

高エネルギー加速器における非線形現象

ビーム・ビーム相互作用を例として¹

平田光司²、松本修二³、Stefania Petracca⁴

2)総合研究大学院大学・加速器科学専攻

2,3,4)高エネルギー物理学研究所

高エネルギー加速器における重要かつ面白い非線形現象の例としてビーム・ビーム相互作用をとりあげ、簡単なモデルを用いてくわしい議論を行う。

Contents

1	はじめに	1
2	最も単純化した加速器のモデル	2
2.1	ハミルトン系としての一周写像	2
2.2	シンプレクティック挿入	4
3	シンクロトロン放射の影響	6
3.1	非線形効果+放射の影響	8
4	1次元ビーム・ビーム相互作用	8
4.1	強弱近似のビーム・ビーム相互作用	9
4.2	強強シミュレーション	11
4.3	強強相互作用のモデル	12
5	おわりに：ビームの物理	16

1 はじめに

加速器とは、電子や陽子などの安定な⁵荷電粒子を制御しつつ加速する装置を一般的にさす言葉である。(ただし、これでは例えばテレビも加速器に入ってしまう。ふつうテレビを加速器とは呼ばないが、そう呼んで悪いわけでもない。)シンクロトロン放射光を利用した物性物理学の研究・半導体加工、陽子線を用いたガン治療など、加速器は今日広く利用されている。加速器が開発されたそもそもの目的は、人工的に加速された高エネルギー粒子の衝突によって新しい素粒子を作り出してその性質を研究することであった。この学問は現在では高エネルギー物理学と呼ばれている。ここでは、高エ

¹WS1:平田、「高エネルギー加速器におけるビームビーム問題」；WS5:松本、「1次元シートモデルによるビームビーム不安定性のモデル」；湘南レクチャー96：平田・ペトラッカ、「高エネルギー加速器のビームの示す非線形現象」より。

²hirata@kekvax.kek.jp

³shuji@kekvax.kek.jp

⁴stefania@kekvax.kek.jp, 高エネルギー物理学研究所外国人研究員：University of Salerno, Salerno, Italy

⁵特殊なものとして、 μ -粒子などの不安定粒子を加速する装置もあるが、これは、粒子が崩壊する前に加速・利用を終えるもので、ふつうの加速器の単なる変形と見られる。

エネルギー物理学実験のための加速器、つまり高エネルギー加速器、について述べる。もっとも、高エネルギー物理学の方はこの際どうでもよくて、興味の対象はあくまで加速器内のビームである。

ビームは様々な非線形現象を示し、それ自身、研究の対象として興味深いものである。ここでは特に、「ビーム・ビーム相互作用」についてくわしく紹介したい。実際には、ビーム・ビーム相互作用を解説することで、電子ビームの物理の本質的な点はほとんどすべてカバーされるはずであるし、陽子ビームについての知識も含まれるので、「高エネルギー加速器における非線形現象」という表題も、そうおおげさではないと思う。

2 最も単純化した加速器のモデル

この論文では、考えられる限り最も簡単なモデルを用いて加速器における非線形現象を紹介する。簡単なモデルといっても、本質的なところはかなり保存されている。

加速器を上空から眺めると（実際はトンネルに入っているのだから見ることはできない）まず第一に、長い周長（高エネルギー物理学研究所のトリスタンだと約3 Km）の閉じた輪（ S^1 ）である。近づいて見れば、直径がだいたい10 cmくらいの金属製の長いパイプラインであることがわかる。つまり全体としてトーラス状をしている。このパイプの中を電子（陽電子）がほぼ光速で走るので、ある電子に注目すると約 10^{-5} 秒ごとに同じ地点を通過することになる。なお、このパイプは中を真空に保つためのものである。パイプの所どころにこのパイプを覆うように電磁石と高周波加速空洞がおかれている。電磁石は電子の横方向の（進行方向に対して横方向で、水平および垂直方向に分解される）運動を制御するもので、

- 2重極（偏向）磁石：電子の軌道を曲げる（光学のプリズムに対応）
- 4重極磁石：電子を予定軌道に収束する（光学なら凸レンズ、凹レンズに対応）
- 6重極など多重極磁石：非線形効果の調整用

などが使われている。高周波加速空洞は電子を加速するために、進行方向に強い電場を作る。

さて、このパイプライン（リング）の一カ所（観測点 O と呼ぼう）で加速器のビームを観察してみよう。なるべく話を簡単にするために、1自由度のみを考える⁶。つまり相空間は

$$(X, P)$$

とする⁷。

2.1 ハミルトン系としての一周写像

陽子ビーム、又は電子ビームでもエネルギーが極端に低い場合、ビーム粒子の運動はハミルトン系と考えられる。運動がハミルトン系であるとは、次のような性質である。

- ハミルトン系の定義 今、観測点 O で (X, P) にある粒子がリングを一周して O にもどって来たときの座標を (X', P') とする。ヤコビ行列

$$m = \begin{pmatrix} \frac{\partial X'}{\partial X} & \frac{\partial X'}{\partial P} \\ \frac{\partial P'}{\partial X} & \frac{\partial P'}{\partial P} \end{pmatrix}$$

⁶これによって失われる最も重要な性質はアーノルド拡散[1]であろう。これから問題にする電子加速器では、この効果は陽子加速器の場合ほど重要ではない。

⁷これは粒子の進行方向に垂直な平面内の鉛直方向の座標、運動量に適切なスケール変換をほどこしたものの。

がシンプレクティック条件

$$mJm^t = J, \quad J = \begin{pmatrix} 0, 1 \\ -1, 0 \end{pmatrix}$$

を満たす時、ハミルトン系と言う。

これは、「時間」パラメータ θ に関して周期 2π のハミルトニアン $H(X, P; \theta)$ が存在していることと（ほぼ）同値である。

●不動点と線形写像 上記の写像、 $(X, P) \rightarrow (X', P')$ を一周写像と呼ぶ。一周写像の不動点を (X_0, P_0) と呼ぼう。つまり、

$$(X', P') = (X, P) \equiv (X_0, P_0)$$

不動点の存在も一意性も一般的には保証されない。実際に加速器を設計する時には、この不動点が存在してパイプの中央に来るようにしておく。さて、この不動点 (X_0, P_0) が安定かどうかを判別するために、一周写像を (X_0, P_0) のまわりで線形化する。つまり

$$\begin{pmatrix} X' - X_0 \\ P' - P_0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X - X_0 \\ P - P_0 \end{pmatrix} + (X - X_0, P - P_0) \text{に関する非線形項} \quad (1)$$

この行列 M を一周行列と呼ぶ。 M はシンプレクティック行列で、シンプレクティック条件

$$MJM^t = J$$

を満たす。2行2列のシンプレクティック条件は $\det M = 1$ と同値であるので特に簡単である。

「 M の固有値の絶対値がすべて1であることと、不動点 (X_0, P_0) が安定であることが同値である」ことは良く知られている。（例えば文献[2]）。不動点 (X_0, P_0) の十分近くでは一周写像の線形近似がよく成り立ち、(1)の非線形項を落とすことができる。

●線形近似一周写像の標準形 さて、 M の固有値がすべて絶対値で1なら、それらは

$$\text{EigenValues}[M] = \{\exp i\mu, \exp -i\mu\}.$$

と書ける。 $\mu = 2\pi\nu$ とおいて ν をチューン (tune) と呼んでいる。この時、適当な線形シンプレクティック (正準) 変換 A

$$\begin{pmatrix} X_{new} \\ P_{new} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X - X_0 \\ P - P_0 \end{pmatrix}$$

によって、座標 (X, P) を再定義し (X, P) に作用する一周行列 M を

$$M = \begin{pmatrix} \cos \mu & \sin \mu \\ -\sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix} \quad (2)$$

の形にすることができる。

この新しい座標 (X, P) に関しては、一周写像は原点の近くで

$$\begin{pmatrix} X' \\ P' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} \quad (3)$$

である。実際の加速器では、線形近似が成立する範囲が十分大きくなるように磁石の配置を決める。と言っても、このための一般的な方法は無い。実際には、ある程度の経験則、直感、思いこみ、などを

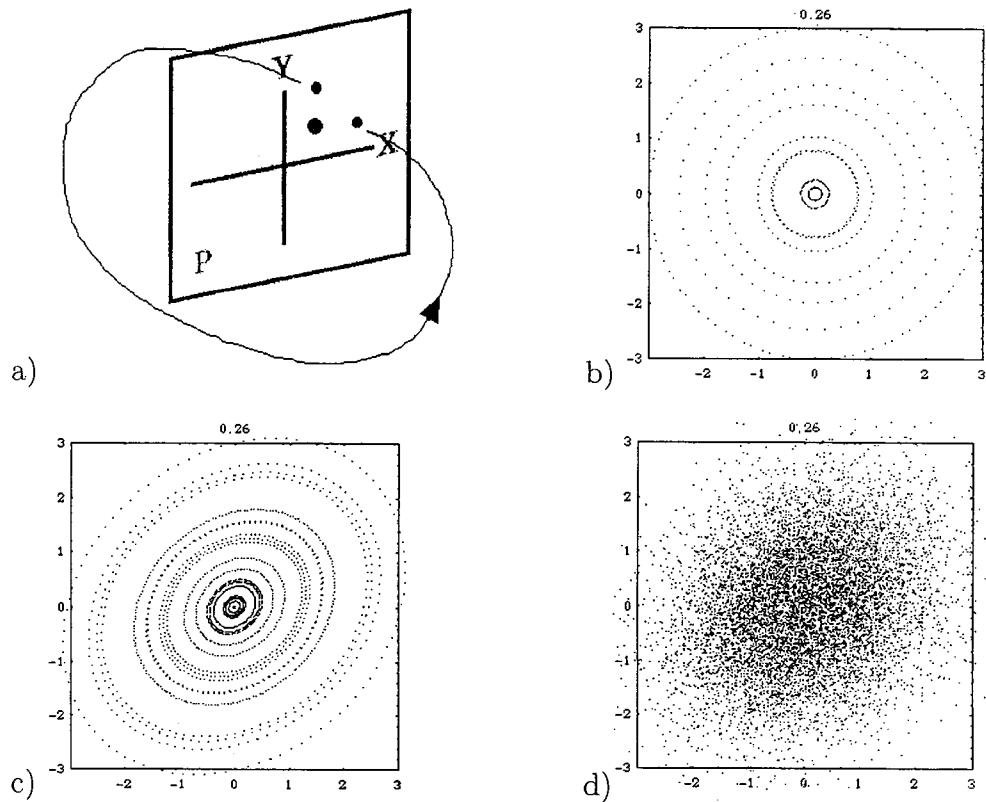


Figure 1:

a) : ポアンカレ断面、b) : (3) のみの場合、c) : 局所線形要素 (5) による変形、d) : c) にシンクロトロン放射の影響を加えた場合。

動員して設計が行われる。磁石の配置をどうやって最適化するかは、加速器物理の重大問題の一つである (あとで述べる力学口径問題と関連している)。

ある (X, P) から出発した粒子を、それが観測点 O に来るたびに相平面上にプロットして得られる図 (ポアンカレプロット) は図1-aのようになる。

このポアンカレプロットに関するかぎり、時間パラメータを θ として (リング一周で 2π 進む)、ハミルトニアンが

$$H(X, P) = \frac{\nu}{2}(X^2 + P^2)$$

であると考えても良い。 ($\theta = 2n\pi$ から $\theta = 2(n+1)\pi$ への変化だけを問題にする)。これを $2n\pi < \theta < 2(n+1)\pi$ の場合にも成り立つとする近似はスムーズ近似として時々使われている。

2.2 シンプレクティック挿入

加速器の設計がうまく行って、原点のまわりの十分大きな領域で (3) が成り立っているとする。この、「よくできた」加速器に更に何かを付け加えることを考える。

(0) 場所によらない非線形要素 もっとも簡単な場合はハミルトニアンが時間 θ によらない場合である。

$$H(X, P) = \frac{\nu}{2}(X^2 + P^2) + V(X) \quad (4)$$

ここで、 $V(X)$ は、3次以上の ($X=0$ が極小となる) 多項式とする。この様に、摂動が θ によらないものであれば、(1自由度なら) 系は求積法により完全に解けてしまう。相平面は原点のまわりでは、図1-aとトポロジカルに同相である。

加速器のモデルとしては、これは簡単すぎて、ほとんど非現実的⁸なものである。

(1)局所線形要素 観測点 O に理想的4極磁石を新たに置く。磁石の厚みは無微小とする。この時、 O における写像は

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix}' = K \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

となる (k はある定数)。そこで、一周写像は (5) と (3) を交互に働かせたものになる。観測はこの挿入の直前 (O^-) で行うこととし、挿入直後 O^+ であらわすと、

$$O^- \xrightarrow{(5)} O^+ \xrightarrow{(3)} O^- \dots$$

となる。とうぜん、 O^- から O^- への一周写像も線形写像で、一周行列は MK となる。

この挿入による効果は

- テューンの変更: MK の固有値 $\exp \pm i\bar{\mu}$ は

$$\cos \bar{\mu} = \cos \mu - \frac{k}{2} \sin \mu$$

で、 k が小さければ $\bar{\nu} = \nu - \frac{k}{4\pi}$ となる

- 相平面が変形 (図1-c参照) する。

などで、劇的变化はない。

(2)簡単な局所非線形要素 簡単な系なのに積分不能な例として、(7)の系でリングの一箇所に非線形力が加わった場合を考える。非線形力としては8極磁石を考える。8極磁石の力は、

$$X' = X, \quad P' = P - cX^3 \quad (6)$$

と書ける。つまり、今度は

$$O^- \xrightarrow{(5)} O^+ \xrightarrow{(6)} O^- \dots$$

を考えるわけである。

この系は積分不能である。じっさい、ポアンカレプロットをしてみると、図2の様になる。図で中心から外に向かって様々な構造が見える:

1. 正則領域: 相平面は基本的に図1-aと同じで、一つの粒子の断面は1次元曲線にのっている。中心付近では(3)がよく成り立つ。もう少し外側でも、(3)の μ を少し変えれば成り立っている(振幅に依存するテューン)。この近似は外側に行くに従って悪くなるが、まだ摂動計算でまかなえる。
2. カオス領域: さらに外側に行くと、ある所で劇的变化があつて、摂動計算ではまったくどうしようもない領域になる。右側の拡大図でしめしたように、一つの粒子の断面が2次的に広がる。
3. 4次の共鳴: 目玉の領域で、その範囲内では正則な運動をする。

⁸シンクロトロン振動の問題では、このモデルが意味あることがある。

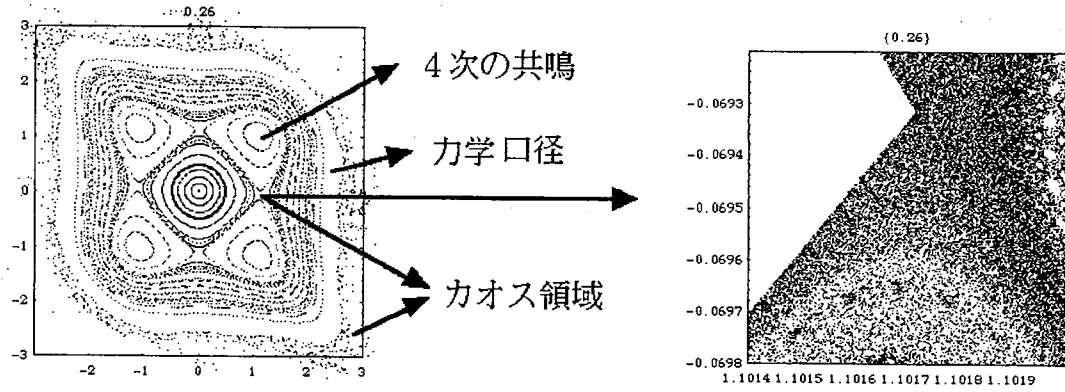


Figure 2: 8重極挿入の時のポアンカレプロット、およびカオス領域の拡大図。 $\alpha = 1$, $\nu = 0.26$

4. その外側にまた正則領域がすこしある。
5. 力学口径：「この内側の点は常に内側にとどまる」ような領域の境界。
6. 発散領域：力学口径の外側には、 $(X, P) \rightarrow \infty$ となる領域がある。

「力学口径」は加速器物理のキーワードの一つである[3, 4]。自由度1の場合、「力学口径」は一番外側のKAM曲線[1]のことであり、その存在も証明されているが、加速器物理では、自由度3の現実の力学系での力学口径を問題にする。つまり、「その内側の点は常に内側にとどまる」ような相空間における超平面である。このような力学口径が存在するという証明は無い。実際には、「内側の点は永久に内側にとどまる」必要はなく、ビームが加速器を回っている時間（数時間から一日）のあいだ、内側にとどまっていれば良い。力学口径を調べるには、精密なシミュレーションによって、長時間、粒子を追跡するが、とても一時間分の追跡はできない。有限の手続きで、その存在自体を含めて、3次元の力学系の力学口径を求めるアルゴリズムがあれば、こんないいことはないが、そういうものはありそうも無い。これが先に述べた「加速器物理の根本問題」の一つなのである。

3 シンクロトロン放射の影響

これまでは電磁場を外場として、粒子の運動がハミルトン方程式で記述できる場合を議論した。電子加速器の場合、また陽子加速器でも非常に高エネルギーの場合にはシンクロトロン放射の反跳が重要になる。ここでは、この効果の影響を簡単に紹介する。より詳しい解説として、非専門家には文献[5]を専攻学生には文献[8, 7]を勧める。

シンクロトロン放射とは、電子が外力で軌道を曲げられる時に光子を放出する現象で、光子は電子からエネルギー・運動量の一部を持ち去る。このため、リングのあちこちで、

$$P \rightarrow P - \alpha P$$

のような反応が起きている。ここで αP は光子の運動量（適当にスケールされている）で、 α そのものは、放出された光子のエネルギーと関係している確率変数である。光子の運動量がそれを放出する電子の運動量に比例するため、量子力学的平均として

$$P \rightarrow (1 - \langle \alpha \rangle) P$$

となり、シンクロトロン放射の影響は平均として摩擦項になる。また、光子の放出そのものが量子的過程であることから、 P に対する拡散効果も生ずる。

シンクロトロン放射はリングのあちこちで起きるので、確率過程としての一周写像の線形部分は一般に

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix}' = \Lambda M \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} + (\text{平均値 } 0 \text{ の確率変数})$$

と書ける。 Λ は一周行列の非シンプレクティック部分で単位行列に近い。 M は一周行列のシンプレクティック部分で、(2) の M_i と同じ形をしているが、少し異なる⁹。 Λ 、や確率変数の具体的な形を求めるにはリング全周にわたる情報が必要であるが、もっともありそうな形は[8]

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix}' = \lambda M \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

であることがわかっている。ここで、 λ は1より少し小さい定数、 \hat{r}_1 、 \hat{r}_2 は平均ゼロ、標準偏差1のガウス乱数¹⁰ である。

分布のモーメントを

$$\text{1 次 の モーメント } \bar{X} = \langle X \rangle, \quad \bar{P} = \langle P \rangle,$$

$$\text{2 次 の モーメント } \sigma = \begin{pmatrix} \langle X^2 \rangle - \bar{X}^2 & \langle XP \rangle - \bar{X}\bar{P} \\ \langle XP \rangle - \bar{X}\bar{P} & \langle P^2 \rangle - \bar{P}^2 \end{pmatrix}$$

と定義すると、これらに関する一周写像は

$$\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{P} \end{pmatrix}' = \lambda M \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{P} \end{pmatrix}, \quad \sigma' = \lambda^2 M \sigma M^t + a^2 I \quad (8)$$

となる。(8) の写像を繰り返すことによって、1次のモーメントは0に、 σ は(8) の不動点

$$\sigma^\infty = \frac{a^2}{1 - \lambda^2} I$$

へ収束していく。この時、 $\epsilon \equiv \sqrt{\det \sigma^\infty} = a^2 / (1 - \lambda^2)$ をビームの(定常)エミッタンスと呼んでいる。 \hat{r}_1, \hat{r}_2 がガウス乱数であることから、 ψ の平衡値 ψ^∞ もガウス分布していることがわかる。結局、定常分布は

$$\psi^\infty(X, P) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \exp\left(-\frac{X^2 + P^2}{2\epsilon}\right) \quad (9)$$

となる¹¹。今後、 $X \rightarrow \sqrt{\epsilon}X$ および $P \rightarrow \sqrt{\epsilon}P$ とスケール変換をして

$$\psi^\infty(X, P) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{X^2 + P^2}{2}\right) \quad (10)$$

となるようにする。同時に(7)では、 a を $(1 - \lambda^2)^{1/2}$ と置くことになる。

⁹シンクロトロン放射の反跳を無視したのと、しないのでは、一周写像、不動点、一周行列など、すべてわずかに異なる。たとえば、チューンもシンクロトロン放射の反跳の効果で少し異なっている。

¹⁰専攻学生への注：これは中心極限定理による。厳密には \hat{r}_i はガウス型からわずかにずれているはずである。中心極限定理は、多くの拡散事象を等重率で足し合わせた場合に成り立つもので、この例のように減衰項があると、最近の事象は重みが大きくなって、定理がなりたたない。

¹¹これも \hat{r}_i のガウス型からのずれと同様、(たとえ \hat{r}_i がガウス乱数でも)厳密には正しくない。

3.1 非線形効果+放射の影響

(0) ハンミルトニアンが時間によらない場合 (4) の系でシンクロトロン放射があると、運動方程式は確率微分方程式

$$\frac{dX}{ds} = [X, H], \quad \frac{dP}{ds} = [P, H] - \beta P + D\hat{r},$$

となるが、これの定常解は簡単にわかって

$$\psi^\infty(X, P) = \frac{1}{Z} \exp[-H(X, P)/H_0]$$

と書ける。この特別な場合が (10) である。

(1) 局所線形要素 (5) の挿入があると、(微小なずれを除いて) ψ^∞ はガウス型にとどまる。 O^- におけるモーメント方程式は

$$\sigma^\infty = \lambda^2 MK \sigma^\infty (MK)^t + (1 - \lambda^2) I \quad (11)$$

となり、この解 σ^∞ が ψ^∞ のモーメントとなる。結局、 O^- において ψ^∞ は

$$\psi^\infty(X, P) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\det \sigma^\infty}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\sigma^\infty)^{-1}_{ij} X_i X_j \right] \quad (12)$$

(ただし、 $(X_1, X_2) \equiv (X, P)$) で与えられる。図1-d にこの場合の定常分布の様子を示した。

次々に (5) のような線形力の挿入をしていっても、同様に扱える。

定常解が解析的に求められるのは、上記 (0) と (1) の場合のみである。

(2) 局所非線形要素 (7) と(6)のような多項式型の写像から成る系の場合、力学開口は必ず有限なので、どんな (X, P) から出発しても最終的には $(X, P) \rightarrow \infty$ となって、 ψ^∞ は存在しないと思われる。この場合、問題となるのは次のようなことである。

1. ある (X, P) から始めて、その粒子がある領域内にとどまる周回数の期待値 (粒子の平均寿命)、また、その分散などを計算する。計算機で粒子を追跡するのも、事実上不可能で、この問題をまじめに解くのは、どうも、ものすごく難しそうである。実際にはかなり粗雑な近似計算でまにあわせている。
2. 力学開口が十分大きいと、 ψ が近似的な定常状態におちついている、とみなせる場合がある。この場合の近似的な ψ^∞ の形 (特に振幅の大きい場所での形) を求める。
これらの問題は本格的には手をつけられていないので、研究すべき問題がたくさんある。

4 1次元ビーム・ビーム相互作用

衝突型加速器とは、図3のような装置で、リングの一箇所ですべてのビームを衝突させ、そこで起きる高エネルギー反応を観測するものである。この場合、最も重要な量はルミノシティ L である。これは、物理実験が対象とするある反応 (散乱) 過程の単位時間当たりの発生頻度、 dn/dt とその反応 (散乱) 断面積 σ との比例係数である。つまり、

$$\frac{dn}{dt} = \sigma L.$$

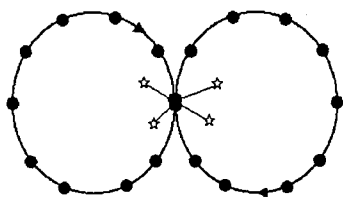


Figure 3: 電子陽電子蓄積型加速器。リングの一点 (IP) で二つのビームが衝突する (図中で☆が出ているところ)。

当然、 L は大きいほどよい。

L を大きくしようとすると、ビーム同士が電磁的に影響をおよぼしあう現象が顕著になる。これをビーム・ビーム相互作用という。ここでは、自由度を1とした簡単な系でビーム・ビーム相互作用の効果を紹介する。

4.1 強弱近似のビーム・ビーム相互作用

局所非線形要素による力(6)の場合、 X が大きくなると力も大きくなる。加速器の粒子に働く力は主として磁石の磁場によるもので、かならず X^n , ($n > 0$) の形になる。ビーム自身によって作られる電磁場による力、ビーム・ビーム力はこの例外となる。

今、電子ビームには1つの電子しか無く、これが、強力な陽電子ビームと衝突するとする。(これを、強弱近似、強弱描像などと呼ぶ)。この時、電子の受ける力は

$$P \rightarrow P - 2\pi^{3/2}\eta \operatorname{erf}(X/\sqrt{2}) \quad (13)$$

とモデル化できる。この力は、 X^n ($n > 0$) と異なり、遠方では定数となる。このため、力学口径は ∞ である。 η はビーム・ビームパラメータと呼ばれる無次元の量で、ビーム・ビーム相互作用の強さをあらわす。通常は0.05位の大きさである。(7) と (13) からなる系を調べる。

- シンプレクティックな場合 まず、シンクロトロン放射の影響を無視し、(7) を (3) に置き換えた場合を見ておこう。図4の左側は、いくつかの異なるチューン ν での相空間の様子を示したものである。 $\nu = 0.24$ の場合を図2 と比べると、4次の共鳴が存在することは共通しているが、ビーム・ビーム力の場合には力学口径がなくなっている(無限に大きくなっている)ことが分かる。相空間の様子は ν によって大きく変わる。おおざっぱに言って、チューンが $\nu \lesssim n/m$ (n, m は正の整数で $n \leq m$) の時、原点のそばに m 次の(主)共鳴が存在する。その外側にも(副次的な)小さな共鳴が存在する($\nu = 0.04$ の場合を見よ)。副次共鳴の位置と大きさを手計算でもとめるのは、そう簡単ではない。 $\nu = 0.48$ の場合には原点が不安定となる。これは非線形力による半整数 ($m = 2$) 共鳴の場合に典型的に起きることである。

- シンクロトロン放射の影響 図4の右側には、左側と同じ ν で、シンクロトロン放射がある場合の平衡分布が示してある。原点に近い大きな共鳴状態は粒子を捕獲できる。図には示していないが、複数の共鳴状態に粒子が捕獲されている場合、原点付近には粒子がない場合など、さまざまな状態があり、 ν の微小な変化が定常状態分布では大きな定性的な違いとなることが多い。簡単な系なので、定常分布を完全に解析的に計算できる、と思うだろうが、これがけっこう複雑で難しく、研究課題の一つである。

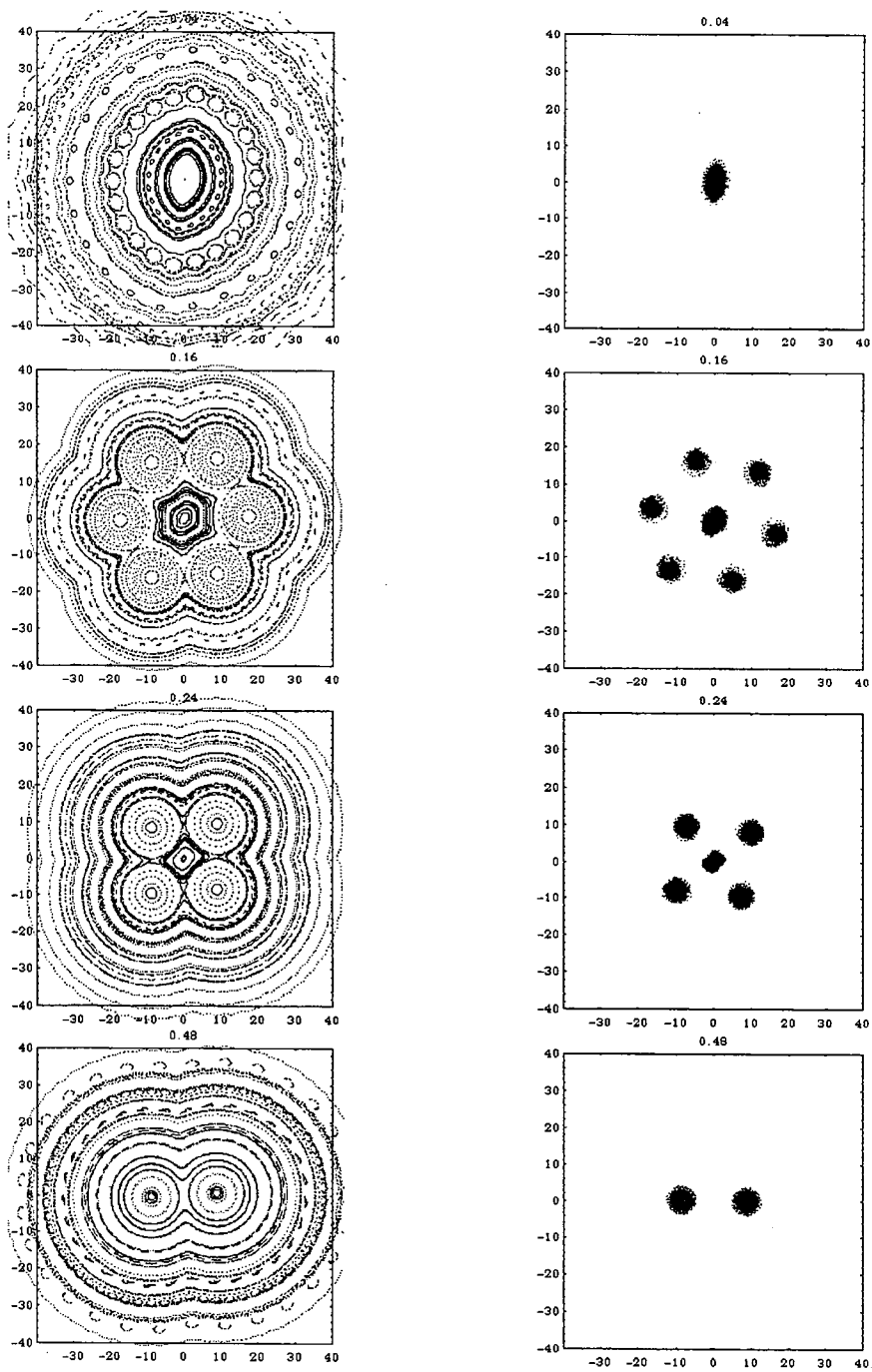


Figure 4: 強弱ビーム・ビーム相互作用におけるポアンカレ=プロット。上から $\nu = 0.04, 0.16, 0.24, 0.48$ 。左はシンクロトロン放射が無い場合で、右はあるばあいである。定数 η は0.1にとってある。

4.2 強強シミュレーション

強弱描像下では、強ビームはなんら影響をうけず、弱ビーム内の粒子が、衝突点での強ビームによるキック (13) を受ける。ところで、衝突する二つのビームの強度がほぼ同じであるような場合では、両方のビームは互いに影響をおよぼしあい、もはや強弱描像は成り立たない（現実の衝突型加速器はこの場合にあたる）。このような強強描像下でのビームの運動は、複雑な非線形問題となり、その研究手段としては必然的に計算機シミュレーションが重要となる。

一次元モデルでは、各粒子が衝突する相手の粒子に一様な引力をおよぼす。具体的には、両ビーム中の各粒子はそれぞれ

$$\Delta P = -C \int_{-\infty}^{\infty} dX, \rho_*(\bar{X}) H_1(X - \bar{X}), \quad (14)$$

のようなキックを衝突点でうけるとする。ここで ρ_* は相手ビームの縦方向のビーム分布、 H_1 は段差関数

$$H_1(X) = \begin{cases} 1 & \text{if } X > 0 \\ -1 & \text{if } X < 0 \end{cases} \quad (15)$$

である。強強シミュレーションでは、適当な数のマクロ粒子を導入し、式 (14) のようなビームビーム相互作用をする（マクロ）粒子の運動を、直接数値的に解く。これによって、モデルの持っている動力学的性質も含めたあらゆる力学的特性を調べることができる[9]。

マクロ粒子のビームビーム写像は、式 (14) より直接導かれ、

$$\Delta P = -2\pi^{3/2}\eta(N_*^a - N_*^b)/(N_*^a + N_*^b), \quad (16)$$

のようになる。ここで、 $N_*^a(N_*^b)$ は、自分より上（あるいは下）にいる相手のビームのマクロ粒子数である。水平方向のビーム分布は、ガウス分布と仮定すると、式 (14) 中のファクター C が定まる。 η をビームビームパラメータと呼ぶ。（実際の加速器では通常 0.05 くらいの無次元数である）。簡単のため、今考えている電子・陽電子衝突型加速器ではビームはパラメータ (η, ν, λ) について対称であるとする。各マクロ粒子の運動は、(16) と (7) の写像を交互に順次作用させることで追跡される。減衰のパラメータは $\lambda = \exp -1/(5 \times 10^3)$ に固定する。この値は、現存する加速器や近い将来作られるであろう加速器での典型的値である。トラッキングで用いるマクロ粒子の数も（実際の物理とは関係ないが）結果の信頼性にかかわる重要なパラメータである。ビームあたり 1000 個の粒子を用いた。

トラッキングのはじめにマクロ粒子に適当な初期分布を与え、上の二つの写像を作用させてゆくと、マクロ粒子は平衡分布、すなわち、ビームの平衡分布に達する。初期分布を (10) のように、 $\eta = 0$ の時の定常解とし、 $\eta = 0.06$ の場合の平衡分布を見てみよう。図 5 を見よ。当然のことではあるが、強強トラッキングでは両ビームとも摂動を受け、両ビームの平衡分布はいずれも、初期状態から変化していることがわかる。

このなかで、顕著に摂動を受けた平衡分布として、 $\nu = 0.48$ と 0.24 の場合が目にとまる。ビームは大きな振幅の 2 重極振動（コヒーレントベータatron振動）をしている。ただし、ビーム分布自体は初期分布とほとんど変わらないで、中心位置だけがずれている。位相空間で両ビームは常に原点をはさんで対称な位置にいる。初期状態の正面衝突状態から出発し、対称な相互作用をしていても、自発的に対称性が破れる。この場合にはコヒーレント二重極振動の励起がおこっていて、これは、自発的ビーム分離現象と呼ばれる。 $\nu = 0.48$ の場合は、2 ターン、 $\nu = 0.24$ の場合には 4 ターンの周期を持つ。（2 または 4 ターン毎に両ビームはもとの位置にもどる）。

図5では、両ビームについてまったく対称なパラメータを用い、初期状態も（乱数によるゆらぎを除いて）まったく同じであるのに両ビームが非対称に運動している。これを剛体的振動モードと呼ぶ。

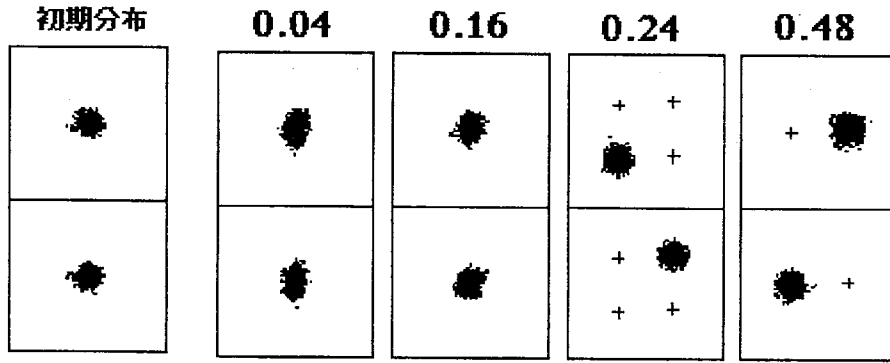


Figure 5: 平衡状態での両ビームの位相空間粒子平衡分布。左から初期分布、 $\nu = 0.04, 0.16, 0.24, 0.48$ 。 $\eta = 0.06$ 。図中の“+”記号はターン毎のビーム重心の位置を示す。

自発的な対称性の破れには他のパターンもある。また、おなじ (ν, η, λ) のもとでも、初期分布を両ビーム間で違えてやると、ことなつた平衡状態が実現することもおこりうる。いくつかの初期状態を考えて、トラッキングを行った結果が図6である。

図6で($\nu = 0.16, C$)の場合のように、一方のビームが広がり、他はほとんど影響をうけていない状態をフリップ・フロップ状態と呼ぶ。これは、初期状態が図5のように対称な場合でも、 η が十分大きいと (ν にもよるが) 起きることである。

4.3 強強相互作用のモデル

強弱相互作用と強強相互作用の異なる点は、

強弱の場合には、パラメータ (ν, η, λ) が決まれば、定常分布は一意的に決まる。この定常分布は力学系の対称性と同じ対称性を持つ。強強の場合、初期条件によって異なるいくつかの定常分布がある。この定常状態の多くで対称性の自発的破れが起きている、

ということであろう。強弱相互作用の場合には、与えられた力の場のもとで運動している一粒子を考えればよい。強強相互作用の場合には、この力の場自身がビームの分布によって決まるので、本質的に多体問題となっている。この点が大きな違いである。

強強シミュレーションで見られる多彩な定常状態を完全に説明することは、現在のところできないが、部分的には簡単なモデルで再現できる。

● 剛体ガウスモデル[10, 11]

各ビームは $\eta = 0$ の場合の分布 (10) を保ち、重心座標

$$\bar{X}_{\pm} = \langle X \rangle_{\pm}, \quad \bar{P}_{\pm} = \langle P \rangle_{\pm},$$

のみが変化できる、と考える。つまり、ビームの分布関数は

$$\psi_{\pm}(X, P) = \frac{1}{2\pi} \exp \left[-\frac{(X - \bar{X}_{\pm})^2 + (P - \bar{P}_{\pm})^2}{2} \right], \quad (17)$$

とする。この近似のもとでは、 ρ_{\pm} をガウス分布としているので、(14) の ρ_* は決まっている。たとえばある(陽)電子が受けるビーム・ビーム力は(13)の変形

$$P \rightarrow P - 2\pi^{3/2}\eta \text{erf} \left[(X - \bar{X}_*)/\sqrt{2} \right] \quad (18)$$

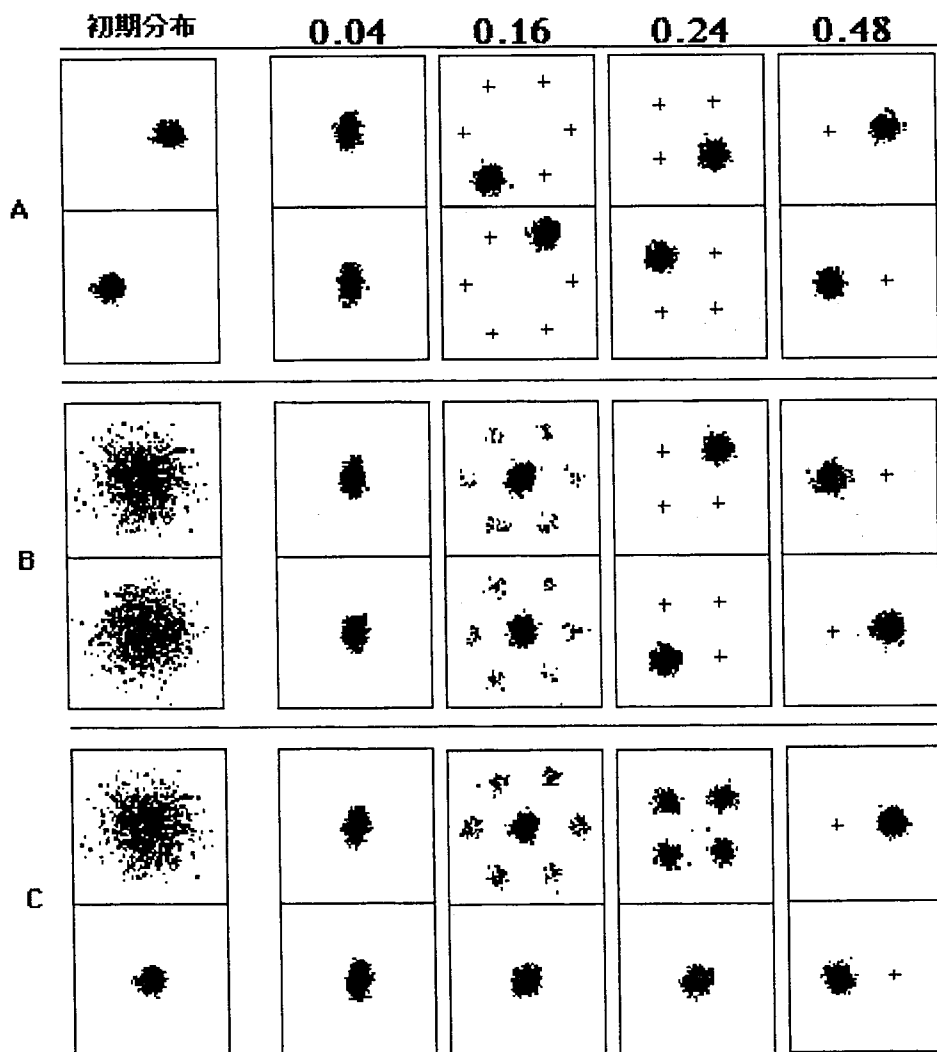


Figure 6: いろいろなチューンに対する平衡状態の位相空間分布。おなじチューンであっても、初期分布を変えると、異なった平衡状態が現われることがある。

で表わされる。さらに、重心座標 \bar{P} の受ける力は

$$\bar{P}_{\pm} \rightarrow \bar{P}_{\pm} - 2\pi^{3/2}\eta\text{erf}(\bar{X}_{\pm} - \bar{X}_{\mp}) \quad (19)$$

である。

衝突から衝突までのマップは (7) で $a=0$ とおいたものと同様になって、

$$\begin{pmatrix} \bar{X}_{\pm} \\ \bar{P}_{\pm} \end{pmatrix}' = \lambda M \begin{pmatrix} \bar{X}_{\pm} \\ \bar{P}_{\pm} \end{pmatrix} \quad (20)$$

である。

さて、(19) と (20) をながめれば、

$$\bar{X}_0 = (\bar{X}_+ + \bar{X}_-)/2, \quad \bar{P}_0 = \bar{P}_+ + \bar{P}_-, \quad (21)$$

と

$$\bar{X}_{\pi} = \bar{X}_+ - \bar{X}_-, \quad \bar{P}_{\pi} = (\bar{P}_+ - \bar{P}_-)/2 \quad (22)$$

の運動が分離してしまうことが分かる。 (\bar{X}_0, \bar{P}_0) のほう(0モード)の運動は(20)だけで、単純に減衰してしまい、最後には0となる。 $(\bar{X}_{\pi}, \bar{P}_{\pi})$ のほう(π モード)は、(20) および (19) にしたがう：

$$\begin{pmatrix} \bar{X}_{\pi} \\ \bar{P}_{\pi} \end{pmatrix} \rightarrow \lambda M \begin{pmatrix} \bar{X}_{\pi} \\ \bar{P}_{\pi} \end{pmatrix}, \quad \bar{P}_{\pi} \rightarrow \bar{P}_{\pi} - 2\pi^{3/2}\eta\text{erf}(\bar{X}_{\pi}) \quad (23)$$

(23) を見ると、強弱相互作用の場合とよく似ている。強弱ビーム・ビーム力でerfの引数を少し変え、シンクロトロン放射の拡散項落としただけである。

π モードの $(\bar{X}_{\pi}, \bar{P}_{\pi})$ の相空間は、図4の左側の図とよく似ている。減衰項によって、 $(\bar{X}_{\pi}, \bar{P}_{\pi})$ は次第に安定な共鳴の中心に(渦巻状に)落ち込んで行く。初期条件によって、原点に行くか、または低次の大きな共鳴に落ち込む。たとえば、図4左で $nu = 0.24$ の場合、初期の $(\bar{X}_{\pi}, \bar{P}_{\pi})$ が、原点近傍にあれば終状態も原点である。初期に原点からある程度離れていれば、4次の共鳴の中心に落ち込む。

「 (\bar{X}_0, \bar{P}_0) が原点で、 $(\bar{X}_{\pi}, \bar{P}_{\pi})$ が4次の共鳴の中心にある」という状態が図5で $\nu = 0.24$ の場合に対応する状態である。

剛体ガウスモデルは簡単な割には応用がひろく、実際の加速器の運転でも便利な道具となっている。

● 軟体ガウスモデル[12]

剛体モデルとは逆に、ビームの重心は常に原点にあり、分布の広がりだけが変わるとするモデルである。分布は常にガウス型で(12)の形を保つとする。(13)は

$$P \rightarrow P + f(X), \quad f(X) = 2\pi^{3/2}\eta\text{erf}\left(\frac{X}{\sqrt{2\sigma_{11}^*}}\right), \quad (24)$$

となる。(13)との違いは、ビーム・ビーム力が、衝突する相手のビームの広がり σ_{11}^* による点である。この作用のもとで、例えば $\sigma_{12}^+ = \langle XP \rangle_+$ は

$$\langle XP \rangle_+ \rightarrow \langle XP \rangle_+ + \langle Xf(X) \rangle_+, \quad (25)$$

$$\langle Xf(X) \rangle_+ = \int dXdPXf(X)\psi_+(X, P), \quad (26)$$

となり、 σ_{ij}^{\pm} の変化を σ_{ij}^{\pm} と σ_{11}^{\mp} によって書き下すことができる。これと (11) を交互に作用させることによって、 σ_{ij}^{\pm} の変化を追うことができる。

この系の定常状態は周期 1 の固定点となり、

$$R = h(R), \quad R = \sigma_{11}^+ / \sigma_{11}^-, \tag{27}$$

という形をした非線形方程式で表わされる。 R が求まればすべての σ_{ij}^{\pm} が求まる。この $h(R)$ は図7の様に、 η の大きいところでは3価関数となる。この3つの価の内、 $R = 1$ は不安定な解で、結局 η の大きいところでは R の価として2つ (R が解なら $1/R$ も解) 存在する。 $R > 1$ では、 σ_{11}^- は ≈ 1 で、ほとんど変化せず、一方、 $\sigma_{11}^+ > 1$ となる。これが強強シミュレーションであらわれたフリップ・フロップ状態に対応していることはあきらかであろう。小さい値の η では、両ビームとも対称な変形を受け、図5の $\nu = 0.04$, $\nu = 0.16$ の様な状態である。 η が大きくなると、どちらかのビームが大きくなり、他は $\eta = 0$ の状態に近くなって (自発的対称性の破れ)、図6で($\nu = 0.16$, C)の場合のようになる。

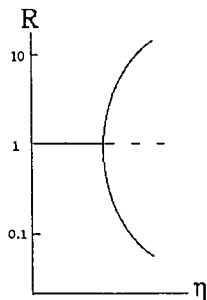


Figure 7: $R = h(R)$ の解。点線 ($R = 1$) の部分は不安定。

剛体ガウスモデルと軟体ガウスモデルは、どちらも部分的に系のふるまいを再現しているが、たとえば、ある状況でどちらのモデルがより本当に近いか、という問には答えられない。また、シミュレーションで、フリップ・フロップ状態から η を小さくして行くと、途中で剛体的振動モードに移行する場合もあって、かなり複雑なことになっているようだ。両モデルを内に含んだより一般的な解析的モデルを作ることも難しそうである。

自由度 1 の系は、実際の自由度 3 の系に比べて圧倒的に簡単だが、それでも、まだ十分に理解できていない。現実の加速器の設計では、自由度 3 の強強シミュレーションが必要となるが、これをまともに実行することは現代の高速コンピューターを使っても困難なので、さまざまな簡単化を行わざるを得ない。むしろ、精密な強弱シミュレーション[13, 14]の方が信頼感がある、といっても言いすぎではない¹²。

自由度 1 の系を完全に理解することは、現象の本質的な面がはっきり示され、理解を助けるとともに、どんな簡単化がどの程度許容されるか、どういう簡単化は危険か、などの重要な情報を与えてくれると思われる。特に、信頼性のあるシミュレーションプログラムを書くときに、このような知識が重要な役割をはたす。複雑で「現実的」な系を「近似的」にあいまいに「解く」よりも、簡単で「擬現実的」な系を厳密に解く方が、実際の役にも立つことが多いようだ。簡単化した系の厳密な研究、および、詳細・現実的で大規模なシミュレーション、がこれからの主流となるであろう。

¹²実際のビームの状況は強強相互作用であるから、強弱近似は現実的に役に立たない、と思うかもしれないが、そうでもない。実際に加速器の運転 (つまり高エネルギー実験) に用いるパラメータは、図5の $\nu = 0.04$ のように、ビーム・ビーム効果が顕著には出ないものを用いる。その場合、強強相互作用の本質的な面は出てこない。むしろ強弱近似を用いて、しかし、ビーム・ビーム力をできるだけ正確に取り扱うほうが、信頼性の高い計算ができる。

5 おわりに：ビームの物理

加速器における粒子のふるまいを研究する分野はビーム力学と呼ばれている。これは「加速器に必要な理論」ということで細々と存在してきた。しかし、加速器の高度化にともない、従来の理論的遺産だけでは対応できない問題がいろいろ現われるにおよんで、物理学としてきちんと研究する気運が高まってきたように思われる[15]。たとえば、高エネルギー物理学研究所で1987年に完成し、1996年まで稼働していたTRISTANは、一時、世界最高のエネルギーを持つ最新鋭衝突蓄積リングであったが、その設計の基礎はと言うと、現在の目から見れば、ほとんど、線形力学、摂動論、および経験的知識によるものであった。一方、現在建設中のBファクトリー（KEKB）は、非線形力学、非摂動的理論に基づく非経験的設計（経験的にタブーとされていることも、理論的研究によって可能と判断すればやっちゃう）になっている。つまり、TRISTAN的なやりかたでは、もはや、加速器への要求に応えられなくなっており、また、現在のビーム力学の水準が以前とは比較にならない位進んでいるということである。

現在のビーム力学の水準が以前とは比較にならない位進んでいるのはなぜか？一つには、TRISTANの運転時に起きるさまざまな問題を解決するのに、ビームを物理学としてきちんと研究することが実際に必要であり、有効であったからである。それなしでは、TRISTANの成功もなかった。もう一つには、ビームが、物理学の対象として面白い、ということが、認識されてきたからである。役に立つかどうか考えず、ビームを「アカデミック」に研究した方が結果的には本質的な意味で加速器に役立つ、という認識も序々に確立されつつあると思われる¹³。

References

- [1] 例えば、A.J. Lichtenberg and M.A. Lieberman, “Regular and Stochastic Motion”, Springer-Verlag (1983).
- [2] V.I.アーノルド、「古典力学の数学的方法」（岩波書店）。
- [3] 生出勝宣、ビーム力学入門、JLC-FFIR92研究会講義録・研究報告集、田内利明、山本昇編集、KEK Proceedings 93-6 (1993)。現代的単粒子力学の解説で、専門家をめざす人の必読文献である。
- [4] 平田光司、「加速器科学における古典力学」、数理科学1995年6月号。
- [5] 電子加速器に関する非専門家向けの教科書として優れているのは；M. Sands, SLAC report, SLAC-121 (1970);
- [6] K. Hirata and F. Ruggiero, Particle Accelerators **28**, 137 (1990).
- [7] K. Ohmi, K. Hirata and K. Oide, *From the Beam Envelope Matrix to Synchrotron Radiation Integrals*, Phys. Rev. **E49**, 751 (1994).
- [8] K. Hirata and S. Matsumoto, *Coherent Motions in One-Dimensional Multiparticle Tracking for Beam-Beam Interactions*, 出版予定。
- [9] K. Hirata and E. Keil, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. **A292**, 156 (1990).
- [10] K. Hirata, Particle Accelerators **41**, 93 (1993).
- [11] K. Hirata, Phys. Rev. **D37**, 1307 (1988).
- [12] K. Hirata, H. Moshhammer and F. Ruggiero, Part. Accel. **40**, 205 (1993).
- [13] K. Hirata, Phys. Rev. Lett. **74**, 2228 (1995).
- [14] 安東、井上、片山、平田、「ビームの物理」、日本物理学会誌、1997年2月号。

¹³高エネルギー物理学研究所の例を用いたが、同じようなことは、世界的に起きつつある。