利益の上昇）．

状態 II： $D\xi_2^* \leq A_t \leq D\xi_1^*$ で追加融資が行われない．

状態 III： $A_t < D\xi_2^*$ で追加融資が行われる（PD の低下による EL 最小化）．

具体的な例として，満期時点 $T = 2$ （年），追加融資判定時点 $t = 1$ （年），追加融資判定時点の貸出金利 $r_L = 1\%$ ，追加融資判定時点の調達金利 $r_M = 0.5\%$ ，企業の期待資産成長率 $\mu = 5\%$ ，資産価値のボラティリティ $\sigma = 10\%$ と設定する．この条件下で，初期時点の貸出額面 D を 100 として，追加融資の有無の分岐点となる資産価値 A_t の水準（すなわち， $D\xi_1^*$ ， $D\xi_2^*$ ）を考察する．

$\mu > r_M$ かつ $r_L > r_M$ であり，(3.12) 式の $f(d) = 0$ となる d は 2 つ存在し，

$$d_1^* \cong -1.905, \quad d_2^* \cong 0.632 \quad (3.21)$$

となる．これらを (3.13), (3.20) 式に代入することで，追加融資が行われる状況は， $A_t > D\xi_1^* \cong 115.67$ あるいは $A_t < D\xi_2^* \cong 89.74$ が成立する場合であることがわかる．追加融資後の PD は (3.15), (3.18) 式に d_1^* ， d_2^* の値を代入することで得られる．追加融資直前の企業の資産価値 A_t に対して，最適な追加融資量 Δ^* をプロットすると，図 3.2.3 のようになる．

追加融資直前の資産価値 A_t について，いくつかの数値を与え，最適追加融資量 Δ^* と追加融資のありなしの場合の EL，PD を表 3.1 に示す．まず， A_t が 90 もしくは 115 の場合，追加融資なし ($\Delta^* = 0$) が最適となっている． $A_t = 80, 85$ と資産価値が低い状態では，追加融資を行うことで EL が低下することが，追加融資なしの $EL_t(0)$ と追加融資ありの $EL_t(\Delta^*)$ の変化から確認できる．追加融資により PD が低下している点も確認される ($PD_t(\Delta^*) < PD_t(0)$)．なお， $A_t = 80$ と資産価値が低いほど，その EL 改善（低下）効果は大きく現れている．一方， $A_t = 120, 125$ と資産価値が高い状態では，PD は上昇する ($PD_t(\Delta^*) > PD_t(0)$) もの，EaD 増加に伴う金利収入の上昇により，EL（表 3.1 では，負値すなわち期待収益）は改善している．

⁹ $\mu \geq r_L > r_M$ と $r_L > \mu > r_M$ の 2 つの場合がありうるが，前者の場合，資産価格 A_t の水準に依らず追加融資 $\Delta > 0$ によって企業の資本価値（株主価値）を上げることができる．これは，追加融資後の資本価値は $(A_t + \Delta e^{-r_L\tau})e^{\mu\tau} - D e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - \Delta e^{(r_M-r_L)\tau} + E_t[L_T(\Delta)]$ となり， $\mu \geq r_L$ では資本価値の追加融資量に関する 1 階微分が必ず正になるためである．

¹⁰ 厳密には，追加融資量が有限である場合に 3 つの状態に分かれる．追加融資量が有限になる条件等も 3.A 節を参照．

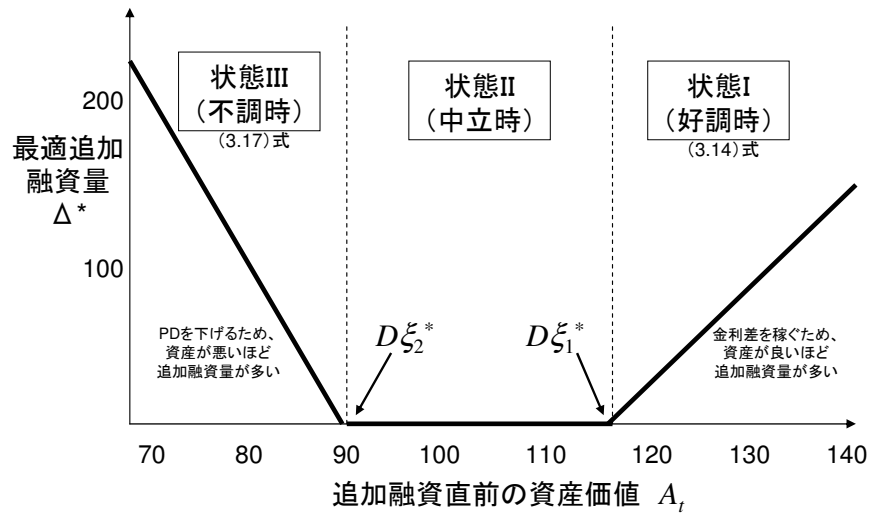


図 3.2: 追加融資直前の企業の資産価値 A_t と最適な追加融資量 Δ^*

表 3.1: 時点 t での企業の資産価値と最適追加融資量, EL, PD の変化

A_t	Δ^*	$EL_t(\Delta^*)$	$EL_t(0)$	$PD_t(\Delta^*)$	$PD_t(0)$
80	105.19	13.54	15.06	73.64%	96.26%
85	51.21	9.85	10.26	73.64%	88.00%
90	0.00	6.16	6.16	72.69%	72.69%
115	0.00	-0.87	-0.87	3.23%	3.23%
120	26.01	-0.99	-0.96	2.84%	1.15%
125	56.02	-1.11	-0.98	2.84%	0.37%

3.2.4 初期時点の EL

ここまでは時点 t において資産価値 A_t が判明したという前提で EL の最小化問題を考察した。以下では、時点 t において生じた A_t の状態に応じて上記のように銀行が行動する場合、初期時点で EL がどのように評価されるのかを考察する（図 3.2.4 を参照）。こうしたアプローチは、将来の行動を確率的に考慮したうえで、初期時点でのリスクを把握するという意味で、「確率動的なリスク評価法」の 1 つといえる。具体的には、まず、時点 t での資産価値 A_t に応じて状態 I、状態 II、状態 III に分け、それぞれの生起確率と時点 t での EL を求める。各状態の EL を足し上げて、最終的に初期時点の EL を導出する。

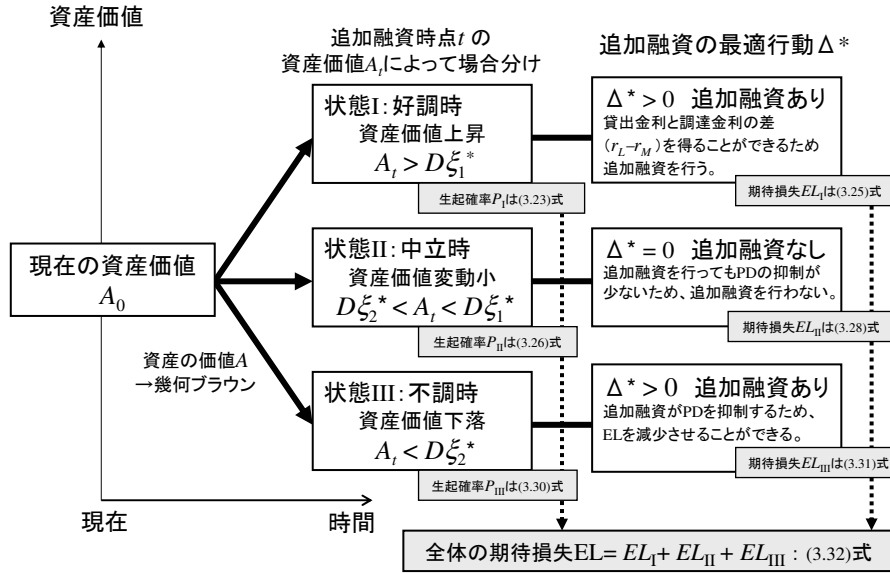


図 3.3: 資産価値 A_t に応じた初期時点の EL の評価

(3.1) 式より、時点 t で企業の資産価値 A_t の分布は

$$\ln A_t \sim N(\ln A_0 + (\mu - \sigma^2/2)t, \sigma^2 t) \quad (3.22)$$

となり、各状態の生起確率と EL は以下のように与えられる（各状態の EL に関する数式展開の詳細は 3.B 節を参照）。

状態 I の生起確率と EL $r_L > r_M$ が成立しているという条件下では、時点 t で企業の資産価値が高い状態 ($A_t > D\xi_1^*$) にあれば、追加融資が行われる。その確率 $P_I \equiv \Pr[A_t > D\xi_1^*]$ は (3.23) 式で与えられる。

$$\begin{aligned} P_I &\equiv \Pr[A_t > D\xi_1^*] = \Pr[\ln A_t > \ln D - d_1^* \sigma \sqrt{\tau} - (\mu - \sigma^2/2)\tau] \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\ln D - \ln A_0 - d_1^* \sigma \sqrt{\tau} - (\mu - \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{t}}\right) = \Phi(-\delta_1^*) \end{aligned} \quad (3.23)$$

ここで、 δ_1^* は、(3.4) 式の d_0 を用いて、

$$\delta_1^* = d_0 \sqrt{T/t} - d_1^* \sqrt{\tau/t} \quad (3.24)$$

と定義した．状態 I の EL を EL_I とすると， EL_I は (3.25) 式で与えられる．

$$EL_I = D\{\Phi(d_1^*) + e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1\}\Phi(-\delta_1^*) - A_0e^{\mu T}\Phi(d_1^* - \sigma\sqrt{\tau})\Phi(-\delta_1^* + \sigma\sqrt{t}) \quad (3.25)$$

状態 II の生起確率と EL $D\xi_2^* \leq A_t \leq D\xi_1^*$ ならば追加融資は行われぬ．この確率 P_{II} は，(3.23) 式と同様の手順で (3.26) 式で与えられる．

$$P_{II} \equiv \Pr[D\xi_2^* \leq A_t \leq D\xi_1^*] = \Phi(\delta_1^*) - \Phi(\delta_2^*) \quad (3.26)$$

ここで，

$$\delta_2^* = d_0\sqrt{T/t} - d_2^*\sqrt{\tau/t} \quad (3.27)$$

と定義した．状態 II の EL を EL_{II} とすると， EL_{II} は (3.28) 式で与えられる．

$$EL_{II} = D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1)\{\Phi(\delta_1^*) - \Phi(\delta_2^*)\} + D\{\Phi_2(\delta_1^*, d_0; \rho) - \Phi_2(\delta_2^*, d_0; \rho)\} - A_0e^{\mu T}\{\Phi_2(\delta_1^* - \sigma\sqrt{t}, d_0 - \sigma\sqrt{T}; \rho) - \Phi_2(\delta_2^* - \sigma\sqrt{t}, d_0 - \sigma\sqrt{T}; \rho)\} \quad (3.28)$$

ここで， ρ は (3.29) 式で与えた．

$$\rho = \sqrt{t/T} \quad (3.29)$$

状態 III の生起確率と EL $\mu > r_M$ が成立しているという条件下では，時点 t で企業の資産価値が低い状態 ($A_t < D\xi_2^*$) にあれば，追加融資が行われる．その確率 P_{III} は，

$$P_{III} \equiv \Pr[A_t < D\xi_2^*] = \Phi(\delta_2^*) \quad (3.30)$$

で与えられる．また，状態 III の EL を EL_{III} とすると， EL_{III} は (3.31) 式で与えられる．

$$EL_{III} = D\{\Phi(d_2^*) + e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1\}\Phi(\delta_2^*) - A_0e^{\mu T}\Phi(d_2^* - \sigma\sqrt{\tau})\Phi(\delta_2^* - \sigma\sqrt{t}) \quad (3.31)$$

全体の EL 追加融資を考慮して初期時点で評価した EL は (3.25), (3.28), (3.31) 式より，以下のように 2 次元標準正規分布の分布関数を用いて表現される¹¹．

$$\begin{aligned} E_0[L_T] &= EL_I + EL_{II} + EL_{III} \\ &= D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1) \\ &\quad + D\{\Phi(d_1^*)\Phi(-\delta_1^*) + \Phi(d_2^*)\Phi(\delta_2^*) + \Phi_2(\delta_1^*, d_0; \rho) - \Phi_2(\delta_2^*, d_0; \rho)\} \\ &\quad - A_0e^{\mu T}\{\Phi(d_1^* - \sigma\sqrt{\tau})\Phi(-\delta_1^* + \sigma\sqrt{t}) + \Phi(d_2^* - \sigma\sqrt{\tau})\Phi(\delta_2^* - \sigma\sqrt{t}) \\ &\quad + \Phi_2(\delta_1^* - \sigma\sqrt{t}, d_0 - \sigma\sqrt{T}; \rho) - \Phi_2(\delta_2^* - \sigma\sqrt{t}, d_0 - \sigma\sqrt{T}; \rho)\} \end{aligned} \quad (3.32)$$

ただし， d_0 , δ_1^* , δ_2^* , ρ はそれぞれ (3.4), (3.24), (3.27), (3.29) 式で定義される (d_1^* , d_2^* の求め方は 3.A 節を参照)．

3.2.3 節と同じ設定で¹²，当初資産価値 A_0 の数値に対して，追加融資を考慮した EL ($E_0[L_T(\Delta^*)]$), (3.32) 式) と追加融資を考慮しない EL ($E_0[L_T(0)]$), (3.6) 式) を表 3.2 で比較する．表 3.1 で

¹¹2 次元標準正規分布の分布関数 (累積密度関数) の計算は，例えば，Hull [2000] の Appendix 11C を参照．

¹²3.2.3 節では，時点 t での貸出金利 $r_L = 1\%$ ，調達金利 $r_M = 0.5\%$ と設定したが，初期時点の貸出金利，調達金利もそれぞれ $r_{L0} = 1\%$ ， $r_{M0} = 0.5\%$ と同じ金利を想定する．なお，両時点での適用金利が異なっても同様に議論できる．また，時点 t で貸出量 (EaD) ではなく追加融資の貸出金利 r_L を調整して EL 最小化を行うモデルも考えられる．

は A_t の値によって追加融資が行われない場合が存在したが、表 3.2 では、時点 t までの資産価値変動が確率的に与えられるため、どのような A_0 の水準に対しても追加融資の可能性がある。表 3.2 からは、どの当初資産価値 A_0 に対しても、追加融資を考慮することによって、EL が小さくなること、特に、 A_0 が小さい場合には μ がある程度大きくても、時点 t での資産価値 A_t が小さいままである可能性が高く、PD の低下を見込んで追加融資が行われやすくなり、その結果、EL の改善（低下）効果も大きくなることがわかる。

表 3.2: 追加融資を考慮した EL と考慮しない EL

A_0	(1) $E_0[L_T(\Delta^*)]$	(2) $E_0[L_T(0)]$	(1)-(2)	P_I	P_{II}	P_{III}
80	10.78	12.00	-1.21	0.1%	24.2%	75.8%
85	7.45	8.03	-0.58	0.4%	45.9%	53.7%
90	4.66	4.90	-0.24	2.0%	66.4%	31.6%
95	2.54	2.63	-0.09	6.4%	78.1%	15.4%
100	1.06	1.10	-0.04	15.7%	78.0%	6.3%
105	0.11	0.15	-0.04	30.2%	67.6%	2.2%
110	-0.47	-0.40	-0.07	47.9%	51.4%	0.6%
120	-1.06	-0.86	-0.21	79.3%	20.6%	0.0%

3.3 追加融資を考慮した VaR と UL

3.2 節では EL 最小化を前提として最適な追加融資量や初期時点での EL の評価、数値例による EL 改善幅を考察した。期中時点で EL 最小化を目的とした追加融資を行うことを想定したとき、UL が引き下げられるとは限らず、その場合、信用リスクが削減されるとはいえない。UL が上昇したときには、その分に応じて自己資本を積み増す必要がある。そこで、本節では、追加融資を考慮した場合の UL を導出し、追加融資を考慮しない場合との比較を行う。

3.3.1 VaR とストレス時期待損失

銀行の与信ポートフォリオの UL を VaR と EL との差で定義する。VaR の算出にあたっては、1 ファクターのマーティンモデルを用いる。すなわち、ポートフォリオを構成する各与信 i の損失 L_i は、共通ファクター（システムティックリスクファクター） X と、それとは独立な個別ファクター Y_i によって生じるとする。このとき、共通ファクター X を所与とすると、各債務者のデフォルトは互いに独立となる。ポートフォリオが十分に分散化され、どの債務者のエクスポージャーも、ポートフォリオ全体に比べると無視しうるほど小さいという状況では、与信ポートフォリオの損失 $L = \sum_i L_i$ の分布は、大数の法則により、 X を所与とするときの条件付期待損失 $E[L|X]$ で与えられる（Vasicek [2002]; Gordy [2003]; 安藤 [2005]）。さらに、(1) 共通ファクター X は単変量、(2) 全ての与信 i について、共通ファクター X の条件付期待損失 $E[L_i|X]$ は、 X について連続微分可能で単調減少関数、という 2 つの条件が成立するとき、ポートフォリオの損失分布の α 分位点 $q_\alpha(L)$ 、すなわち、信頼水準 α の VaR は、 X の $1 - \alpha$ 分位点 $x_{1-\alpha}$

を用いて，(3.33) 式で表現される．

$$q_\alpha(L) = E[L|X = x_{1-\alpha}] \quad (3.33)$$

ここで，(3.33) 式の条件付期待値について，

$$E[L|X = x_{1-\alpha}] = \sum_i E[L_i|X = x_{1-\alpha}] \quad (3.34)$$

が成立し，ポートフォリオの VaR である $q_\alpha(L)$ に対する各与信 i の寄与分は，

$$SEL_i = E[L_i|X = x_{1-\alpha}] \quad (3.35)$$

で表すことができる．(3.35) 式を与信 i のストレス時期待損失 (SEL) と呼ぶ．信頼水準 α での与信ポートフォリオの UL のうち，与信 i の寄与分は，

$$UL_i = SEL_i - E[L_i] \quad (3.36)$$

と表されるため，与信 i のストレス時期待損失を求めることで，ポートフォリオの UL に対する与信 i の寄与を算出することができる．表記の簡便化のため，以下では添字 i を省略する．

3.3.2 ストレス時期待損失の算出

ストレス時期待損失 (SEL) を求めるため，まず「ストレス」を定義する．(3.1) 式で表される企業の資産価値変動を導出する標準ブラウン運動 W_t は，共通ファクター X_t と \sqrt{R} という相関を持ち，共通ファクター X_t ，個別ファクター Y_t は互いに独立な標準ブラウン運動で表現されるとする¹³．このような W_t は，

$$W_t = \sqrt{R}X_t + \sqrt{1-R}Y_t \quad (3.37)$$

で与えられる．

$X_0 = 0$ とすると，「ストレス」は， $X_T = \sqrt{T}\Phi^{-1}(1-\alpha) = -\sqrt{T}\Phi^{-1}(\alpha)$ という値をとっている状況を指す．したがって，ストレス状況下での銀行の期待損失 SEL は，追加融資を考慮しなければ，

$$q_\alpha(L) = SEL = D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1) + E_0[(D - A_T)^+ | X_T = -\sqrt{T}\Phi^{-1}(\alpha)] \quad (3.38)$$

と表現できる．(3.38) 式の条件付期待値を評価すると，追加融資を考慮しない場合の SEL は，

$$SEL = D\{e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1 + \Phi(d_S)\} - A_0 e^{\mu T} e^{-\sigma\sqrt{T}\sqrt{R}\Phi^{-1}(\alpha)} e^{-R\sigma^2 T/2} \Phi(d_S - \sigma\sqrt{T}\sqrt{1-R}) \quad (3.39)$$

で与えられる（詳細は 3.C 節を参照）．ここで， d_S は次式のように定義した．

$$d_S \equiv \frac{d_0 + \sqrt{R}\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-R}} = \frac{\Phi^{-1}(PD) + \sqrt{R}\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-R}} \quad (3.40)$$

¹³本章では，パーゼル II の内部格付アプローチの考え方 (Basel Committee on Banking Supervision [2005b] を参照) に即して，資産価値と共通ファクターの相関を正の値 \sqrt{R} としているが，共通ファクターと負の相関を持つ資産価値についても本章の枠組みで考えられる．

3.3.3 時点 t でのストレス時期待損失

時点 t での追加融資後の当該企業のストレス時期待損失は、

$$SEL_t(\Delta^*) = D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1) + \Delta^*(e^{(r_M-r_L)\tau} - 1) + E_t[(D + \Delta^* - A_T)^+ | X_T = -\sqrt{T}\Phi^{-1}(\alpha), X_t, Y_t] \quad (3.41)$$

と表現される。ここでは、追加融資がなされる場合と追加融資がなされない場合に分けて、(3.41) 式右辺の期待値がどのように表現されるかを考察する。

追加融資がなされる場合 $X_t, X_{T-t} \equiv X_T - X_t$ を用いてストレスの条件を表すと、

$$X_T = X_t + X_{T-t} = -\sqrt{T}\Phi^{-1}(\alpha) \quad (3.42)$$

となる。 Δ^* が時点 t での EL を最小化する最適な追加融資量であることを考慮すると、 A_T は、 $Y_{T-t} \equiv Y_T - Y_t$ も用いて、

$$\begin{aligned} A_T &= (A_t + \Delta^* e^{-r_L\tau}) e^{(\mu-\sigma^2/2)\tau} e^{\sigma(\sqrt{R}X_{T-t} + \sqrt{1-R}Y_{T-t})} \\ &= (D + \Delta^*) e^{-d^*\sigma\sqrt{\tau}} e^{\sigma(\sqrt{R}X_{T-t} + \sqrt{1-R}Y_{T-t})} \\ &= (D + \Delta^*) e^{-d^*\sigma\sqrt{\tau}} e^{\sigma\{\sqrt{R}(-\sqrt{T}\Phi^{-1}(\alpha) - X_t) + \sqrt{1-R}Y_{T-t}\}} \end{aligned} \quad (3.43)$$

と表現される。このとき、(3.41) 式は次式に帰着する。

$$\begin{aligned} SEL_t(\Delta^*) &= D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1) + \Delta^*(e^{(r_M-r_L)\tau} - 1) \\ &\quad + (D + \Delta^*) E_t[(1 - e^{-d^*\sigma\sqrt{\tau}} e^{-\sigma\sqrt{RT}\Phi^{-1}(\alpha)} e^{-\sigma\sqrt{R}X_t} e^{\sigma\sqrt{1-R}Y_{T-t}})^+ | X_t] \\ &= D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1) + (e^{(r_M-r_L)\tau} - 1) \frac{A_t - D\xi^*}{\xi^* - e^{-r_L\tau}} \\ &\quad + \frac{A_t - D e^{-r_L\tau}}{\xi^* - e^{-r_L\tau}} E_t[(1 - e^{-d^*\sigma\sqrt{\tau}} e^{-\sigma\sqrt{RT}\Phi^{-1}(\alpha)} e^{-\sigma\sqrt{R}X_t} e^{\sigma\sqrt{1-R}Y_{T-t}})^+ | X_t] \end{aligned} \quad (3.44)$$

追加融資がなされない場合 追加融資がなされない場合、 $\Delta^* = 0$ より、(3.41) 式は次式に帰着する。

$$\begin{aligned} SEL_t(0) &= D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1) + E_t[(D - A_T)^+ | X_T = -\sqrt{T}\Phi^{-1}(\alpha), X_t, Y_t] \\ &= D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1) + E_t[(D - A_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)T} e^{\sigma\{-\sqrt{RT}\Phi^{-1}(\alpha) + \sqrt{1-R}(Y_t + Y_{T-t})\}})^+ | Y_t] \end{aligned} \quad (3.45)$$

3.3.4 初期時点でのストレス時期待損失

追加融資を考慮した初期時点でのストレス時期待損失 $E_0[SEL_t(\Delta^*)]$ は、追加融資を考慮した EL と同様に、時点 t での資産価値 A_t の状態に応じて 3 つの状態に分けて評価できる。すなわち、

$$E_0[SEL_t(\Delta^*)] = SEL_I + SEL_{II} + SEL_{III} \quad (3.46)$$

ただし、

$$SEL_I \equiv E_0[SEL_t(\Delta^*) 1_{\{A_t > D\xi_1^*\}}] \quad (3.47)$$

$$SEL_{II} \equiv E_0[SEL_t(0)1_{\{D\xi_2^* \leq A_t \leq D\xi_1^*\}}] \quad (3.48)$$

$$SEL_{III} \equiv E_0[SEL_t(\Delta_2^*)1_{\{A_t < D\xi_2^*\}}] \quad (3.49)$$

となる．これは，追加融資を考慮した EL と同様，2 次元正規分布の分布関数を用いて解析的に表現できる．その導出の概略を以下に示す．

状態 I の SEL (3.44) 式を用いて，(3.47) 式を評価すると次式を得る（詳細は 3.D 節を参照）．

$$\begin{aligned} SEL_I &= D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1)\Phi(-\delta_1^*) \\ &+ \frac{1}{\xi_1^* - e^{-r_{L0}T}} [(e^{(r_M-r_L)\tau} - 1)\{A_0e^{\mu t}\Phi(-\delta_1^* + \sigma\sqrt{t}) - D\xi_1^*\Phi(-\delta_1^*)\} \\ &+ A_0e^{\mu t}\{\Phi_2(-\delta_1^* + \sigma\sqrt{t}, h_1^* + \sigma Rt/\sqrt{\eta}; \rho^*) \\ &- e^{-\sigma h_1^*\sqrt{\eta}-\sigma^2 t/2+\sigma^2(1-R)T/2}\Phi_2(-\delta_1^* + \sigma(1-R)\sqrt{t}, h_1^* - \sigma(1-R)\tau/\sqrt{\eta}; \rho^*)\} \\ &- De^{-r_{L0}T}\{\Phi_2(-\delta_1^*, h_1^*; \rho^*) - e^{-\sigma h_1^*\sqrt{\eta}+\sigma^2\eta/2}\Phi_2(-\delta_1^* - \sigma R\sqrt{t}, h_1^* - \sigma\sqrt{\eta}; \rho^*)\}] \end{aligned} \quad (3.50)$$

ただし， η ， h_1^* ， h_2^* ， ρ^* は (3.51)，(3.52)，(3.53) 式のように与える．

$$\eta \equiv (1-R)\tau + Rt \quad (3.51)$$

$$h_i^* \equiv \frac{d_i^*\sqrt{\tau} + \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{RT}}{\sqrt{\eta}}, \quad i = 1, 2 \quad (3.52)$$

$$\rho^* \equiv R\sqrt{t/\eta} \quad (3.53)$$

状態 II の SEL (3.45) 式を用いて，(3.48) 式を評価すると，次式を得る（詳細は 3.D 節を参照）．

$$\begin{aligned} SEL_{II} &= D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1)\{\Phi(\delta_1^*) - \Phi(\delta_2^*)\} + D\{\Phi_2(d_S, \delta_1^*; \rho_S) - \Phi_2(d_S, \delta_2^*; \rho_S)\} \\ &- A_0e^{(\mu-\sigma^2 R/2)T-\sigma\sqrt{RT}\Phi^{-1}(\alpha)}\{\Phi_2(d_S - \sigma_S, \delta_1^* - \rho_S\sigma_S; \rho_S) \\ &- \Phi_2(d_S - \sigma_S, \delta_2^* - \rho_S\sigma_S; \rho_S)\} \end{aligned} \quad (3.54)$$

ただし， d_S は (3.40) 式， ρ_S ， σ_S は (3.55)，(3.56) 式のように与える．

$$\rho_S \equiv \sqrt{(1-R)t/T} \quad (3.55)$$

$$\sigma_S \equiv \sigma\sqrt{(1-R)T} \quad (3.56)$$

状態 III の SEL 状態 I の SEL と同様に，(3.49) 式を評価すると，次式を得る（詳細は 3.D 節を参照）．

$$\begin{aligned} SEL_{III} &= D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1)\Phi(\delta_2^*) \\ &+ \frac{1}{\xi_2^* - e^{-r_{L0}T}} [(e^{(r_M-r_L)\tau} - 1)\{A_0e^{\mu t}\Phi(\delta_2^* - \sigma\sqrt{t}) - D\xi_2^*\Phi(\delta_2^*)\} \\ &+ A_0e^{\mu t}\{\Phi_2(\delta_2^* - \sigma\sqrt{t}, h_2^* + \sigma Rt/\sqrt{\eta}; -\rho^*) \\ &- e^{-\sigma h_2^*\sqrt{\eta}-\sigma^2 t/2+\sigma^2(1-R)T/2}\Phi_2(\delta_2^* - \sigma(1-R)\sqrt{t}, h_2^* - \sigma(1-R)\tau/\sqrt{\eta}; -\rho^*)\} \\ &- De^{-r_{L0}T}\{\Phi_2(\delta_2^*, h_2^*; -\rho^*) - e^{-\sigma h_2^*\sqrt{\eta}+\sigma^2\eta/2}\Phi_2(\delta_2^* + \sigma R\sqrt{t}, h_2^* - \sigma\sqrt{\eta}; -\rho^*)\}] \end{aligned} \quad (3.57)$$

全体の SEL (3.46), (3.50), (3.54), (3.57) 式より, 追加融資を考慮したストレス時期待損失 SEL は, 次式のように 2 次元正規分布の分布関数を用いた解析解で表せる.

$$\begin{aligned}
E_0[SEL_t(\Delta^*)] &= D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1) \\
&+ \frac{1}{\xi_1^* - e^{-r_{L\tau}}} [(e^{(r_M-r_L)\tau} - 1)\{A_0 e^{\mu t} \Phi(-\delta_1^* + \sigma\sqrt{t}) - D\xi_1^* \Phi(-\delta_1^*)\} \\
&+ \{A_0 e^{\mu t} \Phi_2(-\delta_1^* + \sigma\sqrt{t}, h_1^* + \sigma Rt/\sqrt{\eta}; \rho^*) - D e^{-r_{L\tau}} \{\Phi_2(-\delta_1^*, h_1^*; \rho^*)\} \\
&- e^{-\sigma h_1^* \sqrt{\eta}} \{A_0 e^{\mu t - \sigma^2 t/2 + \sigma_S^2/2} \Phi_2(-\delta_1^* + \sigma(1-R)\sqrt{t}, h_1^* - \sigma(1-R)\tau/\sqrt{\eta}; \rho^*) \\
&- D e^{-r_{L\tau} + \sigma^2 \eta/2} \Phi_2(-\delta_1^* - \sigma R\sqrt{t}, h_1^* - \sigma\sqrt{\eta}; \rho^*)\}] \\
&+ \frac{1}{\xi_2^* - e^{-r_{L\tau}}} [(e^{(r_M-r_L)\tau} - 1)\{A_0 e^{\mu t} \Phi(\delta_2^* - \sigma\sqrt{t}) - D\xi_2^* \Phi(\delta_2^*)\} \\
&+ \{A_0 e^{\mu t} \Phi_2(\delta_2^* - \sigma\sqrt{t}, h_2^* + \sigma Rt/\sqrt{\eta}; -\rho^*) - D e^{-r_{L\tau}} \Phi_2(\delta_2^*, h_2^*; -\rho^*)\} \\
&- e^{-\sigma h_2^* \sqrt{\eta}} \{A_0 e^{\mu t - \sigma^2 t/2 + \sigma_S^2/2} \Phi_2(\delta_2^* - \sigma(1-R)\sqrt{t}, h_2^* - \sigma(1-R)\tau/\sqrt{\eta}; -\rho^*) \\
&- D e^{-r_{L\tau} + \sigma^2 \eta/2} \Phi_2(\delta_2^* + \sigma R\sqrt{t}, h_2^* - \sigma\sqrt{\eta}; -\rho^*)\}] \\
&+ D\{\Phi_2(d_S, \delta_1^*; \rho_S) - \Phi_2(d_S, \delta_2^*; \rho_S)\} \\
&- D e^{-d_S \sigma_S + \sigma_S^2/2} \{\Phi_2(d_S - \sigma_S, \delta_1^* - \rho_S \sigma_S; \rho_S) - \Phi_2(d_S - \sigma_S, \delta_2^* - \rho_S \sigma_S; \rho_S)\}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

3.3.5 追加融資を考慮した EL と UL の数値例

3.2.4 節と同じ設定のもとで追加融資を考慮した EL と UL の数値例を示す. UL の算出では, 信頼水準 $\alpha = 99.9\%$ として, 追加融資を考慮した EL, SEL, UL の寄与を求め, 追加融資を考慮しない EL, SEL, UL の寄与と比較する. 相関については, $R = 0.12$ をベースに $R = 0.24$ の場合も検証する¹⁴. その結果を表 3.3 に示す.

表 3.3: 追加融資を考慮した UL と考慮しない UL

A_0	$EL(\Delta^*)$	$EL(0)$	$R=0.12$				(参考) $R=0.24$	
			$SEL(\Delta^*)$	$SEL(0)$	$UL(\Delta^*)$	$UL(0)$	$UL(\Delta^*)$	$UL(0)$
80	10.78	12.00	30.16	23.18	19.37	11.18	27.40	15.81
85	7.45	8.03	22.26	18.62	14.81	10.60	21.30	15.37
90	4.66	4.90	15.97	14.32	11.31	9.42	16.82	14.16
95	2.54	2.63	11.18	10.43	8.64	7.80	13.56	12.28
100	1.06	1.10	7.69	7.12	6.63	6.02	11.17	9.97
105	0.11	0.15	5.32	4.48	5.21	4.32	9.59	7.58
110	-0.47	-0.40	3.91	2.50	4.38	2.90	8.85	5.39
120	-1.06	-0.86	3.16	0.23	4.22	1.09	9.63	2.25

備考: 簡単化のため以下のような表記法を用いている. $EL(\Delta^*) \equiv E_0[L_T(\Delta^*)]$, $SEL(\Delta^*) \equiv E_0[SEL_t(\Delta^*)]$, $UL(\Delta^*) \equiv E_0[SEL_t(\Delta^*)] - E_0[L_T(\Delta^*)]$, $EL(0) \equiv E_0[L_T(0)]$, $SEL(0) \equiv E_0[SEL_t(0)]$, $UL(0) \equiv E_0[SEL_t(0)] - E_0[L_T(0)]$.

¹⁴パーゼル II の内部格付アプローチでは, 事業法人向けの与信について, PD に応じて指定関数に従い 0.12 ~ 0.24 の R を設定することが求められている (ただし, 売上高が 5 千万ユーロ未満の場合は売上高でも調整される). ここでは, パーゼル II で求められる相関 R のうち, 最も小さいもの (0.12) と最も大きいもの (0.24) を設定した.

表 3.3 より、期待損失を最小化するような追加融資が行われる場合、EL は小さくなるものの、SEL が大きくなり、UL の寄与が拡大することがわかる。これは、EL を抑制するための追加融資が EaD を拡大させたため、満期時点がストレス状態にあった場合、損失がより拡大してしまうことを意味している。また、UL の増加幅は相関 R が高いほど大きくなることがわかる。

このように、銀行が期待損失の最小化（期待収益の最大化）行動を行うと、UL で測ったときに非常に大きな信用リスクを抱えてしまう危険性があることがわかる。この問題に対しては、平均分散分析のように、EL を一定値より低い水準に抑えたい一方で、UL を最小化するという行動原理や、自己資本をある一定水準に保つため、UL の上限をその範囲に抑えつつ、EL を最小化（期待収益を最大化）する行動原理を規定し対処することが考えられる。あるいは、EL と UL が取りうる組合せの中から、両者のトレードオフを勘案して銀行にとって望ましい組合せを選択するという考え方もある。銀行が融資の信用リスクを動的に管理しようとする場合、EL や UL に対してどのような選好を持ち、その選好に従ってどのように行動するかの判断基準を明確に持つことが求められる。

3.4 結論

本章では、信用リスクモデルの構成要素の中で取組みが遅れていた EaD の変化について、追加融資を考慮したモデル化を試み、信用リスク量（EL，UL）を解析的に導出し、その検証を行った。EaD を銀行がコントロールできる変数として内生的にモデル化し、EaD，PD，LGD の構造的な関係に注目して、動的な信用リスクを解析的に評価したことが本章の特徴である。具体的には、企業の資産価値を幾何ブラウン運動で与え、銀行が期中の資産価値に応じて期待損失を最小化するように追加融資を行うモデルを考えた。このもとで、初期時点での EL と UL（の寄与）が 2 次元正規分布の分布関数を用いて表現できることを示した。

本章では、EL と UL の解析的な評価が得られることに重点を置いたため、捨象した点や現実的ではない設定がいくつかある。主なものとしては、以下の点が挙げられる。

1. 追加融資量は銀行が定められる（常に資金需要がある）と考えている点。
2. 将来時点 t における貸出金利 r_L を外生的に与えていて（初期時点で観測可能）、その時点 t の資産価値に依存しないと考えている点。
3. EL の最小化を銀行の行動原理と考えている点。
4. 資産価値のパラメータ μ や σ は満期まで一定と考えている点。
5. 追加融資を期中で 1 回だけと考えている点。

1. と 2. については、本来、企業の資金需要と銀行の資金供給の双方により、追加融資量や貸出金利が決まるはずだが、本章では簡単化のため、このような仮定を置いている。ただし、資産の期待成長率 μ が貸出金利 r_L よりも大きい状況では、追加融資は資本価値を上げることになるため、企業は追加融資の提供を受けると考えても不自然ではない。なお、銀行間の貸出競争を考慮すると、モデルが更に複雑になるため、対象企業につき 1 行の独占供給を考えている。

3. については、3.3.5 節で考察したように他の行動原理を想定することもできるが、効用関数や自己資本の設定が不要で、最も取り扱いやすい期待損失最小化（期待収益最大化）から着手した。

4. については、銀行は資産価値のパラメータ μ や σ については融資期間中不変であることを確信できる範囲内で融資期間 T を設定しているとも考えることができる。この仮定のもとでは、時点 t で資産価値が低くなったとしても、偶々下振れした資産価値のパスの 1 つが実現したにすぎず、その後は平均的には期待成長率 μ で資産価値が回復していくと考える。パラメータ μ が確率変動するようなモデル化や時点 t で観察された資産価値 A_t に応じて μ を再設定するようなモデル化も可能ではあるが、解析的に扱いにくくなるため本章では考えなかった。

5. については、追加融資を複数回可能とすると、解析的に扱いにくくなるため、1 回としている。なお、複数回にしてもシミュレーションによる分析は可能であるが、問題の本質を理解するうえでは 1 回の追加融資に絞った方が追加融資の効果を解釈しやすいと判断した。

このように、本章では簡単化のために捨象した点も多いが、期待損失最小化という銀行の行動原理のもとで、追加融資が生じる現象を示し、その理由を PD の抑制や金利差に伴う期待収益の向上で説明することができた。また、追加融資に伴う EaD の変化が、PD や LGD に及ぼす影響を構造的に捉え、EL, UL の解析解が導出可能なことを示した。パーゼル II の先進的内部格付手法では PD や LGD のみならず EaD の評価も求められている。本章のモデルは、EaD の内生性や PD, LGD, EaD の相互関係を考慮して EL や UL を算出する際の 1 つのアプローチとして位置付けられる。

本章で扱った 1 期間構造型モデルは、EaD の内生性などを考える際には有効なモデルであるが、デフォルト確率が資産と負債の関係で決まってしまうため、連続的に考えた場合でも、資産が負債を大幅に上回っている際には突然デフォルトすることが想定できないモデルとなる。このことにより、短期の信用スプレッドを説明しにくいという問題を抱える。そこで、次章では本章で考えたようにリスクファクター間の相互依存関係を考慮しつつも、期中でもデフォルトが生じうるモデルとして、確率的なデフォルト強度のモデルを扱う。

3.A 期中での追加融資の判定

3.A.1 追加融資が行われる資産価格の水準

本文 (3.12) 式の $f(d)$ の 1 階微分は、

$$\begin{aligned} f'(d) &= \phi(d) - e^{(\mu-r_L)\tau} \phi(d - \sigma\sqrt{\tau}) \\ &= \{1 - e^{(\mu-r_L-\sigma^2/2)\tau} e^{\sigma\sqrt{\tau}d}\} \phi(d) \end{aligned} \quad (3.59)$$

となるため、(3.60) 式が成立する。

$$f'(d) \begin{cases} > 0 & \text{if } d < \bar{d}, \\ < 0 & \text{if } d > \bar{d}, \end{cases} \quad (3.60)$$

ただし、 \bar{d} は (3.61) 式で表される値である。

$$\bar{d} = \frac{r_L - \mu + \sigma^2/2}{\sigma} \sqrt{\tau} \quad (3.61)$$

d の極限や \bar{d} に関する $f(d)$ の値は、以下のとおりになる。

$$\lim_{d \rightarrow -\infty} f(d) = e^{(r_M - r_L)\tau} - 1 \quad (3.62)$$

$$\lim_{d \rightarrow \infty} f(d) = e^{(r_M - r_L)\tau} - e^{(\mu - r_L)\tau} = \{e^{r_M\tau} - e^{\mu\tau}\}e^{-r_L\tau} \quad (3.63)$$

$$f(\bar{d}) = e^{(r_M - r_L)\tau} - 1 + \Phi(\bar{d}) - e^{(\mu - r_L)\tau}\Phi(\bar{d} - \sigma\sqrt{\tau}) \quad (3.64)$$

追加融資量が有限であるという条件のもとでは $f(\bar{d}) > 0$ となることから, (3.62) ~ (3.64) 式より, $r_L > r_M$ ならば $d_1^* < \bar{d}$ の領域で $f(d_1^*) = 0$ となる d_1^* が存在し, $\mu > r_M$ ならば $\bar{d} < d_2^*$ の領域で $f(d_2^*) = 0$ となる d_2^* が存在する.

これら d_1^*, d_2^* は, $f(d)$ の 1 階微分が (3.59) 式のように与えられることから, 例えば, ニュートン法¹⁵によって求めることができる. ただし, (3.59) 式で与えられる $f'(d)$ は d の絶対値が大きいたとこでは急速に 0 に近づき, ニュートン法が不安定になる場合もある. この場合は, 2 分法¹⁶など他の手法によって d_1^*, d_2^* を求めることができる.

次に, $t, T, r_M, r_L, \mu, \sigma$ を所与とし, 追加融資が行われる A_t の水準を検討する. ここで, 追加融資が行われる直前の d_t の水準, すなわち, $d_t(0)$ を A_t の関数と考え直して, 関数 $\tilde{d}(A_t)$ を以下のように定義する.

$$\tilde{d}(A_t) = d_t(0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left\{ \ln \frac{D}{A_t} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right\} \quad (3.65)$$

そのうえで, 関数 $h(A_t)$ を

$$h(A_t) \equiv \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\partial E_t[L_T(\Delta)]}{\partial \Delta} = e^{(r_M - r_L)\tau} - 1 + \Phi(\tilde{d}(A_t)) - e^{(\mu - r_L)\tau}\Phi(\tilde{d}(A_t) - \sigma\sqrt{\tau}) \quad (3.66)$$

と置くと, $h(A_t) < 0$ となる資産価格の水準 A_t であれば追加融資が行われることがわかる. 実際, (3.62) ~ (3.64) 式より, $\tilde{d}(A_t) < d_1^*$ か $\tilde{d}(A_t) > d_2^*$ の場合に $h(A_t) < 0$ となることが確認される. そこで, 各々のケースについて, A_t の閾値を求めてみる.

まず, $r_L > r_M$ の状況で, $\tilde{d}(A_t) < d_1^*$ ならば,

$$\ln D - \ln A_t < d_1^* \sigma\sqrt{\tau} + (\mu - \sigma^2/2)\tau \quad (3.67)$$

より,

$$A_t > D e^{-d_1^* \sigma\sqrt{\tau} - (\mu - \sigma^2/2)\tau} = D \xi_1^* \quad (3.68)$$

となる. 同様に, $\mu > r_M$ の状況で $\tilde{d}(A_t) > d_2^*$ ならば,

$$A_t < D e^{-d_2^* \sigma\sqrt{\tau} - (\mu - \sigma^2/2)\tau} = D \xi_2^* \quad (3.69)$$

となり, $D \xi_1^*$ および $D \xi_2^*$ が追加融資の有無を分ける資産水準 A_t の閾値になることがわかる.

次に, 各々のケースで最適な追加融資量 Δ_1^*, Δ_2^* を求める. $r_L > r_M$ の状況で, (3.68) 式の状況で追加融資 $\Delta > 0$ を行うとき, $A_t > D e^{-\bar{d}\sigma\sqrt{\tau} - (\mu - \sigma^2/2)\tau} = D e^{-r_L\tau}$ を満たすことから,

$$\frac{A_t}{D} > \frac{A_t + \Delta e^{-r_L\tau}}{D + \Delta} \geq \xi_1^* \quad (3.70)$$

となっており, 最適な追加融資量 Δ_1^* では,

$$\frac{A_t + \Delta_1^* e^{-r_L\tau}}{D + \Delta_1^*} = \xi_1^* \quad (3.71)$$

¹⁵ 適当な d の初期値 $d^{(0)}$ を与え, $d^{(n+1)} = d^{(n)} - \frac{f(d^{(n)})}{f'(d^{(n)})}$ で値を更新し, 収束した値を解とする方法.

¹⁶ $d_1^* < \bar{d}$ の d_1^* を求めるのであれば, まず, 初期値として d がとりうる下限の値を d^L , 上限の値を $d^H = \bar{d}$ とする. $d^M = (d^L + d^H)/2$ に対して, $f(d^M) > 0$ であれば $d^H = d^M$ として更新し, $f(d^M) < 0$ であれば $d^L = d^M$ として更新し, $f(d^M)$ が十分に 0 に近づいたか $d^H - d^L$ が十分に小さくなったときの d^M を解とする方法.

を満たす．同様に， $\mu > r_M$ で (3.69) 式の状況で追加融資を行うときは， $A_t < De^{-r_L\tau}$ となっており，

$$\frac{A_t}{D} < \frac{A_t + \Delta e^{-r_L\tau}}{D + \Delta} \leq \xi_2^* \quad (3.72)$$

を満たし，最適な追加融資量 Δ_2^* は，

$$\frac{A_t + \Delta_2^* e^{-r_L\tau}}{D + \Delta_2^*} = \xi_2^* \quad (3.73)$$

を満たす．(3.71), (3.73) 式より，最適な追加融資量 Δ_1^* , Δ_2^* は (3.74) 式で与えられる．

$$\Delta_1^* = \frac{A_t - D\xi_1^*}{\xi_1^* - e^{-r_L\tau}}, \quad \Delta_2^* = \frac{A_t - D\xi_2^*}{\xi_2^* - e^{-r_L\tau}} \quad (3.74)$$

3.A.2 パラメータの大小関係と追加融資の有無

(3.62) ~ (3.64) 式より，企業の期待資産成長率 μ ，貸出金利 r_L ，銀行の調達金利 r_M の大小関係と追加融資の有無を整理できる．企業の資金借入需要については，脚注 9 のとおり $\mu \geq r_L$ では追加融資により期待資本価値が向上するため必ず需要があると考えられる．また，3.A.4 節で示すように $r_L \leq r_M$ または $\mu \leq r_M$ では追加融資量は有限となる．以上の関係を纏めると，表 3.4 のとおりとなる．

表 3.4: 時点 t でのパラメータの大小関係と追加融資

パラメータの大小	融資量	追加融資の有無	企業の借入需要
$\mu \geq r_L > r_M$	有限	$A_t > D\xi_1^*, A_t < D\xi_2^*$ で追加融資	必ず需要
	無限	A_t の水準によらず追加融資	
$r_L > \mu \geq r_M$	有限	$A_t > D\xi_1^*, A_t < D\xi_2^*$ で追加融資	需要は不明
	無限	A_t の水準によらず追加融資	
$\mu \geq r_M \geq r_L$	有限	$A_t < D\xi_2^*$ で追加融資	必ず需要
$r_L \geq r_M > \mu$	有限	$A_t > D\xi_1^*$ で追加融資	需要は不明
$r_M \geq \mu > r_L$		追加融資されない	
$r_M \geq r_L \geq \mu$		追加融資されない	

3.A.3 追加融資量が有限であるための必要十分条件

$\partial E_t[L_T(\Delta)]/\partial\Delta|_{\Delta=0}$ が負という状況であっても， $\partial E_t[L_T(\Delta)]/\partial\Delta|_{\Delta\rightarrow\infty}$ が負の場合，追加融資量は有限にはならない． $E_t[L_T(\Delta)]$ の追加融資量 Δ に関する 2 階微分を求めてみると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_t[L_T(\Delta)]}{\partial\Delta^2} &= \{1 - e^{(\mu - r_L - \sigma^2/2)\tau} e^{\sigma\sqrt{\tau}d_t}\} \phi(d_t) \frac{\partial d_t(\Delta)}{\partial\Delta} \\ &= \frac{(A_t - De^{-r_L\tau})^2}{\sigma\sqrt{\tau}(D + \Delta)(A_t + \Delta e^{-r_L\tau})^2} \phi(d_t(\Delta)) \end{aligned} \quad (3.75)$$

となり，常に正であるが， $\Delta \rightarrow \infty$ の極限では，

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 E_t[L_T(\Delta)]}{\partial\Delta^2} = \frac{(A_t - De^{-r_L\tau})^2 \phi(\bar{d})}{\sigma\sqrt{\tau}} \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{1}{(D + \Delta)(A_t + \Delta e^{-r_L\tau})^2} = 0 \quad (3.76)$$

となり，直線に漸近することがわかる．漸近する直線の傾きは，

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{\partial E_t[L_T(\Delta)]}{\partial \Delta} = e^{(r_M - r_L)\tau} - 1 + \Phi(\bar{d}) - e^{(\mu - r_L)\tau} \Phi(\bar{d} - \sigma\sqrt{\tau}) \quad (3.77)$$

で表現でき，追加融資量が有限であるには (3.77) 式が正であることが必要十分条件となる．この条件は， $\lim_{\Delta \rightarrow \infty} d_t(\Delta) = \bar{d}$ より，

$$f(\bar{d}) > 0 \quad (3.78)$$

と同値である．

3.A.4 追加融資量が有限であるためのパラメータの条件

(3.77) 式右辺の $\Phi(\bar{d}) - e^{(\mu - r_L)\tau} \Phi(\bar{d} - \sigma\sqrt{\tau})$ は必ず正になる．したがって， $r_L \leq r_M$ では追加融資量は有限となる．また， $r_M < r_L$ であっても $\mu \leq r_M$ であれば追加融資量は有限となる．以下，このことを示すために，次の命題 3.1 を証明する．

命題 3.1. 実数 α と正の実数 s に対して， $\Phi(-\alpha + s/2) - e^{\alpha s} \Phi(-\alpha - s/2) > 0$

証明. 対数正規分布 (3.79) 式に従う確率変数 X を考える．

$$\ln X \sim N(\alpha s - s^2/2, s^2) \quad (3.79)$$

このとき，

$$Y \equiv \frac{\ln X - (\alpha s - s^2/2)}{s} \quad (3.80)$$

と置くと， $Y \sim N(0, 1)$ であり，

$$\Pr((1 - X)^+ > 0) = \Pr(X < 1) = \Pr(Y < \frac{-(\alpha s - s^2/2)}{s}) = \Phi(-\alpha + s/2), \quad (3.81)$$

となる．定義により， $(1 - X)^+ \geq 0$ であり，(3.81) 式より， $(1 - X)^+ > 0$ となる確率は正であるから，(3.80) 式を用いて

$$\begin{aligned} 0 < E[(1 - X)^+] &= \int_{-\infty}^{-\alpha + s/2} (1 - e^{sy + \alpha s - s^2/2}) \phi(y) dy \\ &= \Phi(-\alpha + s/2) - e^{\alpha s} \Phi(-\alpha - s/2) \end{aligned} \quad (3.82)$$

となり，命題 3.1 が示された． □

$\alpha = (\mu - r_L)\sqrt{\tau}/\sigma$ ， $s = \sigma\sqrt{\tau}$ と置いて命題 3.1 を適用すると，(3.77) 式右辺の $\Phi(\bar{d}) - e^{(\mu - r_L)\tau} \Phi(\bar{d} - \sigma\sqrt{\tau})$ は正になることがわかる．すなわち， $r_L \leq r_M$ であれば (3.77) 式右辺は正となることから，追加融資量は有限になることがわかる．

$r_L > r_M$ であっても， $\mu \leq r_M$ ならば，

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{\partial E_t[L_T(\Delta)]}{\partial \Delta} &\geq e^{(\mu - r_L)\tau} - 1 + \Phi(\bar{d}) - e^{(\mu - r_L)\tau} \Phi(\bar{d} - \sigma\sqrt{\tau}) \\ &= e^{(\mu - r_L)\tau} \{ \Phi(-\bar{d} + \sigma\sqrt{\tau}) - e^{(r_L - \mu)\tau} \Phi(-\bar{d}) \} \end{aligned} \quad (3.83)$$

となるから， $\alpha = (r_L - \mu)\sqrt{\tau}/\sigma$ ， $s = \sigma\sqrt{\tau}$ と置いて命題 3.1 を適用すると，(3.83) 式の右辺は正になり，追加融資量は有限になることがわかる．

したがって， $r_L \leq r_M$ あるいは $\mu \leq r_M$ であれば追加融資量は有限となり，追加融資量が無限になるのは $r_L > r_M$ かつ $\mu > r_M$ に限られることがわかる．

3.B 時点 t での状態別の期待損失

状態 I の EL $r_L > r_M$ で $A_t > D\xi_1^*$ ならば, 時点 t で追加融資が行われる. その状態 I の EL を EL_I とすると, (3.16) 式から,

$$EL_I \equiv E_0[L_T(\Delta_1^*)1_{\{A_t > D\xi_1^*\}}] = D\{\Phi(d_1^*) + e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1\} \Pr[A_t > D\xi_1^*] - e^{\mu\tau} \Phi(d_1^* - \sigma\sqrt{\tau})E[A_t 1_{\{A_t > D\xi_1^*\}}] \quad (3.84)$$

となる. ここで, (3.84) 式中の期待値 $E_0[A_t 1_{\{A_t > D\xi_1^*\}}]$ は次式のように展開できる.

$$\begin{aligned} E_0[A_t 1_{\{A_t > D\xi_1^*\}}] &= \int_{\delta_1^*}^{\infty} A_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)t} e^{\sigma\sqrt{t}v} \phi(v) dv = A_0 e^{\mu t} \int_{\delta_1^*}^{\infty} \phi(v - \sigma\sqrt{t}) dv \\ &= A_0 e^{\mu t} \{1 - \Phi(\delta_1^* - \sigma\sqrt{t})\} = A_0 e^{\mu t} \Phi(-\delta_1^* + \sigma\sqrt{t}) \end{aligned} \quad (3.85)$$

よって, EL_I は (3.25) 式で与えられる.

状態 II の EL $D\xi_2^* \leq A_t \leq D\xi_1^*$ ならば, 追加融資は行われぬ. 状態 II の EL を EL_{II} とすると, (3.10) 式で $\Delta = 0$ としたうえで A_t の確率分布に応じて期待値を評価し,

$$\begin{aligned} EL_{II} \equiv E_0[L_T(0)1_{\{D\xi_2^* \leq A_t \leq D\xi_1^*\}}] &= D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1) \Pr[D\xi_2^* \leq A_t \leq D\xi_1^*] \\ &+ DE_0[\Phi(\tilde{d}(A_t))1_{\{D\xi_2^* \leq A_t \leq D\xi_1^*\}}] - e^{\mu\tau} E_0[A_t \Phi(\tilde{d}(A_t) - \sigma\sqrt{\tau})1_{\{D\xi_2^* \leq A_t \leq D\xi_1^*\}}] \end{aligned} \quad (3.86)$$

で与えられる. ただし, $\tilde{d}(A_t)$ は (3.65) 式で定義した. ここで, 標準正規分布に従う確率変数 v を用いて $\ln A_t$ を

$$\ln A_t = \ln A_0 - (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma\sqrt{t}v$$

と表現すると,

$$\tilde{d}(A_t) = d_0\sqrt{T/\tau} - v\sqrt{t/\tau}$$

となり,

$$E_0[\Phi(\tilde{d}(A_t))1_{\{D\xi_2^* \leq A_t \leq D\xi_1^*\}}] = \int_{\delta_2^*}^{\delta_1^*} \Phi(d_0\sqrt{T/\tau} - v\sqrt{t/\tau})\phi(v) dv$$

と展開できる. ここで, 相関 ρ の 2 次元標準正規分布の密度関数を $\phi_2(x, y; \rho)$, 分布関数を $\Phi_2(x, y; \rho)$ と表すと,

$$\Phi_2(x, y; \rho) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \phi_2(u, v; \rho) dv du = \int_{-\infty}^x \Phi\left(\frac{y - \rho u}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) \phi(u) du$$

と表現できるため, ρ を (3.29) 式で与えると,

$$E_0[\Phi(\tilde{d}(A_t))1_{\{D\xi_2^* \leq A_t \leq D\xi_1^*\}}] = \Phi_2(\delta_1^*, d_0; \rho) - \Phi_2(\delta_2^*, d_0; \rho) \quad (3.87)$$

となる. さらに,

$$\begin{aligned} E_0[A_t \Phi(\tilde{d}(A_t) - \sigma\sqrt{\tau})1_{\{D\xi_2^* \leq A_t \leq D\xi_1^*\}}] &= A_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)t} \int_{\delta_2^*}^{\delta_1^*} e^{\sigma\sqrt{t}v} \Phi(d_0\sqrt{T/\tau} - \sigma\sqrt{\tau} - v\sqrt{t/\tau}) \phi(v) dv \\ &= A_0 e^{\mu t} \int_{\delta_2^*}^{\delta_1^*} \Phi(d_0\sqrt{T/\tau} - \sigma\sqrt{\tau} - v\sqrt{t/\tau}) \phi(v - \sigma\sqrt{t}) dv \\ &= A_0 e^{\mu t} \{\Phi_2(\delta_1^* - \sigma\sqrt{t}, d_0 - \sigma\sqrt{T}; \rho) - \Phi_2(\delta_2^* - \sigma\sqrt{t}, d_0 - \sigma\sqrt{T}; \rho)\} \end{aligned} \quad (3.88)$$

となる. (3.86) 式に (3.26), (3.87), (3.88) 式を代入して (3.28) 式を得る.

状態 III の EL $\mu > r_M$ で $A_t < D\xi_2^*$ ならば，時点 t で追加融資が行われる．その状態 III の EL を EL_{III} とすると，(3.19) 式から次式を得る．

$$\begin{aligned} EL_{III} &\equiv E_0[L_T(\Delta_2^*)1_{\{A_t < D\xi_2^*\}}] \\ &= D\{\Phi(d_2^*) + e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1\} \Pr[A_t < D\xi_2^*] \\ &\quad - e^{\mu\tau} \Phi(d_2^* - \sigma\sqrt{\tau}) E_0[A_t 1_{\{A_t < D\xi_2^*\}}] \end{aligned} \quad (3.89)$$

ここで，(3.85) 式の導出と同様にして，

$$E_0[A_t 1_{\{A_t < D\xi_2^*\}}] = A_0 e^{\mu t} \Phi(\delta_2^* - \sigma\sqrt{t}) \quad (3.90)$$

が得られることから，(3.89) 式に (3.30)，(3.90) 式を代入して (3.31) 式を得る．

3.C 追加融資がない場合の初期時点でのストレス時期待損失

まず，ストレス状況の条件 $X_T = -\sqrt{T}\Phi^{-1}(\alpha)$ を具体的に考察する．満期での資産価値の対数値 $\ln A_T$ を，標準正規分布に従う確率変数 w を用いて表現すると，(3.2) 式より次式で与えられる．

$$\ln A_T = \ln A_0 + (\mu - \sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T}w \quad (3.91)$$

さらに (3.91) 式の w を互いに独立な標準正規分布に従う確率変数 x, y を用いて

$$w = \sqrt{R}x + \sqrt{1-R}y \quad (3.92)$$

と表現し，(3.37) 式と比較すると， $X_T = -\sqrt{T}\Phi^{-1}(\alpha)$ という条件は $x = -\Phi^{-1}(\alpha)$ と同値になっていることがわかる．

したがって，追加融資がない場合の初期時点でのストレス時期待損失 (3.38) 式は (3.93) 式で書き直すことができる．

$$SEL = D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1) + E_0[(D - A_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)T} e^{\sigma\sqrt{T}(-\sqrt{R}\Phi^{-1}(\alpha)+\sqrt{1-R}y)})^+] \quad (3.93)$$

ここで， d_S を (3.40) 式のように定義すると，

$$\begin{aligned} &E_0[(D - A_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)T} e^{\sigma\sqrt{T}(-\sqrt{R}\Phi^{-1}(\alpha)+\sqrt{1-R}y)})^+] \\ &= \int_{-\infty}^{d_S} (D - A_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)T} e^{\sigma\sqrt{T}(-\sqrt{R}\Phi^{-1}(\alpha)+\sqrt{1-R}y)}) \phi(y) dy \\ &= D\Phi(d_S) - A_0 e^{\mu T} e^{-\sigma\sqrt{T}\sqrt{R}\Phi^{-1}(\alpha)} e^{-R\sigma^2 T/2} \Phi(d_S - \sigma\sqrt{T}\sqrt{1-R}) \end{aligned} \quad (3.94)$$

と変形できる．(3.93) 式に (3.94) 式を代入すると，(3.39) 式が導出される．

3.D 追加融資を考慮した各状態でのストレス時期待損失

状態 I の SEL (3.44) 式を用いて，(3.47) 式を評価すると

$$\begin{aligned} SEL_I &= D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1) \Pr[A_t > D\xi_1^*] + \frac{e^{(r_M-r_L)\tau} - 1}{\xi_1^* - e^{-r_L\tau}} E_0[(A_t - D\xi_1^*)1_{\{A_t > D\xi_1^*\}}] \\ &\quad + \frac{1}{\xi_1^* - e^{-r_L\tau}} E_0[(A_t - D e^{-r_L\tau})(1 - e^{-d_1^*\sigma\sqrt{\tau}} e^{-\sigma\sqrt{RT}\Phi^{-1}(\alpha)} e^{-\sigma\sqrt{R}X_t} e^{\sigma\sqrt{1-R}Y_{T-t}})^+ 1_{\{A_t > D\xi_1^*\}}] \end{aligned} \quad (3.95)$$

となる .

(3.95) 式において ,

$$\begin{aligned} E_0[(A_t - D\xi_1^*)1_{\{A_t > D\xi_1^*\}}] &= E_0[A_t 1_{\{A_t > D\xi_1^*\}}] - D\xi_1^* \Pr[A_t > D\xi_1^*] \\ &= A_0 e^{\mu t} \Phi(-\delta_1^* + \sigma\sqrt{t}) - D\xi_1^* \Phi(-\delta_1^*) \end{aligned} \quad (3.96)$$

が成立する . また ,

$$\begin{aligned} &E_0[(A_t - D e^{-rL\tau})(1 - e^{-d_1^* \sigma \sqrt{\tau}} e^{-\sigma \sqrt{RT} \Phi^{-1}(\alpha)} e^{-\sigma \sqrt{R} X_t} e^{\sigma \sqrt{1-R} Y_{T-t}}) + 1_{\{A_t > D\xi_1^*\}}] \\ &= E_0[(A_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t} e^{\sigma(\sqrt{R} X_t + \sqrt{1-R} Y_t)} - D e^{-rL\tau})(1 - e^{-d_1^* \sigma \sqrt{\tau}} e^{-\sigma \sqrt{RT} \Phi^{-1}(\alpha)} e^{-\sigma \sqrt{R} X_t} e^{\sigma \sqrt{1-R} Y_{T-t}}) \\ &\quad \times 1_{\{\sqrt{R} X_t + \sqrt{1-R} Y_t > \delta_1^*\}} 1_{\{\sqrt{1-R} Y_{T-t} < d_1^* \sqrt{\tau} + \sqrt{R}(\sqrt{T} \Phi^{-1}(\alpha) + X_t)\}}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\frac{\delta_1^* - \sqrt{R}x}{\sqrt{1-R}}}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{d_1^* + \sqrt{RT/\tau} \Phi^{-1}(\alpha) + \sqrt{Rt/\tau}x}{\sqrt{1-R}}} (A_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t} e^{\sigma\sqrt{t}(\sqrt{R}x + \sqrt{1-R}y)} - D e^{-rL\tau}) \\ &\quad (1 - e^{-d_1^* \sigma \sqrt{\tau}} e^{-\sigma \sqrt{RT} \Phi^{-1}(\alpha)} e^{-\sigma \sqrt{R}tx} e^{\sigma \sqrt{(1-R)\tau}w}) \phi(w) \phi(y) \phi(x) dw dy dx \\ &= A_0 e^{\mu t} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{-\delta_1^* + \sqrt{R}x}{\sqrt{1-R}} + \sigma\sqrt{(1-R)t}\right) \\ &\quad \Phi\left(\frac{d_1^* + \sqrt{RT/\tau} \Phi^{-1}(\alpha) + \sqrt{Rt/\tau}x}{\sqrt{1-R}}\right) \phi(x - \sigma\sqrt{Rt}) dx \\ &\quad + A_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t} e^{\sigma^2(1-R)T/2} e^{-d_1^* \sigma \sqrt{\tau}} e^{-\sigma \sqrt{RT} \Phi^{-1}(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{-\delta_1^* + \sqrt{R}x}{\sqrt{1-R}} + \sigma\sqrt{(1-R)t}\right) \\ &\quad \Phi\left(\frac{d_1^* + \sqrt{RT/\tau} \Phi^{-1}(\alpha) + \sqrt{Rt/\tau}x}{\sqrt{1-R}} - \sigma\sqrt{(1-R)\tau}\right) \phi(x) dx \\ &\quad - D e^{-rL\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{-\delta_1^* + \sqrt{R}x}{\sqrt{1-R}}\right) \Phi\left(\frac{d_1^* + \sqrt{RT/\tau} \Phi^{-1}(\alpha) + \sqrt{Rt/\tau}x}{\sqrt{1-R}}\right) \phi(x) dx \\ &\quad + D e^{-rL\tau} e^{-d_1^* \sigma \sqrt{\tau}} e^{-\sigma \sqrt{RT} \Phi^{-1}(\alpha)} e^{\sigma^2(Rt + (1-R)\tau)/2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{-\delta_1^* + \sqrt{R}x}{\sqrt{1-R}}\right) \\ &\quad \Phi\left(\frac{d_1^* + \sqrt{RT/\tau} \Phi^{-1}(\alpha) + \sqrt{Rt/\tau}x}{\sqrt{1-R}} - \sigma\sqrt{(1-R)\tau}\right) \phi(x + \sigma\sqrt{Rt}) dx \end{aligned}$$

であり , ここで , 2次元正規分布関数に関する

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{a + \sqrt{R}x}{\sqrt{1-R}}\right) \Phi\left(\frac{b + \sqrt{Rt/\tau}x}{\sqrt{1-R}}\right) \phi(x) dx = \Phi_2\left(a, \frac{b\sqrt{\tau}}{\sqrt{(1-R)\tau + Rt}}; \frac{R\sqrt{t}}{\sqrt{(1-R)\tau + Rt}}\right)$$

の関係を用いて , (3.51) ~ (3.53) 式のように η, h_1^*, ρ^* を置くと ,

$$\begin{aligned} &E_0[(A_t - D e^{-rL\tau})(1 - e^{-d_1^* \sigma \sqrt{\tau}} e^{-\sigma \sqrt{RT} \Phi^{-1}(\alpha)} e^{-\sigma \sqrt{R} X_t} e^{\sigma \sqrt{1-R} Y_{T-t}}) + 1_{\{A_t > D\xi_1^*\}}] \\ &= A_0 e^{\mu t} \Phi_2(-\delta_1^* + \sigma\sqrt{t}, h_1^* + \sigma Rt/\sqrt{\eta}; \rho^*) - D e^{-rL\tau} \Phi_2(-\delta_1^*, h_1^*; \rho^*) \\ &\quad - A_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t} e^{\sigma^2(1-R)T/2 - d_1^* \sigma \sqrt{\tau} - \sigma \sqrt{RT} \Phi^{-1}(\alpha)} \Phi_2(-\delta_1^* + \sigma(1-R)\sqrt{t}, h_1^* - \sigma(1-R)\tau/\sqrt{\eta}; \rho^*) \\ &\quad + D e^{-rL\tau} e^{-d_1^* \sigma \sqrt{\tau} - \sigma \sqrt{RT} \Phi^{-1}(\alpha) + \sigma^2(Rt + (1-R)\tau)/2} \Phi_2(-\delta_1^* - \sigma R\sqrt{t}, h_1^* - \sigma\sqrt{\eta}; \rho^*) \end{aligned} \quad (3.97)$$

となる . (3.95) 式に (3.23) , (3.96) , (3.97) 式を代入すれば , (3.50) 式を導出できる .

状態 II の SEL (3.45) 式を用いて, (3.48) 式を評価すると,

$$\begin{aligned}
SEL_{II} &= D(e^{(r_{M0}-r_{L0})T} - 1) \Pr[D\xi_2^* \leq A_t \leq D\xi_1^*] \\
&\quad + E_0[(D - A_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)T} e^{\sigma\{-\sqrt{RT}\Phi^{-1}(\alpha)+\sqrt{1-R}(Y_t+Y_{T-t})\}}) + 1_{\{D\xi_2^* \leq A_t \leq D\xi_1^*\}}]
\end{aligned} \tag{3.98}$$

となる. ここで, (3.55) 式のように ρ_S を置くと,

$$\begin{aligned}
&E_0[(D - A_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)T} e^{\sigma\{-\sqrt{RT}\Phi^{-1}(\alpha)+\sqrt{1-R}(Y_t+Y_{T-t})\}}) + 1_{\{D\xi_2^* \leq A_t \leq D\xi_1^*\}}] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{d_S \sqrt{T} - y \sqrt{t}}{\sqrt{\tau}}} \int_{\frac{\delta_2^* - \sqrt{1-R}y}{\sqrt{R}}}^{\frac{\delta_1^* - \sqrt{1-R}y}{\sqrt{R}}} (D - A_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)T} e^{\sigma\{-\sqrt{RT}\Phi^{-1}(\alpha)+\sqrt{1-R}(\sqrt{t}y+\sqrt{\tau}w)\}}) \\
&\quad \times \phi(x)\phi(w)\phi(y) dx dw dy \\
&= D \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{d_S \sqrt{T} - y \sqrt{t}}{\sqrt{\tau}}\right) \left\{ \Phi\left(\frac{\delta_1^* - \sqrt{1-R}y}{\sqrt{R}}\right) - \Phi\left(\frac{\delta_2^* - \sqrt{1-R}y}{\sqrt{R}}\right) \right\} \phi(y) dy \\
&\quad - A_0 e^{(\mu-\sigma^2 R/2)T - \sigma \sqrt{RT} \Phi^{-1}(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{d_S \sqrt{T} - y \sqrt{t}}{\sqrt{\tau}} - \sigma \sqrt{(1-R)\tau}\right) \\
&\quad \times \left\{ \Phi\left(\frac{\delta_1^* - \sqrt{1-R}y}{\sqrt{R}}\right) - \Phi\left(\frac{\delta_2^* - \sqrt{1-R}y}{\sqrt{R}}\right) \right\} \phi(y - \sigma \sqrt{(1-R)t}) dy \\
&= D \{ \Phi_2(d_S, \delta_1^*; \rho_S) - \Phi_2(d_S, \delta_2^*; \rho_S) \} \\
&\quad - A_0 e^{(\mu-\sigma^2 R/2)T - \sigma \sqrt{RT} \Phi^{-1}(\alpha)} \{ \Phi_2(d_S - \sigma \sqrt{(1-R)T}, \delta_1^* - \sigma(1-R)\sqrt{t}; \rho_S) \\
&\quad \quad - \Phi_2(d_S - \sigma \sqrt{(1-R)T}, \delta_2^* - \sigma(1-R)\sqrt{t}; \rho_S) \}
\end{aligned} \tag{3.99}$$

となり, (3.56) 式のように σ_S を置くと, (3.26) 式を用いて (3.54) 式を導出できる.

状態 III の SEL 状態 I の SEL の導出と同様に, (3.96) 式に対応して

$$\begin{aligned}
E_0[(A_t - D\xi_2^*) 1_{\{A_t < D\xi_2^*\}}] &= E_0[A_t 1_{\{A_t < D\xi_2^*\}}] - D\xi_2^* \Pr[A_t < D\xi_2^*] \\
&= A_0 e^{\mu t} \Phi(\delta_2^* - \sigma \sqrt{t}) - D\xi_2^* \Phi(\delta_2^*)
\end{aligned} \tag{3.100}$$

を得る．また，(3.97) 式に対応して

$$\begin{aligned}
& E_0[(A_t - De^{-rL\tau})(1 - e^{-d_2^* \sigma \sqrt{\tau}} e^{-\sigma \sqrt{RT} \Phi^{-1}(\alpha)} e^{-\sigma \sqrt{R} X_t} e^{\sigma \sqrt{1-R} Y_{T-t}})^+ \mathbf{1}_{\{A_t < D\xi_2^*\}}] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{\delta_2^* - \sqrt{R}x}{\sqrt{1-R}}} \int_{-\infty}^{\frac{d_2^* + \sqrt{RT/\tau} \Phi^{-1}(\alpha) + \sqrt{Rt/\tau}x}{\sqrt{1-R}}} (A_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t} e^{\sigma \sqrt{t}(\sqrt{R}x + \sqrt{1-R}y)} - De^{-rL\tau}) \\
&\quad (1 - e^{-d_2^* \sigma \sqrt{\tau}} e^{-\sigma \sqrt{RT} \Phi^{-1}(\alpha)} e^{-\sigma \sqrt{R}x} e^{\sigma \sqrt{(1-R)\tau}w}) \phi(w) \phi(y) \phi(x) dw dy dx \\
&= A_0 e^{\mu t} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \left(\frac{\delta_2^* - \sqrt{R}x}{\sqrt{1-R}} - \sigma \sqrt{(1-R)t} \right) \\
&\quad \times \Phi \left(\frac{d_2^* + \sqrt{RT/\tau} \Phi^{-1}(\alpha) + \sqrt{Rt/\tau}x}{\sqrt{1-R}} \right) \phi(x - \sigma \sqrt{Rt}) dx \\
&- A_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t} e^{\sigma^2(1-R)T/2 - d_2^* \sigma \sqrt{\tau} - \sigma \sqrt{RT} \Phi^{-1}(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \left(\frac{\delta_2^* - \sqrt{R}x}{\sqrt{1-R}} - \sigma \sqrt{(1-R)t} \right) \\
&\quad \times \Phi \left(\frac{d_2^* + \sqrt{RT/\tau} \Phi^{-1}(\alpha) + \sqrt{Rt/\tau}x}{\sqrt{1-R}} - \sigma \sqrt{(1-R)\tau} \right) \phi(x) dx \\
&- De^{-rL\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \left(\frac{\delta_2^* - \sqrt{R}x}{\sqrt{1-R}} \right) \Phi \left(\frac{d_2^* + \sqrt{RT/\tau} \Phi^{-1}(\alpha) + \sqrt{Rt/\tau}x}{\sqrt{1-R}} \right) \phi(x) dx \\
&+ De^{-rL\tau} e^{-d_2^* \sigma \sqrt{\tau} - \sigma \sqrt{RT} \Phi^{-1}(\alpha) + \sigma^2(Rt + (1-R)\tau)/2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \left(\frac{\delta_2^* - \sqrt{R}x}{\sqrt{1-R}} \right) \\
&\quad \times \Phi \left(\frac{d_2^* + \sqrt{RT/\tau} \Phi^{-1}(\alpha) + \sqrt{Rt/\tau}x}{\sqrt{1-R}} - \sigma \sqrt{(1-R)\tau} \right) \phi(x + \sigma \sqrt{Rt}) dx
\end{aligned}$$

を得る．ここで，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi \left(\frac{a - \sqrt{R}x}{\sqrt{1-R}} \right) \Phi \left(\frac{b + \sqrt{Rt/\tau}x}{\sqrt{1-R}} \right) \phi(x) dx = \Phi_2 \left(a, \frac{b\sqrt{\tau}}{\sqrt{(1-R)\tau + Rt}}; \frac{-R\sqrt{t}}{\sqrt{(1-R)\tau + Rt}} \right)$$

の関係式を用いて，(3.51) ~ (3.53) 式のように η , h_2^* , ρ^* を置くと，

$$\begin{aligned}
& E_0[(A_t - De^{-rL\tau})(1 - e^{-d_2^* \sigma \sqrt{\tau}} e^{-\sigma \sqrt{RT} \Phi^{-1}(\alpha)} e^{-\sigma \sqrt{R} X_t} e^{\sigma \sqrt{1-R} Y_{T-t}})^+ \mathbf{1}_{\{A_t < D\xi_2^*\}}] \\
&= A_0 e^{\mu t} \{ \Phi_2(\delta_2^* - \sigma \sqrt{t}, h_2^* + \sigma Rt/\sqrt{\eta}; -\rho^*) \\
&\quad - e^{-\sigma h_2^* \sqrt{\eta} - \sigma^2 t/2 + \sigma^2(1-R)T/2} \Phi_2(\delta_2^* - \sigma(1-R)\sqrt{t}, h_2^* - \sigma(1-R)\tau/\sqrt{\eta}; -\rho^*) \} \\
&\quad - De^{-rL\tau} \{ \Phi_2(\delta_2^*, h_2^*; -\rho^*) - e^{-\sigma h_2^* \sqrt{\eta} + \sigma^2 \eta/2} \Phi_2(\delta_2^* + \sigma R\sqrt{t}, h_2^* - \sigma \sqrt{\eta}; -\rho^*) \}
\end{aligned} \tag{3.101}$$

を得ることから，(3.30)，(3.100)，(3.101) 式から (3.57) 式を導出できる．

第4章 担保付貸出の損失分布モーメント評価

前章では、1 期間構造型モデルで期中で 1 回追加融資が行われることを想定した場合の期待損失や VaR を導出した。ここでは信用リスク把握に際してデフォルト確率に注目するだけでなく、エクスポージャーや回収率の動学的関係を捉えて、期待損失やより詳細な損失の分布を分析することが重要であることが示された。ただし、こうした 1 期間構造型モデルでは期中で突然デフォルトするという事象を捉えることができない。そこで、本章では瞬間的なデフォルト確率を示すデフォルト強度ないしハザード率を確率過程で表現することにより期中でもデフォルトするという事象を捉える。具体的には担保付貸出を考え、デフォルト強度と担保価値との変動間に負の相関がある場合を想定して、担保付貸出の期待損失や損失分布の高次モーメントを解析的に導出する。導出方法としては以下の 2 つのモデルで評価を行う。

1 つ目のモデルは山下・吉羽 [2010] で示されたモデルである。デフォルト強度には非負性を保つ Cox-Ingersoll-Ross 型の平方根過程を想定し、担保価値の瞬間的な収益率はデフォルト強度と負の相関を持つと想定する。この設定のもとで、担保付貸出の期待損失の被積分項は Duffie, Pan and Singleton [2000] で示された拡張アフィン形式に帰着し、解析解が得られることを示す。また、得られた解析解から、担保による期待回収額は、相関の影響を考慮した生存確率を測度として期待担保価値を満期まで 1 階積分することで評価されることを示す。

2 つ目のモデルは山下・吉羽 [2011] で示されたモデルである。デフォルト強度は、Ornstein-Uhlenbeck 過程に従う潜在変数の 2 次関数で表現されるとする 2 次ガウス過程でモデル化し、デフォルト強度の非負性を保つ。そのうえで、デフォルト強度が担保価値との負の相関を持つという条件を満たすようにモデル化して、担保付貸出の期待損失を解析的に評価する。得られた解析解から、担保による期待回収額は、山下・吉羽 [2010] のモデルと同様に相関の影響を考慮して測度変換された生存確率を用いて期待担保価値を満期まで 1 階積分することで評価されることを示す。

4.1 はじめに

景気後退期にはデフォルト率が上昇するとともに担保資産価値が下落するため、デフォルト率と回収率に負の相関がみられるという実証分析がある（例えば、Altman *et al.* [2005]）。こうした分析結果を基にバーゼル II の先進的内部格付けアプローチでは、回収率の自行推計にあたり、景気後退期を考慮した回収率を推定するように求めている（Basel Committee on Banking Supervision [2005a]）。近年の金融危機の中でも、企業の信用力の低下（デフォルト率の上昇）とともに担保資産価値の低下が進み、損失の悪化が進むという問題に注目が集まっている。こうした点を踏まえ、本章では瞬間的なデフォルト率を表すデフォルト強度の確率過程と担保価値過程に負の相関がある場合の期待損失を解析的に評価する。

信用リスクの確率的なモデル化では、2 つの大きなアプローチがある。1 つは企業の資産負債構造を基にデフォルト確率を定める構造型モデルであり、もう 1 つは企業の瞬間的なデフォ

ルトを外生的なデフォルト強度で表現するデフォルト強度モデル（誘導型モデル，ハザード率過程モデル）である．

構造型モデルでは，企業の資産負債比率に基づき，負債を所与と仮定する一方で資産価値を幾何ブラウン運動に従って変動すると仮定することによりデフォルト確率を捉えることが多い．ここで，負債はデフォルトを決める資産価値の閾値を定めていることになる．担保付貸出を考えると，企業資産価値の変動に加え，企業資産価値と正の相関を持つ担保資産価値の変動を考慮することでデフォルトと回収に負の相関がある担保付貸出の期待損失を評価することができる．そうしたモデルの代表的な研究は Pykhtin [2003] であるが，Pykhtin [2003] のモデルは 1 期間の構造型モデルになっている．1 期間の構造型モデルは，デフォルトが特定の満期にしか起こらないと仮定しており非現実的である．

構造型モデルの中には，特定の満期でのデフォルトを考えるのではなく，資産価値が負債を下回った最初の時点デフォルトとする初到達型のモデルもあるが（Black and Cox [1976] など），初到達型のデフォルトのモデル化では，資産が負債を大きく上回っているときに短期的にはデフォルトがほとんど起こらないことになってしまい，市場で観測される短期の信用スプレッドを説明できないという問題を抱えている．こうした問題に対しては資産価格やデフォルト閾値などの情報の不確実性を導入することにより構造型モデルの中で短期の信用スプレッドを説明する手法もある（Duffie and Lando [2001] など）．Chen, Collin-Dufresne and Goldstein [2009] では，過去のデータに基づきモデルから算出した理論信用スプレッドと市場観察される信用スプレッドとの大きな乖離を「信用スプレッド・パズル」と呼び，初到達型のモデルを用いてその解決を試みている．そこでは「信用スプレッド・パズル」の要因の 1 つとして，デフォルト率と回収率の負の相関の可能性を指摘している．

本章では，デフォルト事象については，こうした内生的な構造型モデルで考えるのではなく，外生的なデフォルト強度過程でモデル化する一方で，デフォルト強度と担保資産変動に負の相関があるという設定のもとで期待損失や損失分布のモーメントについて解析的な評価を考える．

デフォルト強度モデルでは，デフォルトの確率過程をデフォルト強度で直接的に記述し，デフォルトは満期までいつでも生じうることになる．一方で，回収率については一定とみなすことが多い（Duffie [2005] を参照）．少し拡張した研究としては Bakshi, Madan and Zhang [2006] があり，回収率がデフォルト強度の確定的な関数として与えられる場合を検討している．また，Guo, Jarrow and Zeng [2009] はデフォルト後の回収キャッシュフローの確率過程を考察している．Chen and Joslin [2009] は，彼らの示した一般的なモデルが適用できる事例の 1 つとして，回収のリスクを取り上げ，無リスク金利と回収率・デフォルト率の相関に注目して，債券価格に対する具体的なモデルを提示している．そこでは，デフォルト強度を含む 2 つの状態変数を導入し，無リスク金利についてはこれらの状態変数の組合せでデフォルト強度との負の相関を表現する一方で，回収率については Bakshi, Madan and Zhang [2006] と同様にデフォルト強度の確定的な関数としている．本章では，回収率とデフォルト強度の負の相関に注目し，担保価値（回収資産価値）の確率過程とデフォルト強度の拡散過程との間には負の相関を持つモデルを構築し，景気を通じた回収率とデフォルト率の負の相関関係を表現する．

上述のようなモデルはこれまでほとんど考えられていないが，Kijima and Miyake [2004] は同じような問題意識に沿って，不動産担保付貸出の価値評価を行っている．ここでは，リスク中立測度下でデフォルト強度と短期金利（瞬間スポット金利）に OU（Ornstein-Uhlenbeck）過程を仮定し，解析的に不動産担保付貸出の価値を算出している．デフォルト強度は瞬間的なデフォルト率を意味するため負の値はとりえないが，デフォルト強度を OU 過程で表現すると負

のデフォルト強度が生じうる。特に、デフォルト確率（デフォルト強度）が小さい企業への貸出を分析する場合、この理論的な問題は無視できなくなる。

本章では、Kijima and Miyake [2004] と同様に、担保付貸出の評価にあたり、(1) デフォルト事象をデフォルト強度過程で捉え、(2) デフォルト強度と担保価値の負の相関を考慮し、(3) 損失の期待値ならびに n 次モーメントを解析的に評価する。さらに本章では (4) デフォルト強度と担保価値の非負性を保つようにモデル化する。具体的なモデルとしては、(a) デフォルト強度と担保価値の対数値が Duffie, Pan and Singleton [2000] で紹介されている 2次元のアフィン拡散過程に従うモデルと、(b) デフォルト強度の潜在変数が OU 過程に従っていると、デフォルト強度はその 2 次関数で表現されるとする 2 次ガウス過程を用いたモデルの 2 種類を提案する。

アフィン拡散過程のモデルでは、デフォルト強度は Cox, Ingersoll and Ross [1985] で用いられた平方根過程（CIR 過程）¹に従うとして評価する。期待損失を考える際、生存確率については「基本アフィン形式」、期待回収額については「拡張アフィン形式」に帰着して評価を行う。基本アフィン形式や拡張アフィン形式では、モデルの係数を規定するリッカチ（Riccati）型常微分方程式が導出されるが、この常微分方程式は必ずしも解析解を持つとは限らない²。本章のモデルの場合は、導出されるリッカチ型常微分方程式が解析解を持つことを示す³。さらに、解析的に評価された期待回収額の被積分項を用いて、評価対象の期待回収額が相関の影響を考慮した生存確率を測度として期待担保価値を時間積分したもので評価できるという結果を導出する。

2 次ガウス過程のモデルでは、アフィン拡散過程のモデルと同様に、評価すべき担保付貸出の期待損失は、生存確率と期待回収額から計算される。ある確率過程に従うデフォルト強度と生存確率の数学的な関係は、その確率過程に従う短期金利と割引債価格の関係と同じである。ガウス過程の一種である OU 過程の 2 次関数に短期金利が従うと想定して割引債価格を評価するモデルは、2 次ガウス・モデルと呼ばれ、アフィン・モデルと並んで多くの研究が進められてきている（例えば Ahn, Dittmar and Gallant [2002] を参照）。Pelsser [1997] は、中心回帰水準を持たない OU 過程の 2 次関数に短期金利が従うと想定し、割引債価格を積分形で導出した。これに対し、Kijima, Tanaka and Wong [2009] ではその積分形の閉じた式を与えている。生存確率については、こうした結果を援用して具体的な計算式を導出する。期待回収額については、アフィン拡散過程のモデルと同様に測度変換された生存確率を用いて解析的に評価できることを示す。

本章で扱う期待損失は、実確率での期待損失であるが、リスク中立確率のもとで期待損失を評価することは貸出債権の価値評価に相当する。Duffie and Liu [2001] は無リスク短期金利とデフォルト強度に相当する信用スプレッドをとともに 2 次ガウス過程でモデル化して評価を行っている。その際、無リスク金利と信用スプレッドの非負性ととも両者の間の負の相関に配慮している。ここでは、回収率については固定で考えられているが、本章のアプローチは、回収率について担保価値を通じて確率的と考えており、景気と連動し、デフォルト強度と負の相関を持つようなものを想定している。

本章の構成は以下のとおりである。まず、4.2 節では、デフォルト強度を用いた期待損失の

¹Cox, Ingersoll and Ross [1985] は、短期金利に平方根過程を仮定することにより割引債価格を解析的に導出した。このことから、平方根過程は CIR 型の確率過程と呼ばれることがある。

²Chen and Joslin [2009] は、拡張アフィン形式をさらに一般化したモデルを提示しており、Duffie, Pan and Singleton [2000] のモデルと同様に係数を規定するリッカチ型常微分方程式を導出しているが、その方程式に必ずしも解析解があるとは限らない点も同様である。

³Duffie, Pan and Singleton [2000] では基本アフィン形式から導かれるリッカチ型常微分方程式が解析解を持つ例をいくつか紹介しているが、本章で考察するタイプのモデルは含まれていない。

評価法を整理する．4.3節では，デフォルト強度と対数担保価値を2次元の状態変数と考えたとき，状態変数がアフィン拡散過程に従うようなモデル化を行う．評価対象の期待損失の各要素を基本アフィン形式，拡張アフィン形式で評価し，得られる常微分方程式が解析解を持つことを示す．また，これらの解析解を用いて，期待回収額が測度変換された生存確率で期待担保価値を時間積分したものと評価できることを導出する．さらに，測度変換はデフォルト強度変動と担保価値変動の瞬間的な相関を取り除く測度変換として与えられることを示す．また，より一般に損失の n 次モーメントについても同様の解析解と測度変換を導出する．得られた損失の期待値および標準偏差の解析解を数値計算で求め，損失の期待値や標準偏差が負の相関の程度やデフォルト強度の回帰速度パラメータでどのように変化するか感応度分析を行う．4.4節では，デフォルト強度の潜在変数がOU過程に従っているとし，デフォルト強度はその2次関数で表現する．対数担保価値はデフォルト強度の潜在変数と負に相関するドリフト付きのブラウン運動で表現する．こうしたモデル化のもと，期待損失を構成する1つ目の要素である生存確率を評価し，期待損失を構成する2つ目の要素である期待回収額を評価する．瞬間的な期待回収額は，4.3節のモデルと同様，測度変換を用いて解析的に評価できることを示したうえで，期待回収額は測度変換された生存確率を確率測度として期待担保価値を満期まで1階積分することで評価されることを示す．さらに，期待損失の評価式を導出し，具体的な数値例を示したうえで，4.4節のモデルは基本的にデフォルト強度と担保価値の負の相関を考慮したモデルになっていることを確認する．4.5節では，本章をまとめる．4.A節では平方根過程での生存確率を基本アフィン形式として導出するとともに，アフィン・モデルや2次ガウス・モデルでよく現れるリッカチ型常微分方程式の解を与える．4.B節では拡張アフィン形式による期待損失と損失の n 次モーメントの評価を行う．4.C節では，測度変換に伴うブラウン運動の変換式を証明する．

4.2 担保付貸出の損失分布のモーメント評価

銀行がある企業に満期 T で額面 D の担保付貸出を行うことを考える．担保価値は A_t で表現され確率的に変動すると仮定する．貸出先の企業が満期 T までにデフォルトした際には，その時点の担保資産の一定割合 δ のみが貸出の回収に充てられると仮定する．貸出先企業のデフォルト時刻を τ と表記すると，銀行の損失は

$$L_\tau = D - \delta A_\tau \quad (4.1)$$

と表現される⁴．ここで δ は担保の処分の際に価値が減価する割合を示す定数である．具体的なモデルとして，確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上で⁵，デフォルト強度 λ_t ，担保価値 A_t が相関のある拡散過程で表現されているとする．この拡散過程としては4.3節ではアフィン拡散過程を想定し，4.4節では2次ガウス過程を想定する．

⁴満期前にデフォルトすると，借り手は期限の利益を喪失し，貸し手は借り手に額面 D の返済をその時点で請求できるが，実際には担保資産でのみしか回収できないと考えている．この損失の定義では，デフォルト時に担保価値が大きくなったときには100%超の回収率となることもありうるとしている．実際に回収率が100%を超えることは生じるため，この仮定は不自然なものではない．また，担保資産の減価割合 δ 等のパラメータを適切に設定すれば，100%を超える可能性は限定的になる．

⁵ここで，確率測度 P は，リスク中立確率ではなく，観測確率を想定している．これは，現実の担保付貸出を考えたとき，その企業に流動性の高い社債や信用派生商品が取引されているケースが多いとはいえず，リスク中立確率でデフォルト強度を直接モデル化することは困難と考えられるためである．また，担保資産についても必ずしも流動性が高いとは考えにくいことから，観測確率でパラメータを特定化することを想定している．

本章では、こうした設定で (4.1) 式で表される銀行の損失の期待値や n 次モーメントを解析的に評価していく。時点 t でデフォルトしているか否かの増大情報系を (\mathcal{H}_t) で表現し、デフォルト強度 λ_t 、担保価値 A_t の確率過程を定めるブラウン運動 W_t^λ, W_t^A から生成される増大情報系は、 $\mathcal{F}_t = \sigma(\{W_s^\lambda, W_s^A : s \leq t\})$ として、 (\mathcal{F}_t) で表す。さらに、別の増大情報系 (\mathcal{G}_t) を

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t \quad (4.2)$$

で定義する。デフォルト時刻 τ は増大情報系 \mathcal{F}_t に関して 2 重確率的な確率時刻であり、デフォルト強度過程をハザード率過程 (λ_t) として定義できると仮定する⁶。

\mathcal{F}_t を所与としたときの期待値を時刻 t での期待値として

$$E_t[\cdot] = E[\cdot | \mathcal{F}_t] \quad (4.3)$$

で定義し、固定金利 r で割り引くとすると⁷、 $\int_t^T |L_s \lambda_s| e^{-\int_t^s (r+\lambda_u) du} ds$ の可積分性のもとで、時点 t での銀行の割引期待損失は (4.4) 式で評価される。

$$\begin{aligned} E[e^{-r(\tau-t)} L_\tau 1_{\{t < \tau \leq T\}} | \mathcal{G}_t] &= DE[e^{-r(\tau-t)} 1_{\{t < \tau \leq T\}} | \mathcal{G}_t] - \delta E[e^{-r(\tau-t)} A_\tau 1_{\{t < \tau \leq T\}} | \mathcal{G}_t] \\ &= 1_{\{t < \tau\}} D \int_t^T E_t[e^{-\int_t^s (r+\lambda_u) du} \lambda_s] ds - 1_{\{t < \tau\}} \delta \int_t^T E_t[e^{-\int_t^s (r+\lambda_u) du} \lambda_s A_s] ds \end{aligned} \quad (4.4)$$

で評価される。ここで、(4.4) 式右辺第 1 項の

$$\int_t^T E_t[e^{-\int_t^s (r+\lambda_u) du} \lambda_s] ds \quad (4.5)$$

は金利で割り引かれたデフォルト確率（割引デフォルト確率）を表す。ここで、時点 t からみた時点 T までの生存確率を

$$\Gamma(t, T) = E_t[\exp\left(-\int_t^T \lambda_s ds\right)] \quad (4.6)$$

とすると、(4.5) 式の割引デフォルト確率に含まれる期待値は、

$$E_t[e^{-\int_t^s (r+\lambda_u) du} \lambda_s] = -e^{-r(s-t)} \frac{\partial \Gamma(t, s)}{\partial s} \quad (4.7)$$

となるので、(4.5) 式の割引デフォルト確率は

$$\int_t^T E_t[e^{-\int_t^s (r+\lambda_u) du} \lambda_s] ds = -\int_t^T e^{-r(s-t)} d_s \Gamma(t, s) \quad (4.8)$$

と生存確率を測度とした 1 階のスティルチェス積分で表現される。すなわち、(4.4) 式右辺第 1 項の割引デフォルト確率の評価は (4.6) 式の生存確率の評価に帰着する。

一方、(4.4) 式右辺第 2 項の

$$\int_t^T E_t[e^{-\int_t^s (r+\lambda_u) du} \lambda_s A_s] ds \quad (4.9)$$

⁶ 重確率的な確率時刻の定義・条件および増大情報系の区別については、例えば McNeil, Frey and Embrechts [2005] の第 9 章を参照。

⁷ 観測確率のもとでの割引を考えるため、割引金利 r はデフォルト強度や担保資産価値の変動に起因するリスクプレミアムを加味した金利を想定している。ただし、リスクプレミアムを考慮した金利が固定金利で表現できるかどうかは別途考察すべき問題である。実際のキャリブレーションでは、貸出先企業と同格付けの企業の平均貸出金利から銀行のマージンや営業コストを差し引いた値で代用することが考えられる。なお、リスク中立確率のもとで考えるのであれば、 r を無リスク金利と考えればよい。

は時点 t から時点 T までに回収される期待回収担保価値を表している．期待損失の評価は，(4.6) 式の生存確率の評価と (4.9) 式の期待回収担保価値の評価に帰着することがわかる．期待損失を評価する際には，この 2 つの要素をそれぞれ評価する．

貸出の損失評価を行う際，まず大切なのは (4.4) 式の期待損失の評価であるが，そのばらつきとして，標準偏差や分散，さらに，高次のモーメントの評価を行えると損失分布の形状をより精緻に捉えることができる．損失分布の m 次モーメントは，2 項展開により，

$$E[(e^{-r(\tau-t)}L_\tau)^m 1_{\{t < \tau \leq T\}} | \mathcal{G}_t] = \sum_{n=0}^m m C_n D^{m-n} (-\delta)^n E[e^{-mr(\tau-t)} A_\tau^n 1_{\{t < \tau \leq T\}} | \mathcal{G}_t] \quad (4.10)$$

と展開できる．(4.10) 式右辺の期待値はさらに

$$E[e^{-mr(\tau-t)} A_\tau^n 1_{\{t < \tau \leq T\}} | \mathcal{G}_t] = 1_{\{t < \tau\}} \int_t^T e^{-mr(s-t)} E_t[e^{-\int_t^s \lambda_u du} \lambda_s A_s^n] ds \quad (4.11)$$

となる．したがって，損失分布の m 次モーメントの評価は，

$$\zeta^{(n)}(t, s) \equiv E_t[e^{-\int_t^s \lambda_u du} \lambda_s A_s^n] \quad (4.12)$$

として， $\zeta^{(n)}(t, s)$ の評価に帰着する． $\zeta^{(n)}(t, s)$ は満期 s までの回収の n 次モーメントと解釈できる．(4.9) 式の期待回収担保価値の被積分項は $\zeta^{(1)}(t, s)$ で表すことができる．

4.3 アフィン過程でのモデル化

本節では，アフィン過程を用いてデフォルト強度と対数担保価値をモデル化し，生存確率，期待回収担保価値を評価したうえで，期待損失の解析的な式を導出する．さらに，より一般に損失の m 次モーメントの解析的な式を導出し，期待損失と損失の標準偏差について数値例を示す．

4.3.1 デフォルト強度と担保価値の確率過程

本節では，対象企業のデフォルトを表現するデフォルト強度の確率過程が，

$$d\lambda_t = \kappa(\bar{\lambda} - \lambda_t)dt + \sigma_\lambda \sqrt{\lambda_t} dW_t^\lambda \quad (4.13)$$

という平方根過程で表されるものとする．ここで $\kappa, \bar{\lambda}, \sigma_\lambda$ は正の実数で表現されるパラメータであり， $\bar{\lambda}$ はデフォルト強度の中心回帰水準， κ は中心回帰の速度を表すパラメータである．デフォルト強度の瞬間的なボラティリティは $\sigma_\lambda \sqrt{\lambda_t}$ で表現される．(4.13) 式の平方根過程で表されるデフォルト強度は初期値 λ_0 が正であれば非負性を保つことが知られている．また， $2\kappa\bar{\lambda} \geq \sigma_\lambda^2$ というパラメータ条件を満たせばデフォルト強度 λ_t は 0 にはならず常に正となる (Cox, Ingersoll and Ross [1985] を参照)．

担保資産価値の確率過程は⁸，

$$dA_t = \mu_A A_t dt + \sigma_A A_t \sqrt{\lambda_t} dW_t^A \quad (4.14)$$

⁸(4.14) 式の確率過程から担保価値 A_t は非負性を保つことがわかる．また，(4.14) 式の確率過程と幾何ブラウン運動 $dA_t = \mu_A A_t dt + \sigma_A A_t dW_t^A$ との違いは拡散項から生じる瞬間的な分散にある．幾何ブラウン運動では瞬間的な分散が σ_A^2 と定数であるのに対し，(4.14) 式の瞬間的な分散は定数ではなく，デフォルト強度に比例して $\sigma_A^2 \lambda_t$ で与えられると想定している．すなわち，デフォルト強度が大きいとき，担保資産価値は変動しやすいということを表現している．

という確率過程に従っていると仮定する．ここで (4.13) 式と (4.14) 式の確率過程に含まれるブラウン運動は

$$\text{cov}(dW^A, dW^\lambda) = \rho dt \quad (4.15)$$

という共分散を持つものと仮定する．現実には，景気後退期にはデフォルト強度が上昇するとともに担保価値が下落しやすいことから，相関 ρ は負になると考えられるが，より一般的には正の値もとりにうとする．

2次元の状態変数ベクトル $X_t = (\lambda_t, \ln A_t)^\top$ を導入すると，(4.13) ~ (4.15) 式より， X_t はアフィン拡散過程に従うことがわかる．(4.14) 式は伊藤の公式により，

$$d \ln A_t = (\mu_A - \sigma_A^2 \lambda_t / 2) dt + \sigma_A \sqrt{\lambda_t} dW_t^A \quad (4.16)$$

と変形でき，(4.15) 式の相関を持たせるために，(4.13), (4.14) 式のブラウン運動を独立なブラウン運動 $W_{1,t}, W_{2,t}$ を用いて

$$W_t^A = W_{1,t}, \quad W_t^\lambda = \rho W_{1,t} + \sqrt{1 - \rho^2} W_{2,t} \quad (4.17)$$

と表すと，

$$dX_t = d \begin{pmatrix} \lambda_t \\ \ln A_t \end{pmatrix} = \mu(X_t) dt + \sigma(X_t) d \begin{pmatrix} W_{1,t} \\ W_{2,t} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

ただし，

$$\mu(X_t) = \begin{pmatrix} \kappa \bar{\lambda} \\ \mu_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\kappa & 0 \\ -\sigma_A^2 / 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_t \\ \ln A_t \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

$$\sigma(X_t) = \begin{pmatrix} \sigma_\lambda \sqrt{\lambda_t} & 0 \\ \sigma_A \rho \sqrt{\lambda_t} & \sigma_A \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{\lambda_t} \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

で与えられる．(4.19) 式よりドリフトは状態変数ベクトル X_t のアフィン形式で表現できている．また，(4.20) 式より瞬間的な分散共分散行列 $\sigma(X_t) \sigma(X_t)^\top$ を求めると

$$\sigma(X_t) \sigma(X_t)^\top = \begin{pmatrix} \sigma_\lambda^2 \lambda_t & \rho \sigma_A \sigma_\lambda \lambda_t \\ \rho \sigma_A \sigma_\lambda \lambda_t & \sigma_A^2 \lambda_t \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

となり，各要素が状態変数ベクトル X_t の線形関数で表現できていることがわかる．以上より，2次元の状態変数ベクトル $X_t = (\lambda_t, \ln A_t)^\top$ はアフィン拡散過程に従っていることが確認できる．

4.3.2 生存確率の評価

ここでは，4.3.1 節の (4.13) 式で定義したデフォルト強度のもとで (4.6) 式の生存確率を解析的に評価する．

(4.13) 式で表現されるデフォルト強度の確率過程（平方根過程）は1次元のアフィン拡散過程の1つであり，生存確率 $\Gamma(T - t | \lambda_t)$ は Duffie, Pan and Singleton [2000] の基本アフィン形式を用いて

$$\Gamma(T - t | \lambda_t) = \left[\frac{2\gamma_\lambda e^{(\gamma_\lambda + \kappa)(T-t)/2}}{(\gamma_\lambda + \kappa)e^{\gamma_\lambda(T-t)} + \gamma_\lambda - \kappa} \right]^{\frac{2\kappa\bar{\lambda}}{\sigma_\lambda^2}} \exp\left(\frac{2(1 - e^{\gamma_\lambda(T-t)})\lambda_t}{(\gamma_\lambda + \kappa)e^{\gamma_\lambda(T-t)} + \gamma_\lambda - \kappa}\right) \quad (4.22)$$

と評価できる．ただし，

$$\gamma_\lambda = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma_\lambda^2} \quad (4.23)$$

である．生存確率の基本アフィン形式への帰着と，基本アフィン形式が満たす常微分方程式の解については4.A.1節を参照．なお，(4.22)式の生存確率はCox, Ingersoll and Ross [1985]の割引債価格と同じ形になっており，生存確率としては例えばNakagawa [1999]で示されている．

4.3.3 期待回収担保価値の評価と期待損失

ここでは，4.3.1節で定義したデフォルト強度と担保価値の確率過程のもとで，(4.9)式の期待回収担保価値を評価する．特に，その被積分項は(4.12)式での $\zeta^{(1)}(t, s)$ に相当する．この評価にあたっては，2次元の状態ベクトル $X_t = (\lambda_t, \ln A_t)^\top$ を導入し，期待値評価する．状態ベクトル X_t は(4.13)～(4.15)式の確率過程の設定からアフィン拡散過程に従う⁹．一方， $\zeta^{(1)}(t, s)$ は

$$\zeta^{(1)}(t, s) = E_t[\exp\left(-\int_t^s \lambda_u du\right) e^{\ln A_s} \lambda_s] \quad (4.24)$$

と変形でき， X_t がアフィン拡散過程に従うことから，Duffie, Pan and Singleton [2000]の拡張アフィン形式で評価できることがわかる．すなわち，この解は

$$\zeta^{(1)}(t, s) = (C(t) + B(t) \cdot X_t) \exp(\alpha(t) + \beta(t) \cdot X_t) \quad (4.25)$$

と評価され，係数 $C(t)$ ， $B(t)$ ， $\alpha(t)$ ， $\beta(t)$ はリッカチ型常微分方程式に従うことがわかる．導出されるリッカチ型常微分方程式は，一般の拡張アフィン形式では必ずしも解析解を持つとは限らないが，この場合は，

$$\tilde{\kappa} = \kappa - \rho\sigma_\lambda\sigma_A, \quad \gamma = \sqrt{\tilde{\kappa}^2 + 2\sigma_\lambda^2} \quad (4.26)$$

と置いて，

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \mu_A(s-t) + \frac{2\kappa\bar{\lambda}}{\sigma_\lambda^2} \ln \frac{2\gamma e^{\frac{\gamma+\tilde{\kappa}}{2}(s-t)}}{(\gamma+\tilde{\kappa})e^{\gamma(s-t)} + (\gamma-\tilde{\kappa})}, \\ \beta(t) &\equiv (\beta_1(t), \beta_2(t))^\top, \quad \beta_1(t) = \frac{2(1-e^{\gamma(s-t)})}{(\gamma+\tilde{\kappa})e^{\gamma(s-t)} + (\gamma-\tilde{\kappa})}, \quad \beta_2(t) = 1, \\ B(t) &\equiv (B_1(t), B_2(t))^\top, \quad B_1(t) = \frac{4\gamma^2 e^{\gamma(s-t)}}{\{(\gamma+\tilde{\kappa})e^{\gamma(s-t)} + (\gamma-\tilde{\kappa})\}^2}, \quad B_2(t) = 0, \\ C(t) &= \frac{2\kappa\bar{\lambda}(e^{\gamma(s-t)} - 1)}{(\gamma+\tilde{\kappa})e^{\gamma(s-t)} + (\gamma-\tilde{\kappa})} \end{aligned} \quad (4.27)$$

という解析解を持つ．ここで，

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(s-t|\lambda_t) &\equiv \exp(\tilde{\alpha}(s-t) + \tilde{\beta}(s-t)\lambda_t) \\ &= \left[\frac{2\gamma e^{(\gamma+\tilde{\kappa})(s-t)/2}}{(\gamma+\tilde{\kappa})e^{\gamma(s-t)} + (\gamma-\tilde{\kappa})} \right]^{\frac{2\kappa\bar{\lambda}}{\sigma_\lambda^2}} \exp\left\{ \frac{2(1-e^{\gamma(s-t)})\lambda_t}{(\gamma+\tilde{\kappa})e^{\gamma(s-t)} + (\gamma-\tilde{\kappa})} \right\} \end{aligned} \quad (4.28)$$

ただし，

$$\tilde{\alpha}(s-t) \equiv \alpha(t) - \mu_A(s-t), \quad \tilde{\beta}(s-t) \equiv \beta_1(t) \quad (4.29)$$

⁹Dai and Singleton [2000]の記法を用いれば $\mathbb{A}_1(2)$ のアフィン拡散モデルである．

とすると, $\tilde{\Gamma}(s-t|\lambda)$ は (4.22) 式の生存確率と同じ形をしていることがわかる. さらに, $\tilde{\Gamma}(s-t|\lambda)$ の s に関する微分は,

$$\tilde{C}(s-t) \equiv C(t), \quad \tilde{B}(s-t) \equiv B_1(t) \quad (4.30)$$

と置いて,

$$\frac{d\tilde{\Gamma}(s-t|\lambda_t)}{ds} = (\tilde{C}(s-t) + \tilde{B}(s-t)\lambda_t) \exp(\tilde{\alpha}(s-t) + \tilde{\beta}(s-t)\lambda_t) \quad (4.31)$$

となっていることが確認でき, $\zeta^{(1)}(t, s)$ は

$$\zeta^{(1)}(t, s) = -A_t e^{\mu_A(s-t)} \left. \frac{d\tilde{\Gamma}(z|\lambda_t)}{dz} \right|_{z=s-t} \quad (4.32)$$

と表せることがわかる. 導出の詳細については, より一般的に回収の n 次モーメントの評価として 4.B 節に記述した.

(4.22) 式と (4.28) 式を比較すると, κ が $\tilde{\kappa}$ に変更されていることがわかる. ただし, $\kappa\bar{\lambda}$ の項には変更が加えられていないことがわかる. また, (4.23), (4.26) 式より, κ が $\tilde{\kappa}$ に変更されると γ_λ が γ になることがわかる. この点を踏まえると, $\tilde{\Gamma}(s-t|\lambda_t)$ が「相関 ρ で調整された」生存確率, より具体的には, 瞬間的な相関を打ち消すような測度変換を行った生存確率に相当していることがわかる. すなわち, $\tilde{\Gamma}(s|\lambda_0)$ は

$$d\lambda_t = (\kappa\bar{\lambda} - \tilde{\kappa}\lambda_t)dt + \sigma_\lambda \sqrt{\lambda_t} d\tilde{W}_t^\lambda \quad (4.33)$$

というデフォルト強度の確率過程を考えたときの時点 s までの生存確率に相当している. (4.33) 式のデフォルト強度過程は (4.13) 式の元々のデフォルト強度過程と比較すると, 中心回帰水準が $\bar{\lambda}$ から $\kappa\bar{\lambda}/\tilde{\kappa}$ に, 中心回帰速度が κ から $\tilde{\kappa}$ に変換されており, (4.26), (4.33) 式より

$$d\tilde{W}_t^\lambda = dW_t^\lambda - \rho\sigma_A \sqrt{\lambda_t} dt \quad (4.34)$$

で関係付けられる \tilde{W}_t^λ をブラウン運動と考える測度変換が行われていることがわかる. また, この測度変換は, デフォルト強度過程の拡散項に注目すると

$$\sigma_\lambda \sqrt{\lambda_t} d\tilde{W}_t^\lambda = \sigma_\lambda \sqrt{\lambda_t} dW_t^\lambda - \text{cov}(d\lambda_t, d \ln A_t) \quad (4.35)$$

とデフォルト強度と担保価値の変動の共分散を差し引くような測度変換になっていることがわかる.

(4.14) 式の設定のもとでは,

$$\eta(t; A) = \frac{A_t e^{-\mu_A t}}{A_0} \quad (4.36)$$

がマルチンゲールとなり, この $\eta(t; A)$ をラドン・ニコディム (Radon-Nikodym) 密度過程とする測度変換

$$\left. \frac{d\tilde{P}}{dP} \right|_{\mathcal{G}_t} = \eta(t; A) \quad (4.37)$$

が (4.34) 式の測度変換になっている. 確率測度 \tilde{P} のもとでは, ギルザノフ (Girsanov) の定理により, (4.34) 式で関係付けられる \tilde{W}_t^λ が標準ブラウン運動となり¹⁰, このような測度変換に

¹⁰ラドン・ニコディム密度過程による測度変換とギルザノフの定理, ブラウン運動の関係については, 木島・田中 [2007] の第 3 章を参照. (4.37) 式の測度変換のもとで \tilde{W}_t^λ が標準ブラウン運動になることは 4.C.2 節を参照.

より, $\zeta^{(1)}(t, s)$ は,

$$\begin{aligned} E_t[e^{-\int_t^s \lambda_u du} \lambda_s A_s] &= E_t\left[\frac{\eta(s; A)}{\eta(t; A)} A_t e^{\mu_A(s-t)} \exp\left(-\int_t^s \lambda_u du\right) \lambda_s\right] \\ &= A_t e^{\mu_A(s-t)} \tilde{E}_t\left[\exp\left(-\int_t^s \lambda_u du\right) \lambda_s\right] \end{aligned} \quad (4.38)$$

と担保価値の期待値評価とデフォルト確率の期待値評価を分離して行えることがわかる。ただし, $\tilde{E}[\cdot]$ は確率測度 \tilde{P} での期待値を表す。(4.32) 式はこうした測度変換を表現したものとなっている。

(4.32) 式を用いて, (4.4) 式右辺第 2 項の期待回収額を評価すると, (4.39) 式のように 1 階のスティルチェス積分で評価できることがわかる。

$$\delta \int_t^T E_t[e^{-\int_t^s (r+\lambda_u) du} \lambda_s A_s] ds = -\delta A_t \int_0^{T-t} e^{(\mu_A-r)z} d\tilde{\Gamma}(z|\lambda_t) \quad (4.39)$$

すなわち, 期待回収額は, 満期までの各時点の期待担保価値 $A_t e^{(\mu_A-r)z}$ を測度変換された生存確率 $\tilde{\Gamma}(z|\lambda_t)$ を測度として 1 階積分することによって評価できる。

以上をまとめると, (4.4) 式で表される期待損失の時点 $t = 0$ での評価は, (4.22) 式, (4.39) 式を代入して

$$E[e^{-r\tau} L_\tau 1_{\{\tau \leq T\}}] = -D \int_0^T e^{-rz} d\Gamma(z|\lambda_0) + \delta A_0 \int_0^T e^{(\mu_A-r)z} d\tilde{\Gamma}(z|\lambda_0) \quad (4.40)$$

となる。ただし, $\Gamma(z|\lambda_0)$, $\tilde{\Gamma}(z|\lambda_0)$ はそれぞれ (4.22) 式, (4.28) 式で与えられる¹¹。

4.3.4 損失の m 次モーメントと標準偏差

損失の m 次モーメントは, (4.10) 式のように, 回収の n 次モーメント $\zeta^{(n)}(t, s)$ の評価に帰着する。(4.25) 式の $\zeta^{(1)}(t, s)$ の評価は $n = 1$ での評価である。一般に, $\zeta^{(n)}(t, s)$ は拡張アフィン形式に帰着し, 導出される常微分方程式は解析解を持つ。4.B 節ではその導出過程を詳しく記述している。

$\zeta^{(n)}(t, s)$ は測度変換を用いても評価することができる。伊藤の公式より A_t^n の確率過程は,

$$dA_t^n = \left\{ n\mu_A + \frac{n(n-1)}{2} \sigma_A^2 \lambda_t \right\} A_t^n dt + n\sigma_A \sqrt{\lambda_t} A_t^n dW_t^A \quad (4.41)$$

と表現できる。したがって,

$$\eta(t; A^n) = \frac{A_t^n e^{-n\mu_A t - \frac{n(n-1)}{2} \sigma_A^2 \int_0^t \lambda_u du}}{A_0^n} \quad (4.42)$$

¹¹ 生存確率 $\Gamma(0, s|\lambda_0)$ を積分の測度として時間 s について被積分関数 e^{-as} を積分する計算は, 部分積分により,

$$\int_0^T e^{-as} d_s \Gamma(0, s|\lambda_0) = e^{-aT} \Gamma(0, T|\lambda_0) - 1 + a \int_0^T e^{-as} \Gamma(0, s|\lambda_0) ds$$

となって, 被積分関数を $e^{-as} \Gamma(0, s|\lambda_0)$ とした時間 s に関する通常のリーマン積分に帰着し, 数値積分パッケージを用いて計算することができる。以下で示す数値例は統計言語 R でプログラミングし, 積分については標準の関数 `integrate()` の適応求積法 (adaptive quadrature) を用いて数値積分している。

がマルチンゲールとなる．この $\eta(t; A^n)$ をラドン・ニコディム密度過程とする確率測度 $P^{(n)}$ を

$$\frac{dP^{(n)}}{dP} \Big|_{\mathcal{G}_t} = \eta(t; A^n) \quad (4.43)$$

で定義し，その確率測度での情報 \mathcal{F}_t を所与とした期待値を $E_t^{(n)}[\cdot]$ で表すことにする．確率測度 $P^{(n)}$ のもとでは，

$$dW_t^{A(n)} = dW_t^A - n\sigma_A\sqrt{\lambda_t}dt, \quad dW_t^{\lambda(n)} = dW_t^\lambda - n\rho\sigma_A\sqrt{\lambda_t}dt \quad (4.44)$$

で決まる $W_t^{A(n)}$ ， $W_t^{\lambda(n)}$ が標準ブラウン運動となることから（詳細は 4.C.2 節を参照），確率測度 $P^{(n)}$ のもとでのデフォルト強度の確率過程は，

$$d\lambda_t = (\kappa\bar{\lambda} - \tilde{\kappa}_n\lambda_t)dt + \sigma_\lambda\sqrt{\lambda_t}d\tilde{W}_t^{\lambda(n)}, \quad (4.45)$$

ただし，

$$\tilde{\kappa}_n = \kappa - n\rho\sigma_\lambda\sigma_A \quad (4.46)$$

と与えられる．このデフォルト強度過程での時点 t での時点 s までの生存確率を $\Gamma^{(n)}(s-t|\lambda_t)$ と表す．また，上記の測度変換を用いると，(4.12) 式の $\zeta^{(n)}(t, s)$ は，

$$\begin{aligned} E_t[e^{-\int_t^s \lambda_u du} \lambda_s A_s^n] &= E_t\left[\frac{\eta(s; A^n)}{\eta(t; A^n)} A_t^n e^{n\mu_A(s-t) + \frac{n(n-1)}{2}\sigma_A^2 \int_t^s \lambda_u du} e^{-\int_t^s \lambda_u du} \lambda_s\right] \\ &= A_t^n e^{n\mu_A(s-t)} E_t^{(n)}\left[e^{\left(\frac{n(n-1)}{2}\sigma_A^2 - 1\right) \int_t^s \lambda_u du} \lambda_s\right] \end{aligned} \quad (4.47)$$

と変形できる．ここで

$$\begin{aligned} E_t^{(n)}\left[e^{\left(\frac{n(n-1)}{2}\sigma_A^2 - 1\right) \int_t^s \lambda_u du} \lambda_s\right] &= -\frac{2}{2 - n(n-1)\sigma_A^2} \frac{\partial}{\partial s} E_t^{(n)}\left[e^{-\int_t^s \left(1 - \frac{n(n-1)}{2}\sigma_A^2\right) \lambda_u du}\right] \\ &= -\frac{2}{2 - n(n-1)\sigma_A^2} \frac{\partial \Gamma^{(n)}(s-t | (1 - \frac{n(n-1)}{2}\sigma_A^2)\lambda_t)}{\partial s} \end{aligned} \quad (4.48)$$

となる． $\Gamma^{(n)}(z | (1 - \frac{n(n-1)}{2}\sigma_A^2)\lambda_t)$ は，4.B 節に示す (4.159) 式の $\xi_n(z|\lambda_t)$ にほかならならず，

$$\zeta^{(n)}(t, s) = -A_t^n e^{n\mu_A(s-t)} \frac{2}{2 - n(n-1)\sigma_A^2} \frac{d\Gamma^{(n)}(z | (1 - \frac{n(n-1)}{2}\sigma_A^2)\lambda_t)}{dz} \Big|_{z=s-t} \quad (4.49)$$

と，(4.162) 式と同値な式を導くことができる．これを (4.10) 式に代入すると，損失分布の m 次モーメントが，確率測度 $P^{(n)}$ での生存確率を測度とする 1 階のスティルチェス積分の組合せで計算できることになる¹²．

一例として，損失の分散は， $t=0$ として $n=2$ までの場合と (4.40) 式の期待損失を計算することによって次式のように導出できる．

$$\begin{aligned} \text{var}[e^{-r\tau} L_\tau 1_{\{\tau \leq T\}}] &= -D^2 \int_0^T e^{-2rz} d\Gamma(z|\lambda_0) + 2\delta D A_0 \int_0^T e^{(\mu_A - 2r)z} d\tilde{\Gamma}(z|\lambda_0) \\ &\quad - \frac{\delta^2 A_0^2}{1 - \sigma_A^2} \int_0^T e^{2(\mu_A - r)z} d\xi_2(z|\lambda_0) - (E[e^{-r\tau} L_\tau 1_{\{\tau \leq T\}}])^2 \end{aligned} \quad (4.50)$$

¹²脚注 11 に示したように，このスティルチェス積分を実際に計算する場合は，部分積分を適用し，通常のリーマン積分に帰着してから数値積分パッケージを用いて計算を行う．後述の (4.50) 式右辺に含まれる 3 つのスティルチェス積分の計算も同様である．

ただし，右辺最終項は(4.40)式で表される期待損失を用いて計算する．損失の標準偏差は，(4.50)式を用いて，

$$\sqrt{\text{var}[e^{-r\tau}L_{\tau}1_{\{\tau \leq T\}}]} \quad (4.51)$$

を求めればよい．

4.3.5 数値計算

ここでは，(4.40)式で表される期待損失と(4.51)式で表される損失の標準偏差の数値例を示す．パラメータの設定は， $D = A_0 = 100$, $T = 1$, $\delta = 0.7$, $\mu_A = 1\%$, $\sigma_A = 0.5$, $\sigma_{\lambda} = 20\%$, $r = 1\%$ とする．図4.1では $\lambda_0 = 4\%$, $\bar{\lambda} = 3\%$ と設定し，図4.2では $\lambda_0 = 3\%$, $\bar{\lambda} = 4\%$ と設定する．図4.1, 4.2では，デフォルト強度の中心回帰速度のパラメータ κ に関して $\kappa = 0.1, 1, 5, 10$ の4つの場合について，期待損失（左図），標準偏差（右図）が負の相関 ρ でどのように変化するかを示している．図4.1と図4.2を比較すると， κ の大きさと期待損失や標準偏差の大きさの関係は λ_0 と $\bar{\lambda}$ の大小関係によるものの，どちらの場合でも，相関が低くなるほど期待損失は大きくなり，その傾向は中心回帰速度が遅い（ κ の値が小さい）ほど強くなるのがわかる．標準偏差についても同様の傾向があり，期待損失の増加幅と標準偏差の増加幅はほぼ等しくなっていることがわかる．したがって，デフォルト強度の中心回帰速度が遅いときほど，信用リスク管理を行っていくうえで負の相関 ρ に注意する必要があるといえる．

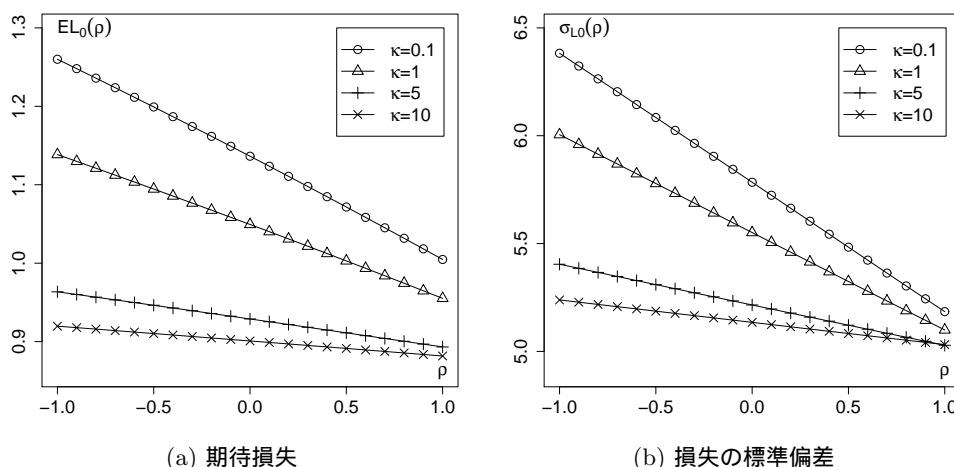


図 4.1: 相関 ρ に対する期待損失と損失の標準偏差 ($\lambda_0 > \bar{\lambda}$)

4.4 2次ガウス過程でのモデル化

本節では，2次ガウス過程を用いてデフォルト強度と対数担保価値をモデル化し，生存確率，期待回収担保価値を評価したうえで，期待損失の解析的な式を導出する．さらに，より一般に損失の m 次モーメントの解析的な式を導出し，期待損失と損失の標準偏差について数値例を示す．最後に，本モデルでのデフォルト強度と対数担保価値との相関について改めて考察し，基本的には負の相関を反映したモデルであることを確認する．

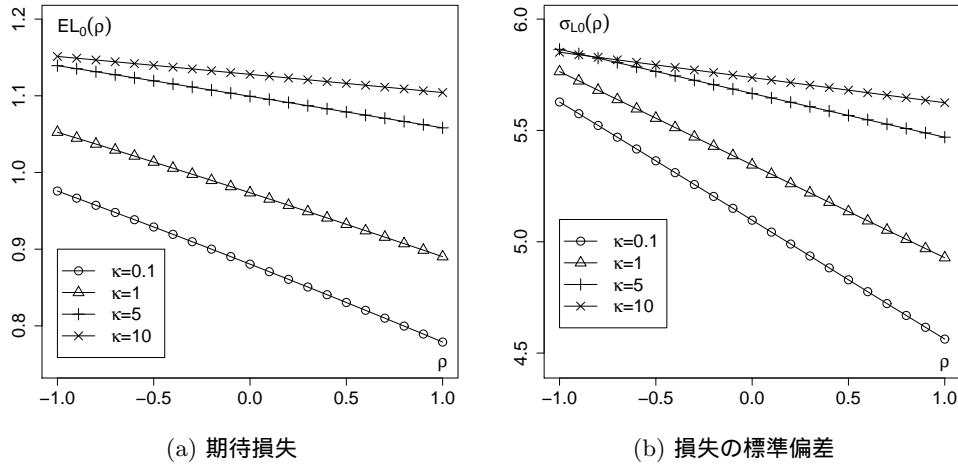


図 4.2: 相関 ρ に対する期待損失と損失の標準偏差 ($\lambda_0 < \bar{\lambda}$)

4.4.1 デフォルト強度と担保価値の確率過程

本節では，担保資産価値は幾何ブラウン運動

$$dA_t = \mu_A A_t dt + \sigma_A A_t dW_t^A \quad (4.52)$$

に従っていると仮定する．一方，当該企業のデフォルト強度 λ_t は，潜在変数 y_t を用いて

$$\lambda_t = (y_t + \alpha + \beta t)^2 \quad (4.53)$$

と表現されるものとし，潜在変数 y_t は次の OU 過程に従うとする¹³．

$$dy_t = -\kappa y_t dt + \sigma_y dW_t^y \quad (4.54)$$

ここで (4.52) 式と (4.54) 式の確率過程に含まれるブラウン運動は

$$\text{cov}(dW_t^y, dW_t^A) = d[W^y, W^A]_t = \rho dt \quad (4.55)$$

という相関を持つものと仮定する．

本節では，増大情報系 \mathcal{F}_t は，ブラウン運動 W_t^y, W_t^A から生成される増大情報系 $\sigma(\{W_s^y, W_s^A : s \leq t\})$ とする． (\mathcal{G}_t) は，(4.2) 式で定義する．

2次元の状態変数ベクトル $X_t = (y_t, \ln A_t)^\top$ を導入すると，(4.52)，(4.54)，(4.55) 式より， X_t は2次元のガウス過程に従うことがわかる．期待損失の評価は，こうした状態変数ベクトルのもとで，(4.6) 式の生存確率の評価と (4.9) 式の期待回収担保価値の評価に帰着することがわかる．

¹³ここで想定する OU 過程は中心回帰水準を持たない確率過程であるが，中心回帰水準 θ を持つ OU 過程を考えると可能である．ただし，状態変数 y_t はデフォルト強度 λ_t を定めるための潜在変数であり，変数変換によりその回帰水準 θ は (4.53) 式の α と同じ効果を持つだけであることがわかる．現実のデータからのパラメータの推定を考えると， θ と α を識別できないことになるため，状態変数 y_t は中心回帰水準を持たない確率過程に従うとした．

4.4.2 生存確率の評価

ここでは，4.4.1 節で定義したデフォルト強度のもとで (4.6) 式の生存確率を解析的に評価する．(4.6) 式の評価式は，割引債価格の評価式において，潜在変数 y_t を (4.54) 式の OU 過程で与え，短期金利を (4.53) 式の λ_t で置き換えた式に相当している．この性質を踏まえ，割引債価格の評価式導出方法を援用すると，時点 t でみた時点 T までの生存確率 $\Gamma(t, T)$ は以下のよう
 与えられる．

$$\Gamma(t, T) = \exp(C_0(t, T) - C_1(t, T)y_t - C_2(t, T)y_t^2) \quad (4.56)$$

ただし，(4.56) 式の係数 $C_0(t, T)$ ， $C_1(t, T)$ ， $C_2(t, T)$ は，それぞれ，

$$0 = -1 - \frac{dC_2(t, T)}{dt} + 2\kappa C_2(t, T) + 2\sigma_y^2 C_2^2(t, T) \quad (4.57)$$

$$0 = -2(\alpha + \beta t) - \frac{dC_1(t, T)}{dt} + \kappa C_1(t, T) + 2\sigma_y^2 C_1(t, T)C_2(t, T) \quad (4.58)$$

$$0 = -(\alpha + \beta t)^2 + \frac{dC_0(t, T)}{dt} + \frac{\sigma_y^2}{2} \{-2C_2(t, T) + C_1^2(t, T)\} \quad (4.59)$$

という常微分方程式を

$$C_0(T, T) = C_1(T, T) = C_2(T, T) = 0 \quad (4.60)$$

という境界条件で解いた解として与えられる．この常微分方程式の解析的な評価は，Pelsser [1997] で与えられており，

$$\gamma = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma_y^2} \quad (4.61)$$

として，

$$F(t, T) = \frac{2\gamma e^{\gamma(T-t)}}{(\gamma + \kappa)e^{2\gamma(T-t)} + \gamma - \kappa} \quad (4.62)$$

$$\alpha(t) = \alpha + \beta t \quad (4.63)$$

と置いたうえで，以下のように評価される．

$$C_2(t, T) = \frac{e^{2\gamma(T-t)} - 1}{(\gamma + \kappa)e^{2\gamma(T-t)} + \gamma - \kappa} \quad (4.64)$$

$$C_1(t, T) = 2F(t, T) \int_t^T \frac{\alpha(u)}{F(u, T)} du \quad (4.65)$$

$$C_0(t, T) = - \int_t^T \{\alpha(u)^2 + \sigma_y^2 C_2(u, T) - \frac{\sigma_y^2}{2} C_1^2(u, T)\} du \quad (4.66)$$

ここで，(4.65)，(4.66) 式の積分は，Kijima, Tanaka and Wong [2009] の結果と同様に以下の
 ように閉じた式で与えられる．

$$C_1(t, T) = \frac{2 \left[\alpha\gamma\{(\gamma + \kappa)e^{\gamma(T-t)} - (\gamma - \kappa)e^{-\gamma(T-t)} - 2\kappa\} + \beta\{(\gamma - \kappa)e^{-\gamma(T-t)}(1 - \gamma t) + (\gamma + \kappa)e^{\gamma(T-t)}(1 + \gamma t) - 2\gamma(\kappa T + 1)\} \right]}{\gamma^2\{(\gamma + \kappa)e^{\gamma(T-t)} + (\gamma - \kappa)e^{-\gamma(T-t)}\}} \quad (4.67)$$

$$C_0(t, T) = -\alpha^2(T-t) - \alpha\beta(T^2 - t^2) - \frac{\beta^2(T^3 - t^3)}{3} + \frac{(\gamma + \kappa)(T-t)}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{(\gamma + \kappa)e^{2\gamma(T-t)} + \gamma - \kappa}{2\gamma} - \frac{\sigma_y^2 G(t, T)}{\gamma^5\{(\gamma + \kappa)e^{\gamma(T-t)} + (\gamma - \kappa)e^{-\gamma(T-t)}\}} \quad (4.68)$$

ただし ,

$$G(t, T) = (\gamma - \kappa)\{\alpha^2\gamma^2G_{1a}(t, T) + 2\alpha\beta\gamma G_{2a}(t, T) + \beta^2G_{3a}(t, T)\} \\ + (\gamma + \kappa)\{\alpha^2\gamma^2G_{1b}(t, T) + 2\alpha\beta\gamma G_{2b}(t, T) + \beta^2G_{3b}(t, T)\} \quad (4.69)$$

であり , $G(t, T)$ の係数は以下のように与えられる .

$$G_{1a}(t, T) = -e^{\gamma(T-t)} + 4 - e^{-\gamma(T-t)}(3 + 2\gamma(T-t)) \quad (4.70)$$

$$G_{1b}(t, T) = e^{-\gamma(T-t)} - 4 + e^{\gamma(T-t)}(3 - 2\gamma(T-t)) \quad (4.71)$$

$$G_{2a}(t, T) = e^{\gamma(T-t)}(1 - \gamma T) - 2(1 - \gamma(t+T)) + e^{-\gamma(T-t)}(1 - \gamma(2t+T) + \gamma^2(t^2 - T^2)) \quad (4.72)$$

$$G_{2b}(t, T) = e^{-\gamma(T-t)}(1 + \gamma T) - 2(1 + \gamma(t+T)) + e^{\gamma(T-t)}(1 + \gamma(2t+T) + \gamma^2(t^2 - T^2)) \quad (4.73)$$

$$G_{3a}(t, T) = -4\gamma t(1 - \gamma T) - e^{\gamma(T-t)}(1 - \gamma T)^2 \\ + e^{-\gamma(T-t)}(1 + 2\gamma t - \gamma^2(2t^2 + T^2) + \frac{2}{3}\gamma^3(t^3 - T^3)) \quad (4.74)$$

$$G_{3b}(t, T) = -4\gamma t(1 + \gamma T) + e^{-\gamma(T-t)}(1 + \gamma T)^2 \\ - e^{\gamma(T-t)}(1 - 2\gamma t - \gamma^2(2t^2 + T^2) - \frac{2}{3}\gamma^3(t^3 - T^3)) \quad (4.75)$$

4.4.3 期待回収担保価値の評価と期待損失

ここでは , 4.4.1 節で定義したデフォルト強度と担保価値の確率過程のもとで , (4.9) 式の期待回収担保価値を評価する . (4.52) 式の設定のもとでは ,

$$\eta(t; A) = \frac{A_t e^{-\mu A t}}{A_0} \quad (4.76)$$

がマルチンゲールとなり , この $\eta(t; A)$ をラドン・ニコディム密度過程とする測度変換

$$\frac{d\tilde{P}}{dP}\Big|_{\mathcal{G}_t} = \eta(t; A) \quad (4.77)$$

を考える . 確率測度 \tilde{P} のもとでは , ギルザノフの定理により

$$\tilde{W}_t^A = W_t^A - \sigma_{At}, \quad \tilde{W}_t^y = W_t^y - \rho\sigma_{At} \quad (4.78)$$

が標準ブラウン運動となり¹⁴ , 状態変数 y_t は

$$dy_t = (-\kappa y_t + \rho\sigma_A\sigma_y)dt + \sigma_y d\tilde{W}_t^y \quad (4.79)$$

という確率過程に従う . ここで , 状態変数 \tilde{y}_t を

$$\tilde{y}_t = y_t - \frac{\rho\sigma_A\sigma_y}{\kappa} \quad (4.80)$$

とすると , (4.54) 式は

$$d\tilde{y}_t = -\kappa\tilde{y}_t dt + \sigma_y d\tilde{W}_t^y \quad (4.81)$$

¹⁴ラドン・ニコディム密度過程による測度変換とギルザノフの定理 , ブラウン運動の関係については , 木島・田中 [2007] の第 3 章を参照 . (4.77) 式の測度変換のもとで \tilde{W}_t^A と \tilde{W}_t^y が標準ブラウン運動になることは 4.C.1 節を参照 .

と書き表せる .

変換後の確率測度 \tilde{P} で情報 \mathcal{F}_t を所与とした期待値を $\tilde{E}_t[\cdot]$ で定義すると , (4.9) 式の期待回収担保価値の被積分項は

$$\begin{aligned} E_t[e^{-\int_t^s (r+\lambda_u)du} \lambda_s A_s] &= E_t\left[\frac{\eta(s; A)}{\eta(t; A)} A_t e^{(\mu_A - r)(s-t)} \exp\left(-\int_t^s \lambda_u du\right) \lambda_s\right] \\ &= A_t e^{(\mu_A - r)(s-t)} \tilde{E}_t\left[\exp\left(-\int_t^s \lambda_u du\right) \lambda_s\right] \end{aligned} \quad (4.82)$$

と変形できる . ここで ,

$$\tilde{E}_t\left[\exp\left(-\int_t^s \lambda_u du\right) \lambda_s\right] = -\frac{\partial}{\partial s} \tilde{E}_t\left[\exp\left(-\int_t^s \lambda_u du\right)\right] \quad (4.83)$$

となる . (4.83) 式右辺の被微分項は , 確率測度 \tilde{P} での生存確率を表す . 生存確率を決めるデフォルト強度は , (4.53) 式より

$$\lambda_t = (y_t + \alpha + \beta t)^2 = (\tilde{y}_t + \tilde{\alpha} + \beta t)^2 \quad (4.84)$$

ただし ,

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \frac{\rho\sigma_A\sigma_y}{\kappa} \quad (4.85)$$

と表現されることから , 確率測度 \tilde{P} での生存確率は , 次式で与えられる .

$$\tilde{E}_t\left[\exp\left(-\int_t^T \lambda_u du\right)\right] = \Gamma(t, T|\tilde{\alpha}, \tilde{y}_t) = \exp(\tilde{C}_0(t, T) - \tilde{C}_1(t, T)\tilde{y}_t - C_2(t, T)\tilde{y}_t^2) \quad (4.86)$$

ただし , (4.86) 式の係数 $\tilde{C}_0(t, T)$, $\tilde{C}_1(t, T)$ は $C_0(t, T)$, $C_1(t, T)$ を決めるパラメータ α を $\tilde{\alpha}$ に変更して得られる係数である¹⁵ .

したがって , (4.9) 式の期待回収担保価値は ,

$$\int_t^T E_t[e^{-\int_t^s (r+\lambda_u)du} \lambda_s A_s] ds = -A_t \int_t^T e^{(\mu_A - r)(s-t)} d_s \Gamma(t, s|\tilde{\alpha}, \tilde{y}_t) \quad (4.87)$$

と 1 階のスティルチェス積分で表せる¹⁶ . (4.87) 式より , 期待回収担保価値は , 測度変換された生存確率を積分の測度として , 割り引かれた平均担保変化率を満期まで 1 階積分することにより評価されることがわかる .

(4.4) 式に (4.56) 式で評価された生存確率と (4.87) 式で評価された期待回収担保価値を代入し , 時点 $t = 0$ での期待損失を評価すると ,

$$E[e^{-r\tau} L_\tau 1_{\{\tau \leq T\}}] = -D \int_0^T e^{-rs} d_s \Gamma(0, s|\alpha, y_0) + \delta A_0 \int_0^T e^{(\mu_A - r)s} d_s \Gamma(0, s|\tilde{\alpha}, \tilde{y}_0) \quad (4.88)$$

と導出される¹⁷ .

¹⁵ $C_2(t, T)$ はパラメータ α に依存しない係数であるので値は変化しない .

¹⁶ 本章では , 観測確率のもとで議論を行っているが , リスク中立確率のもとで (4.87) 式を評価するとき , 担保資産に配当がないと仮定すれば μ_A は無リスク金利 r と一致するため , (4.87) 式右辺は $A_t\{1 - \Gamma(t, T|\tilde{\alpha}, \tilde{y}_t)\}$ と整理できる .

¹⁷ 脚注 11 に示したように , (4.88) 式の右辺第 1 項 , 第 2 項のスティルチェス積分を実際に計算する場合は , 部分積分を適用し , 通常のリーマン積分に帰着してから数値積分パッケージを用いて計算を行う .

4.4.4 損失分布の m 次モーメントと標準偏差

(4.10) 式の損失分布の m 次モーメントを求めるため、 $\zeta^{(n)}(t, s)$ の評価を行う。

A_t^n の確率過程は

$$dA_t^n = \mu_A^{(n)} A_t^n dt + n\sigma_A A_t^n dW_t^A \quad (4.89)$$

ただし、

$$\mu_A^{(n)} = n\mu_A + \frac{n(n-1)}{2}\sigma_A^2 \quad (4.90)$$

と表現できる。したがって、

$$\eta(t; A^n) = \frac{A_t^n e^{-\mu_A^{(n)} t}}{A_0^n} \quad (4.91)$$

がマルチンゲールとなる。この $\eta(t; A^n)$ をラドン・ニコディム密度過程とする確率測度 $P^{(n)}$ を

$$\left. \frac{dP^{(n)}}{dP} \right|_{\mathcal{G}_t} = \eta(t; A^n) \quad (4.92)$$

で定義し、その確率測度での情報 \mathcal{F}_t を所与とした期待値を $E_t^{(n)}[\cdot]$ で表すことにする。

確率測度 $P^{(n)}$ のもとでは、

$$W_t^{A^{(n)}} = W_t^A - n\sigma_A t, \quad W_t^{y^{(n)}} = W_t^y - n\rho\sigma_A t \quad (4.93)$$

が標準ブラウン運動となることから（詳細は 4.C.1 節を参照）、

$$y_t^{(n)} = y_t - \frac{n\rho\sigma_A\sigma_y}{\kappa}, \quad \alpha^{(n)} = \alpha + \frac{n\rho\sigma_A\sigma_y}{\kappa}, \quad (4.94)$$

とすると、 $y_t^{(n)}$ は中心回帰水準を持たない OU 過程となり、デフォルト強度は

$$\lambda_t = (y_t^{(n)} + \alpha^{(n)} + \beta t)^2 \quad (4.95)$$

と表されるから、確率測度 $P^{(n)}$ のもとでの生存確率は

$$E_t^{(n)}\left[\exp\left(-\int_t^T \lambda_u du\right)\right] = \Gamma(t, T | \alpha^{(n)}, y_t^{(n)}) \quad (4.96)$$

で与えられる。

上記の測度変換を用いると、(4.12) 式の $\zeta^{(n)}(t, s)$ は、

$$\begin{aligned} E_t[e^{-\int_t^s \lambda_u du} \lambda_s A_s^n] &= E_t\left[\frac{\eta(s; A^n)}{\eta(t; A^n)} A_t^n e^{\mu_A^{(n)}(s-t)} e^{-\int_t^s \lambda_u du} \lambda_s\right] \\ &= A_t^n e^{\mu_A^{(n)}(s-t)} E_t^{(n)}\left[e^{-\int_t^s \lambda_u du} \lambda_s\right] = -A_t^n e^{\mu_A^{(n)}(s-t)} \frac{\partial \Gamma(t, s | \alpha^{(n)}, y_t^{(n)})}{\partial s} \end{aligned} \quad (4.97)$$

と変形でき¹⁸、これを (4.10) 式に代入すると、損失分布の m 次モーメントが、確率測度 $P^{(n)}$ での生存確率を測度とする 1 階のスティルチェス積分の組合せで計算できることになる¹⁹。

¹⁸アフィン過程に対して 4.B 節で示したように拡張アフィン形式に従う常微分方程式を解くことによって測度変換を使わずに $\zeta^{(n)}(t, s)$ を導出したのと同様に、2 次ガウス過程についても 2 次ガウス形式を考え、その係数が従う常微分方程式を解くことによって測度変換を使わずに (4.97) 式を導出することができる。詳細は 4.D 節を参照。

¹⁹脚注 11 に示したように、このスティルチェス積分を実際に計算する場合は、部分積分を適用し、通常のリーマン積分に帰着させてから数値積分パッケージを用いて計算を行う。後述の (4.98) 式右辺に含まれる 3 つのスティルチェス積分の計算も同様である。

具体的に，時点 $t = 0$ での 2 次モーメントは

$$E[(e^{-r\tau} L_\tau)^2 1_{\{\tau \leq T\}}] = -D^2 \int_0^T e^{-2rs} d_s \Gamma(0, s | \alpha, y_0) + 2\delta A_0 D \int_0^T e^{(\mu_A - 2r)s} d_s \Gamma(0, s | \tilde{\alpha}, \tilde{y}_0) - \delta^2 A_0^2 \int_0^T e^{(2\mu_A - 2r + \sigma_A^2)s} d_s \Gamma(0, s | \alpha^{(2)}, y_0^{(2)}) \quad (4.98)$$

と計算できる．損失の分散は，

$$\text{var}[e^{-r\tau} L_\tau 1_{\{\tau \leq T\}}] = E[e^{-2r\tau} L_\tau^2 1_{\{\tau \leq T\}}] - (E[e^{-r\tau} L_\tau 1_{\{\tau \leq T\}}])^2 \quad (4.99)$$

の右辺の各項をそれぞれ (4.98)，(4.88) 式を用いて計算することで与えられ，損失の標準偏差は，この結果を用いて $\sqrt{\text{var}[e^{-r\tau} L_\tau 1_{\{\tau \leq T\}}]}$ を計算することで与えられる．

4.4.5 数値計算

数値計算例として，4.3.5 節での数値例のパラメータを参考に

$$D = A_0 = 100, \delta = 0.7, T = 1, \mu_A = 1\%, \sigma_A = 10\%, \sigma_y = 10\%, r = 1\% \quad (4.100)$$

とパラメータを設定する．その他のパラメータとして， β を 0 にすると， α はデフォルト強度の中心回帰水準の平方根であり， y_0 は初期水準の中心回帰水準からのずれを示す．すなわち， y_0 が正であれば初期水準が回帰水準より悪い状態にあり， y_0 が負であれば初期水準が回帰水準より良い状態にあることを示す．これら y_0 と α については $(y_0, \alpha) = (-0.03, 0.2)$ と $(y_0, \alpha) = (0.03, 0.17)$ の 2 つのパターンを設定する²⁰． κ については $\kappa = 0.1, 1, 5, 10$ の 4 つの場合を想定し， ρ を -1 から 1 まで変化させる．

まず， $\beta = 0$ として， ρ を -1 から 1 まで変化させて (4.88) 式で算出される時点 $t = 0$ での期待損失をプロットすると，図 4.3 のようになる．図 4.3(a) は $y_0 = -0.03$ とした場合，図 4.3(b) は $y_0 = 0.03$ とした場合である．図 4.1(a) や図 4.2(a) と同様に，いずれの場合でも負の相関が強い (ρ が -1 に近づく) ほど期待損失は大きくなる (期待損失は ρ に対して右肩下がりになる) ことがわかる．また，その損失の拡大幅は κ が小さいほど大きいことがわかる．すなわち，中心回帰の速度が遅いほど損失が拡大しやすいことがわかる．なお，期待損失の水準は， $y_0 < 0$ の場合は κ が大きいほど大きく， $y_0 > 0$ の場合は κ が小さいほど大きくなる傾向がある．これは，現在のデフォルト強度が回帰水準のデフォルト強度より低い場合には，中心回帰の速度 κ が速いほど回帰水準に近づきやすくなるため，期待損失が大きくなり，逆に，現在のデフォルト強度が回帰水準のデフォルト強度より高い場合には，中心回帰の速度 κ が遅いほど回帰水準への回復が遅れるため，期待損失が大きくなることを示している．いずれの点もデフォルト強度に平方根過程を想定した 4.3.5 節の結果と同様である．

次に，デフォルト強度のトレンド効果を表す β を導入し，その効果を考察する． β をゼロではなく $\beta = 0.01$ とし，他のパラメータは図 4.3 と同じようにして，(4.88) 式で算出される時点

²⁰ D, A_0, δ, T, μ_A は 4.3.5 節の設定と同じである． σ_y は伊藤の公式より $\sigma_\lambda/2$ に対応させている． σ_A は 4.3 節の $\sigma_A \sqrt{\lambda_t}$ と対応する．4.3 節では，デフォルト強度の初期値 λ_0 と回帰水準 $\bar{\lambda}$ として 4%，3% という水準を考えていることを踏まえ， $\lambda_t = 4\%$ の水準として σ_A を 10% に設定している．また，(4.53) 式のデフォルト強度の設定より， $\beta = 0$ とすると， $y_0 + \alpha$ はデフォルト強度の初期値 λ_0 の平方根となり， α はデフォルト強度の回帰水準の平方根となる．それらの水準は $\sqrt{0.04} = 0.2$ や $\sqrt{0.03} \cong 0.17$ という水準である．そこで， $y_0 = -0.03$ ， $y_0 = 0.03$ の 2 つのパターンで，デフォルト強度の初期値と回帰水準に合わせて α の水準を決めることにした．

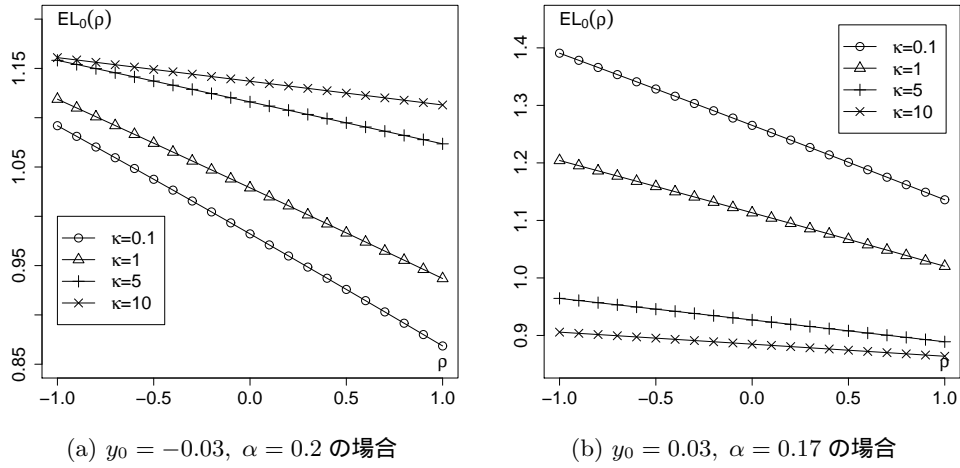


図 4.3: 相関 ρ に対する期待損失 ($\beta = 0$)

$t = 0$ での期待損失と (4.99) 式で算出される時点 $t = 0$ での損失の標準偏差を算出した結果が図 4.4, 4.5 である．図 4.4 は初期水準が回帰水準より悪い状態であり, $(y_0, \alpha) = (-0.03, 0.2)$ としたもので, 図 4.5 は初期水準が回帰水準より良い状態であり, $(y_0, \alpha) = (0.03, 0.17)$ としたものである．図 4.4(a), 4.5(a) より, 期待損失の形状はこのパラメータの場合は, 図 4.3 とほぼ変わらず, 期待損失の水準が全体的に 0.05 ほど上昇していることがわかる．図 4.4(b), 4.5(b) より, 損失の標準偏差の観点でも期待損失と同様, 中心回帰の速度 κ が遅いほど回帰水準への回復が遅れるため, 損失の標準偏差が大きく, リスク管理の観点で相関に注意が必要であることがわかる．この結果も, デフォルト強度に平方根過程を想定した 4.3.5 節の結果と同じである．

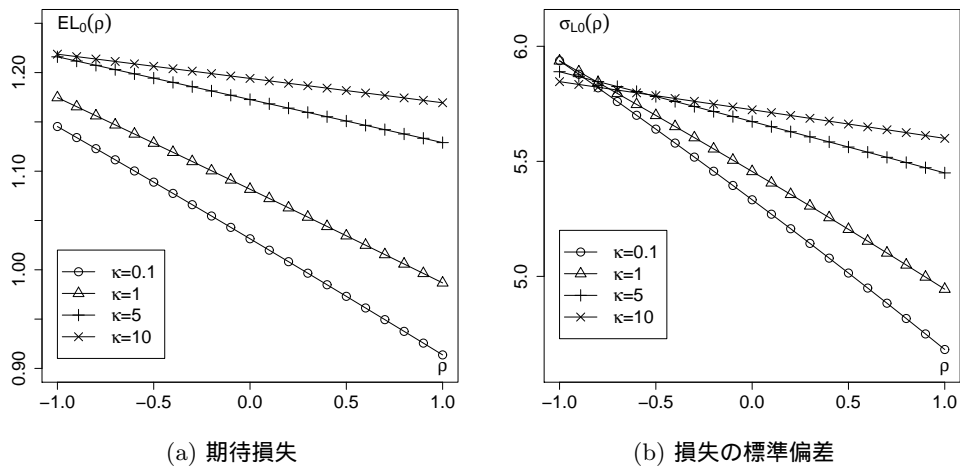


図 4.4: 相関 ρ に対する期待損失と標準偏差 ($y_0 < 0, \beta = 0.01$)

図 4.4 と同じパラメータ設定で (4.99) 式を評価し, 損失の標準偏差をプロットすると, 図 4.5 が得られる．この図から, 損失の標準偏差の観点でも期待損失と同様, 中心回帰の速度 κ が遅いほど回帰水準への回復が遅れるため, 損失の標準偏差が大きく, リスク管理の観点で相関に注意が必要であることがわかる．この結果も, 期待損失の結果と同様, デフォルト強度に平方根過程を想定した 4.3.5 節の結果と同じである．

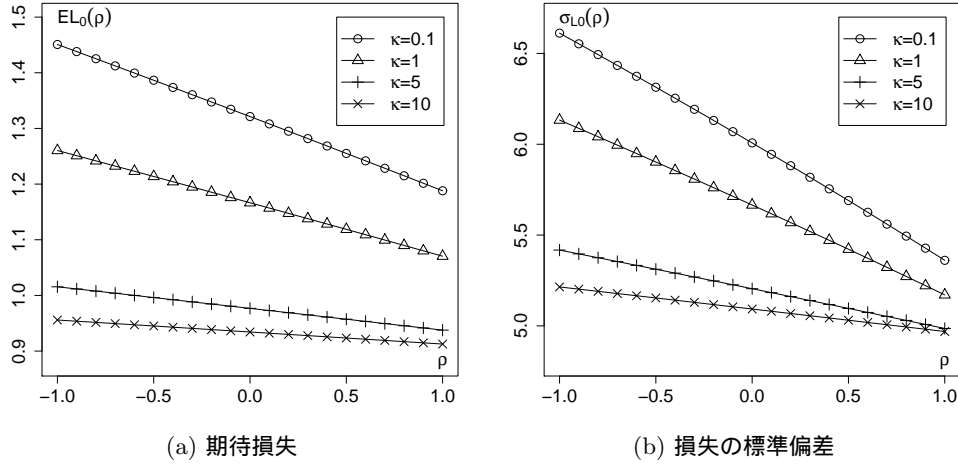


図 4.5: 相関 ρ に対する期待損失と標準偏差 ($y_0 > 0, \beta = 0.01$)

4.4.6 デフォルト強度と担保価値の相関の符号条件

本節のモデルで取り入れた相関は (4.55) 式のように状態変数 y_t を駆動するブラウン運動と担保価値 $\ln A_t$ を駆動するブラウン運動の相関 ρ である。ここでは、パラメータを適切に設定することにより、デフォルト強度と担保価値の相関として ρ と同符号の相関を表現できることを確認する。

(1) デフォルト強度と担保価値の条件付相関と符号条件

時刻 t で観察したときの時刻 T での状態変数 y_T と対数担保価値 $\ln A_T$ の共分散は

$$\text{cov}_t(y_T, \ln A_T) = \sigma_y \sigma_A \int_t^T e^{-\kappa(T-s)} \rho ds = \frac{\rho \sigma_y \sigma_A}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \quad (4.101)$$

となり、 y_T^2 と $\ln A_T$ の共分散は

$$\begin{aligned} \text{cov}_t(y_T^2, \ln A_T) &= 2\rho \sigma_y \sigma_A y_t e^{-\kappa(T-t)} \int_t^T e^{-\kappa(T-s)} ds \\ &= \frac{2\rho \sigma_y \sigma_A y_t e^{-\kappa(T-t)} (1 - e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} \end{aligned} \quad (4.102)$$

となる。したがって、デフォルト強度 λ_T と対数担保価値 $\ln A_T$ の共分散は、

$$\begin{aligned} \text{cov}_t(\lambda_T, \ln A_T) &= \text{cov}_t(y_T^2 + 2(\alpha + \beta T)y_T, \ln A_T) \\ &= \frac{2\rho \sigma_y \sigma_A (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \{\alpha + \beta T + y_t e^{-\kappa(T-t)}\}}{\kappa} \end{aligned} \quad (4.103)$$

となる。

デフォルト強度 λ_T の分散は、

$$\begin{aligned} \text{var}_t[\lambda_T] &= \text{cov}_t(y_T^2 + 2(\alpha + \beta T)y_T, y_T^2 + 2(\alpha + \beta T)y_T) \\ &= \text{var}_t[y_T^2] + 4(\alpha + \beta T)^2 \text{var}_t[y_T] + 4(\alpha + \beta T) \text{cov}_t(y_T, y_T^2) \end{aligned}$$

であり，右辺の各要素は，

$$\begin{aligned}\text{var}_t[y_T] &= \sigma_y^2 \int_t^T e^{-2\kappa(T-s)} ds = \frac{\sigma_y^2(1 - e^{-2\kappa(T-t)})}{2\kappa} \\ \text{cov}_t(y_T, y_T^2) &= 2y_t e^{-\kappa(T-t)} \sigma_y^2 \int_t^T e^{-2\kappa(T-s)} ds \\ &= \frac{\sigma_y^2(1 - e^{-2\kappa(T-t)}) y_t e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \\ \text{var}_t[y_T^2] &= 4\{y_t e^{-\kappa(T-t)}\}^2 \sigma_y^2 \int_t^T e^{-2\kappa(T-s)} ds \\ &= \frac{2\sigma_y^2(1 - e^{-2\kappa(T-t)}) y_t^2 e^{-2\kappa(T-t)}}{\kappa}\end{aligned}$$

となるから，

$$\text{var}_t[\lambda_T] = \frac{2\sigma_y^2(1 - e^{-2\kappa(T-t)})\{\alpha + \beta T + y_t e^{-\kappa(T-t)}\}^2}{\kappa} \quad (4.104)$$

を得る．

対数担保価値 $\ln A_T$ の分散は

$$\text{var}_t[\ln A_T] = \sigma_A^2 \int_t^T ds = \sigma_A^2(T - t) \quad (4.105)$$

であるので，(4.103)，(4.104)，(4.105) 式より，デフォルト強度 λ_T と対数担保価値 $\ln A_T$ の観測時点 t での相関は

$$\begin{aligned}\text{corr}_t(\lambda_T, \ln A_T) &= \frac{\text{cov}_t(\lambda_T, \ln A_T)}{\sqrt{\text{var}_t[\lambda_T]} \sqrt{\text{var}_t[\ln A_T]}} \\ &= \frac{2\rho(1 - e^{-\kappa(T-t)})}{\sqrt{2\kappa(T-t)}(1 - e^{-2\kappa(T-t)})} \frac{\alpha + \beta T + y_t e^{-\kappa(T-t)}}{|\alpha + \beta T + y_t e^{-\kappa(T-t)}|}\end{aligned} \quad (4.106)$$

で与えられる．

(4.106) 式の条件付相関は， κ を正に設定することにより，

$$\alpha + \beta T + y_t e^{-\kappa(T-t)} > 0 \quad (4.107)$$

という条件を満たせば， ρ と同じ符号となる．この条件は β を非負と設定したうえで，初期時点 $t = 0$ では $\alpha + y_0$ を正に設定すれば満たされることがわかる．すなわち，初期観測時点 0 では，このようなパラメータの選択により， $\rho < 0$ とすることでデフォルト強度と対数担保価値との間に負の相関を表現することができる．

(2) 期中での条件付相関の符号変化

上記 (4.106) 式は，観測時点 t における条件付相関を表しており，初期観測時点 $t = 0$ ではその制御を的確に行えることが示されたが，ここでは，その後の時間発展に伴い，観測時点 $t(> 0)$ における条件付相関がどのように振る舞うか考察する．

潜在変数 y_t は、(4.54) 式の OU 過程に従うため、時間経過に伴い、負の値をとることもありうる。この場合、原理的には、デフォルト強度と対数担保価値の相関の符号が設定した ρ と逆の符号になることもありうる。その条件は (4.107) 式の不等号を逆にして

$$y_t < -(\alpha + \beta T)e^{\kappa(T-t)} \quad (4.108)$$

で与えられる。

デフォルト強度と対数担保価値の相関が設定した相関 ρ と逆符号になる (4.108) 式の条件は、 y_t は 0 に中心回帰するように設定されているため、他のパラメータ κ, σ_y も適切に設定されていれば、(4.108) 式右辺の水準まで低下することは稀であり、成立しにくいことがわかる。

現実的な設定として $\rho < 0$ と設定した際、(4.108) 式の条件を満たし、デフォルト強度と対数担保価値が正の相関を持つことになったとしても、数式上の問題はないほか、非現実的とも限らない。実際、 $y_t e^{-\kappa(T-t)} + \alpha + \beta T$ が負の値になる状況を考えると、その直前では $y_t + \alpha + \beta t$ はかなり小さな値になるため、デフォルト強度 λ_t もかなり低い値となっている。企業がそうした良い状態にあれば、デフォルト強度と対数担保価値の相関が必ずしも負にはならない可能性も考えられる。本稿での期待損失の評価は、期中でデフォルト強度と対数担保価値とが正に相関する可能性も織り込んだ評価になっているともいえる。

4.5 結論

本章では、担保付貸出の評価にあたり、以下の3つの要素を備えたモデルとして、アフィン過程を用いたモデルと2次ガウス過程を用いたモデルを構築し、損失の期待値ならびに n 次モーメントが解析的に評価されることを示した。

- (1) デフォルト事象は外生的なデフォルト強度の確率過程に基づき、満期までの間いつでも生じうる。
- (2) デフォルト強度と担保価値の変動は負の相関を持つ。
- (3) デフォルト強度と担保価値は非負性を保つ。

アフィン過程を用いたモデルでは、デフォルト強度を平方根過程とし、デフォルト強度と対数担保資産価値が2次元のアフィン拡散過程に従うモデルを想定して、期待損失および損失の n 次モーメントの被積分項を、拡張アフィン形式を用いて評価し、解析解を導出した。得られた解析解は相関を考慮して測度変換された生存確率を用いて表現できることも示した。

2次ガウス過程を用いたモデルでは、デフォルト強度の潜在変数がOU過程に従っているとし、デフォルト強度はその2次関数で表現されるとした。一方、担保資産価値は幾何ブラウン運動に従うとし、潜在変数と担保資産価値を駆動するブラウン運動の間に負の相関を取り入れることで、デフォルト強度の非負性と担保価値との負の相関を保つモデルを構築した。そのうえで、このモデルでもアフィン過程を用いたモデルと同様に期待損失の解析的な評価を行えることを示した。得られた解析解は測度変換で特徴付けられることも示した。

アフィン過程、2次ガウス過程のいずれのモデルでも、期待損失および損失の m 次モーメントは1階のスティルチェス積分で表現でき、離散化した和として数値的に高速で数値計算できることが示された。得られた m 次モーメントを用いて、デフォルト企業から回収される資産価

値の確率分布を近似すれば、当該資産に派生する金融商品の近似的な評価も可能となることがわかる。

また、アフィン過程、2次ガウス過程のいずれの数値例からも、デフォルト強度と担保価値の負の相関 $-\rho$ の度合い ($|\rho|$) が強いほど期待損失や損失の標準偏差は大きくなり、その傾向は中心回帰速度 κ が遅いほど強くなることが示された。すなわち、デフォルト強度の中心回帰速度が遅いときほど、信用リスク管理を行っていくうえで負の相関に注意する必要があることが示唆された。

2次ガウス過程のモデルは3変量以上にも拡張することができ、例えば、確率的な無リスク短期金利で非負性を保つものを取り込んで、担保付貸出の価値評価を行うことはできる。ただし、4.4.6節で考察したように設定できる相関は基本的に状態変数間の相関であり、状態変数が負の値をとったときには、想定している相関と逆の相関のモデルとなってしまうことがあることには注意が必要である。また、多くの相関を設定すると、得られる係数の常微分方程式が陽的には解けないことが多くなるが、その場合でもルンゲ・クッタ (Runge-Kutta) 法などの数値計算により比較的高速に評価できる。

また、2次ガウス過程のモデルでは、担保付貸出のポートフォリオに対して、デフォルト強度間や担保価値間にも相関を考慮して貸出ポートフォリオの損失分散を2次ガウス過程モデルで評価することもできる。ただし、この場合、相関の設定に関する上段の問題を同様に抱えるほか、期待損失で1階積分で評価されていた点は2階積分での評価となり、少し計算に時間がかかることになる。

本章では扱わなかった実務上の課題の1つとして、デフォルト強度過程や担保資産価値過程のパラメータをどのように推定するかが挙げられる。例えば、時系列データを用いて推定する場合、デフォルト強度については対象とする企業と同格付けあるいは類似の財務データを持つ企業がデフォルトしたか否かの集計データを用いて推定することになる。集計データはポートフォリオに対する観測データであるため、本章では扱わなかった個別エクスポージャーのデフォルト強度の相関についても考慮しなければならない点に注意が必要である。

4.A 基本アフィン形式とリッカチ型常微分方程式の解

本補論では、基本アフィン形式の1つの応用として平方根過程での生存確率を導出するとともに、アフィン過程の期待値計算で導出されるリッカチ型常微分方程式の解をまとめておく。

4.A.1 平方根過程での生存確率の導出

生存確率は1次元の状態変数 $X_t = \lambda_t$ を考えると、基本アフィン形式で評価でき、

$$E_t[\exp\left(-\int_t^T \lambda_s ds\right)] = \exp(\alpha_\lambda(t) + \beta_\lambda(t)\lambda_t) \quad (4.109)$$

と書き表される。基本アフィン形式で導かれる常微分方程式より、 $\alpha_\lambda(t)$ と $\beta_\lambda(t)$ は以下の常微分方程式を満たす。

$$\frac{d\beta_\lambda(t)}{dt} = 1 + \kappa\beta_\lambda(t) - \frac{1}{2}\sigma_\lambda^2\beta_\lambda(t)^2 \quad (4.110)$$

$$\frac{d\alpha_\lambda(t)}{dt} = -\kappa\bar{\lambda}\beta_\lambda(t) \quad (4.111)$$

境界条件は

$$\beta_\lambda(T) = 0, \quad \alpha_\lambda(T) = 0 \quad (4.112)$$

で与えられる．

境界条件 (4.112) のもとで (4.110) 式のリッカチ型常微分方程式を解くと，

$$\beta_\lambda(t) = \frac{2(1 - e^{\gamma_\lambda(T-t)})}{(\gamma_\lambda + \kappa)e^{\gamma_\lambda(T-t)} + \gamma_\lambda - \kappa} \quad (4.113)$$

となる．ただし，

$$\gamma_\lambda = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma_\lambda^2} \quad (4.114)$$

である．リッカチ型常微分方程式の解法は 4.A.2 節を参照．

(4.112) 式と (4.113) 式を (4.111) 式に代入して積分すると次式を得る．

$$\alpha_\lambda(t) = \alpha_\lambda(t) - \alpha_\lambda(T) = \kappa \bar{\lambda} \int_t^T \beta_\lambda(s) ds = \frac{2\kappa \bar{\lambda}}{\sigma_\lambda^2} \ln \frac{2\gamma_\lambda e^{\frac{\gamma_\lambda + \kappa}{2}(T-t)}}{(\gamma_\lambda + \kappa)e^{\gamma_\lambda(T-t)} + \gamma_\lambda - \kappa} \quad (4.115)$$

(4.113) , (4.115) 式を (4.109) 式に代入すると，生存確率は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \Gamma(T-t|\lambda_t) &= E_t[\exp\left(-\int_t^T \lambda_s ds\right)] \\ &= \left[\frac{2\gamma_\lambda e^{(\gamma_\lambda + \kappa)(T-t)/2}}{(\gamma_\lambda + \kappa)e^{\gamma_\lambda(T-t)} + \gamma_\lambda - \kappa} \right]^{\frac{2\kappa \bar{\lambda}}{\sigma_\lambda^2}} \exp\left(\frac{2(1 - e^{\gamma_\lambda(T-t)})\lambda_t}{(\gamma_\lambda + \kappa)e^{\gamma_\lambda(T-t)} + \gamma_\lambda - \kappa}\right) \end{aligned} \quad (4.116)$$

4.A.2 リッカチ型常微分方程式の解

アフィンモデルや 2 次ガウスモデルで導出されるリッカチ型常微分方程式の解を次の補題で与えておく．

補題 4.1. リッカチ型の常微分方程式

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{1}{2}a^2 y(t)^2 + by(t) + c \quad (4.117)$$

(ただし， a, b, c, g は定数で $c \geq 0$) の解は，境界条件

$$y(T) = g \quad (4.118)$$

のもとで，

$$y(t) = \frac{b + \gamma + (b - \gamma)\lambda e^{\gamma(T-t)}}{a^2(\lambda e^{\gamma(T-t)} + 1)} \quad (4.119)$$

で与えられる．ただし，

$$\gamma = \sqrt{b^2 + 2a^2c} \quad (4.120)$$

$$\lambda = \frac{-a^2g + b + \gamma}{a^2g - b + \gamma} \quad (4.121)$$

である．

証明. (4.117) 式は次式と同値である .

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{1}{2}a^2(y(t) - y_1)(y(t) - y_2) \quad (4.122)$$

ただし ,

$$y_1 = \frac{b + \gamma}{a^2}, \quad y_2 = \frac{b - \gamma}{a^2}, \quad \gamma = \sqrt{b^2 + 2a^2c} \quad (4.123)$$

(4.122) 式を

$$-\frac{1}{2}a^2 dt = \frac{dy(t)}{(y(t) - y_1)(y(t) - y_2)}$$

と変形し , 両辺を時間に関して $[t, T]$ の範囲で積分すれば次式を得る .

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}a^2(T - t) &= \int_{y(t)}^{y(T)} \frac{dy(s)}{(y(s) - y_1)(y(s) - y_2)} \\ &= \frac{1}{y_1 - y_2} \int_{y(t)}^{y(T)} \left\{ \frac{1}{y(s) - y_1} - \frac{1}{y(s) - y_2} \right\} dy(s) \\ &= \frac{1}{y_1 - y_2} \left\{ \ln \frac{y(T) - y_1}{y(t) - y_1} - \ln \frac{y(T) - y_2}{y(t) - y_2} \right\} = \frac{a^2}{2\gamma} \left\{ \ln \frac{g - y_1}{g - y_2} \frac{y(t) - y_2}{y(t) - y_1} \right\} \end{aligned} \quad (4.124)$$

(4.124) 式を整理すると (4.119) 式が導出される . □

4.B 拡張アフィン形式による損失の期待値・ m 次モーメントの評価

(4.4) 式の期待損失 , より一般的に損失の m 次モーメントは (4.10) 式のように回収の n 次モーメント $\zeta^{(n)}(t, s)$ の s での積分の組合せで表される . 本補論では $\zeta^{(n)}(t, s)$ を拡張アフィン形式で評価する .

まず , 4.3 節で示したように 2 次元の状態変数ベクトル $X_t = (\lambda_t, \ln A_t)^\top$ を導入すると , X_t はアフィン拡散過程に従うことがわかる . すなわち ,

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \quad (4.125)$$

であり , ドリフト $\mu(X_t)$ は状態変数ベクトル X_t のアフィン形式 , 瞬間的な分散共分散行列 $\sigma(X_t)\sigma(X_t)^\top$ の各要素も状態変数ベクトル X_t のアフィン形式で表現される . Duffie, Pan and Singleton [2000] は (4.125) 式のようなアフィン拡散過程に従う状態変数について

$$\phi(v, w, X_t, t, T) = E_t \left[\exp \left(- \int_t^T R(X_u) du \right) (v \cdot X_T) e^{w \cdot X_T} \right] \quad (4.126)$$

という期待値演算を拡張アフィン形式 (extended affine) と呼んでいる . ただし ,

$$R(X_u) = r_0 + r_1 \cdot X_u \quad (4.127)$$

である . Duffie, Pan and Singleton [2000] は , この拡張アフィン形式が

$$\phi(v, w, X_t, t, T) = (C(t) + B(t) \cdot X_t) \exp(\alpha(t) + \beta(t) \cdot X_t) \quad (4.128)$$

と評価されることを示し , 係数 $C(t)$, $B(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ の従う常微分方程式を示している .

ここで

$$r_0 = 0 \text{ かつ } r_1 = (1, 0) \text{ すなわち } R(X_u) = \lambda_u \quad (4.129)$$

$$w = (0, n) \text{ すなわち } e^{w \cdot X_T} = e^{n \ln A_T} = A_T^n \quad (4.130)$$

$$v = (1, 0) \text{ すなわち } v \cdot X_T = \lambda_T \quad (4.131)$$

とすれば,

$$\phi(v, w, X_t, t, T) = E_t[\exp\left(-\int_t^T \lambda_u du\right) A_T^n \lambda_T] \quad (4.132)$$

となり, $\zeta^{(n)}(t, T)$ が拡張アフィン形式に相当していることがわかる.

(4.132) の拡張アフィン形式は, Duffie, Pan and Singleton [2000] で示された常微分方程式より, 係数 $C(t)$, $B(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ が以下の常微分方程式を満たすことになる. ただし, $B(t) = (B_1(t), B_2(t))^T$, $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))^T$ である.

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_1(t)}{dt} &= 1 + \kappa\beta_1(t) + \frac{\sigma_A^2}{2}\beta_2(t) - \frac{1}{2}\beta(t)^T \begin{pmatrix} \sigma_\lambda^2 & \rho\sigma_\lambda\sigma_A \\ \rho\sigma_\lambda\sigma_A & \sigma_A^2 \end{pmatrix} \beta(t) \\ &= 1 + \kappa\beta_1(t) + \frac{\sigma_A^2}{2}\beta_2(t) - \frac{\sigma_\lambda^2}{2}\beta_1(t)^2 - \rho\sigma_\lambda\sigma_A\beta_1(t)\beta_2(t) - \frac{\sigma_A^2}{2}\beta_2(t)^2 \end{aligned} \quad (4.133)$$

$$\frac{d\beta_2(t)}{dt} = 0 \quad (4.134)$$

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = - \begin{pmatrix} \kappa\bar{\lambda} \\ \mu_A \end{pmatrix} \cdot \beta(t) = -\kappa\bar{\lambda}\beta_1(t) - \mu_A\beta_2(t) \quad (4.135)$$

$$\begin{aligned} -\frac{dB_1(t)}{dt} &= -\kappa B_1(t) - \frac{\sigma_A^2}{2}B_2(t) + \beta(t)^T \begin{pmatrix} \sigma_\lambda^2 & \rho\sigma_\lambda\sigma_A \\ \rho\sigma_\lambda\sigma_A & \sigma_A^2 \end{pmatrix} B(t) \\ &= -\kappa B_1(t) - \frac{\sigma_A^2}{2}B_2(t) + \sigma_\lambda^2\beta_1(t)B_1(t) \\ &\quad + \rho\sigma_\lambda\sigma_A(\beta_1(t)B_2(t) + \beta_2(t)B_1(t)) + \sigma_A^2\beta_2(t)B_2(t) \end{aligned} \quad (4.136)$$

$$-\frac{dB_2(t)}{dt} = 0 \quad (4.137)$$

$$-\frac{dC(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \kappa\bar{\lambda} \\ \mu_A \end{pmatrix} \cdot B(t) = \kappa\bar{\lambda}B_1(t) + \mu_AB_2(t) \quad (4.138)$$

境界条件は

$$\beta_1(T) = 0, \quad \beta_2(T) = n, \quad \alpha(T) = 0 \quad (4.139)$$

$$B_1(T) = 1, \quad B_2(T) = 0, \quad C(T) = 0 \quad (4.140)$$

で与えられる.

まず, (4.139) 式の境界条件のもと, (4.133), (4.134), (4.135) 式の常微分方程式を解く. (4.139) 式の境界条件と (4.134) 式より

$$\beta_2(t) = n \quad (4.141)$$

となる. (4.141) 式を (4.133) 式に代入して

$$\frac{d\beta_1(t)}{dt} = 1 + \frac{n(1-n)\sigma_A^2}{2} + (\kappa - n\rho\sigma_\lambda\sigma_A)\beta_1(t) - \frac{\sigma_\lambda^2}{2}\beta_1(t)^2 \quad (4.142)$$

を得る。(4.142) 式はリッカチ型常微分方程式になっており，(4.139) 式の境界条件のもと，4.A.2 節に示す方法で次式のように解ける．

$$\begin{aligned}\beta_1(t) &= \frac{(\tilde{\kappa}_n + \gamma_n) + (\tilde{\kappa}_n - \gamma_n)\tilde{\delta}_n e^{\gamma_n(T-t)}}{\sigma_\lambda^2(\tilde{\delta}_n e^{\gamma_n(T-t)} + 1)} = \frac{(\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)(1 - e^{\gamma_n(T-t)})}{\sigma_\lambda^2\{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n(T-t)} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)\}} \\ &= \frac{\{2 + n(1-n)\sigma_A^2\}(1 - e^{\gamma_n(T-t)})}{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n(T-t)} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)}\end{aligned}\quad (4.143)$$

ただし，

$$\tilde{\kappa}_n = \kappa - n\rho\sigma_\lambda\sigma_A \quad (4.144)$$

$$\gamma_n = \sqrt{\tilde{\kappa}_n^2 + \sigma_\lambda^2\{2 + n(1-n)\sigma_A^2\}} \quad (4.145)$$

$$\tilde{\delta}_n = \frac{\tilde{\kappa}_n + \gamma_n}{-\tilde{\kappa}_n + \gamma_n} \quad (4.146)$$

である。(4.141)，(4.143) 式を (4.135) 式に代入して (4.139) 式の境界条件のもとで積分すると，

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \alpha(t) - \alpha(T) = \int_t^T \{\kappa\bar{\lambda}\beta_1(s) + n\mu_A\}ds \\ &= n\mu_A(T-t) + \frac{\kappa\bar{\lambda}(\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)}{\sigma_\lambda^2} \int_t^T \frac{(1 - e^{\gamma_n(T-s)})}{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n(T-s)} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)} ds \\ &= \left\{ n\mu_A + \frac{\kappa\bar{\lambda}(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)}{\sigma_\lambda^2} \right\} (T-t) + \frac{2\kappa\bar{\lambda}}{\sigma_\lambda^2} \ln \frac{2\gamma_n}{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n(T-t)} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)}\end{aligned}\quad (4.147)$$

を得る．

次に，(4.140) 式の境界条件のもと (4.136)，(4.137)，(4.138) 式の常微分方程式を解く。(4.139) 式の境界条件と (4.137) 式より

$$B_2(t) = 0 \quad (4.148)$$

が得られ，(4.148)，(4.141) 式を (4.136) 式に代入すると，

$$-\frac{dB_1(t)}{dt} = -\kappa B_1(t) + \sigma_\lambda^2 \beta_1(t) B_1(t) + n\rho\sigma_\lambda\sigma_A B_1(t) \quad (4.149)$$

となる。(4.149) 式に (4.143) 式を代入し，(4.140) 式の境界条件のもとで積分すると，

$$\begin{aligned}\ln B_1(t) &= - \int_t^T \{\tilde{\kappa}_n - \sigma_\lambda^2 \beta_1(s)\} ds \\ &= -\tilde{\kappa}_n(T-t) + \sigma_\lambda^2 \int_t^T \beta_1(s) ds \\ &= \gamma_n(T-t) + 2 \ln \frac{2\gamma_n}{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n(T-t)} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)}\end{aligned}\quad (4.150)$$

となり，変形して

$$B_1(t) = \frac{4\gamma_n^2 e^{\gamma_n(T-t)}}{\{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n(T-t)} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)\}^2} \quad (4.151)$$

を得る．また，(4.148) 式を (4.138) 式に代入すれば

$$-\frac{dC(t)}{dt} = \kappa\bar{\lambda}B_1(t) \quad (4.152)$$

となり, (4.140) 式の境界条件のもとで (4.151) 式を代入して積分すれば

$$\begin{aligned}
C(t) &= \kappa \bar{\lambda} \int_t^T B_1(s) ds = 4\gamma_n^2 \kappa \bar{\lambda} \int_t^T \frac{e^{\gamma_n(T-s)}}{\{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n(T-s)} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)\}^2} ds \\
&= -\frac{4\gamma_n \kappa \bar{\lambda}}{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)} \int_{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n(T-t)} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)}^{2\gamma_n} \frac{1}{z^2} dz \\
&= \frac{2\kappa \bar{\lambda}(e^{\gamma_n(T-t)} - 1)}{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n(T-t)} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)}
\end{aligned} \tag{4.153}$$

となる.

したがって, (4.132) 式は,

$$\begin{aligned}
E_t[\exp\left(-\int_t^T \lambda_u du\right) A_T^n \lambda_T] \\
= A_t^n e^{n\mu_A(T-t)} (\tilde{C}(T-t) + \tilde{B}(T-t)\lambda_t) \exp(\tilde{\alpha}(T-t) + \tilde{\beta}(T-t)\lambda_t)
\end{aligned} \tag{4.154}$$

ただし,

$$\tilde{C}(z) = \frac{2\kappa \bar{\lambda}(e^{\gamma_n z} - 1)}{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n z} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)} \tag{4.155}$$

$$\tilde{B}(z) = \frac{4\gamma_n^2 e^{\gamma_n z}}{\{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n z} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)\}^2} \tag{4.156}$$

$$\tilde{\alpha}(z) = \frac{\kappa \bar{\lambda}(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)}{\sigma_\lambda^2} z - \frac{2\kappa \bar{\lambda}}{\sigma_\lambda^2} \ln \frac{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n z} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)}{2\gamma_n} \tag{4.157}$$

$$\tilde{\beta}(z) = \frac{(\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)}{\sigma_\lambda^2} \frac{(1 - e^{\gamma_n z})}{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n z} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)} \tag{4.158}$$

となる.

ここで,

$$\begin{aligned}
\xi_n(z|\lambda_t) &\equiv \exp(\tilde{\alpha}(z) + \tilde{\beta}(z)\lambda_t) \\
&= \left[\frac{2\gamma_n e^{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)z/2}}{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n z} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)} \right]^{\frac{2\kappa \bar{\lambda}}{\sigma_\lambda^2}} \exp\left\{ \frac{\{2 + n(1-n)\sigma_A^2\}(1 - e^{\gamma_n z})\lambda_t}{(\gamma_n + \tilde{\kappa}_n)e^{\gamma_n z} + (\gamma_n - \tilde{\kappa}_n)} \right\}
\end{aligned} \tag{4.159}$$

とすると, (4.116) 式の生存確率 $\Gamma(z|\lambda_t)$ と比較することで, $\xi_n(z|\lambda_t)$ が生存確率に相当していることがわかる. ただし, パラメータ $\kappa, \gamma_n, \bar{\lambda}$ はそれぞれ $\tilde{\kappa}_n, \gamma_n, \kappa \bar{\lambda}/\tilde{\kappa}_n$ に代わり, デフォルト強度の初期値は λ_t から $\{1 + n(1-n)\sigma_A^2/2\}\lambda_t$ に代わったものと考えられる. さらに,

$$\frac{d\tilde{\alpha}(z)}{dz} = \frac{\tilde{\kappa}_n^2 - \gamma_n^2}{2\sigma_\lambda^2} \tilde{C}(z), \quad \frac{d\tilde{\beta}(z)}{dz} = \frac{\tilde{\kappa}_n^2 - \gamma_n^2}{2\sigma_\lambda^2} \tilde{B}(z) \tag{4.160}$$

が満たされることに注目すると, $\xi_n(z|\lambda_t)$ の満期までの時間 z に関する 1 階微分が

$$\frac{d\xi_n(z|\lambda_t)}{dz} = \frac{\tilde{\kappa}_n^2 - \gamma_n^2}{2\sigma_\lambda^2} \exp(\tilde{\alpha}(z) + \tilde{\beta}(z)\lambda_t) \{\tilde{C}(z) + \tilde{B}(z)\lambda_t\} \tag{4.161}$$

で与えられることがわかる.

(4.161) 式を (4.154) 式に代入し, $T = s$ とすると

$$\zeta^{(n)}(t, s) = A_t^n e^{n\mu_A(s-t)} \frac{2\sigma_\lambda^2}{\tilde{\kappa}_n^2 - \gamma_n^2} \frac{d\xi_n(z|\lambda_t)}{dz} \Big|_{z=s-t} \tag{4.162}$$

と整理できる.

4.C 測度変換による相関とブラウン運動の関係

本補論では、確率測度 \tilde{P} のもとでのブラウン運動の変換式と、より一般的な回収の n 次モーメントに関する確率測度 $P^{(n)}$ のもとでのブラウン運動の変換式を、デフォルト強度が、(1)2次ガウス過程の場合、(2)アフィン過程の場合、それぞれで証明する。証明に際して、 W_t が標準ブラウン運動とは、以下の3点を満たすことであることに注意する。

1. (連続性) W_t が t に関して連続で $W_0 = 0$.
2. (定常正規性) 任意の $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N$ に対して、 $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$ ($j = 1, \dots, N$) が t_{j-1} までの履歴によらずにそれぞれ正規分布 $N(0, t_j - t_{j-1})$ に従う .
3. (独立増分性) 任意の $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N$ に対して、 $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$ ($j = 1, \dots, N$) が互いに独立である .

4.C.1 2次ガウス過程の場合

確率測度 \tilde{P} のもとでのブラウン運動の変換式である (4.78) 式と、より一般的な n 次モーメントに関する確率測度 $P^{(n)}$ のもとでのブラウン運動の変換式である (4.93) 式を、次の補題により確認する .

補題 4.2. (4.91) 式の $\eta(t; A^n)$ をラドン・ニコディム密度過程とする確率測度 $P^{(n)}$ のもとでは、(4.93) 式で与えられる $W_t^{A(n)}$, $W_t^{y(n)}$ が標準ブラウン運動となる .

証明. 前述の標準ブラウン運動の条件のうち、1の連続性については、 $W_t^{A(n)}$, $W_t^{y(n)}$ のいずれについてもその定義から明らかであるので、2の定常正規性と3の独立増分性を示せばよい .

ここで、(4.52) 式より

$$A_t = A_0 e^{(\mu_A - \sigma_A^2/2)t + \sigma_A W_t^A} \quad (4.163)$$

であるから、(4.91) 式より

$$\frac{\eta(t_j; A^n)}{\eta(t_{j-1}; A^n)} = \frac{A_{t_j}^n e^{-\mu_A^{(n)} t_j}}{A_{t_{j-1}}^n e^{-\mu_A^{(n)} t_{j-1}}} = e^{-n^2 \sigma_A^2 (t_j - t_{j-1})/2 + n \sigma_A W_{t_j}^A - n \sigma_A W_{t_{j-1}}^A} \quad (4.164)$$

となる .

$W_t^{A(n)}$ について、確率測度 $P^{(n)}$ のもとで2の定常正規性を示すためには、特性関数を考えると、任意の $z \in \mathbb{R}$ で、

$$E_{t_{j-1}}^{(n)} [\exp(iz(W_{t_j}^{A(n)} - W_{t_{j-1}}^{A(n)}))] = \exp(-z^2(t_j - t_{j-1})/2), \quad (4.165)$$

を示せばよい . (4.93) 式の定義と (4.164) 式より、

$$\begin{aligned} E_{t_{j-1}}^{(n)} [\exp(iz(W_{t_j}^{A(n)} - W_{t_{j-1}}^{A(n)}))] &= E_{t_{j-1}} \left[\frac{\eta(t_j; A^n)}{\eta(t_{j-1}; A^n)} e^{iz(W_{t_j}^A - W_{t_{j-1}}^A - n\sigma_A(t_j - t_{j-1}))} \right] \\ &= e^{-n^2 \sigma_A^2 (t_j - t_{j-1})/2 - n\sigma_A W_{t_{j-1}}^A} E_{t_{j-1}} [e^{n\sigma_A W_{t_j}^A} e^{iz(W_{t_j}^A - W_{t_{j-1}}^A - n\sigma_A(t_j - t_{j-1}))}] \\ &= e^{-n^2 \sigma_A^2 (t_j - t_{j-1})/2 - n\sigma_A W_{t_{j-1}}^A - izn\sigma_A(t_j - t_{j-1}) - izW_{t_{j-1}}^A} E_{t_{j-1}} [e^{(n\sigma_A + iz)W_{t_j}^A}] \\ &= e^{-n^2 \sigma_A^2 (t_j - t_{j-1})/2 - n\sigma_A W_{t_{j-1}}^A - izn\sigma_A(t_j - t_{j-1}) - izW_{t_{j-1}}^A} \\ &\quad \times e^{(n\sigma_A + iz)W_{t_{j-1}}^A + (n\sigma_A + iz)^2(t_j - t_{j-1})/2} \\ &= e^{-z^2(t_j - t_{j-1})/2} \end{aligned} \quad (4.166)$$

となり，(4.165) 式が示される．次に，3 の独立増分性を示すには，

$$E^{(n)}[\exp(i \sum_{j=1}^N z_j (W_{t_j}^{A(n)} - W_{t_{j-1}}^{A(n})))] = \prod_{j=1}^N E^{(n)}[\exp(iz_j (W_{t_j}^{A(n)} - W_{t_{j-1}}^{A(n})))] \quad (4.167)$$

を示せばよい²¹．これは，(4.165) 式より，

$$\begin{aligned} & E^{(n)}[\exp(i \sum_{j=1}^N z_j (W_{t_j}^{A(n)} - W_{t_{j-1}}^{A(n})))] \\ &= E^{(n)}[E_{t_{N-1}}^{(n)}[\exp(iz_N (W_{t_N}^{A(n)} - W_{t_{N-1}}^{A(n})))] \exp(i \sum_{j=1}^{N-1} z_j (W_{t_j}^{A(n)} - W_{t_{j-1}}^{A(n})))] \\ &= e^{-z_N^2 (t_N - t_{N-1})/2} E^{(n)}[\exp(i \sum_{j=1}^{N-1} z_j (W_{t_j}^{A(n)} - W_{t_{j-1}}^{A(n})))] \\ &= \dots = \prod_{j=1}^N e^{-z_j^2 (t_j - t_{j-1})/2} = \prod_{j=1}^N E^{(n)}[\exp(iz_j (W_{t_j}^{A(n)} - W_{t_{j-1}}^{A(n})))] \end{aligned} \quad (4.168)$$

となって示される．したがって， $W_t^{A(n)}$ は標準ブラウン運動である．

同様に， $W_t^{y(n)}$ について，任意の $z \in \mathbb{R}$ で，(4.93) 式の定義と (4.164) 式より，

$$\begin{aligned} & E_{t_{j-1}}^{(n)}[\exp(iz (W_{t_j}^{y(n)} - W_{t_{j-1}}^{y(n})))] = E_{t_{j-1}}^{(n)}\left[\frac{\eta(t_j; A^n)}{\eta(t_{j-1}; A^n)} e^{iz(W_{t_j}^y - W_{t_{j-1}}^y - n\rho\sigma_A(t_j - t_{j-1}))}\right] \\ &= e^{-n^2\sigma_A^2(t_j - t_{j-1})/2 - n\sigma_A W_{t_{j-1}}^A} E_{t_{j-1}}^{(n)}\left[e^{n\sigma_A W_{t_j}^A} e^{iz(W_{t_j}^y - W_{t_{j-1}}^y - n\rho\sigma_A(t_j - t_{j-1}))}\right] \\ &= e^{-n^2\sigma_A^2(t_j - t_{j-1})/2 - n\sigma_A W_{t_{j-1}}^A - izn\rho\sigma_A(t_j - t_{j-1}) - izW_{t_{j-1}}^y} E_{t_{j-1}}^{(n)}\left[e^{n\sigma_A W_{t_j}^A + izW_{t_j}^y}\right] \\ &= e^{-n^2\sigma_A^2(t_j - t_{j-1})/2 - n\sigma_A W_{t_{j-1}}^A - izn\rho\sigma_A(t_j - t_{j-1}) - izW_{t_{j-1}}^y} \\ &\quad \times e^{n\sigma_A W_{t_{j-1}}^A + izW_{t_{j-1}}^y + (n\sigma_A + i\rho z)^2 (t_j - t_{j-1})/2 + (1 + \rho^2)z^2 (t_j - t_{j-1})/2} \\ &= e^{-z^2 (t_j - t_{j-1})/2} \end{aligned} \quad (4.169)$$

となって，2 の定常正規性が示され，(4.169) 式を用いて (4.168) 式と同じ手順で 3 の独立増分性が示されるため， $W_t^{y(n)}$ は標準ブラウン運動となる． \square

確率測度 \tilde{P} のもとでのブラウン運動の変換式が (4.78) 式で与えられることは，補題 4.2 を $n = 1$ で考えれば確認できる．

4.C.2 アフィン過程の場合

確率測度 \tilde{P} のもとでのブラウン運動の変換式である (4.34) 式と，より一般的な n 次モーメントに関する確率測度 $P^{(n)}$ のもとでのブラウン運動の変換式である (4.44) 式を，次の補題により確認する．

補題 4.3. (4.42) 式の $\eta(t; A^n)$ をラドン・ニコディム密度過程とする確率測度 $P^{(n)}$ のもとでは，(4.44) 式で与えられる $W_t^{A(n)}$ ， $W_t^{\lambda(n)}$ が標準ブラウン運動となる．

²¹独立増分性の証明は西山 [2011] の問 6.12.1 への解答を参考にした．

証明. まず, 準備として, (4.14) 式から,

$$A_t = A_0 e^{\mu A t - \frac{\sigma_A^2}{2} \int_0^t \lambda_u du + \sigma_A \int_0^t \sqrt{\lambda_u} dW_u^A} \quad (4.170)$$

となるから, (4.42) 式より,

$$\frac{\eta(t_j; A^n)}{\eta(t_{j-1}; A^n)} = \frac{A_{t_j}^n e^{-n\mu A t_j - \frac{n(n-1)}{2} \sigma_A^2 \int_0^{t_j} \lambda_u du}}{A_{t_{j-1}}^n e^{-n\mu A t_{j-1} - \frac{n(n-1)}{2} \sigma_A^2 \int_0^{t_{j-1}} \lambda_u du}} = e^{-\frac{n^2 \sigma_A^2}{2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \lambda_u du + n\sigma_A \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{\lambda_u} dW_u^A} \quad (4.171)$$

となる.

補題 4.2 の証明と同様, $W_t^{A(n)}$, $W_t^{y(n)}$ のいずれについてもその定義から, 標準ブラウン運動の条件のうち, 1 の連続性については明らかであるので, 2 の定常正規性と 3 の独立増分性を示せばよい.

$W_t^{A(n)}$ の正規性は, 特性関数を用いて, 任意の $z \in \mathbb{R}$ で,

$$E_{t_{j-1}}^{(n)} [\exp(iz(W_{t_j}^{A(n)} - W_{t_{j-1}}^{A(n)}))] = \exp(-z^2(t_j - t_{j-1})/2) \quad (4.172)$$

を示せばよい. (4.172) 式左辺は,

$$\begin{aligned} & E_{t_{j-1}}^{(n)} [\exp(iz(W_{t_j}^{A(n)} - W_{t_{j-1}}^{A(n)}))] \\ &= E_{t_{j-1}}^{(n)} \left[\frac{\eta(t_j; A^n)}{\eta(t_{j-1}; A^n)} e^{iz(W_{t_j}^A - W_{t_{j-1}}^A - n\sigma_A \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{\lambda_u} du)} \right] \\ &= E_{t_{j-1}}^{(n)} \left[e^{-\frac{n^2 \sigma_A^2}{2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \lambda_u du + n\sigma_A \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{\lambda_u} dW_u^A + iz(W_{t_j}^A - W_{t_{j-1}}^A) - izn\sigma_A \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{\lambda_u} du} \right] \end{aligned} \quad (4.173)$$

と展開できる. ここで, $t \in [t_{j-1}, t_j]$ の λ_t の情報を \mathcal{L}_j とし, $\mathcal{I}_{j-1} = \mathcal{F}_{t_{j-1}} \vee \mathcal{L}_j$ とする. 確率変数 X について,

$$E_{t_{j-1}} [X] = E_{t_{j-1}} [E[X | \mathcal{I}_{j-1}]] \quad (4.174)$$

となることに注目すると, (4.173) 式で,

$$\begin{aligned} & E \left[e^{n\sigma_A \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{\lambda_u} dW_u^A + iz(W_{t_j}^A - W_{t_{j-1}}^A)} | \mathcal{I}_{j-1} \right] \\ &= e^{-\frac{n^2 \sigma_A^2}{2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \lambda_u du - z^2(t_j - t_{j-1})/2 + izn\sigma_A \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{\lambda_u} du} \end{aligned} \quad (4.175)$$

となる. したがって, (4.172) 式を得るので, 2 の定常正規性が示される. また, (4.172) 式を用いて (4.168) 式と同じ手順で 3 の独立増分性が示されるため, $W_t^{A(n)}$ は標準ブラウン運動となる.

$W_t^{\lambda(n)}$ の正規性も, 特性関数を考え, 任意の $z \in \mathbb{R}$ で,

$$\begin{aligned} & E_{t_{j-1}}^{(n)} [\exp(iz(W_{t_j}^{\lambda(n)} - W_{t_{j-1}}^{\lambda(n)}))] \\ &= E_{t_{j-1}}^{(n)} \left[\frac{\eta(t_j; A^n)}{\eta(t_{j-1}; A^n)} e^{iz(W_{t_j}^\lambda - W_{t_{j-1}}^\lambda - n\rho\sigma_A \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{\lambda_u} du)} \right] \\ &= E_{t_{j-1}}^{(n)} \left[e^{-\frac{n^2 \sigma_A^2}{2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \lambda_u du + n\sigma_A \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{\lambda_u} dW_u^A + iz(W_{t_j}^\lambda - W_{t_{j-1}}^\lambda) - izn\rho\sigma_A \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{\lambda_u} du} \right] \end{aligned} \quad (4.176)$$

となるが, (4.174) 式を用いると,

$$\begin{aligned} & E \left[e^{n\sigma_A \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{\lambda_u} dW_u^A + iz(W_{t_j}^\lambda - W_{t_{j-1}}^\lambda)} | \mathcal{I}_{j-1} \right] \\ &= e^{-\frac{n^2 \sigma_A^2}{2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \lambda_u du - z^2(t_j - t_{j-1})/2 + izn\rho\sigma_A \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{\lambda_u} du} \end{aligned} \quad (4.177)$$

となることから, (4.176) 式より,

$$E_{t_{j-1}}^{(n)}[\exp(iz(W_{t_j}^{\lambda(n)} - W_{t_{j-1}}^{\lambda(n)}))] = \exp(-z^2(t_j - t_{j-1})/2) \quad (4.178)$$

を得るので, 2 の定常正規性が示される. また, (4.178) 式を用いて (4.168) 式と同じ手順で 3 の独立増分性が示されるため, $W_t^{\lambda(n)}$ は標準ブラウン運動となる. \square

確率測度 \tilde{P} のもとでのブラウン運動の変換式が (4.34) 式で与えられることは, 補題 4.3 を $n = 1$ で考えれば確認できる.

4.D 2次ガウス形式の従う常微分方程式と解

本文では, 期待回収額について測度変換を用いて, 担保価値の期待値と測度変換された割引生存確率に分離したが, 本補論ではその証明を 2 次ガウス形式の従う常微分方程式から導出する.

補題 4.4. (4.52) ~ (4.55) 式のように設定した担保価値 A_t , デフォルト強度 λ_t に対して, (4.12) 式で定義された $\zeta(t, T) = \zeta^{(n)}(t, T)$ は, $\mu_A^{(n)}$ を (4.90) 式, $\hat{y}_t = y_t^{(n)}$ を (4.94) 式で与えると,

$$\begin{aligned} \zeta(t, T) = & A_t^n e^{\mu_A^{(n)}(T-t)} (B_0(t, T) - B_1(t, T)\hat{y}_t - B_2(t, T)\hat{y}_t^2) \\ & \times \exp(\hat{C}_0(t, T) - \hat{C}_1(t, T)\hat{y}_t - \hat{C}_2(t, T)\hat{y}_t^2) \end{aligned} \quad (4.179)$$

という解を持ち, 係数 $\hat{C}_0(t, T)$, $\hat{C}_1(t, T)$, $\hat{C}_2(t, T)$ は, $\hat{\alpha}_t = \alpha_t^{(n)}$ を (4.94) 式で与えて, (4.56) 式の生存確率で y_t を \hat{y}_t , α を $\hat{\alpha}$ とした

$$\Gamma(t, T|\hat{\alpha}, \hat{y}_t) = \exp(\hat{C}_0(t, T) - \hat{C}_1(t, T)\hat{y}_t - \hat{C}_2(t, T)\hat{y}_t^2) \quad (4.180)$$

の係数として与えられ, 係数 $B_0(t, T)$, $B_1(t, T)$, $B_2(t, T)$ は

$$B_0(t, T) = -\frac{d\hat{C}_0(t, T)}{dT}, \quad B_1(t, T) = -\frac{d\hat{C}_1(t, T)}{dT}, \quad B_2(t, T) = -\frac{d\hat{C}_2(t, T)}{dT} \quad (4.181)$$

を満たすものが存在し, (4.179) 式は

$$\zeta(t, T) = -A_t^n e^{\mu_A^{(n)}(T-t)} \frac{d\Gamma(t, T|\hat{\alpha}, \hat{y}_t)}{dT} \quad (4.182)$$

で与えられる.

証明. まず, (4.54), (4.94) 式より \hat{y}_t は

$$d\hat{y}_t = -\kappa y_t dt + \sigma_y dW_t^y = (-n\rho\sigma_A\sigma_y - \kappa\hat{y}_t)dt + \sigma_y dW_t^y \quad (4.183)$$

という確率微分方程式に従い, $z_t = \ln A_t$ は (4.52) 式より

$$dz_t = (\mu_A - \sigma^2/2)dt + \sigma_A dW_t^A \quad (4.184)$$

という確率微分方程式に従う. ここで,

$$M_t = E_t[\exp\left(-\int_0^T \lambda_u du\right) \lambda_T A_T^n] = \exp\left(-\int_0^t \lambda_u du\right) \zeta(t, T) \quad (4.185)$$

とおくと， M_t はマルチンゲールになりドリフト項が 0 になるから，伊藤の公式を用いてその条件を求めると，状態変数ベクトルを (\hat{y}_t, z_t) として

$$0 = -\lambda_t \zeta(t, T) + \frac{\partial \zeta(t, T)}{\partial t} - (n\rho\sigma_A\sigma_y + \kappa\hat{y}_t) \frac{\partial \zeta(t, T)}{\partial \hat{y}} + (\mu_A - \sigma_A^2/2) \frac{\partial \zeta(t, T)}{\partial z} \\ + \frac{\sigma_y^2}{2} \frac{\partial^2 \zeta(t, T)}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\sigma_A^2}{2} \frac{\partial^2 \zeta(t, T)}{\partial z^2} + \rho\sigma_y\sigma_A \frac{\partial^2 \zeta(t, T)}{\partial \hat{y}\partial z} \quad (4.186)$$

という偏微分方程式が成立する．この偏微分方程式から，(4.179) 式のように $\zeta(t, T)$ の解を考えて，係数の従う常微分方程式を導出する²²．ここで表記の簡便化のため，

$$\xi(t, T) = A_t^n e^{\mu_A^{(n)}(T-t)} \exp(\hat{C}_0(t, T) - \hat{C}_1(t, T)\hat{y}_t - \hat{C}_2(t, T)\hat{y}_t^2) \quad (4.187)$$

とおくと，(4.186) 式の各偏微分項は以下のように与えられる．

$$\frac{\partial \zeta(t, T)}{\partial t} = \left\{ -\mu_A^{(n)} + \frac{d\hat{C}_0(t, T)}{dt} - \frac{d\hat{C}_1(t, T)}{dt}\hat{y}_t - \frac{d\hat{C}_2(t, T)}{dt}\hat{y}_t^2 \right\} \zeta(t, T) \\ + \left\{ \frac{dB_0(t, T)}{dt} - \frac{dB_1(t, T)}{dt}\hat{y}_t - \frac{dB_2(t, T)}{dt}\hat{y}_t^2 \right\} \xi(t, T) \quad (4.188)$$

$$\frac{\partial \zeta(t, T)}{\partial \hat{y}} = \{-\hat{C}_1(t, T) - 2\hat{C}_2(t, T)\hat{y}_t\} \zeta(t, T) + \{-B_1(t, T) - 2B_2(t, T)\hat{y}_t\} \xi(t, T) \quad (4.189)$$

$$\frac{\partial \zeta(t, T)}{\partial z} = \frac{\partial \zeta(t, T)}{\partial A_t} \frac{\partial A_t}{\partial z_t} = \frac{n}{A_t} \zeta(t, T) e^{z_t} = n\zeta(t, T) \quad (4.190)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta(t, T)}{\partial \hat{y}^2} = \{-\hat{C}_1(t, T) - 2\hat{C}_2(t, T)\hat{y}_t\} \frac{\partial \zeta(t, T)}{\partial \hat{y}} + \{-B_1(t, T) - 2B_2(t, T)\hat{y}_t\} \frac{\partial \xi(t, T)}{\partial \hat{y}} \\ - 2\hat{C}_2(t, T)\zeta(t, T) - 2B_2(t, T)\xi(t, T) \\ = \{\hat{C}_1(t, T) + 2\hat{C}_2(t, T)\hat{y}_t\}^2 \zeta(t, T) - 2\hat{C}_2(t, T)\zeta(t, T) - 2B_2(t, T)\xi(t, T) \\ + 2\{\hat{C}_1(t, T) + 2\hat{C}_2(t, T)\hat{y}_t\}\{\beta_1(t, T) + 2B_2(t, T)\hat{y}_t\}\xi(t, T) \quad (4.191)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta(t, T)}{\partial z^2} = n \frac{\partial \zeta(t, T)}{\partial z} = n^2 \zeta(t, T) \quad (4.192)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta(t, T)}{\partial \hat{y}\partial z} = n \frac{\partial \zeta(t, T)}{\partial \hat{y}} \quad (4.193)$$

$$= -n\{\hat{C}_1(t, T) + 2\hat{C}_2(t, T)\hat{y}_t\}\zeta(t, T) - n\{B_1(t, T) + 2B_2(t, T)\hat{y}_t\}\xi(t, T)$$

(4.188) ~ (4.193) 式を (4.186) 式に代入すると，

$$0 = \left\{ -(\hat{y}_t + \hat{\alpha} + \beta t)^2 + \frac{d\hat{C}_0(t, T)}{dt} - \frac{d\hat{C}_1(t, T)}{dt}\hat{y}_t - \frac{d\hat{C}_2(t, T)}{dt}\hat{y}_t^2 \right\} \zeta(t, T) \\ + \kappa\hat{y}_t\{\hat{C}_1(t, T) + 2\hat{C}_2(t, T)\hat{y}_t\}\zeta(t, T) \\ + \frac{\sigma_y^2}{2}\{\hat{C}_1(t, T) + 2\hat{C}_2(t, T)\hat{y}_t\}^2 \zeta(t, T) - \sigma_y^2\hat{C}_2(t, T)\zeta(t, T) \\ + \left\{ \frac{dB_0(t, T)}{dt} - \frac{dB_1(t, T)}{dt}\hat{y}_t - \frac{dB_2(t, T)}{dt}\hat{y}_t^2 \right\} \xi(t, T) \\ + \kappa\hat{y}_t\{B_1(t, T) + 2B_2(t, T)\hat{y}_t\}\xi(t, T) \\ - \sigma_y^2 B_2(t, T)\xi(t, T) + \sigma_y^2\{\hat{C}_1(t, T) + 2\hat{C}_2(t, T)\hat{y}_t\}\{B_1(t, T) + 2B_2(t, T)\hat{y}_t\}\xi(t, T) \quad (4.194)$$

²²この証明法は，楠岡・青沼・中川 [2001] の定理 2.1 の証明を参考にした．

となる．ここで，(4.194) 式で $\zeta(t, T)$ が係る項について， \hat{y}_t の 2 次式，1 次式，0 次式をまとめ，それぞれ 0 とおくと以下の常微分方程式を得る．

$$\frac{d\hat{C}_2(t, T)}{dt} = -1 + 2\kappa\hat{C}_2(t, T) + 2\sigma_y^2\hat{C}_2(t, T)^2 \quad (4.195)$$

$$\frac{d\hat{C}_1(t, T)}{dt} = -2(\hat{\alpha} + \beta t) + \kappa\hat{C}_1(t, T) + 2\sigma_y^2\hat{C}_1(t, T)\hat{C}_2(t, T) \quad (4.196)$$

$$\frac{d\hat{C}_0(t, T)}{dt} = (\hat{\alpha} + \beta t)^2 - \frac{\sigma_y^2}{2}\hat{C}_1(t, T)^2 + \sigma_y^2\hat{C}_2(t, T) \quad (4.197)$$

次に，(4.194) 式で $\xi(t, T)$ が係る項について， \hat{y}_t の 2 次式，1 次式，0 次式をまとめ，それぞれ 0 とおくと以下の常微分方程式を得る．

$$\frac{dB_2(t, T)}{dt} = 2\kappa B_2(t, T) + 4\sigma_y^2\hat{C}_2(t, T)B_2(t, T) \quad (4.198)$$

$$\frac{dB_1(t, T)}{dt} = \kappa B_1(t, T) + 2\sigma_y^2\hat{C}_2(t, T)B_1(t, T) + 2\sigma_y^2\hat{C}_1(t, T)B_2(t, T) \quad (4.199)$$

$$\frac{dB_0(t, T)}{dt} = \sigma_y^2 B_2(t, T) - \sigma_y^2\hat{C}_1(t, T)B_1(t, T) \quad (4.200)$$

境界条件は， $\zeta(T, T) = \lambda_T A_T^n$ より，

$$\begin{aligned} \zeta(T, T) &= A_T^n (B_0(T, T) - B_1(T, T)\hat{y}_T - B_2(T, T)\hat{y}_T^2) \\ &\quad \times \exp(\hat{C}_0(T, T) - \hat{C}_1(T, T)\hat{y}_T - \hat{C}_2(T, T)\hat{y}_T^2) \\ &= A_T^n ((\hat{\alpha} + \beta T)^2 + 2(\hat{\alpha} + \beta T)\hat{y}_T + \hat{y}_T^2) \end{aligned} \quad (4.201)$$

であり，

$$\hat{C}_0(T, T) = \hat{C}_1(T, T) = \hat{C}_2(T, T) = 0 \quad (4.202)$$

$$B_0(T, T) = (\hat{\alpha} + \beta T)^2, \quad B_1(T, T) = -2(\hat{\alpha} + \beta T), \quad B_2(T, T) = -1 \quad (4.203)$$

で与えられる．

(4.202) 式を境界条件とする (4.195) ~ (4.197) 式の常微分方程式は， α を $\hat{\alpha}$ に変更したうえで導出される生存確率

$$\Gamma(t, T|\hat{\alpha}, \hat{y}_t) = \exp(C_0(t, T) - C_1(t, T)\hat{y}_t - C_2(t, T)\hat{y}_t^2) \quad (4.204)$$

での $C_2(t, T)$ ， $C_1(t, T)$ ， $C_0(t, T)$ の常微分方程式 ((4.57) ~ (4.60) 式) と等しいので，(4.180) 式の係数 $\hat{C}_0(t, T)$ ， $\hat{C}_1(t, T)$ ， $\hat{C}_2(t, T)$ として与えられる．(4.180) 式の生存確率を満期 T について微分すると

$$\frac{d\Gamma(t, T|\hat{\alpha}, \hat{y}_t)}{dT} = \left\{ \frac{d\hat{C}_0(t, T)}{dT} - \frac{d\hat{C}_1(t, T)}{dT}\hat{y}_t - \frac{d\hat{C}_2(t, T)}{dT}\hat{y}_t^2 \right\} \Gamma(t, T|\hat{\alpha}, \hat{y}_t) \quad (4.205)$$

を得る．一方

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma(t, T|\hat{\alpha}, \hat{y}_t)}{dT} &= \frac{d}{dT} \hat{E}_t \left[\exp \left(- \int_t^T \lambda_s ds \right) \right] = \hat{E}_t \left[\frac{d}{dT} \exp \left(- \int_t^T \lambda_s ds \right) \right] \\ &= -\hat{E}_t \left[\lambda_T \exp \left(- \int_t^T \lambda_s ds \right) \right] \end{aligned} \quad (4.206)$$

であるから , (4.205) 式と (4.206) 式について $t \rightarrow T$ の極限を考えると

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{d\hat{C}_0(t, T)}{dT} = -(\hat{\alpha} + \beta T)^2, \quad \lim_{t \rightarrow T} \frac{d\hat{C}_1(t, T)}{dT} = 2(\hat{\alpha} + \beta T), \quad \lim_{t \rightarrow T} \frac{d\hat{C}_2(t, T)}{dT} = 1 \quad (4.207)$$

を得る .

次に , (4.203) 式を境界条件とする (4.198) ~ (4.200) 式の常微分方程式の解として (4.181) 式の解が存在することを示す . (4.203) 式の境界条件は (4.207) 式より示されるので , (4.181) 式が (4.198) ~ (4.200) 式の常微分方程式を満たすことを示せばよい . まず , (4.198) 式については , (4.195) 式より

$$\begin{aligned} \frac{dB_2(t, T)}{dt} &= -\frac{d^2\hat{C}_2(t, T)}{dt dT} = -\frac{d}{dT} \frac{d\hat{C}_2(t, T)}{dt} \\ &= -\frac{d}{dT} \{-1 + 2\kappa\hat{C}_2(t, T) + 2\sigma_y^2\hat{C}_2(t, T)^2\} \\ &= 2\kappa \left(-\frac{d\hat{C}_2(t, T)}{dT} \right) + 4\sigma_y^2\hat{C}_2(t, T) \left(-\frac{d\hat{C}_2(t, T)}{dT} \right) \end{aligned} \quad (4.208)$$

となるから ,

$$B_2(t, T) = -\frac{d\hat{C}_2(t, T)}{dT} \quad (4.209)$$

が (4.198) 式と (4.203) 式の境界条件を満たす . 次に , (4.199) 式については , (4.196) 式より

$$\begin{aligned} \frac{dB_1(t, T)}{dt} &= -\frac{d^2\hat{C}_1(t, T)}{dt dT} = -\frac{d}{dT} \frac{d\hat{C}_1(t, T)}{dt} \\ &= -\frac{d}{dT} \{-2(\hat{\alpha} + \beta t) + \kappa\hat{C}_1(t, T) + 2\sigma_y^2\hat{C}_1(t, T)\hat{C}_2(t, T)\} \\ &= \kappa \left(-\frac{d\hat{C}_1(t, T)}{dT} \right) + 2\sigma_y^2\hat{C}_2(t, T) \left(-\frac{d\hat{C}_1(t, T)}{dT} \right) + 2\sigma_y^2\hat{C}_1(t, T) \left(-\frac{d\hat{C}_2(t, T)}{dT} \right) \end{aligned} \quad (4.210)$$

となるから ,

$$B_1(t, T) = -\frac{d\hat{C}_1(t, T)}{dT}, \quad B_2(t, T) = -\frac{d\hat{C}_2(t, T)}{dT} \quad (4.211)$$

が (4.199) 式と (4.203) 式の境界条件を満たす . 最後に , (4.200) 式については , (4.197) 式より

$$\begin{aligned} \frac{dB_0(t, T)}{dt} &= -\frac{d^2\hat{C}_0(t, T)}{dt dT} = -\frac{d}{dT} \frac{d\hat{C}_0(t, T)}{dt} \\ &= -\frac{d}{dT} \{(\hat{\alpha} + \beta t)^2 - \frac{\sigma_y^2}{2}\hat{C}_1(t, T)^2 + \sigma_y^2\hat{C}_2(t, T)\} \\ &= -\sigma_y^2\hat{C}_1(t, T) \left(-\frac{d\hat{C}_1(t, T)}{dT} \right) + \sigma_y^2 \left(-\frac{d\hat{C}_2(t, T)}{dT} \right) \end{aligned} \quad (4.212)$$

となるから ,

$$B_0(t, T) = -\frac{d\hat{C}_0(t, T)}{dT}, \quad B_1(t, T) = -\frac{d\hat{C}_1(t, T)}{dT}, \quad B_2(t, T) = -\frac{d\hat{C}_2(t, T)}{dT} \quad (4.213)$$

が (4.200) 式と (4.203) 式の境界条件を満たす . 以上より (4.182) 式が成立し題意は示された . \square

終章

本論文では、金融リスクの把握に際して、特に資産価格変動間の相関や相互依存構造に焦点を当てて分析を行った。

まず、第1章では、ファイナンスでのリスク指標として、金融業界で標準的になっている VaR とそれに代わる指標として提唱されている期待ショートフォールなどを紹介し、(1) テイルリスクの排除、(2) 期待効用最大化原理との整合性、(3) 劣加法性（凸性）、(4) 推計値の安定性、の4つの観点で、VaR と期待ショートフォールを比較分析した。さらに、市場がストレス状態になることを多変量極値理論とコピュラを用いて表現して、ポートフォリオの損益分布を生成し、VaR や期待ショートフォールにテイルリスクが生じるかどうかをシミュレーションとエマージング市場の為替相場変動を用いた実証分析の両側面から分析した。この結果、コピュラで表現される相互依存関係がリスク指標に大きな影響を及ぼすことが示され、特に VaR ではテイルリスクが生じやすいことが示された。

第2章では、第1章で利用したコピュラについて、その実務での利用を念頭におき、(1) コピュラのパラメータの推定、(2) 特定化したコピュラに従う乱数の発生方法をまとめた。具体例として、株式ポートフォリオ損失分布を分析したり、1万の与信ポートフォリオのリスク指標の算出などを試みた。さらに、コピュラが標準的に用いられている CDO のプライシングを行うことで、コピュラが CDO の期待損失に及ぼす影響を定量的に把握した。特に、下側裾依存性の強いコピュラが金融リスクに及ぼす影響は大きく、CDO のプライシングに際しては同じ順位相関を持つコピュラでも下側裾依存性の強いコピュラでは期待損失が保守的に見積もられることとなり、該当する格付けも異なってくることが示された。

第3章では、第2章の CDO プライシングと同様に、信用リスクを構造モデルで把握して分析を行った。ただし、通常、信用リスク分析ではデフォルト事象のみ確率的に捉えることが多いのに対して、回収率やエクスポージャーも変化するという考えに立って、信用リスクの分析を行った。具体的には、銀行が期待損失の最小化を念頭に満期までのある時点で追加融資を行ってエクスポージャーを増大させることをモデル化し、その結果、期待損失や VaR がどのように変化するかを分析した。こうした銀行の追加融資を考慮した期待損失や VaR の算出は解析的に行えることを示し、数値例を用いて定量化を行った。数値例からは、不況などで企業が逆境にあるとき、追加融資によって期待損失を下げることは可能であるが、VaR で示されるリスク量は増大することが示唆された。

第4章では、第3章で用いた1期間構造型モデルではデフォルトが連続的に生じうることを完全には考慮できない問題に注目し、瞬間的なデフォルト率であるデフォルト強度が回収率と景気を通じて負の相関を持ちながら連続的な確率過程に従うモデル化を行った。ここでは、デフォルト強度についてアフィン過程や2次ガウス過程でモデル化し、デフォルト強度が非負性を保ちつつ、回収率と連続的に負の相関も持つように設定でき、そのうえで期待損失や高次モーメント等の損失分布の性質が解析的に評価できることを示した。数値例を用いて分析した結果、デフォルト強度の回帰速度が遅いときには、負の相関が強くなるに従い、期待損失や損失の標

準偏差の拡大幅が大きくなることが示された。

以上の分析により、金融リスクのリスク指標として妥当なリスク指標を考察したうえで、資産価格変動や信用の変動などさまざまなファクター間の相関やコピュラで表現される依存構造が金融リスクに与える影響を定量的に把握する手法を与えた。実証分析や数値例により、第1章、第2章で扱ったコピュラでは、下側裾依存性の強いコピュラが金融リスクに及ぼす影響が大きいことが示され、第3章、第4章で扱った信用リスクのモデルでは、数値例により、デフォルト事象の相関のみならず、エクスポージャーの変化や回収率との相関も信用リスクに大きな影響を及ぼすことが示された。金融リスクを統計学的にきちんと把握し、資本の割り当てなどにつなげていくことは、金融機関経営の本質であり、その精緻化が望まれる。本論文で考察した定量化手法はその精緻化の一助になるものと思われる。

謝辞

本論文の執筆にあたり、紹介教員である山下智志教授には、本論文の第3,4章の内容を構成する原論文の共著者として2006年1月から懇切丁寧なご指導を賜ったほか、本論文の作成に際しても貴重なご助言とご鞭撻を多数賜りました。心より感謝するとともに深く御礼申し上げます。本論文の審査過程において、数々のご助言とご指導を賜りました、栗木哲教授、首都大学東京大学院社会科学研究所町幸雄教授、西山陽一准教授、川崎能典准教授、佐藤整尚准教授にも深謝致します。また、本論文の第1,2章の内容を構成する原論文の共著者である、山井康浩、戸坂凡展、山田哲也、新谷幸平の各氏には、共著者として一緒に研究に取り組んで頂いたことに加え、その内容を本論文に含めることを快諾して下さったことに感謝致します。

参考文献

- Acerbi, C., C. Nordio, and C. Sirtori [2001], “Expected shortfall as a tool for financial risk management,” Arxiv preprint cond-mat/0102304.
- Acerbi, C. and D. Tasche [2002], “On the coherence of expected shortfall,” *Journal of Banking & Finance*, **26**(7), pp. 1487–1503.
- Ahn, D.-H., R. F. Dittmar, and A. R. Gallant [2002], “Quadratic Term Structure Models: Theory and Evidence,” *Review of Financial Studies*, **15**(1), pp. 243–288.
- Altman, E. I., B. Brady, A. Resti, and A. Sironi [2005], “The Link between Default and Recovery Rates: Theory, Empirical Evidence, and Implications,” *The Journal of Business*, **78**(6), pp. 2203–2228.
- Altman, E. I., A. Resti, and A. Sironi [2001], “Analyzing and Explaining Default Recovery Rates,” ISDA Research Report, London.
- Andersson, F., H. Mausser, D. Rosen, and S. Uryasev [2001], “Credit risk optimization with conditional value-at-risk criterion,” *Mathematical Programming*, **89**(2), pp. 273–292.
- Artzner, P., F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath [1997], “Thinking coherently,” *Risk*, **10**(11), pp. 68–71.
- Artzner, P., F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath [1999], “Coherent measures of risk,” *Mathematical Finance*, **9**(3), pp. 203–228.
- Bakshi, G., D. Madan, and F. Zhang [2006], “Understanding the Role of Recovery in Default Risk Models: Empirical Comparisons and Implied Recovery Rates,” working paper.
- Basak, S. and A. Shapiro [2001], “Value-at-risk based risk management: optimal policies and asset prices,” *Review of Financial Studies*, **14**(2), pp. 371–405.
- Basel Committee on Banking Supervision [2005a], “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards,” Basel Committee Publications No. 107.
- Basel Committee on Banking Supervision [2005b], “An Explanatory Note on the Basel II IRB Risk Weight Functions,” Bank for International Settlements.
- Black, F. and J. C. Cox [1976], “Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions,” *The Journal of Finance*, **31**(2), pp. 351–367.
- Bouyé, E. [2002], “Multivariate extremes at work for portfolio risk measurement,” *Finance*, **23**(2), pp. 125–144.

- Bouyé, E., V. Durrleman, A. Nikeghbali, G. Riboulet, and T. Roncalli [2000], “Copulas for Finance – A Reading Guide and Some Applications,” SSRN working paper.
- Breitmeyer, C., H. Hakenes, A. Pfingsten, and C. Rehtien [1999], “Learning from poverty measurement: An axiomatic approach to measure downside risk,” Institut für Kreditwesen, Westfälische Wilhelms-Universität, Münster, Diskussionsbeitrag 99–03.
- Breymann, W., A. Dias, and P. Embrechts [2003], “Dependence structures for multivariate high-frequency data in finance,” *Quantitative Finance*, **3**(1), pp. 1–14.
- Burtschell, X., J. Gregory, and J.-P. Laurent [2009], “A Comparative Analysis of CDO Pricing Models under the Factor Copula Framework,” *Journal of Derivatives*, **16**(4), pp. 9–37.
- Capéraà, P., A. L. Fougères, and C. Genest [1997], “A nonparametric estimation procedure for bivariate extreme value copulas,” *Biometrika*, **84**(3), pp. 567–577.
- Chambers, J. M., C. L. Mallows, and B. W. Stuck [1976], “A Method for Simulating Stable Random Variables,” *Journal of the American Statistical Association*, **71**(354), pp. 340–344.
- Chen, H. and S. Joslin [2009], “Generalized Transform Analysis of Affine Processes and Asset Pricing Application,” working paper.
- Chen, L., P. Collin-Dufresne, and R. S. Goldstein [2009], “On the Relation Between the Credit Spread Puzzle and the Equity Premium Puzzle,” *Review of Financial Studies*, **22**(9), pp. 3367–3409.
- Chen, X., Y. Fan, and A. J. Patton [2004], “Simple Tests for Models of Dependence Between Multiple Financial Time Series, with Applications to U.S. Equity Returns and Exchange Rates,” London Economics Financial Markets Group Working Paper No. 483.
- Cherubini, U., E. Luciano, and W. Vecchiato [2004], *Copula Methods in Finance*: John Wiley & Sons.
- Clayton, D. G. [1978], “A Model for Association in Bivariate Life Tables and Its Application in Epidemiological Studies of Familial Tendency in Chronic Disease Incidence,” *Biometrika*, **65**(1), pp. 141–151.
- Coles, S. [2001], *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*: Springer Verlag.
- Coles, S., J. Heffernan, and J. Tawn [1999], “Dependence measures for extreme value analyses,” *Extremes*, **2**(4), pp. 339–365.
- Committee on the Global Financial System [2000], “Stress Testing by Large Financial Institutions: Current Practice and Aggregation Issues,” CGFS Publications No.14.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross [1985], “A Theory of the Term Structure of Interest Rates,” *Econometrica*, **53**(2), pp. 385–407.
- Dai, Q. and K. J. Singleton [2000], “Specification Analysis of Affine Term Structure Models,” *The Journal of Finance*, **55**(5), pp. 1943–1978.

- Duffie, D. [2005], “Credit Risk Modeling with Affine Processes,” *Journal of Banking & Finance*, **29**(11), pp. 2751–2802.
- Duffie, D. and D. Lando [2001], “Term Structure of Credit Spreads with Incomplete Accounting Information,” *Econometrica*, **69**(3), pp. 633–664.
- Duffie, D. and J. Liu [2001], “Floating-Fixed Credit Spreads,” *Financial Analysts Journal*, **57**(3), pp. 76–87.
- Duffie, D., J. Pan, and K. J. Singleton [2000], “Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-diffusions,” *Econometrica*, **68**(6), pp. 1343–1376.
- Dunbar, N. [2000], *Inventing money: The story of Long-Term Capital Management and the legends behind it*. John Wiley & Sons Inc.
- Embrechts, P., C. Klüppelberg, and T. Mikosch [1997], *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer-Verlag.
- Embrechts, P., A. McNeil, and D. Straumann [2001], “Correlation and dependency in risk management: properties and pitfalls,” in Dempster, M. A. H. ed. *Risk Management: Value at Risk and Beyond*. Cambridge University Press, pp. 176–223.
- Feller, W. [1971], *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, **2**: John Wiley and Sons, 2nd edition.
- Fishburn, P. C. [1977], “Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns,” *The American Economic Review*, **67**(2), pp. 116–126.
- Frank, M. J. [1979], “On the simultaneous associativity of $F(x, y)$ and $x + y - F(x, y)$,” *Aequationes Mathematicae*, **19**, pp. 194–226.
- Frees, E. W. and E. A. Valdez [1998], “Understanding Relationships Using Copulas,” *North American Actuarial Journal*, **2**(1), pp. 1–25.
- Frey, R., A. J. McNeil, and M. A. Nyfeler [2001], “Copulas and credit models,” *Risk*, **14**(10), pp. 111–114.
- Froot, K. A. and J. C. Stein [1998], “Risk management, capital budgeting, and capital structure policy for financial institutions: An integrated approach,” *Journal of Financial Economics*, **47**(1), pp. 55 – 82.
- Frye, J. [2000], “Collateral damage,” *Risk*, **13**(4), pp. 91–94.
- Geluk, J. L., L. Peng, and C. G. D. Vries [2000], “Convolutions of Heavy-Tailed Random Variables and Applications to Portfolio Diversification and MA(1) Time Series,” *Advances in Applied Probability*, **32**(4), pp. 1011–1026.
- Genest, C. and L.-P. Rivest [1989], “A characterization of gumbel’s family of extreme value distributions,” *Statistics & Probability Letters*, **8**(3), pp. 207–211.

- Geske, R. [1977], “The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options,” *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **12**(4), pp. 541–552.
- Gordy, M. B. [2003], “A risk-factor model foundation for ratings-based bank capital rules,” *Journal of Financial Intermediation*, **12**(3), pp. 199–232.
- Gruber, W. and R. Parchert [2006], “Overview of EAD estimation concepts,” in Engelmann, B. and R. Rauhmeier eds. *The Basel II Risk Parameters*: Springer, pp. 177–196.
- Gumbel, E. J. [1960], “Bivariate Exponential Distributions,” *Journal of the American Statistical Association*, **55**(292), pp. 698–707.
- Guo, X., R. A. Jarrow, and Y. Zeng [2009], “Modeling the Recovery Rate in a Reduced Form Model,” *Mathematical Finance*, **19**(1), pp. 73–97.
- Hauksson, H. A., M. M. Dacorogna, T. Domenig, U. A. Müller, and G. Samorodnitsky [2001], “Multivariate extremes, aggregation and risk estimation,” *Quantitative Finance*, **1**(1), pp. 79–95.
- Heffernan, J. E. [2000], “A Directory of Coefficients of Tail Dependence,” *Extremes*, **3**(3), pp. 279–290.
- Hull, J. C. [2000], *Options, Futures, & Other Derivatives*: Prentice Hall, 4th edition.
- Hull, J. and A. White [2004], “Valuation of a CDO and an n-th to Default CDS Without Monte Carlo Simulation,” *Journal of Derivatives*, **12**(2), pp. 8–23.
- Hyung, N. and C. G. de Vries [2002], “Portfolio Diversification Effects and Regular Variation in Financial Data,” *Journal of German Statistical Society*, **86**, pp. 69–82.
- Jiménez, G. and J. Mencía [2009], “Modelling the distribution of credit losses with observable and latent factors,” *Journal of Empirical Finance*, **16**(2), pp. 235–253.
- Joe, H. [1997], *Multivariate Models and Dependence Concepts*: Chapman & Hall.
- Kanter, M. [1975], “Stable Densities Under Change of Scale and Total Variation Inequalities,” *The Annals of Probability*, **3**(4), pp. 697–707.
- Kemp, A. W. [1981], “Efficient Generation of Logarithmically Distributed Pseudo-random Variables,” *Applied Statistics*, **30**(3), pp. 249–253.
- Kijima, M. and Y. Miyake [2004], “On the Term Structure of Lending Interest Rates When a Fraction of Collateral is Recovered upon Default,” *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **21**(1), pp. 35–56.
- Kijima, M., K. Tanaka, and T. Wong [2009], “A multi-quality model of interest rates,” *Quantitative Finance*, **9**(2), pp. 133–145.
- Konno, H. and H. Yamazaki [1991], “Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market,” *Management Science*, **37**(5), pp. 519–531.

- Kotz, S. and S. Nadarajah [2000], *Extreme Value Distributions Theory and Applications*: Imperial College Press.
- Kruskal, W. H. [1958], “Ordinal Measures of Association,” *Journal of the American Statistical Association*, **53**(284), pp. 814–861.
- Kupiec, P. H. [2008], “A Generalized Single Common Factor Model of Portfolio Credit Risk,” *Journal of Derivatives*, **15**(3), pp. 25–40.
- Kusuoka, S. [2001], “On Law Invariant Coherent Risk Measures,” *Advances in Mathematical Economics*, **3**, pp. 83–95.
- Ledford, A. W. and J. A. Tawn [1996], “Statistics for near independence in multivariate extreme values,” *Biometrika*, **83**(1), pp. 169–187.
- Ledford, A. W. and J. A. Tawn [1997], “Modelling Dependence Within Joint Tail Regions,” *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, **59**(2), pp. 475–499.
- Leland, H. E. [1994], “Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure,” *The Journal of Finance*, **49**(4), pp. 1213–1252.
- Leland, H. E. and K. B. Toft [1996], “Optimal Capital Structure, Endogenous Bankruptcy, and the Term Structure of Credit Spreads,” *The Journal of Finance*, **51**(3), pp. 987–1019.
- Li, D. X. [2000], “On Default Correlation: A Copula Function Approach,” *Journal of Fixed Income*, **9**(4), pp. 43–54.
- Lindskog, F., A. McNeil, and U. Schmock [2003], “Kendall’s Tau for Elliptical Distributions,” in Bol, G., G. Nakhaeizadeh, S. T. Rachev, and K. H. Ridder, T. and Vollmer eds. *Credit Risk: Measurement, Evaluation and Management*: Physica-Verlag, Heidelberg, pp. 149–156.
- Longin, F. and B. Solnik [2001], “Extreme Correlation of International Equity Markets,” *The Journal of Finance*, **56**(2), pp. 649–676.
- Magnus, J. R. and H. Neudecker [1999], *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics, Revised Edition*: John Wiley & Sons.
- Markowitz, H. [1952], “Portfolio selection,” *The Journal of Finance*, **7**(1), pp. 77–91.
- Marshall, A. W. and I. Olkin [1988], “Families of Multivariate Distributions,” *Journal of the American Statistical Association*, **83**(403), pp. 834–841.
- Mashal, R. and M. Naldi [2002], “Pricing Multiname Credit Derivatives: Heavy Tailed Hybrid Approach,” Working Paper, Columbia Business School.
- Mausser, H. and D. Rosen [1998], “Beyond VaR: from measuring risk to managing risk,” *ALGO Research Quarterly*, **1**(2), pp. 5–20.

- McNeil, A. J. [2000], “Extreme Value Theory for Risk Managers,” in Embrechts, P. ed. *Extremes and Integrated Risk Management*: Risk Waters Group, pp. 3–18.
- McNeil, A. J., R. Frey, and P. Embrechts [2005], *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*: Princeton University Press.
- Merton, R. C. [1974], “On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates,” *The Journal of Finance*, **29**(2), pp. 449–470.
- Mina, J. and J. Y. Xiao [2001], “Return to RiskMetrics: The Evolution of a Standard,” RiskMetrics Group.
- Moral, G. [2006], “EAD Estimates for Facilities with Explicit Limits,” in Engelmann, B. and R. Rauhmeier eds. *The Basel II Risk Parameters*: Springer, pp. 197–242.
- Nakagawa, H. [1999], “Valuation of Default Swap with Affine-type Hazard Rate,” *Proceeding of the Japan Academy Ser. A*, **75**(3), pp. 43–46.
- Nelsen, R. B. [2006], *An Introduction to Copulas*: Springer, 2nd edition.
- Okimoto, T. [2008], “New Evidence of Asymmetric Dependence Structures in International Equity Markets,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **43**(3), pp. 787–815.
- Overbeck, L. and W. Schmidt [2005], “Modeling Default Dependence with Threshold Models,” *Journal of Derivatives*, **12**(4), pp. 10–19.
- Pelsser, A. [1997], “A Tractable Yield-Curve Model That Guarantees Positive Interest Rates,” *Review of Derivatives Research*, **1**(3), pp. 269–284.
- Peura, S. and E. Jokivouille [2005], “LGD in a Structural Model of Default,” in Altman, E. I., A. Resti, and A. Sironi eds. *Recovery Risk*: Risk Books, Chap. 11, pp. 201–216.
- Poon, S.-H., M. Rockinger, and J. Tawn [2004], “Extreme Value Dependence in Financial Markets: Diagnostics, Models, and Financial Implications,” *Review of Financial Studies*, **17**(2), pp. 581–610.
- Pykhtin, M. [2003], “Unexpected Recovery Risk,” *Risk*, **16**(8), pp. 74–78.
- Resnick, S. I. [1987], *Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes*: Springer.
- Rockafellar, R. T. and S. Uryasev [2000], “Optimization of conditional value-at-risk,” *Journal of risk*, **2**(3), pp. 21–42.
- Romano, C. [2002], “Calibrating and Simulating Copula Functions: An Application to the Italian Stock Market,” Centro Interdipartimentale sul Diritto e l’Economia dei Mercati, Working paper n.12.
- Roy, A. D. [1952], “Safety First and the Holding of Assets,” *Econometrica*, **20**(3), pp. 431–449.

- Rudin, W. [1976], *Principles of Mathematical Analysis*: McGraw-Hill, 3rd edition.
- Samorodnitsky, G. and M. S. Taqqu [1994], *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*: Chapman & Hall/CRC.
- Schmidt, W. and I. Ward [2002], “Pricing Default Baskets,” *Risk*, **15**(1), pp. 111–114.
- Schönbucher, P. J. and D. Schubert [2001], “Copula-Dependent Defaults in Intensity Models,” SSRN Working Paper.
- Schuermann, T. [2004], “What do we know about loss given default?,” in Shimko, D. ed. *Credit Risk Models and Management, Second Edition*: Risk Books.
- Schweizer, B. and E. F. Wolff [1981], “On Nonparametric Measures of Dependence for Random Variables,” *The Annals of Statistics*, **9**(4), pp. 879–885.
- Stuart, A. and J. K. Ord [1994], *Kendall’s advanced theory of statistics. Vol. 1: Distribution theory*: Edward Arnold, 6th edition.
- Tawn, J. A. [1988], “Bivariate extreme value theory: Models and estimation,” *Biometrika*, **75**(3), pp. 397–415.
- Tsafack, G. [2009], “Asymmetric Dependence Implications for Extreme Risk Management,” *Journal of Derivatives*, **17**(1), pp. 7–20.
- Tsukahara, H. [2009], “One-parameter Families of Distortion Risk Measures,” *Mathematical Finance*, **19**(4), pp. 691–705.
- Vasicek, O. [2002], “Loan portfolio value,” *Risk*, **15**(12), pp. 160–162.
- Whetten, M. and M. Adelson [2005], “CDOs-Squared Demystified,” Nomura Fixed Income Research.
- Yamai, Y. and T. Yoshida [2002a], “On the Validity of Value-at-Risk: Comparative Analysis with Expected Shortfall,” *Monetary and Economic Studies*, **20**(1), pp. 57–86.
- Yamai, Y. and T. Yoshida [2002b], “Comparative Analyses of Expected Shortfall and VaR: Their Estimation Error, Decomposition, and Optimization,” *Monetary and Economic Studies*, **20**(1), pp. 87–122.
- Yamai, Y. and T. Yoshida [2002c], “Comparative Analyses of Expected Shortfall and VaR (2): Expected Utility Maximization and Tail Risk,” *Monetary and Economic Studies*, **20**(2), pp. 95–115.
- Yamai, Y. and T. Yoshida [2002d], “Comparative Analyses of Expected Shortfall and VaR (3): Their Validity under Market Stress,” *Monetary and Economic Studies*, **20**(3), pp. 181–237.
- Yamai, Y. and T. Yoshida [2005], “Value-at-risk versus expected shortfall: A practical perspective,” *Journal of Banking & Finance*, **29**(4), pp. 997–1005.

- Yamashita, S. and T. Yoshida [2007], “Analytical solutions for expected and unexpected losses with an additional loan,” IMES Discussion Paper Series No. 2007-E-21.
- Yamashita, S. and T. Yoshida [2010], “Analytical Solution for Expected Loss of a Collateralized Loan: A Square-root Intensity Process Negatively Correlated with Collateral Value,” IMES Discussion Paper Series No. 2010-E-10.
- Yan, J. [2007], “Enjoy the Joy of Copulas: With a Package copula,” *Journal of Statistical Software*, **21**(4).
- 安藤美孝 [2005], 「与信ポートフォリオの信用リスクの解析的な評価方法:極限損失分布およびグラニュラリティ調整を軸に」, 『金融研究』, 第 24 卷 (別冊第 2 号), 39–120 頁 .
- 池上徹 [2005], 「クレジット・デリバティブ商品の考察 ~ CDO スクエアードの仕組みとシミュレーションによる損失特性の評価と考察」, Mizuho Securities Credit Research .
- 池田亮一・小林孝雄・高橋明彦 [2005], 「負債の期間構造と信用リスク評価」, CIRJE ディスカッションペーパー CIRJE-J-131 .
- 稲村保成・白塚重典 [2008], 「証券化商品のリスク特性の分析 再証券化によるレバレッジ上昇のインパクト」, 『日銀レビュー 2008-J-6』 .
- 木島正明・田中敬一 [2007], 『資産の価格付けと測度変換』, 朝倉書店 .
- 楠岡成雄・青沼君明・中川秀敏 [2001], 『クレジット・リスク・モデル』, 金融財政事情研究会 .
- 小宮清孝 [2003], 「CDO のプライシング・モデルとそれを用いた CDO の特性等の考察:CDO の商品性、国内市場の概説とともに」, 『金融研究』, 第 22 卷 (別冊第 2 号), 89–130 頁 .
- 新谷幸平・山田哲也・吉羽要直 [2010], 「金融危機時における資産価格変動の相互依存関係:コピュラに基づく評価」, 『金融研究』, 第 29 卷 (第 3 号), 89–122 頁 .
- 塚原英敦 [2008], 「接合分布関数 (コピュラ) の理論と応用」, 北川源四郎・竹村彰通 (編) 『21 世紀の統計科学 III 数理・計算の統計科学』, 東京大学出版会, 第 5 章, 111–146 頁 .
- 戸坂凡展・吉羽要直 [2005], 「コピュラの金融実務での具体的な活用方法の解説」, 『金融研究』, 第 24 卷 (別冊第 2 号), 115–162 頁 .
- 西山陽一 [2011], 『マルチンゲール理論による統計解析の基礎』, 近代科学社 (近刊) .
- 伏見正則 [1989], 『乱数』, 東京大学出版会 .
- 藤井眞理子・竹本遼太 [2009], 「証券化と金融危機 ABS CDO のリスク特性とその評価」, 金融庁ディスカッションペーパー .
- 室町幸雄 [2007], 『信用リスク計測と CDO の価格付け』, 朝倉書店 .
- 森本祐司 [2000], 「金融と保険の融合について」, 『金融研究』, 第 19 卷 (別冊第 1 号), 289–342 頁 .
- 柳川堯 [1982], 『ノンパラメトリック法』, 培風館 .

- 山井康浩・吉羽要直 [2001a], 「バリュー・アット・リスクのリスク指標としての妥当性について 期待ショートフォールとの比較分析による理論的サーベイ」, 『金融研究』, 第 20 巻 (第 2 号), 33–68 頁.
- 山井康浩・吉羽要直 [2001b], 「期待ショートフォールによるポートフォリオのリスク計測 具体的な計算例による考察」, 『金融研究』, 第 20 巻 (別冊第 2 号), 53–93 頁.
- 山井康浩・吉羽要直 [2001c], 「リスク指標の性質に関する理論的整理 VaR と期待ショートフォールの比較分析」, 『金融研究』, 第 20 巻 (別冊第 2 号), 95–131 頁.
- 山井康浩・吉羽要直 [2002a], 「バリュー・アット・リスクと期待ショートフォールの比較分析」, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 第 45 巻 (第 4 号), 490–506 頁.
- 山井康浩・吉羽要直 [2002b], 「市場ストレス時におけるバリュー・アット・リスクと期待ショートフォールの比較: 多変量極値分布のもとでの比較分析」, 『金融研究』, 第 21 巻 (別冊第 2 号), 111–170 頁.
- 山下智志・吉羽要直 [2007], 「追加融資を考慮した信用リスク: 構造モデルによる EL と UL の解析解」, 『金融研究』, 第 26 巻 (別冊第 2 号), 103–136 頁.
- 山下智志・吉羽要直 [2010], 「デフォルト率と回収率の負の相関を考慮した担保付貸出の損失評価: CIR 型ハザード率過程での解析的評価」, IMES Discussion Paper Series No.2010-J-10.
- 山下智志・吉羽要直 [2011], 「2 次ガウス過程を用いた担保付貸出の解析的な損失分布のモーメント評価」, 『統計数理』, 第 59 巻 (第 1 号), 141–157 頁.