

2 ビーム加速器における非線形共鳴

橋本 智

姫路工業大学 高度産業科学技術研究所 〒671-22 兵庫県姫路市書写 2167

E-mail: hashi@lasti.himeji-tech.ac.jp

高山 健

高エネルギー物理学研究所 〒305 茨城県つくば市大穂 1-1

E-mail: takayama@kekvox.kek.jp

1. 2 ビーム加速器と多段構成自由電子レーザー

素粒子物理学では数テラ電子ボルト領域まで電子（陽電子）を加速できる粒子加速器が望まれており、そのような将来の高エネルギー衝突型加速器として電子陽電子線形加速器（リニアコライダー）が有力である。リニアコライダーの長さは単位長さあたりの粒子の加速勾配に依存するので、現実的な規模とコストで建設するには高加速勾配の加速管とそれにマイクロ波を供給する高出力高周波源が必要になる。そのひとつのアイデアとして2ビーム加速器(Two-Beam Accelerator; TBA)が1982年にA.M.Sesslerにより提案された[1]。この方式では電子（陽電子）を加速する高加速勾配の線形加速器に平行して大電流電子ビームを走らせて、この大電流ビームの持つ運動エネルギーの一部を大電力マイクロ波に変換して高加速勾配の加速管に供給する（図1）。

このためのエネルギー変換装置の一つとしてマイクロ波領域の自由電子レーザー(Free-Electron Laser; FEL)[2]の使用が考えられている。FELとは光速近くまで加速された電子ビームの持つ運動エネルギーを電磁波エネルギーに変換する装置で、マイクロ波からX線まで波長可変かつ高出力な究極のレーザー光源である。ウイグラーと呼ばれる周期的磁場の中で蛇行運動をする電子ビームと電磁波（TBAの場合、FEL各段の入口で入力された矩形導波管TE01モードのマイクロ波）との間の相互作用により電子ビームは運動エネルギーを失い、電磁波が増幅される。FEL内で電子ビームはエネルギーを失った後、誘導加速器によって再加速される。このように2ビーム加速器はFELと誘導加速器を一周期とする多段構成型の高周波源を使用しているため、加速器システム全体のエネルギー効率が非常に高く出来る利点がある。加速器の高周波源を目指したマイクロ波FELの実験が高エネルギー物理学研究所[3,4]、Lawrence Livermore国立研究所[5]などでこれまでに行われてきた。

このような多段構成のマイクロ波FELでは、集群した大電流電子ビームを安定に長距離輸送する事が不可欠であるが、これを妨げるいくつかのビーム不安定性—位相空間内での非線形共鳴[6-9]と導波管高次モード[9,10]—が存在する。ここでは位相空間内での非線形共鳴について解説する。

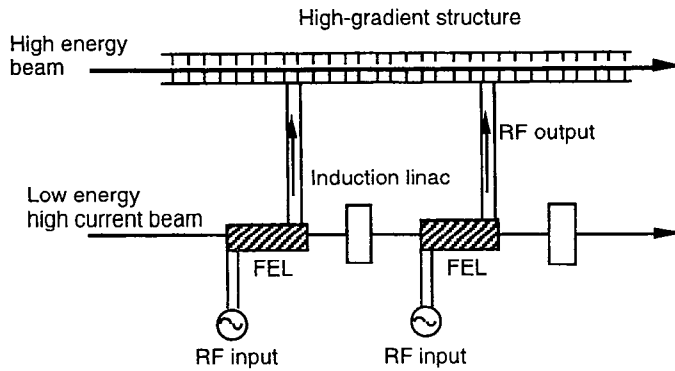


図1 2ビーム加速器と多段構成自由電子レーザー

2. ビーム位相空間における非線形共鳴

まずFELの位相空間における電子の運動について簡単に説明する。通常のFELの位相空間における電子の運動は振り子と同じ方程式で表される。すなわち粒子の軌道は図2に示すようにseparatrixに囲まれた領域内(bucket)のclosed orbitとbucket外のopen orbitに分けられる。ここで縦軸はローレンツファクター γ (電子のエネルギーを静止エネルギーで規格化した値)、横軸はポンドロモティブ位相 ψ (電磁波とウィグラとの間のビート波に対する電子の位相、ポンドロモティブ波長は電磁波の波長と同程度である)を表している。bucket内での粒子の運動をシンクロトロン振動という。またポンドロモティブ位相に関して一様に分布していた電子分布はFEL相互作用によって次第にbucket中心に集群(bunch)する(図2)。

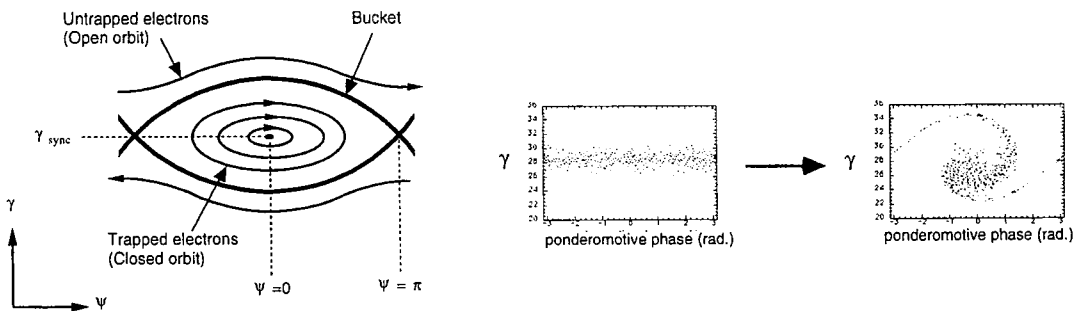


図2 位相空間での粒子の運動(シンクロトロン振動)

電子と相互作用する電磁波の振幅は一つのFEL内部で入口での微小な値から出口での非常に大きな値へとダイナミックに変化する。このために位相空間内での粒子の運動は振り子の重さと長さが増えるような非線形振り子方程式で表される。また多段構成FELの場合、各FELにおけるそのようなダイナミックな変化を周期的に繰り返す。このような強い電磁波と周期性という多段構成FELの特性からユニークな非線形現象、すなわちシンクロトロン運動の周期と多段構成FELの周期との間の非線形共鳴が起こる。

2-1 シミュレーション

FEL での電子の位相空間内の運動と電磁波の増幅を記述するいわゆる KMR 方程式 (N 個の電子についてのエネルギーとポンデロモーティブ位相、および電磁波の振幅と位相に関する微分方程式) を数値的に解いてシミュレーションを行った。シミュレーションの結果を図 3 に示す。図は矩形導波管の横幅 ((a)15cm、(b)8cm、(c)4cm) のみを変えた時の位相空間での電子分布を示している。矩形導波管のサイズを小さくしていくと (電磁波の全パワーはほぼビーム電流値で決まるので単位断面積あたりの電磁波強度が強くなる)、電子の分布はバンチした状態 (図 a) から 4 次共鳴 (図 b)、3 次共鳴 (図 c) が起こり位相空間内で共鳴構造が見られる。この様に共鳴現象は電磁波のエネルギー密度に強く依存する。また共鳴構造が現れると電子は安定領域 (空白部分) を迂回しながらシンクロトロン運動するので bucket から飛び出してビーム損失につながりビームを安定に輸送することが出来なくなる。

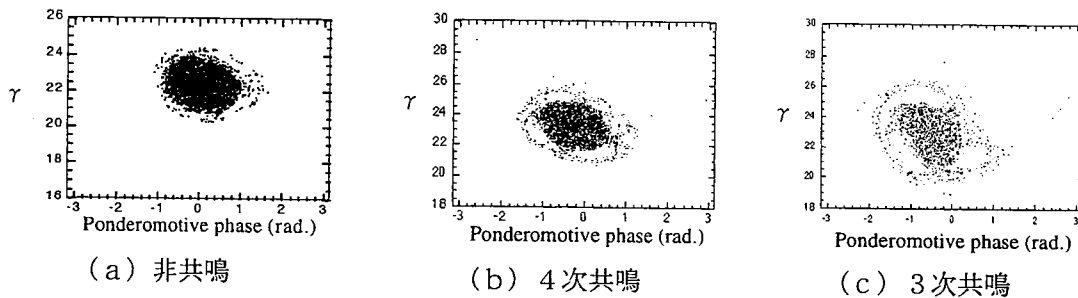


図 3. シミュレーション (非共鳴、4 次共鳴、3 次共鳴)

2-2 非線形振り子方程式

シミュレーションで見られた共鳴現象を定量的に理解するため、簡単なモデルを用いて解析的に記述することを試みる。FEL での電子と電磁波の挙動を表す KMR 方程式から位相空間内の電子の運動は二階微分方程式で表される[9]。

$$\frac{d^2\xi}{dz^2} + M_1(z)(\cos\xi - 1) + M_2(z)\sin\xi = 0 \quad (1)$$

ここで ξ はバンチ中央からの電子のポンデロモーティブ位相のずれ、 z はビーム進行方向の座標を意味する。 $M_1(z)$ 、 $M_2(z)$ は電子ビームによって増幅される電磁波の振幅に依存し、周期的に変化する係数であり、これらが解析的に記述できるとこの方程式は解くことが出来る。しかし電磁波の変化は電子の挙動に依存し、一方電子の運動は電磁波の振幅と位相に依存するため、一般にこれらの周期的係数を解析関数で記述するのは難しい。

しかし FEL マクロ粒子モデル[11]を適用することによって周期係数を解析関数として表すことができる。結果だけを示すと $M_1(z)$ および $M_2(z)$ は

$$M_1(z) = D \sin(bz), \quad M_2(z) = D [1 - \cos(bz)] \quad (D, b \text{ は定数}) \quad (2)$$

の様に三角関数で表され図 4 の様に変化する。一周期が一つの FEL に相当し、図では 3 周期分

のFELをプロットしている。

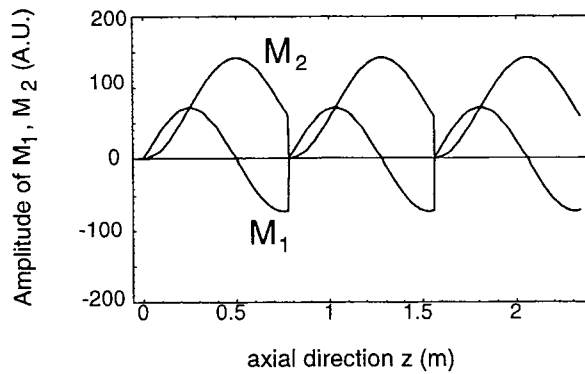


図4. 非線形振り子方程式の係数の変化

粒子分布に初期条件を与えて、非線形方程式(式1)を数値的に解いて個々の粒子の運動を追ったのが図5である。初期条件としてパンチしたビーム分布(d)を与えシミュレーションと同じ条件を用いて計算すると、電磁波強度が比較的弱いとき共鳴構造は見られないが(図a)、導波管サイズを小さくして電磁波強度を強くすると4次共鳴が現れ(図b)、さらに強くすると3次共鳴が見られた(図c)。これはシミュレーションと同じ結果であり、自由電子レーザの非線形共鳴の解析にマクロ粒子モデルが(0次近似で)適用できる事が分かる。このように位相空間内の粒子の運動は係数が周期的に変化するような非線形振り子方程式(式1)で記述でき、その周期的変化が三角関数で表せることが分かった。

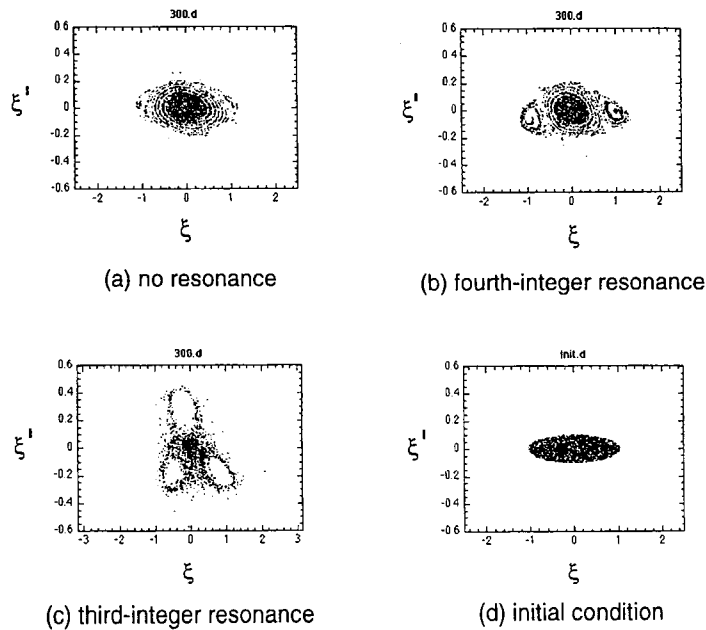


図5 非線形振り子方程式による共鳴

2-3 Isolated resonance theory

マクロ粒子モデルを使って（0次近似の範囲で）非線形共鳴が記述でき、電子の運動が非線形振り子方程式に帰結できることが分かったが、さらに FEL 系の電子のハミルトニアン

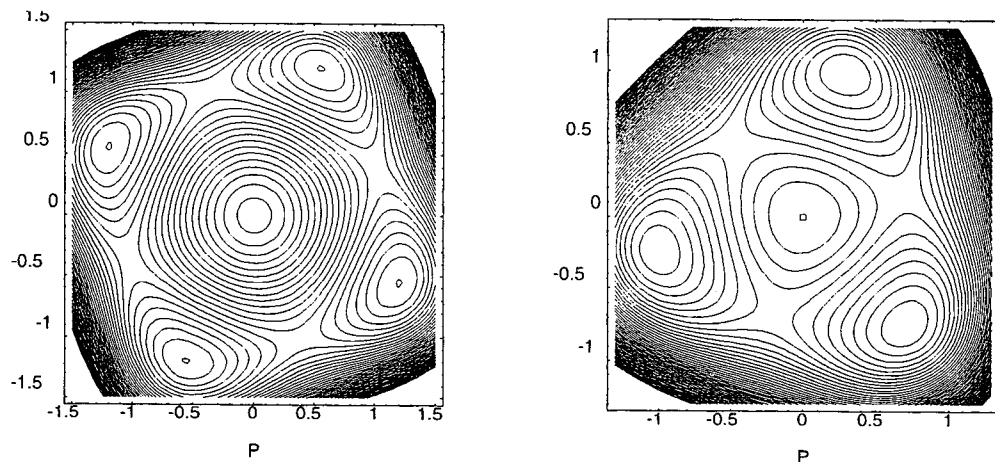
$$H(\varepsilon, \xi; z) = \frac{G(z)}{2} \varepsilon^2 + \frac{F(z)}{2} \xi^2 + (\text{nonlinear perturbation terms}) \quad (3)$$

からマクロ粒子モデルと摂動論を用いて共鳴現象を解析する。上式で ε はバンチ中心からのエネルギー γ のずれ、 G と F は電磁波の強さに依存する係数である。円形加速器で一般的に用いられるベータトロン関数およびチューンの概念を多段構成 FEL に新たに導入し、Isolated resonance theory [12] を適用すると、FEL 系のハミルトニアン（式 3）は 3 次および 4 次共鳴に注目すると、作用角変数を用いてそれぞれ次式のように変換できる [9]。

$$H_3(J, \theta) = \delta_{m/3} J + h_1 J^2 + h_3 J^{3/2} \sin(3\theta + \Theta_3) \quad (4a)$$

$$H_4(J, \theta) = \delta_{m/4} J + h_1 J^2 + h_4 J^2 \sin(4\theta + \Theta_4) \quad (4b)$$

ここで $\delta_{m/3}$ 、 $\delta_{m/4}$ 、 h_1 、 h_3 、 h_4 、 Θ_3 、 Θ_4 は定数である。上式を用いて等ハミルトニアン線をプロットしたものが図 6 である。ハミルトニアン（式 4）は独立変数に依存しない、すなわちハミルトニアンは定数であるので粒子は一本の線上を移動する。共鳴がなければ同心円を描くのであるが、3 次あるいは 4 次共鳴が生じると中央の安定した領域の外に 3 または 4 個の resonance island が発生し、その部分が準安定領域となる。その領域に初めから捕捉されている電子は捕捉されたままであり、初めその内部にいなかった粒子はその領域内へは入らない。シミュレーションや非線形振り子方程式の結果で見られた電子分布の空白部分がこれに相当する。



(a) 4次共鳴

(b) 3次共鳴

図 6. ハミルトニアン等高線図（4次共鳴、3次共鳴）

摂動論で求めた共鳴構造をシミュレーションと比較したのが図 7 である。横軸は矩形導波管の横幅、縦軸は resonance island の内外の両端での作用変数の値、すなわちバンチ中心から resonance island の内外の両端までの距離である。従って 2 曲線間の距離が resonance island の幅を表す。この図から導波管幅が 9cm 付近で 4 次共鳴が現れ、導波管幅が狭くなるにつれて island はよりバン

チ中央から離れ、island 幅は広くなる。導波管幅が 5cm 程度になると 4 次共鳴の内側に 3 次共鳴が現れる。また 2 本の縦方向のバーはシミュレーションで 3、4 次共鳴が起こる時の resonance island の幅を表す。シミュレーションと摂動論の結果がよく一致していることが分かる。

シミュレーションや振り子方程式で見られた様な導波管幅を小さくした時の共鳴構造の変化（非共鳴→4 次共鳴→3 次共鳴）についても摂動論を使って説明する事ができる。摂動論から得られた導波管幅に対する longitudinal tune (FEL 一周期を進む間に電子が行うシンクロトロン振動の数) の変化を図 8 に示す。導波管幅が狭くなるにつれて longitudinal tune は増加している。シミュレーション結果では 4 次共鳴が現れたのは導波管幅が 9cm で longitudinal tune が $1/4=0.25$ を少し越えたところである。同様に 3 次共鳴が現れたのは導波管幅が 4cm で tune が $1/3=0.333$ を少し越えたところである。したがって 4 (3) 次共鳴が起こるのは電子がウィグラー一周期を進む間に位相空間内でシンクロトロン振動を 4 (3) 分の 1 回転した時、すなわち longitudinal tune が $1/4$ ($1/3$) の時であり、共鳴が起こるかどうかは tune を見ればよい。図 8 から共鳴によるビームの損失を避けるためには横幅の広い導波管（今回用いたパラメータでは 10cm 以上）を使用すればよい事が分かる。摂動論による結果は位相空間の共鳴構造が電磁波の強度すなわち導波管のサイズに強く依存することを示しており、シミュレーション結果とよく一致している。

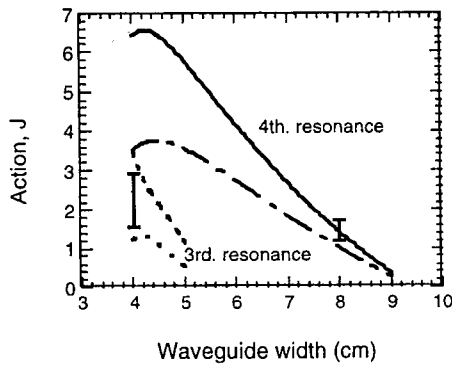


図 7 摂動論とシミュレーションの比較

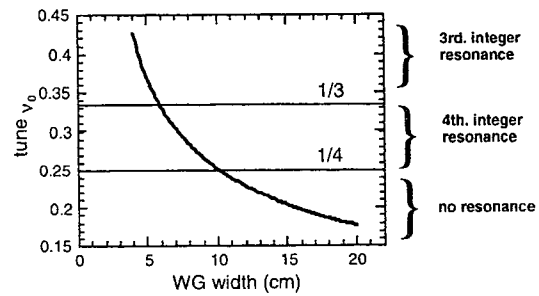


図 8 tune の変化

3. まとめ

多段構成にした自由電子レーザー (FEL) のビーム位相空間ではシンクロトロン運動の周期と多段 FEL の周期との間に共鳴が起こり、ビームが失われることがシミュレーションで明らかになった。この非線形共鳴を解析的に取り扱うため、マクロ粒子モデルを用いて位相空間での電子の運動が周期的に変化する係数を持つ非線形方程式で記述できる事を明らかにした。さらに摂動論を用いて共鳴が起こる時の条件、resonance island の位置および大きさを求め、共鳴構造の変化が longitudinal tune によって説明出来ることを示した。結論として多段構成 FEL において大電流ビームの長距離輸送を可能にするには、位相空間における共鳴のために生じるビーム不安定性が発生しない領域、すなわち導波管のサイズが大きい領域に FEL パラメータを設定する必要

がある（しかしここでは述べなかったが導波管のサイズを大きくすると高次モード（TE₂₁, TM₂₁）が発生して、これらの擾乱によってビームが失われるので、両方の影響を受けない中間領域が最適である[9]）。本研究は将来のTBAのための多段構成FELにおける大電流ビームのビーム不安定性の理論解析に役立つであろう。

参考文献

- [1] A.M. Sessler, AIP Conference Proceedings 91 (1982) 163.
- [2] Free-Electron Lasers, C.A. Brau, ACADEMIC PRESS, INC.
- [3] K. Takayama et al., J. Appl. Phys. 77 (1995) 5467.
- [4] K. Saito, Ph. D Thesis (Graduate University for Advanced Studies, 1996).
- [5] T.J. Orzechowski et al., Phys. Rev. Lett. 57 (1986) 2172.
- [6] N.M. Murray and M.A. Lieberman, AIP Conference Proceedings 130 (1987) 345.
- [7] S. Hashimoto and K. Takayama, Physics Letters A208(1995) 127.
- [8] S. Hashimoto and K. Takayama, Proc. 17th. Int. FEL Conf., Nucl. Inst. and Meth. A375 (1996) 562.
- [9] S. Hashimoto, Ph. D Thesis (Graduate University for Advanced Studies, 1996).
- [10] S. Hashimoto and K. Takayama, Proc. 18th. Int. FEL Conf., Nucl. Inst. and Meth., (in press).
- [11] K. Takayama, Particle Accelerators 39 (1985) 65.
- [12] See, for example, A. Schoch, CERN57-21 (1958), G. Guignard, CERN78-11 (1978).