

Stationary Phase と 観測の理論

慶大理工 福田礼次郎

マクロ系の波動関数の形を調べ、観測問題に適用する。その際定常位相の概念が重要な役割を果たす。

1 マクロ系の波動関数

最も簡単なマクロ系の例として、 N 個の調和振動子を考えよう。ラグランジアンとハミルトニアンは以下の様に与えられるものとする。

$$L = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^N \dot{q}_i^2 - \frac{m\omega^2}{2} \sum_{i=1}^N q_i^2, \quad H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N p_i^2 + \frac{m\omega^2}{2} \sum_{i=1}^N q_i^2. \quad (1.1)$$

ハミルトニアンの固有関数と固有値は

$$\psi(\mathbf{q}) = \prod_{i=1}^N \psi(q_i), \quad \psi(q_i) = N_{n_i} H_{n_i}(\sqrt{m\omega} q_i) \exp\left(-\frac{m\omega}{2} q_i^2\right), \quad (1.2)$$
$$E = \sum_{i=1}^N E_i, \quad E_i = \omega\left(n_i + \frac{1}{2}\right).$$

である。ここで \mathbf{q} は (q_1, q_2, \dots, q_N) を表し n_i は非負の整数、 H_{n_i} はエルミート関数、 N_{n_i} は規格化因子である。さて波動関数は次のように書ける。

$$\psi(\mathbf{q}) = M_n(\mathbf{q}) e^{F[\mathbf{q}]}, \quad (1.3)$$
$$M_n(\mathbf{q}) = \prod_{i=1}^N N_{n_i} H_{n_i}(\sqrt{m\omega} q_i), \quad F[\mathbf{q}] = -\frac{m\omega}{2} \sum_{i=1}^N q_i^2.$$

ここで n は (n_1, n_2, \dots, n_N) を意味する。エネルギーは

$$E = \frac{\omega}{2} N + \frac{\omega}{2} \sum_{i=1}^N n_i. \quad (1.4)$$

となる。ここで $F[\mathbf{q}]$ と $M_n[\mathbf{q}]$ の違いを調べてみよう。 F は i の 1 から N までの和で書かれていて、示量変数である。 F は零点振動の部分を表すすべてのモードに共通の因子で、一方 M_n は励起状態に関する情報を持っていて n に依って示強的にも示量的にもなる。

ここである量が示強的还是示量的かを判断する規準を述べる: “ q_i の関数が q_i が i に依らないとした時 N に比例すれば、その関数は示量変数である。 N が現れず $O(1)$ ならば示強変数である。”

さて M_n を

$$M_n[\mathbf{q}] = \exp \sum_{i=1}^N [\ln N_{n_i} + \ln H_{n_i}(\sqrt{m\omega}q_i)]. \quad (1.5)$$

と書こう。指数の肩の第一項は定数なので第二項を見る。 $H_{n_i=0} = 1$ なので、もし零以外の値を取る n_i の数が有限個なら i についての和は実際は有限和である。このときは M_n は示強的である。つまり有限の励起エネルギーのレベルでは M_n は示強的である。

一方 n_0 を零でないある整数として、すべての i に対して $n_i = n_0$ と言う場合には、(1.5) で $q_i = q$ と置けば $N \ln H_{n_0}(\sqrt{m\omega}q)$ と言う因子が出て示量的となる。この状態の励起エネルギーはマクロであつて $E = \omega(\frac{1}{2} + n_0)N$ で与えられる。波動関数は

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{q}) &= \exp\left\{N \ln N_{n_0} + \sum_{i=1}^N \left[\ln H_{n_0}(\sqrt{m\omega}q_i) - \frac{m\omega}{2}q_i^2\right]\right\} \\ &= \exp(F[\mathbf{q}] + \Delta F[\mathbf{q}]). \end{aligned} \quad (1.6)$$

の形をしている。ここで F と ΔF はともに $O(N)$ の示量変数である。

上の議論を一般化するとマクロに励起された状態の波動関数は(1.3)の形をしていて

$$M_n[\mathbf{q}] = \bar{M}_n[\mathbf{q}] \exp\{\Delta F[\mathbf{q}]\}, \quad \Delta F[\mathbf{q}] = O(N). \quad (1.7)$$

と書けることが言える。ここで $\bar{M}_n[\mathbf{q}]$ は状態のミクロな詳細を記述し $O(1)$ の量である。

いま、マクロ変数 X を“示量変数を N で割ったもの”として定義する。以下で見るように X はマクロに同等な状態、つまり(1.7)に於いて $F[\mathbf{q}] + \Delta F[\mathbf{q}]$ が同じ状態なら $\bar{M}_n[\mathbf{q}]$ に依らず同じ値をとることが判る。このことがヒルベルト空間の分解を可能にし、マクロな系と古典的な系との対応へ導く。

2 第二量子化された系

この議論を第二量子化された系へすぐに拡張できる。簡単のためエルミートボソン場 $\phi(\mathbf{x})$ を考え、次のようなラグランジアンを想定する。

$$L = \int_V d^3\mathbf{x} \left\{ \frac{m}{2} \dot{\phi}^2(\mathbf{x}) - \frac{m}{2} \phi(\mathbf{x}) \omega^2 (-\nabla^2) \phi(\mathbf{x}) \right\} - V^I[\phi] \equiv L_0 + L^I. \quad (2.1)$$

ここで V は系の体積で、あとで無限大の極限を考える。先の N に当たる大きな数がここでは V である。 $m > 0$ はあるパラメーターで、 $\dot{\phi} \equiv d\phi/dt$ 。関数 $\omega(-\nabla^2)$ は $\phi(\mathbf{x})$ の分散関係を表す。

我々はラグランジアンに対して次の二つの条件を課す。これらは理論の熱力学的極限 $V \rightarrow \infty$ が存在する為の場の理論的な条件である。

(a) フーリエ空間での分散関係 $\omega(\mathbf{k}^2) \equiv \omega_{\mathbf{k}}$ はどんな \mathbf{k} に対しても零にはならず零から有限のギャップを持っている。

(b) 相互作用は短距離である。つまり $V^I[\phi]$ は次のように書ける。

$$V^I[\phi] = \sum_{n=3}^{\infty} \int d\mathbf{x}_1 \cdots \int d\mathbf{x}_n v^{(n)}(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n) \phi(\mathbf{x}_1) \phi(\mathbf{x}_2) \cdots \phi(\mathbf{x}_n). \quad (2.2)$$

ここで $v^{(n)}$ は $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ の関数で $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$ が大きくなると充分速く零へ近づくものとする。典型的な例は $\exp\{-\rho|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|\}$ ($\rho > 0$) である。

さてハミルトニアンは

$$H = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \left(\frac{1}{4m} \Pi_{\mathbf{k}}^{\sigma 2} + m\omega_{\mathbf{k}}^2 \phi_{\mathbf{k}}^{\sigma 2} \right) + V^I[\phi_{\mathbf{k}}^{\sigma}] \equiv H_0 + H^I \quad (2.3)$$

となる。ただし $\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \phi_{\mathbf{k}}$ を用いた。ここで $\phi_{\mathbf{k}}$ を実部と虚部の和で書こう; $\phi_{\mathbf{k}} = \phi_{\mathbf{k}}^R + i\phi_{\mathbf{k}}^I$ 。すると $\phi_{\mathbf{k}}^R = \phi_{-\mathbf{k}}^R$, $\phi_{\mathbf{k}}^I = -\phi_{-\mathbf{k}}^I$ が成り立つ。さらに $\phi_{\mathbf{k}}^{\sigma} \equiv (\phi_{\mathbf{k}}^R, \phi_{\mathbf{k}}^I)$ 、そして $\sum_{\mathbf{k}}$ は k -空間の半分の和を意味する。記号 $\phi_{\mathbf{k}}^{\sigma} \equiv (\phi_{\mathbf{k}}^R, \phi_{\mathbf{k}}^I)$ を導入すれば、共役運動量 $\Pi_{\mathbf{k}}^{\sigma} = 2m\dot{\phi}_{\mathbf{k}}$ は量子化条件

$$[\hat{\Pi}_{\mathbf{k}}^{\sigma}, \hat{\phi}_{\mathbf{k}'}^{\sigma'}] = \frac{1}{i} \delta^{\sigma\sigma'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \quad (2.4)$$

を満たす。以下では ϕ -表示を採用する。この表示では $\hat{\phi}_{\mathbf{k}}^{\sigma}$ が対角的である:

$$\hat{\phi}_{\mathbf{k}}^{\sigma} |\phi\rangle = \phi_{\mathbf{k}}^{\sigma} |\phi\rangle. \quad (2.5)$$

ここで ϕ は固有値 $\phi \equiv \{\phi_{\mathbf{k}}^{\sigma}\}$ を表す。さてハミルトニアンの固有汎関数は N 粒子系の場合と同様に求まる。相互作用がない場合とある場合に分けて考える。

(i) 自由場の場合: (\mathbf{k}, σ) で指定されるモードのおのおのに非負の整数 $m_{\mathbf{k}}^{\sigma}$ が量子数として存在する。 $m \equiv m_{\mathbf{k}}^{\sigma}$ として波動関数は

$$\begin{aligned} \langle \phi | m \rangle &\equiv \langle \{\phi_{\mathbf{k}}^{\sigma}\} | \{m_{\mathbf{k}}^{\sigma}\} \rangle \\ &= \prod_{\mathbf{k}, \sigma} N_{m_{\mathbf{k}}^{\sigma}} H_{m_{\mathbf{k}}^{\sigma}}(\sqrt{2m\omega_{\mathbf{k}}}\phi_{\mathbf{k}}^{\sigma}) \exp(-m\omega_{\mathbf{k}}\phi_{\mathbf{k}}^{\sigma 2}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

と書ける。ここで \prod' は k -空間の半分に互る積で、エネルギー固有値は $E = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} (m_{\mathbf{k}}^{\sigma} + \frac{1}{2})\omega_{\mathbf{k}}$ 。

$$\sum_{\mathbf{k}, \sigma} m \omega_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}}^{\sigma 2} = \frac{m}{2} \int d^3 \mathbf{x} \phi(\mathbf{x}) \omega(-\nabla^2) \phi(\mathbf{x}) = O(V) \quad (2.7)$$

に注意しよう。このようにして有限の励起エネルギー状態にたいしては

$$\langle \phi | m \rangle = (\text{polynomial in } \phi_{\mathbf{k}}^{\sigma}) \times e^{F[\phi]}, \quad (2.8)$$

ただし $F[\phi]$ は $O(V)$ の示量変数であり全ての状態に共通である。ここで場の理論における示量変数、示強変数を定義しよう。

示量変数 表式

$$I[\phi] \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \int d\mathbf{x}_1 \cdots \int d\mathbf{x}_n G^{(n)}(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \cdots \mathbf{x}_n) \phi(\mathbf{x}_1) \phi(\mathbf{x}_2) \cdots \phi(\mathbf{x}_n), \quad (2.9)$$

において、もし $G^{(n)}$ が (2.2) の $v^{(n)}$ と同じ条件を満たすなら、 $I[\phi]$ は示量変数と呼ばれる。この時 $\phi(\mathbf{x})$ を \mathbf{x} によらない定数と仮定すれば、 $I[\phi]$ は V に比例する。

示強変数 示強変数には2種類ある。

(a) クラス I — マクロ変数 $X[\phi]$: これは示量変数を V で割ったもので定義される:

$$X[\phi] = I[\phi]/V. \quad (2.10)$$

マクロな極限 $V \rightarrow \infty$ で以下で見るように、マクロ変数は揺らぎを失い決定論的な変数となる。観測装置の針の位置に相当し、測定器との相互作用の前後での $X[\phi]$ の値の変化を記録するのが測定過程である。 $X[\phi]$ の最も簡単な例は重心座標である。 V が有限であってもいわゆるマクロなサイズであれば揺らぎやそれに伴う拡散は認知不可能なくらい小さい。

(b) クラス II — ミクロ変数: もとのハミルトニアンに含まれている局所変数 $\phi(\mathbf{x})$ や $\Pi(\mathbf{x})$ などがこのクラスに属する。これらはマクロな極限でも揺らいでいる。

(ii) 相互作用のある場合: 相互作用のある場合でも上に述べた相互作用に対する条件 (a), (b) が満たされていれば、自由場と同じ結果を得ることができる。詳細は文献 [1] に寄ることとして結果のみ記す。相互作用を断熱的に入れてゆくと考えれば、全ハミルトニアンの固有状態は、自由場のときと同じ量子数で指定できる。それを $|m\rangle$ と書けば、 ϕ 表示での波動関数は

$$\langle \phi | m \rangle = M[\phi] e^{F[\phi]}, \quad F[\phi] = O(V) \quad (2.11)$$

のように与えられる。ここで有限エネルギーの励起状態にたいしては $M[\phi]$ は ϕ_k の多項式で $V \rightarrow \infty$ でも有限である。マクロに $O(V)$ で励起された状態は

$$M'[\phi]e^{F[\phi]+\Delta F[\phi]} \quad (2.12)$$

の形をしており $F[\phi]$ と $\Delta F[\phi]$ は両方とも示量変数で $M'[\phi]$ はあるミクロな関数であることは、 N -粒子系の場合と同じである。

3 ヒルベルト空間の構造と定常位相

さて、 V が無限大の時、マクロ系のヒルベルト空間の構造がどうなっているのかを議論しよう。まず基底状態 $|0\rangle$ の規格化条件から始める。波動関数は実数であることに注意して汎関数積分を用いて

$$D^{(0)} \equiv \int [d\phi] \langle \phi | 0 \rangle^2 = \int [d\phi] e^{2F[\phi]} = 1.$$

この積分にマクロ変数 $X[\phi]$ の決められた値がどの程度効いているかを見るために、1 を挿入する。

$$\begin{aligned} D^{(0)} &= \int [d\phi] \int dX \delta(X - X[\phi]) e^{2F[\phi]} \\ &= \frac{V}{2\pi} \int [d\phi] \int_{-i\infty}^{i\infty} dJ \int dX \exp(2F[\phi] - VJX[\phi] + VJX). \end{aligned}$$

いま $W[J]$ を次のように定義する。

$$\int [d\phi] \exp\{2F[\phi] - VJX[\phi]\} = \exp(-VW(J)), \quad (3.1)$$

$$D^{(0)} = \frac{V}{2\pi} \int dJ \int dX \exp\{-VW(J) + VJX\}.$$

規格化条件から $W(0) = 0$ である。 $F[\phi]$ が示量変数であることから (3.1) のように書けて $W[J]$ は $O(1)$ のマクロ変数であることが言える。 $D^{(0)}$ を考えよう。 $V \rightarrow \infty$ の極限でルジャンドル変換が現れる。まず J -積分を実行すると stationary point $J = J^0(X)$ が効く。 $W[J]$ を J^0 のまわりで $(J - J^0)^2$ まで展開して

$$\begin{aligned} D^{(0)} &= \frac{V}{2\pi} \int dX \sqrt{\frac{2\pi}{-VW''(J^0(X))}} \exp\{-V\Gamma(X)\}, \\ \Gamma(X) &= W(J^0(X)) - J^0(X)X. \end{aligned} \quad (3.2)$$

を得る。ここで $J^0(X)$ は

$$-W'(J) + X = 0.$$

の解である。関数 $\Gamma(X)$ は、 $W(J)$ のルジャンドル変換で、“effective action” と呼ばれていて

$$\frac{\partial \Gamma(X)}{\partial X} = -J^0(X), \quad \Gamma''(X)W''(J) = -1. \quad (3.3)$$

を満たす。残った X -積分も再び stationary point $X = X^0$ が効く。それは

$$0 = \frac{\partial \Gamma(X)}{\partial X} = -J^0(X). \quad (3.4)$$

で決まる。 $\Gamma(X)$ を $X = X^0$ のまわりで展開して

$$\begin{aligned} D^{(0)} &= \frac{V}{2} \pi \int dX \sqrt{\frac{2\pi}{-VW''(J^0)}} \exp\{-V(\Gamma(X_0) + \frac{1}{2}\Gamma''(X_0)(X - X_0)^2)\} \\ &= \frac{V}{2\pi} \int dX \sqrt{\frac{2\pi}{-VW''(J^0)}} \sqrt{\frac{V\Gamma''(X_0)^{-1}}{2\pi}} \delta(X - X_0) e^{-V\Gamma(X_0)} \\ &= \int dX \delta(X - X_0). \end{aligned} \quad (3.5)$$

に到達する。その際(3.3) と $\Gamma(X_0) = W(0) = 0$ を用いた。(3.5) は、マクロ変数 $X[\phi]$ は X_0 に固定され揺らぎはないことを言っている。上の証明法から実はもっと一般に

$$\int [d\phi] \delta(X - X[\phi]) \langle \phi|0\rangle^2 = \delta(X - X_0). \quad (3.6)$$

が成り立つことが判る。さらにミクロな因子は停留点に影響しないので

$$D^{(n,l)} \equiv \int [d\phi] \langle \phi|0\rangle^2 \phi(\mathbf{x}_1) \phi(\mathbf{x}_2) \cdots \phi(\mathbf{x}_n) \cdot \Pi(\mathbf{x}_{n+1}) \cdots \Pi(\mathbf{x}_{n+l}) \quad (3.7)$$

を考えても(3.6)と同様の式が成立し、同じ X_0 と言う値のみが効いていることが判る。すべての n, l を集めれば $|0\rangle$ を基底状態とする一つのヒルベルト空間ができるので、“ $X[\phi]$ はこのヒルベルト空間内では揺らぎのない C -数的な値 X_0 を持つ。”

次にマクロに異なる二つの状態間の行列要素を考える。状態 $|\psi\rangle_i$ ($i = 1, 2$) をそのようなものとして

$$\langle \phi|\psi\rangle_i = e^{F_i[\phi]} M_i[\phi]. \quad (3.8)$$

と書く。ただし $F_1[\phi]$ と $F_2[\phi]$ はマクロに異なり、 $X[\phi]$ は F_1, F_2 に対してそれぞれ、揺らぎのない値 X_1, X_2 を取るものとする。行列要素

$$\int [d\phi]_1 \langle \psi | \phi \rangle \phi(\mathbf{x}_1) \cdots \Pi(\mathbf{x}_{n+1}) \cdots \langle \phi | \psi \rangle_2. \quad (3.9)$$

を考える訳であるが停留のみきくので $\phi(\mathbf{x}_1) \cdots \Pi(\mathbf{x}_{n+1}) \cdots$ は無視してよい。そこで次のような量を考えよう。

$$\begin{aligned} & \int [d\phi] \delta(X - X[\phi])_1 \langle \psi | \phi \rangle \langle \phi | \psi \rangle_2 \\ &= \int [d\phi] \delta(X - X[\phi]) \exp(F_1[\phi] + F_2[\phi]) \\ &\leq \left\{ \int [d\phi] \delta(X - X[\phi]) \exp 2F_1[\phi] \times \int d\phi \delta(X - X[\phi]) \exp 2F_2[\phi] \right\}^{1/2}, \\ &\rightarrow \{\delta(X - X_1) \delta(X - X_2)\}^{1/2}, \quad (V \rightarrow \infty), \end{aligned} \quad (3.10)$$

任意の因子 $\phi(\mathbf{x}_1) \cdots \Pi(\mathbf{x}_{n+1}) \cdots$ が存在しても同じ結論を得ることから“全ヒルベルト空間はマクロ変数 $X[\phi]$ の（連続）値によって分解する。一つ一つのヒルベルト空間はミクロ変数 $\phi(\mathbf{x}_1) \cdots \Pi(\mathbf{x}_{n+1}) \cdots$ で構築される。”という結論を得た。

これまでは定常問題であったが、時間発展を考慮しても議論は成立する。詳細は文献[1]に譲るが、時刻 t での状態の波動関数は

$$\langle \phi | \psi \rangle_t \simeq M_t[\phi] e^{F_t[\phi]}, \quad F_t[\phi] = O(V). \quad (3.11)$$

と書け $F_t[\phi]$ の t -dependent な停留点が t -dependent なマクロ変数の値、つまり $X[\phi]$ の軌道を決める。各 t で

$$\begin{aligned} & \left| \int [d\phi] \delta(X - X[\phi])_{X_1} \langle \psi | \phi \rangle \langle \phi | \psi \rangle_{X_2} \right|^2 \\ &\leq \int (d\phi) \delta(X - X[\phi]) |\langle \phi | \psi \rangle_{X_1}|^2 \times \int [d\phi] \delta(X - X[\phi]) |\langle \phi | \psi \rangle_{X_2}|^2 \\ &\rightarrow \delta(X - X_1) \delta(X - X_2), \quad (V \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (3.12)$$

が成立する。ここで波動関数は一般の t では複素数であることに注意。

4 観測問題

まず測定が成立するためには揺らぎのない変数が不可欠であることを強調する。針の位置などに対応する量である。ここではマクロ変数をその役割に当てる。揺らぎのない変数であればマクロ変数以外でも良いであろう。測定するミクロな対象の変数を σ で表し測定しようとするオペレーターを \hat{O} とする。測定前の対象の波動関数を

$$\psi(\sigma) = \sum_n C_n \psi_n(\sigma)$$

としよう。ただし $\hat{O}\psi_n(\sigma) = \lambda_n\psi(\sigma)$ である。ここで n は対象のミクロな状態を区別している。測定器の波動関数は $\Psi[\phi]_{X_0}$ と書ける。ここで X_0 は測定前のマクロ変数 $X[\phi]$ の値であり、測定前には常にこの値（針の位置）はチェックする。さて全系の時間発展演算子を $U(t, t_0)$ とすると、測定の過程は次のように書ける。

$$\psi(\sigma)\Psi[\phi]_{X_0} = \sum_n C_n \psi_n(\sigma)\Psi[\phi]_{X_0} \quad \cdots \quad t = t_0 \quad (4.1)$$

$$\rightarrow U(t, t_0) \sum_n C_n \psi_n(\sigma)\Psi[\phi]_{X_0} \quad (t_0 \rightarrow t)$$

$$= \sum_n C_n U(t, t_0) \psi_n(\sigma)\Psi[\phi]_{X_0}$$

$$\equiv \sum_n C_n \Psi^{(n)}(\sigma, \phi, t)_{X_0}, \quad \cdots \quad t = t. \quad (4.2)$$

t_0 は対象と測定器が相互作用する前の時刻であり、 t は測定後の時刻である。波動関数 $\Psi^{(n)}(\sigma, \phi, t)_{X_0}$ の停留点を X_n と書けば一般には t に依る。測定が成立するためにはもし $n \neq n'$ なら $X_n \neq X_{n'}$ であることが必要である。この条件があれば測定が成立すれば干渉が消えることは、前章の議論から明らかであろう。ただし干渉が消えると言う二つの状態とは (3.8) で与えられ、それらの状態で任意のミクロな演算子 $\phi(\mathbf{x}_1) \cdots \Pi(\mathbf{x}_{n+1}) \cdots$ をはさんだ時のことである。我々の言葉では測定過程に於いて、停留軌道の分岐がおこる。これが Everett III の多世界理論に対応するが、線形結合はそのまま残りどれか一つのヒルベルト空間が選ばれる（波束の収縮）訳ではない。波束の収縮は、ここでのようにシュレーディンガー方程式から出発している限り起こらない。詳しくは、次の文献 [1],[2],[3] を参照。

文献

- [1] R. Fukuda, Prog. Theor. Phys. **85** (1991), 441.
- [2] R. Fukuda, Phys. Rev. **A38**, (1987), 8; **A39** (1987), 3023; Prog. Theor. Phys. **81** (1989), 34.
- [3] R. Fukuda, M. Komachiya, S. Yokojima, Y. Suzuki, K. Okumura and T. Inagaki, Prog. Theor. Phys. Suppl. **121** (1995), Chapter XIII.