

プラズマとカオス

文部省核融合科学研究所 羽鳥尹承

1 プラズマの磁気閉じ込めと磁気面

プラズマ物理は宇宙における自然現象を理解するために必要となることがしばしばある。一方地球上では、自然現象としてプラズマが出現することはそれほど多くはないが、近年はハイテク技術の開発に際してプラズマを応用することが非常に多くなってきている。

プラズマにおける多様なカオス現象の中から磁力線のカオスと呼ばれるものを紹介しよう。これは制御熱核融合の研究にたずさわって遭遇した研究課題である⁽¹⁾。数億ケルビンのプラズマを1秒閉じこめるのがこの研究の物理的目標である。このような高温に耐える物質の容器は存在しないから、強磁場によって容器を作ってプラズマを安定に閉じこめる以外に方法はない。もっとも閉じこめない方式、慣性核融合、の研究もあることも付言しておくものの、磁力線のカオスはその方式とは関係がない。磁場でプラズマを閉じこめるという発想は初等的な力学の知識から発している。プラズマとは荷電粒子の集団である。電荷を持った一つの粒子は一様な直線磁場中ではサイクロトロン運動をして、その案内中心は一本の磁力線から外れることはない。従って閉じた磁力線を用意しておけばプラズマをトーラス状に閉じこめることができるであろう。このトーラス磁気閉じこめが核融合研究の主流であった。有名なトカマク方式はこの代表である。核融合科学研究所で現在建設中のLHDも別のトーラス磁気閉じこめ方式である。ここで断っておくが、トカマクもLHDも前述の単純な閉じた磁力線の方式ではない。実は磁力線が曲がっていたり、磁場強度が非一様ならば、粒子は磁力線を簡単に横切って運動するようになる。これをドリフト運動と呼んでいるが、そのため閉じた磁力線では閉じこめることはできない。ドリフト運動も考慮の上でプラズマを正しく閉じこめる方式がトカマクやLHDであることはいうまでもない。ここでドリフト運動の説明に深入りするのは不適當であり5節にまわす。

閉じこめられた定常状態のプラズマはどのような条件を満たしているのだろうか。特にプラズマを閉じこめている磁場はどのような性質を持っているのであろうか。このためには、一個の粒子の運動に注目するよりむしろプラズマを電磁流体とみなすことから出発したほうが早道である。すなわち、定常状態であるから力の平衡が成立していなければならない。そのことを式で表すなら、

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B}. \quad (1)$$

左辺は閉じこめられたプラズマが膨張しようとする圧力である。高温プラズマは理想気体とみなせるので圧力 p は粒子数密度 n と温度 T の積 nT に等しい。閉じこめ

られたプラズマでは圧力 p は空間的に局在しているために膨張力 ∇p が生ずる。これをくい止める力が右辺のローレンツ力であって、 \vec{J} は電流密度であり \vec{B} が磁束密度である。これが磁気閉じこめの流体力学的な意味である。さて、この力の平衡関係より直ちに、

$$\vec{B} \cdot \nabla p = 0, \quad (2)$$

という関係が導かれる。すなわち、磁場ベクトルは常にプラズマの圧力一定の面に平行となっている。もし一本の磁力線を追跡するなら、それは圧力一定の面上に常に存在しそこから外れることはない。プラズマを閉じこめるための磁場は磁気面を構成するような配位でなければならない。任意の一本の磁力線を追跡するなら、それはある一つの磁気面上になければならない。もちろん、別の磁力線ならば別の磁気面を構成してもよい。もしトーラス状にプラズマを閉じこめるのであれば、磁気面はトーラス面となり、各々の磁気面は入れ子状のトーラスの集まりとなる。

実際の閉じこめ装置として例えばトカマクがある。トカマクの磁場は電流で作られるのでその電流を概念的に示したのが図 1 a) である。先ず縦に流れている電流で閉じた磁力線を形成する。この電流は電磁石の電流である。ループ状の電流はプラズマ自身の中に流す電流である。この両電流の作る磁場が合成されて磁力線が磁気面を構成している。閉じこめる磁場の一部は閉じこめられるプラズマ自身の電流である。ところで、ループ状電流を流すには誘導電場に頼るわけであるが、この場合直流電流は原理的に不可能となる。そこで全て直流の電磁石で磁気容器を構成できないかとの発想がうまれる。そのような要求を満たすものの一つが現在核融合科学研究所で建設中の LHD 装置である。その電流の概念図が図 1 b) である。電流の環状二重螺旋ということになる。初等的電磁気学では自明とはいかないが、二本の電流に取り囲まれた空間にトーラス磁気面が構成されている。

2 磁気面の破壊と磁力線のカオス

磁力線を記述する方程式は、

$$\frac{d\vec{r}}{d\lambda} = \vec{B}(\vec{r}), \quad (3)$$

となる。ここに独立変数 λ は磁力線に沿う方向の距離に比例した量である。右辺は磁束密度で空間座標 \vec{r} の関数で与えられていると仮定する。この方程式は力学系の形をしている。変数 λ が時間の役割を担っている。さらに、マクスウェル方程式より、

$$\text{div} \vec{B} = 0, \quad (4)$$

であるので磁力線の方程式は保存力学系であることが分かる。保存力学系はハミルトン系に書き換えることができる。そのためには座標 (x, y, z) を何か新しい変数に

変換しなければならない。その目的のために、プラズマのトーラス閉じこめ理論で良く使われている磁気座標 (Ψ, Θ, ϕ) を導入する。磁気座標は、

$$\vec{B} = \nabla\Psi \times \nabla\Theta - \nabla\Psi_p(\Psi, \Theta, \phi) \times \nabla\phi \quad (5)$$

で定義される。なお、座標 ϕ だけは明快な意味があり、トーラスの対称軸のまわりの幾何学的な角度であり、トロイダル角と呼ぶことにしよう。新しい座標系で磁力線の方程式 (1) を書き換えるなら、

$$\frac{d\Psi}{d\phi} = \frac{\vec{B} \cdot \nabla\Psi}{\vec{B} \cdot \nabla\phi} = -\frac{\partial}{\partial\Theta}\Psi_p(\Psi, \Theta, \phi), \quad (6)$$

$$\frac{d\Theta}{d\phi} = \frac{\vec{B} \cdot \nabla\Theta}{\vec{B} \cdot \nabla\phi} = \frac{\partial}{\partial\Psi}\Psi_p(\Psi, \Theta, \phi), \quad (7)$$

のようになる。これはハミルトン系の形をしていることが直ちに分かるであろう。時間変数に相当するのはトロイダル角であることも分かる。変数 (Ψ, Θ) はトーラス状プラズマの断面、この面をポロイダル断面（トーラスの対称軸を含む断面）と呼ぶが、この上の位置を指定する変数である。そして関数 $\Psi_p(\Psi, \Theta, \phi)$ はハミルトニアン の役割を担っている。

ここで系の対称性と保存量に関する解析力学の法則を思い出そう。トカマクは軸対称性を持っている。すなわちトロイダル角 ϕ は循環座標でありハミルトニアンには含まれない。従って、

$$\Psi_p = \Psi_p(\Psi), \quad (8)$$

とかくことができ、保存量

$$\Psi_p = \text{const.}, \quad (9)$$

が得られる。この保存量の存在は磁気面の存在を意味し、 $\Psi = \text{const.}$ は磁気面トーラスの方程式である。すなわち閉じこめ装置に本来軸対称性があるなら、即磁気面の存在は全空間で保証される。この意味でトカマクは良い閉じこめ装置である。ただし現実の装置では少しの非軸対称性が避けられないためプラズマの周辺部でより精密な扱いを必要とする場合がある。又、後に述べるように、プラズマの不安定性によって自発的に対称性を破ってしまって、その不安定性が成長していけば、磁気面の破壊強いては閉じこめの破壊にいたる場合もある。

LHD の場合は、図 1 b) を見ても明らかなように連続的な軸対称性は持ち合わせない。この時のハミルトニアンは、

$$\Psi_p = \Psi_p^{(0)}(\Psi) + \Psi_p^{(1)}(\Psi, \Theta, \phi), \quad (10)$$

となる。力学の教えるところによれば、摂動 $\Psi_p^{(1)}$ が大きくなると運動はカオスとなる。摂動が弱ければ、KAM の定理より、積分が存在する。力学の知識を磁力線に

当てはめて解釈してみよう。軸対称性が無い場合は、空間は磁気面を持つ領域と持たない領域の何れかに分かれる。対称性の破れの小さい領域と大きい領域に分かれるわけである。プラズマの閉じこめという観点からは、磁気面構造の存在する領域だけを利用することとなる。磁気面の存在しない場合を磁力線のカオスと呼んでいる。LHD ではこの両領域の境界を明かにすることが重要であろう。

3 ヘリカル系トーラスの磁気構造

まずは、LHD 装置（ヘリカル系トーラス）の大域的な磁気構造を見てもらおう（図2）。この計算は現実的なコイルの形状と電流密度に従ってピオ・サヴァール則に基づいて数値計算したものである⁽²⁾。図2に磁力線のポロイダル断面へのプロットが示されている。力学でカオス運動を示すために必ず使用するポアンカレプロットとよばれる手法で描かれている。図2には複数の磁力線のプロットが重ねて描かれている。右上隅の図が全体のポロイダル断面で、その一部分が拡大されている。殆どの領域で入れ子状の磁気面トーラスが見られるが、周辺部で磁気面を構成しない磁力線のカオス領域が見てとれる。カオス領域では実際プラズマの密度が急激に減少している。

物理の人達に分かり易くするために、我々はヘリカル系トーラス磁場のハミルトニアン理論を展開した⁽³⁾。先ず真空中のヘリカル系トーラス配位の磁力線を記述するハミルトニアンの具体的表式を求めた。次いでそのハミルトン系に適用できる新しい線形シンプレクティック積分法の開発も行った⁽⁴⁾。

ハミルトニアンを求める理論において重要な柱は Lie 変換と近軸展開である。先ず、力学のハミルトンの原理をベクトルポテンシャルを用いて表現する。この目的のために特殊な座標系 (ξ, η, ϕ) を用いる。ここに ϕ は前述のトロイダル角であるが、 ξ はトーラスの小半径方向の座標、 η はポロイダル角のようなものであるが、詳しい定義は省略する。変数の組 (ξ, η) は正準変数ではないので Lie 変換で作用変数と角変数 (Ψ, Θ) に変換する。Lie 変換の展開は近軸展開である。ここで軸とは磁気軸を意味する。磁気軸とは、もしトーラスの大半径が無限の極限で円柱となった場合、円柱の軸に相当するもので、トーラスでは磁気軸は円型である。従って展開のパラメーターはトーラスの小半径と大半径の比、逆アスペクト比の展開とも呼ばれている。求めたハミルトニアンは直線ヘリカル配位の極限を含んでいる。この場合ヘリカル対称性を持つためハミルトニアンは正準変数 (Ψ, Θ) のみの関数でトロイダル角 ϕ は含まない。従って直線ヘリカル配位はエネルギーが保存されるため磁力線は全空間で磁気面を持つ。一方、ヘリカルトーラスではハミルトニアンは「時間」 ϕ を陽に含みヘリカル対称性を破る。この対称性を破る摂動は磁気軸上では値を持たず磁気軸を離れるにつれて増大する。KAM 定理の示すとうり、周辺部で磁気面を形成できなくなり磁気カオス領域が出現する。

なお、陽型シンプレクティック積分法は分離型ハミルトニアンには有効である。

しかし磁力線のハミルトニアンは分離型ではないため、新たに磁力線のための陽型シンプレクティック積分法を開発する必要がある今後の課題である。

4 トカマクの電流破壊

トカマクという閉じこめ装置はおおむね順調に成績をのばしているが、それでも、ある条件の下では電流破壊と呼ばれている強い不安定性にみまわられて閉じこめが破壊される。これが電流破壊現象である。高温プラズマ閉じこめの目標はより高密度のプラズマを閉じこめることであり、そのためにもより大きい電流をプラズマ中に流すようにしたい。しかし密度や電流がある敷居値を越すと電流破壊が起こる。

ここでは先ず現象としてどんなものかを知ってもらうために測定の結果を示す。図3は五種類の物理量の時間変化の様子が示されている⁽⁵⁾。一番上の線がプラズマの密度の空間平均値の時間変化である。初め、順調に増大するが大きく揺動して急激に減少する。揺動が始まる当たりからこの不安定性が始まる。MHD2と書かれている物理量が電流破壊を理解する上で重要と考えられている。これは磁場の揺動を示している。理想的な平衡なら無いはずの量である。 I_{sxr} と書かれた量はプラズマから放射されているsoft X-ray（軟X線）の線積分値で二本あるのは場所の違いである。軟X線はプラズマ内部の構造を知る上で重要な情報である。図4にはトモグラフィの手法で構成した軟X線輝度のポロイダル断面内の空間分布が示されている⁽⁵⁾。AからTはそれぞれ図3に示されている時刻に対応していて、軟X線輝度分布は時間的に激しく変動している。

このように閉じこめが激しく破壊される現象は磁力線のカオスとして理解できると考えられている⁽⁶⁾。少なくともこの現象の一つの要素を構成していると理解されている。MHD（電磁流体）的揺動は磁場の揺動を伴い、磁場の揺動が敷居値を越えれば磁力線のカオスが発生して閉じこめのために必要な磁気面構造が破壊されてしまう。我々は以前、MHDのシミュレーションを行い、不安定性が成長して、磁力線のカオスを起こし乱流状態となることを確かめている⁽⁷⁾。ここでは、テアリング不安定性と呼ばれる二つの独立した摂動が成長し、これは磁気島と呼んでいる構造をつくる。磁気島とは力学の位相空間で現れる共鳴島に対応している。磁気島の幅は次第に増大しつつ二つの磁気島が重なり合うようになると磁力線のカオスが発生する。うわゆるresonance overlap（共鳴の重なり）の機構によってカオスが発生する。一旦磁力線のカオスが発生するとその後のMHDの時間発展が速くなり、且つ乱流的となる。

5 異常輸送

磁気閉じこめプラズマ物理の伝統的な課題の一つに異常輸送の解明がある。観測される異常に大きな輸送の機構を解明することである。輸送係数は物質のマイクロな

構造から理論的に導かれるものである。しかし、荷電粒子の集まりというプラズマのミクロな構造から導かれる輸送係数は、実際観測で得られる輸送係数に比べて小さ過ぎる。約2桁の違いがある。従ってトカマクなどで普通に観測される輸送係数はミクロな構造によるのではなくマクロな集団運動によるものと考えられている。MHDはプラズマを記述する方程式の中では最もマクロな方程式である。前述のヘリカルトーラス周辺部の磁気面構造の破れ、トカマクの電流破壊などは、いずれもMHDのカオス現象である。前者が静的カオス（構造カオス）、後者が動的カオスとも言えるであろうか。

さて、磁力線のカオスと異常輸送との関連について簡単に述べよう。輸送といっても広いので、例えば拡散であれば、粒子の運動を統計的に扱う理論が必要となる。このとき、粒子どうしの衝突の効果は前述の理由により考える必要は無いであろう。磁力線のカオス領域では、無衝突粒子の運動自体に規則性が無いため統計的な運動である。粒子の運動がカオスとなる。カオスの統計理論には軌道の数値計算が欠かせない。ところが複雑な電磁場のなかのサイクロトロン運動を多くの粒子数について長時間追跡するのは高価な計算となってしまふ。カオス運動の場合は高精度が要求される。そこで登場するのがドリフト近似の運動方程式である。強磁場中ではサイクロトロン運動は非常に速い時間スケールであるために、その速い周期運動を時間平均したドリフト近似の方程式が良い近似となる。おもしろいことに、ドリフト近似の方程式もハミルトン系となることが知られている⁽⁸⁾。ハミルトニアンを具体的に表現するには前述の磁気座標を使う必要がある。

なお、異常輸送の機構は広い意味の乱流であって、ここで説明した磁力線のカオスが異常輸送の全てではないことを断っておく。

6 まとめと発展的議論

磁力線を力学の体系で考え直してみた。プラズマを閉じこめる磁力線は磁気面を持たねばならない。つまり力学のKAMトーラスに当たる。トロイダル磁気閉じこめでは、磁気軸近傍の磁力線は必ず磁気面を持つが磁気軸から離れるにつれて対称性の破れが増大して磁気面を構成することができなくなり磁気カオスの領域に移行する。磁気カオス領域ではプラズマの輸送は異常輸送となる。

磁力線の方程式はハミルトン系だから、エネルギーを定義できる。磁気軸上でエネルギーは最低で、磁気軸を離れるに従って高いエネルギーの磁力線となる。エネルギーの敷居値を越えると磁気カオスとなる。低エネルギーでは磁気面を持ち秩序が在るが、高エネルギーではカオスとなり無秩序となる。これは相転移と似ている。例えば、強磁性体が低温ではスピンの向きが揃って秩序が在るが、臨界温度以上ではスピンの向きがばらばらとなり無秩序となる。

エネルギーが高くなると相転移のような現象が現れることは、原子や分子の世界にも起こるのであろう。基底状態は十分な対称性と秩序を持っている。しかし高い励

起状態になるにしたがって対称性が破れ秩序を失ってゆく。大きな内部エネルギーを持った完全電離プラズマは最も無秩序でエントロピーが高い。冒頭に触れたように、近年、プラズマがハイテク技術に応用されることが多くなった。プラズマ中では原子や分子が電離、解離、励起、の状態にあるため、普通の環境では実現できない化学的に活性な状態になっていることがハイテクに応用される理由であろう。核融合に使われるプラズマを高温プラズマといい、ハイテクに使われるプラズマを低温プラズマと呼ぶ。核融合反応のためにはイオン温度10 keV以上を目標としているの対し、化学的活性な低温プラズマでは電子温度10-100eV程度である。ちなみに、 $1\text{eV} = 10000\text{K}$ である。

プラズマの電子温度が高いことだけが応用価値を生んでいるのではない。プラズマが強い非平衡状態にあることも利用されている。例えば、原子の励起準位の占有密度の逆転を起こし、軟X線レーザーを開発する研究が行われている。一旦、電子温度の低いプラズマを生成して、再結合過程を経て占有密度の逆転を作り出すというものである。

磁力線のカオスはマクロな電磁気学の問題であるが、低温プラズマにおけるミクロな過程とこのような不思議な横糸でつながっている。低温プラズマでは古典物理と量子物理の両者が必要である。特に、古典・量子の境界領域が応用的にも物理的にもおもしろいところであろう。例えば、量子カオスというのは古典力学と量子力学の境界に発生するものではないだろうか。プラズマ応用物理に新しいカオスを発見した暁には、本題「プラズマとカオス」に将来新たなページを加えたいものである。

参考文献

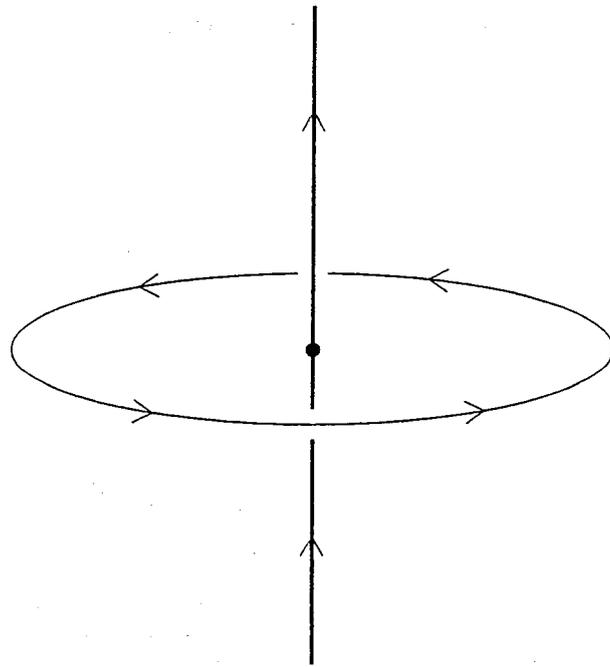
- 1) T. Hatori, 核融合特別研究の総合報告書(近刊)、原稿は1990年に書かれたもので、その頃の仕事がまとめてある。
- 2) T. Watanabe, 「未来へ向けて」核融合科学研究所の現況と展望(1989-1993)の中の図から引用した。原図は渡辺二太氏が作成したものである。
- 3) G. Gnudi and T. Hatori, J.Phys.Soc.Jpn.Vol.62,No.6,2030-2037(1993)
- 4) G. Gnudi and T. Watanabe, J.Phys.Soc.Jpn.Vol.62,No.10,3492-3505(1993)
- 5) P. V. Savrukhn et al, Nucl.Fusion Vol.34,No.3,317-336(1994)
- 6) T. Hatori et al, Prog.Theor.Phys.Suppl. No.98,83-108(1989)
- 7) K. Urata, J.Phys.Soc.Jpn. Vol.59,No.8,2742-2757(1990)
- 8) T.Hatori, プラズマ若手夏の学校講義録(1992)「プラズマのための解析力学」

Fig.1 トカマクとLHDの概念図

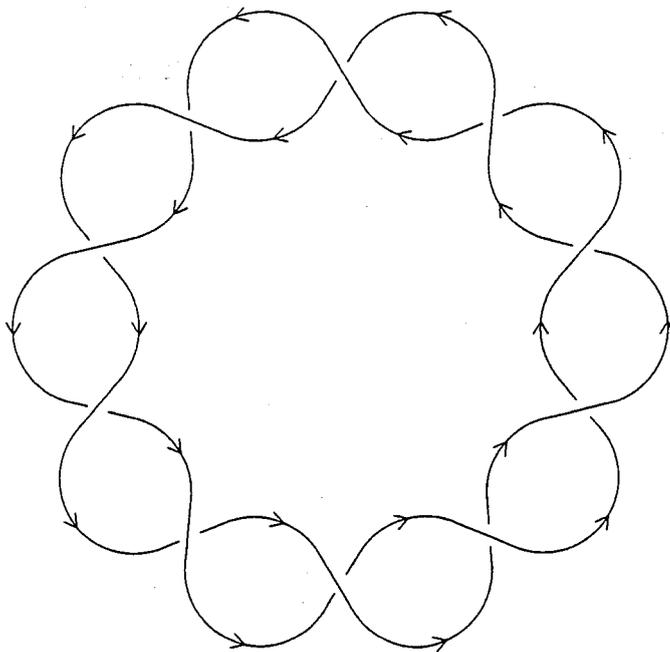
Fig.2 LHDのポロイダル断面図

Fig.3 トカマクの電流破壊の時系列

Fig.4 トカマクの電流破壊時の内部構造トモグラフィー図



a)



b)

Fig.1 トカマクと LHD の概念図

大型ヘリカル装置の周辺部磁場構造 (口絵12)

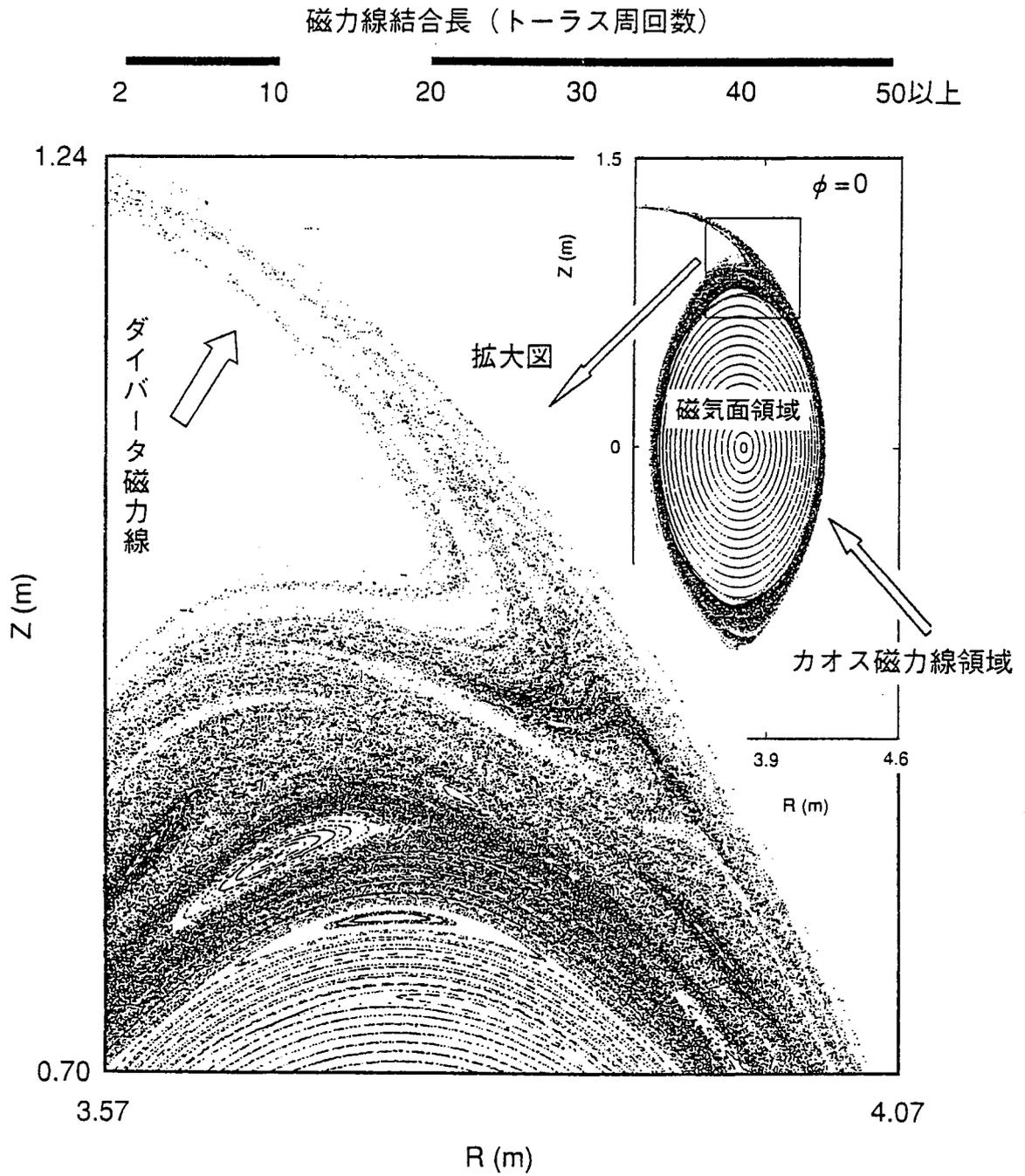
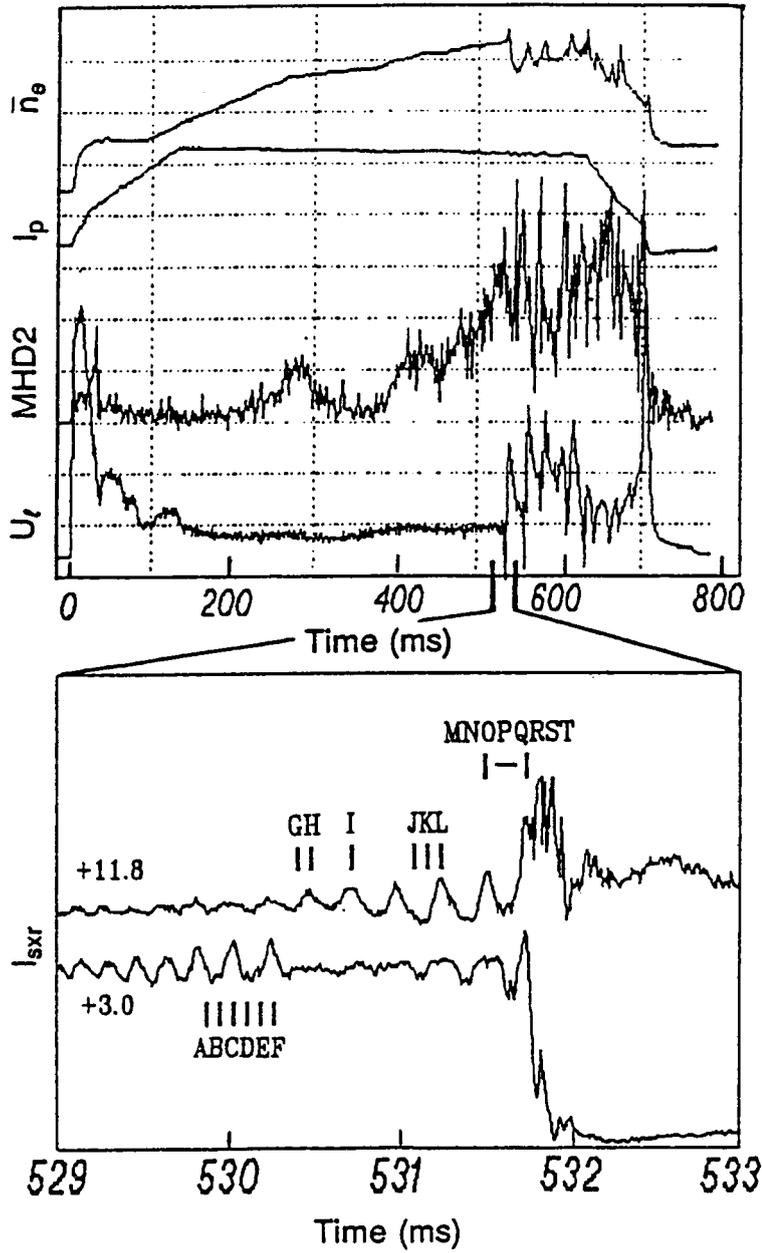
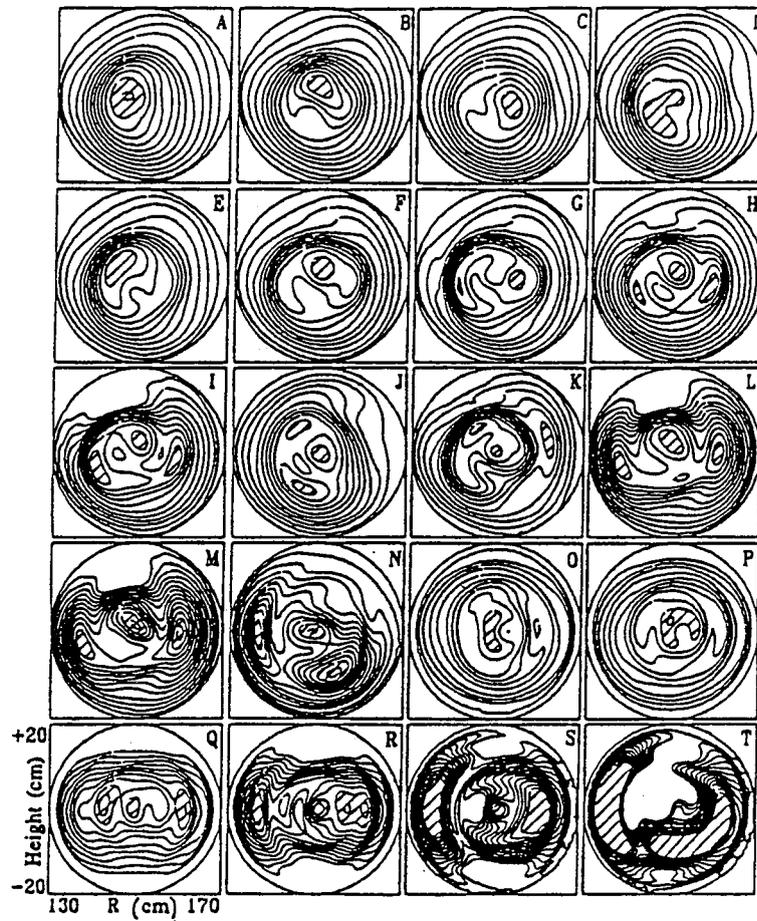


Fig.2 LHD のポロイダル断面図



Time evolution of line average electron density, $\bar{n}_e(t)$; plasma current, I_p ; amplitude of the $m = 2$ harmonic of the poloidal magnetic field perturbations, MHD2; loop voltage (U_l); and soft X ray intensity, I_{sxr} , integrated along the vertical chords +3.0 cm and +11.8 cm and observed just before the density limit disruption in an ohmically heated plasma with the density rising slowly in a preprogrammed way.

Fig.3 トカマクの電流破壊の時系列



Plots of tomographically reconstructed local soft X ray emissivity. Counter lines indicating levels of soft X ray emissivity are the same in all plots. Dashed domains indicate regions of high emissivity. The instants of time corresponding to the frames are marked by vertical bars in Fig. 4(a) (A: $t = 529.95$ ms, B: $t = 530.01$ ms, C: $t = 530.07$ ms, D: $t = 530.13$ ms, E: $t = 530.19$ ms, F: $t = 530.25$ ms, G: $t = 530.44$ ms, H: $t = 530.50$ ms, I: $t = 530.72$ ms, J: $t = 531.15$ ms, K: $t = 531.20$ ms, L: $t = 531.27$ ms, M: $t = 531.55$ ms, N: $t = 531.61$ ms, O: $t = 531.67$ ms, P: $t = 531.69$ ms, Q: $t = 531.71$ ms, R: $t = 531.73$ ms, S: $t = 531.75$ ms, T: $t = 531.78$ ms).

Fig.4 トカマクの電流破壊時の内部構造トモグラフィー図