

6.2 古くて新しい経済物理学

田中美栄子 mieko@eagle.cs.miyazaki-u.ac.jp 宮崎大学工学部

このところ「経済物理学」をやっています、という人が増えつつある。この言葉を流行らせている[1]高安氏（我々の研究会のメンバーでもある）によれば、ボストン大学のスタンレー教授等が中心となって、経済現象を対象にした統計物理学の研究会が1997年7月にブダペストで開かれ、そこで生物物理学 Biophysics にならって、Econophysics という名がつけられたのが由来だという[2]。これより3～4年前、私が椛山女学園大学にいた頃、東北大学に赴任されたばかりの高安氏にセミナーに来て頂いた際に経済モデルの論文の話を少し聞かせて頂いたが、確かにその頃はまだ情報科学としての指向性が強くて、「物理学」と言い切ってしまう度胸はさすがの高安先生にもなかったらしい。しかし、1997年に私が宮崎大学に移って、翌年度の大学院の集中講義をお願いしたときには、「経済物理学でやりましょう」と引き受けていただいた。

一方、最近出たマンデルブロの本によれば[3]、彼のフラクタルに関するアイデアの源泉は株価の変動にあるという。1960年代、株の価格変動がまったくのブラウン運動か、何らかの相関があるのか、について研究した結果、変動の分布がガウス分布に比べて裾の広い、レヴィの安定分布になることに気づいたという。ガウス分布は2次のモーメント、すなわち「分散」が有限の値をとる、という極めて強い条件のもとでエントロピーを最大にするという条件から導かれる確率分布であるが、もっと一般に「分散」が発散する場合も含めた場合にレヴィの安定分布になる。この分布は次のように書かれる。

$$P(Z, \alpha, c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikZ - c|k|^{\alpha}) dk \quad (\text{Lévyの安定分布}) \quad (1)$$

ここでパラメータの範囲は $0 < \alpha \leq 2$ である。これは

$$P(Z, \alpha, \gamma \Delta t) = \left(\frac{\Delta t'}{\Delta t} \right)^{1/\alpha} P\left(Z \left(\frac{\Delta t'}{\Delta t} \right)^{1/\alpha}, \alpha, \gamma \Delta t'\right) \quad (2)$$

に対してスケール不変性を持つ。例えば $\alpha = 1$ の場合はコーシー分布

$$P(Z, \alpha = 1, c) = \frac{c}{\pi} \frac{1}{c^2 + Z^2} \quad (\text{Cauchy分布}) \quad (3)$$

であり、変数 Z の尺度を変えても c を適当に変化させればもとと同じ分布になる。

ところが、 $\alpha = 2$ のときのみは特別で、

$$P(Z, \alpha = 2, c) = \frac{1}{2\sqrt{\pi c}} \exp\left(-\frac{Z^2}{4c}\right) \quad (\text{Gauss分布、又は正規分布}) \quad (4)$$

となって、スケール不変性を持たない。

つまり、株価の変動がフラクタル的であるということは、ガウス分布から外れるということであり、それはまた、レヴィの安定分布でパラメータ α が2以外の値をとる場合に相当する。ガウス分布はその意味ではレヴィ分布の特別の場合であり、「ガウス分布ではなくレヴィ分布である」と言ってもそれは、条件がゆるくなってパラメータを選ぶ自由度が増えたただけだともいえるわけである。たったこれだけのことではあるが、これは大変重要なことなのである。

「分散」が有限の値をとる時はその値によって長さの基準（スケール）が固定してしまい、スケールリング則（スケール変換不変性）は成り立たない。ところが「有限値」という条件を外すやい

なやスケール変換不変性が出てくることになる。スケールの決まった指数分布に代わってスケール不変なべき分布となる。マンデルブロは株価だけでなく、世の中に存在するありとあらゆるデータにこのスケール不変性を見出してしまった。

1970年代は物性物理学がSolid State PhysicsからCondensed Matter Physicsに移り変わった変革期であったが、相転移現象の理論的記述にスケール不変性が大活躍した。単純に言えばオーダーパラメータの値が相転移点に達するとき長距離相関が起き、つまり相関が無限大になってスケール不変性が現れ、その結果対象の詳細によらない普遍的な規則が適用されるというのである。同じ時期、素粒子理論でもスケール不変性が重要な役割を果たしていた。これは質量が無視できるほどの高エネルギー領域においてスケール不変性が現れ、強い相互作用が事実上の自由運動のように見えてしまうといういわゆる漸近自由の性質が導かれて、クォーク間の強い相互作用は実は低エネルギー領域でのみ強く見えるだけで、高エネルギー領域では自由粒子のごとく見えるというBjorkenスケールリング則が理論的説明を得たわけである。そこでスケールリング則が、細分化されてゆく物理学を統一的な背景から理解する助け舟のように思われ、期待を集めることになった。ちょうどこのころ渡米した私は、最初はロチェスター大学の素粒子理論研究室の門をたたいたものの、そこには思わぬ問題がいろいろとあり、たまたまその同じ大学にスケールリング理論の権威であるElliot Montroll教授がいる事を知ってそちらに弟子入りしてしまった。

この人は統計物理学者ということになっているが、1970年代の後半には実はあまりそれをやっていなかった。その数年前に今で言う経済物理学で博士論文を提出した大学院生をサポートし切れなかったのにショックを受け、またほかにも不愉快なことが続いて彼は他所へ移ろうとしていたらしい。その博士論文がうまく通らなかった原因はうわさによると物理学科では「これは物理学ではない」、経済学科では「これは経済学ではない」、ということだったらしい。

アメリカの大学では特別待遇の教授がたまにいて、Distinguished Professorと呼ばれている。Montrollの場合はニューヨーク州が出資するEinstein Professorというポジションで、大学内にInstitute of Fundamental Studiesという研究所を持ち、その所長ということになっていた。加えて物理学科、化学科、材料・航空学科、経済学科の計4学科にわたる兼任教授でもあった。ところが大学院生の論文が物理学科と経済学科の両方で却下されたことでいたく名誉を傷つけられ、そのあと経済物理学は研究室内ではタブーとなっていた。

Montrollとは短い付き合いであったが、当時彼が何をしようとしていたかを後になって考えると、どうやらアインシュタインのブラウン運動の理論を手本にして、それをスケール不変なレヴィ過程に拡張するようなことを考えていたように思う[4]。通常のランダム・ウォークからはブラウン運動が導かれるが、それをスケール不変なレヴィ・ウォークというものに拡張しようというのである。ただ、彼は研究室の机に座って仕事をする人ではなく、いつも不在であった。図書館で見かけたという人もいれば、古いコイン・コレクションの展示場にいたとか、たまに大学に現れるときは講義のため、または秘書に口述して論文をタイプさせるためであった。ずっと以前には最前線の研究者達が大勢訪れてにぎやかに議論していたというが、70年代の終わりごろにはすっかり寂れて見る影もなかった。

ほどなくMontrollはメリーランド大学に新しくできた応用物理学部に移ったが、癌にかかってしばらく闘病の後他界した。20年後に経済物理学で学位を取ることが普通になるなどと知ったら逆立ちして驚くに違いない。この闘病中に弟子のSchlesingerと共著でアメリカの所得分布がスケールリング則に従う、という論文[5]を発表したが、この仕事を何時どのようにしてやったのか、またデータをどこから集めてきたのか私にはわからない。

さて、経済物理学がその名のごとく物理学で確立された手法を用いて経済現象を解明するものであるならば、対象である経済現象をよく観察することから始めるべきことは言うまでもない。その意味でデータを集め、その従う規則性をまず調べるのが第一である。しかしその結果、スケ

ーリング則が成立することを確かめ、その指数パラメータをデータから決定するだけでは面白くない。なぜなら先にも言ったように、2次モーメントが有限でないというだけではパラメータの自由度が広がったに過ぎないからである。パラメータが広い範囲で不変量であってくれればそれを保証する何らかの法則が奥にあることになるが、いちいち異なる値をとるのであれば自由度を増やして本質を見えにくくしただけになってしまう。

経済現象をスケーリング理論の定式化に乗せて議論できるのであろうか？このときに問題となるのはデータの客観性である。明らかに株価を始めとしてモノの値段は思惑で動く。例えばトイレトーパーが店頭から消える、と消費者が信じるだけで価格は暴騰する。そうでない、という情報を流せばそれだけで暴落もする。どのようにでも操作できるものを科学の対象として観察して何になるだろう、という疑問は誰にでも湧く。

客観的なデータを探して解析すれば良い、という立場もある。為替レートなどは随分多くの人の思惑が入り混じるために、結果として客観的な統計性に従うだろうと思われる。しかしここに現れる多体効果は本質的に物質のそれとは異なる。気体の構成要素である分子がそれぞれ勝手に振舞うのに全体としての気体は規則的に振舞う、ということをもそのままトレーディングの世界に持ち込むことはできない。第一に物質の運動は様々の不変性と対称性に拘束されているが、トレーダーの数がどれほど多くてもその世界にはスケール不変性以外にはほとんど頼るものがない。

人間の意思決定という要素を取り入れようとするとしても確率的な選択をどこかでしなければならなくなる。実用的な金融工学ソフトは必ずどこかにいくつかの可能なルールのどれを選択するかというサイコロを振ることになる。そして良いパフォーマンスを示した戦略に高い点を与えてそれが選択される確率を上げてやるとか、「**学」の範疇を出た技術的な要素が強くなっていく。「こうすれば必ずこうなる」という法則を見出すのが科学であるとすると、科学だけで金儲けをするのは難しい。いや、金儲けだけではない。実際のところ経済動向のみではなく、災害や悪天候、豊作/凶作などありとあらゆる危険/幸運を予測しようとするとき、科学の法則のみに頼って時々刻々変化する環境の変化をないがしろにするととんでもなく間違ってしまうことになる。また科学的法則を無視してただ経験則のみに頼って予測をしようとしてもうまくゆかない。複雑系の方法論が求められる所以である。

さて、経済物理学の目指すものはやはり科学的法則の抽出である。価格変動がフラクタル性を持つことはよく知られているが、その定量的解析には高速計算機とデータベースの整備が必要で、ようやく近年、価格変動の従う統計則についての研究活動が再燃してきた。

最初のインパクトは1995年に、ボストン大学のマンテーニャとスタンレーがアメリカ株価指数(Standard & Poor 500)の1分ごとの変動を解析して、その変動幅の確率分布が $\alpha = 1.4$ のレヴィ分布になる[6]と発表したことであった。

もし広い範囲での価格変動が $\alpha = 1.4$ 、または別の値でも良いが、決まったパラメータ値をもつ安定分布に従うのであれば、かつて物性物理学で目覚ましい結果をもたらした相転移現象の理論的記述に近い形で、価格変動の統計物理学を展開できるかもしれないという期待が生ずる。1.4という値が臨界指数によく出てくる分数らしい値であるのも、ひょっとしたらこれが計算できる美しい理論体系が見つかりそうな印象を与えてくれる。しかし残念なことにまだこれをやったという論文にお目にかからないところを見るとそう簡単ではないのだけれど、物質の臨界現象でのお手本があるからには少し考えればできそうにも思われる。

また、現代金融理論の基本となっている、ブラック・ショールズの公式は確率過程をガウス分布と仮定した上で成り立っているが、ガウス分布でないことが明確になればその部分を修正する必要がある。実際、そのあたりが間違っているためにブラック・ショールズの公式に頼りきっていたヘッジファンドが躓いたのだという見方もあるようである。

すなわち、ブラック・ショールズ公式とは、変動する証券価格(株価など)の不確定性をそれ

から派生する証券（オプション）の価格と適当な割合で併せ持つ効果によって帳消しにできる、という理論から導かれる、派生証券価格決定公式なわけであるが、簡単に言うと、原証券価格の時間 t による変化率は次の式で記述されるものとする[7]：

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dZ(t) \quad (5)$$

ここで期待収益率とボラティリティはそれぞれ、 $\mu = \mu(S(t), t)$, $\sigma = \sigma(S(t), t)$ というふうに原証券価格と時間とに依存する係数であり、 $dZ(t)$ は揺らぎの変数であるがこれを普通はガウス分布の確率過程と仮定するわけである。この部分をレヴィ分布のそれに書き換えることは少し考えればできそうに思われる。

以上の2点とも、一見簡単そうに見える問題ではあるが、何よりもその前にレヴィ分布の指数が普遍性を持つものか、データごとに異なる単なるパラメータなのかを知りたい。

そこで様々なデータを解析して普遍的な指数を見出すことができるかどうかを見たくなるわけである。まず、東京証券株価指数TOPIXの分次データを解析してマンテニャとスタンレーがS&P500に対して得たのとほとんど同じ指数に従うとの報告が出た[8]。ただこのデータは入手経路が非公開のためデータを貰い受けることができず、この結果を聞いても追試で確かめることは不可能だった。このようなデータは最近までデータベース化されておらず、また可能になったあとも価格の点で大学などでは手が出ず、普通の手段で手に入れることはなかなか困難なのである。

幸いなことにごく最近、このようなデータが比較的簡単に手に入るようになってきた。情報としての商品価値の高いデータ、例えば今日明日のホットなデータや、保存にお金のかかる大きなデータについては高い値段をつけて売られているが、それほどでもないデータ、例えば過去の日次データなどはwwwで公開しているものもある。しかし分次、さらには秒次のデータとなると解析したくても普通の大学では手が届かないのが実情である。

私達、宮崎大学のグループでは、wwwで無料公開されているデータの中から、各国通貨の対米ドル為替の日次データを解析中である。為替を使う理由は、株価より客観性の高い価格変動が期待できると信じるからである。株価の場合、現代の株取引は必ずしも偶発的な取引の総和でなく、大手の取引者の資金が一つのプログラムによって動かされている場合も多いため、自然現象のような客観的なデータと見なせるのかどうかの疑問がある。一方、為替取引は例えばアメリカ・ドル対ドイツ・マルクといった1種類のものに対し膨大な量の取引量が日夜行われるため、比較的客観性の高いものと考えられる。そこでwwwで公開されている、シカゴ連邦準備銀行の Daily Foreign Exchange Rates のサイト：

<http://www.frbchi.org/econinfo/finance/for-exchange/welcome.html>

にある1971年1月から1999年12月に至る29年間の各国の日次対ドルレートをを用いて価格変動に如何なる統計性が見えるかを考察する。

各国為替相場の s 日目の価格を $X(s)$ と書く。 $X(s)$ と t 日後の価格、 $X(s+t)$ との差

$$Z(s, t) = X(s) - X(s + t) \quad (6)$$

を t を固定して、 s の或る区間で取るすべての $Z(s, t)$ の値を横軸に、その値ごとの相対頻度を縦軸に取ったヒストグラムを全頻度が1になるよう規格化して描く。これは確率分布となり、もし価格変動に相関がなければガウス分布になるはずである。すなわちこのヒストグラムは(4)式で与えられる分布に対応する確率分布でフィットできることになる。そこでヒストグラムと(1)式の分布との間の自乗誤差が最小になるような α と c を決めることにする。こうして求めた α が2に近ければガウス分布である。

解析に先立ってヒストグラムを書く際に変動幅の最小値をどう決めるかの問題が生じる。そこでこれもパラメータとし、0.01, 0.02, ..., 0.5の範囲で安定なところを調べる。 Δt を1から100まで変化させながら、刻み幅と Δt の各組について、ベストフィットを与える α と c を探すと、カナダ・ドル（対アメリカ・ドル）の場合、 $\Delta t=20\sim 100$ の範囲で最小自乗誤差を与えるパラメータは $\alpha=1.4\sim 1.5$ の範囲に安定し、変動をもっとも良くフィットする α の値が $\alpha=1.4\sim 1.5$ であることがわかる。こうして求めた α に対し、 c と Δt がほぼ比例関係にあることもわかる。結論として、カナダドルの変動は指数1.4程度のレヴィ分布であるといえる[9]。

しかし同じ解析を日本円の対ドルレートで行うと、 $\Delta t=20\sim 100$ の範囲で最小自乗誤差を与えるパラメータは $\alpha=1.5$ 程度が最適値となり、カナダドルの場合とわずかが異なる。 c と α の比例関係はカナダドルの場合よりも良い値を与える。

ドイツ・マルクの対ドルレートで同じことを行うと、 $\alpha=1.6$ が最適値となる。また、 c と Δt の比例関係は、カナダドル・円・マルクの3つのうちで最も良い値を与える[9]。

これまでのところ、 α はほとんど定数のようであるが、国ごとにほんの少しずつ異なる。今後更なる解析が必要である。最後に経済物理関係のwebサイトをいくつかあげておく[10]。

文献

- [1] 高安秀樹、「価格変動の統計物理学入門」日本物理学会誌、54号3-10頁。
- [2] 高安秀樹、「高安秀樹のエコノフィジックス講座」日経サイエンス1999年5-12月号。
- [3] Benoit B. Mandelbrot, "Fractals and Scaling in Finance", (Springer, 1997).
- [4] "Random Walks and Their Applications in the Physical and Biological Sciences", AIP Conference Proceedings No.109, ed. M.Shlesinger and B.West (AIP Press).
- [5] Elliot W. Montroll and Michael Shlesinger, J. Stat. Phys., vol.32,1983, pp.209.
- [6] R.N.Mantegna and H.Eugene Stanley, Nature, vol. 376, 1995, pp.46-49.
- [7] 木島正明、「ファイナンス工学入門第Ⅱ部、派生証券の価格付け理論」（日科技連、1994.
- [8] 柳川一貴、「短い時間での株価変動を起こす要因」修士論文、日本大学理工学研究科(1998.3), 1997年日本物理学会秋の分科会講演概要集801頁、1998年652頁。
- [9] 北丸恵寛、宮崎大学工学部情報工学科に卒業論文として提出準備中。
- [10] <http://regroup5.nucl.kyushu-u.ac.jp/ks/ecophys.html>
<http://econo.nccu.edu.tw/ai/conferen.htm>
<http://koryu.soken.ac.jp/group/schedule.html>