拡張Encke法による
常微分方程式の超高精度数値積分

福島登志夫（国立天文台）
181 東京都三鷹市大沢2-21-1
toshio@nao.ac.jp

1　いとぐち

近年の計算機の速度向上により、微分方程式系で記述される物理モデルを研究する方法として、直接、基本の微分方程式群を数値積分して解く手法がますます流行している。これまでのところ、いわゆる力学系などで用いられることの多い常微分方程式については、汎用の数値積分法自体の研究がかなり進展し、解くべき問題の性質に応じて、簡便性、高速性、高精度、頑健さ（＝数値的不安定を起こしにくい）などの諸性質を持つ代表的な数値積分法が出そろいつつある(Hairer *et al.* 1993, Hairer and Wanner 1991)。現在は、解くべきモデルの持つ代表的な性質を利用した（その意味では、汎用ではない）手法の研究が盛んで、正準形式で記述できるHamilton力学系に対するシンプレクティック積分法がその好例である。これについては、本論文集中の吉田春夫氏の解説を参照されたい。

さて、計算環境の進歩によって、個々の数値的手法の優劣が逆転することはよくある。有名な例は対数計算であろう。ひところ、その発明によって天文学者の寿命が大きく延びたとまでいわれた対数表であるが、関数電卓の普及後は見る影もない。三角関数表もその同類である。逆に、古臭いと思われた昔の方法が、一躍脚光を浴びる場合も少なくない。ここでは、その一例としてEncke法(Encke 1854)のリバイバルの話(Fukushima 1996)を述べよう。

2　Encke法とは

頃は１９世紀半ば。1846年に、天王星の軌道に対する影響からアダムス、ルヴェリエの両者によって理論的に予測された場所に、弱冠３４歳のガレがたった一晩の観測で海王星を発見した例を挙げるまでもなく、数多の天文学者がニュートン力学と万有引力の法則を応用して、いろいろな天体の軌道を決めようと躍起になっていた時代のことである。

当時のベルリン天文台長であるEnckeは、軌道計算の難物として有名であった周期彗星などの離心率が大きい（＝軌道楕円が細長い）天体に対し、軌道を精度よく計算するため

に、苦心惨澹の上、一つの方法を考案した。ちなみにEnckeとは、配下の若き助手ガレに海王星の予想位置を探索するよう（しぶしぶながら）命じた張本人である。

Enckeの編み出した方法（Encke法とよばれる）のエッセンスは「小さい量に着目して計算すれば、全体として精度よく計算できる」というものである。統計学の初歩で習う「平均を計算するときに、仮平均からの差を平均して仮平均に加える」も、これと同工異曲である。言われてみれば「なるほど」と誰しもうなずけるような簡単な着想ではある。名前が残るような大発見は、えてしてそういう単純なアイデアから生じることが多い。

ここで着目したいのは、Enckeがこの方法を考えた時代は、計算環境といえば対数表・三角関数表と一群の熟練した計算助手（コンピュータとは一味違うcomputor）しかなかった点である。C++もなければUNIX WSもなく、ましてやスパコンなどは夢のまた夢。こんな時代でも、いやこんな時代だからこそ、当時の計算屋は計算効率の向上に血道を上げたのである。何せ、アホな計算や無駄な計算をやらせても計算機は文句を言わないが、計算助手は確実に文句を言うし、ストライキだってしかねない。

森口繁一先生の講義で、第二次世界大戦直後にアメリカに留学したとき、IBMかどこかのComputor Roomに入って、何十人ものうら若き女性が一斉に手回し計算機を回しているのを目の当たりにして感動した、という昔話を聞いた覚えがある。私の前の職場で聞いた話であるが、計算助手に若い女性が多かった時代の計算屋（＝計算監督？）は、人間関係などで苦労が多かったそうである。

さて、Enckeが直面した問題は、周期彗星の軌道計算である。周期彗星は、太陽の周りをほぼ楕円軌道を描いて回っている。軌道の楕円軌道からのずれ（摂動と呼ぶ）は、木星など惑星の影響によるものであり、その大きさは、もとの楕円軌道に対して千分の一以下の小さな量である。楕円軌道については、離心率がどんなに大きくても、ケプラーの法則から解析的にいくらでも精度よく求めることができる。もともとの微分方程式を直接数値積分する正統的な方法（これは、最初に実際の問題に適用した人の名を取ってCowell法と呼ばれている）で計算しようとすると、特に離心率が大きい場合は、計算精度を確保するために積分の刻み幅を細かく取らねばならず、数値積分しなくてもわかる楕円軌道の部分の計算に、結局、多大な時間と計算資源を費やすことになる。

特に、有効数字について考えてみよう。有効数字６桁の電卓（あるいは手計算）で真の軌道全体を数値計算すると、誤差は６桁目に出る。つまり、絶対誤差は相対誤差に等しく、百万分の１程度である。一方、摂動の大きさは千分の一程度だから、摂動だけを数値計算する場合、最終的な計算精度が６桁しか必要でなければ（そして、当時の観測精度はこの程度だった）、計算に必要な有効数字は３桁でよいことになる。つまり、計算助手が筆算するときに書きとめていく数字の量が半減することになる。これは、驚異的な生産性の向上である。逆に考えると、有効数字６桁の計算でも軌道全体からみた絶対誤差は十億分の１程度となる。解析的にわかる楕円軌道の部分が、これに見合う十分な精度で計算できれば、直接計算とあまり変わらない手間で、全体として計算精度が９桁保証されることになる。これがEncke法の極意である。

3 Encke 法の数学

Encke 法を数学的に表現してみよう。微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = X_0(x,t) + X_1(x,t), \quad x(0) = x_0$$

を解くことを考える。今

$$\frac{d\xi}{dt} = X_0(\xi,t), \quad \xi(0) = x_0$$

なる微分方程式が解析的に解け、その解が時間tと初期値x_0の既知関数$\xi(t;x_0)$としてわかっているとしよう。これを参照解reference solution もしくは非摂動解unperturbed solution とよぶ。周期彗星の軌道運動の場合、楕円軌道の部分がこれにあたる。

もし、摂動をもたらす力X_1が非摂動部分の力X_0に比べて小さいとすると、真の解xの大きさは非摂動解ξの大きさとあまり変わらないであろう。したがって、両者の差$\Delta x \equiv x - \xi$を新しい変数とすれば、微分方程式は

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \Delta X_0 + X_1(x,t), \quad \Delta x(0) = 0$$

と書き直される。ただしxは$\xi(t) + \Delta x$の意味であり、ΔX_0は、

$$\Delta X_0 \equiv X_0(\xi(t) + \Delta x, t) - X_0(\xi(t), t)$$

で表わされる非摂動部分の力の差で、摂動Δxが小さくとどまる限り、摂動力X_1と同程度の小さい量であると期待される。

ΔX_0はほぼ同じ大きさを持つ２つの量の差であるから、これをそのまま計算すると桁落ちが生じる（ここに気がついたのがEnckeの偉いところで、式を文字のまま操作するだけでなく、自分で実際に数値を入れて計算をしていないとなかなか気がつかないものである）。これを避けるために、分母の有理化などのテクニックを用いて、たとえば、$X_0 = x^2$のとき$\Delta X_0 = (2\xi + \Delta x)\Delta x$などと、解析的に桁落ちが無くなるように書き換えることができたとする。こうすれば、書き換えた微分方程式の右辺はいずれも小さい量なので、小さくなった分だけ有効数字が稼げる。こうやって「ΔX_0の表現を桁落ちが無いように書き換えた後、Δxに対する微分方程式を直接数値積分する方法」をEncke 法と呼ぶのである。

4 Encke 法の没落

手計算の時代は一世を風靡したEncke 法であったが、電子計算機の発達以降は、Cowell 法などの直接的数値積分法に押されてほとんど使われなくなってしまった。その理由は、いくつかある。一つは、あまりの煩雑さに手計算時代には省みられることのなかった「刻み幅を可変にする」手法が取り入れられて数値積分法が進歩したため、Encke 法の独壇場であった離心率が大きい場合でも、同じ程度の計算時間ですむようになったことがある。Encke 法では微分方程式の解析的な書き換えが伴うため、物理モデルが複雑になればなる

ほど、計算の前準備として余計な手間がかかり、簡便性を求める研究者から次第に敬遠されるようになってきた。

もう一つのより深刻な理由は、Encke 法が前提としている「摂動Δxは常に小さいままでいる」という仮定が、実際には満たされないことが多いことである。書き直された微分方程式の右辺が、はじめは小さい量であったとしても、その時間的平均値がゼロでないと、時間が経つにつれて摂動が時間に比例して大きくなり、ついには上記の仮定が満たされないことになる。周期彗星の軌道の場合でいうと、軌道の大きさ・形は当初の楕円軌道からあまり変わらないとしても、軌道上の位置がしだいにずれていくのである。

このように、振幅や軌道の大きさなどの作用変数は時間に比例するような（永年的という）ずれは生じにくいが、位相や軌道上の位置角などの角変数には永年的な変化が生じることが多い。いったん摂動が成長してしまうと、もはやEncke 法は有効でなくなる。ほうっておくと位相が１８０度ずれてしまい、ほぼ同じ量の差をとったつもりが実質的に和をとったことになり、誤差が真の解自体の２倍まで跳ね上がってしまうことさえ起きる。

この現象は手計算時代に既に気づかれており、そのような場合はあらためて参照軌道を取り直し、新しい摂動を十分小さくしてからもう一度Encke 法を適用することが行われた。この新規巻き直しを参照軌道の規正rectification という。残念ながら、一般的に言えば、摂動が小さいままでいる参照軌道を選ぶことはかなり難しい。長期間の解がわかれば、時間平均をとることにより、丈夫で長持ちする参照軌道を見つけることは可能である。が、これは話があべこべで、そもそも解を求めるために数値積分を実行するのであるから、解がわかっていれば参照軌道は必要ない。特に、激しく振動する成分を真の解が含んでいると、平均的に正しい参照軌道を見つけるのは至難の業であり、参照軌道の規正を頻繁に行わなければならなくなる。規正は手間のかかる作業であり、計算誤差も混入しやすいため、こうなるとEncke 法の利点が失われてしまうのである。

5　拡張Encke 法

しかし、これは「小さい量に着目して計算すれば、全体として精度よく計算できる」というEncke のアイデアが悪いからではない。要は、参照軌道の選び方の問題である。なぜ長持ちする参照軌道が見つけにくいかというと、参照軌道が複雑な関数形をしているからである。では、なぜ参照軌道が複雑な形をとるかといえば、これは、非摂動部分の力X_0の関数形が複雑な形をしているからである。もし、適当な変数変換を施して、参照軌道がシンプルになるような新変数を採用すれば、話は変わってくる。一番シンプルな軌道といえば、定数もしくは時間の一次関数以外にない。こう考えてくると「まず変数変換を施して参照軌道をシンプルにしてからEncke 法を適用する」というアプローチが考えられる。これを拡張Encke 法と呼ぼう (Fukushima 1996)。

拡張Encke 法を数学の言葉で述べよう。ちょっと特殊な形の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = X_0(y) + X_1(x,y,t), \quad \frac{dy}{dt} = Y_1(x,y,t), \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0,$$

を解くことを考える。この微分方程式系は一見非常に特殊な形にみえるが、実はそうでは

ない。正準形式の力学系は、適当な正準変換によってこの形に持ってくることができる。その意味では、かなり一般的な形をしていると言ってよい。さて、参照軌道は

$$\frac{d\xi}{dt} = X_0(\eta), \quad \frac{d\eta}{dt} = 0, \quad \xi(0) = x_0, \quad \eta(0) = y_0,$$

という自明な微分方程式を解く（？）ことによって

$$\xi = x_0 + X_0(y_0)t, \quad \eta = y_0$$

と定数および時間の一次関数として表現される。したがって、この参照軌道に対してEncke法を当てはめれば、解くべき微分方程式は

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \Delta X_0 + X_1(x, y, t), \quad \frac{d\Delta y}{dt} = Y_1(x, y, t), \quad \Delta x(0) = 0, \quad \Delta y(0) = 0,$$

となる。ただし

$$x = \xi + \Delta x = x_0 + X_0(y_0)t + \Delta x, \quad y = \eta + \Delta y = y_0 + \Delta y$$

の意味であり、

$$\Delta X_0 \equiv X_0(\eta + \Delta y) - X_0(\eta)$$

は、桁落ちが無いように書き換えてあるものとする。これが拡張Encke法である。

物理的に簡単なモデルである１次元調和振動子の場合、Encke法だと成長してしまうような摂動に対しても拡張Encke法が有効であることを解析的に示せる例がいくつかある。詳細はFukushima(1996)に譲る。

6　数値例

拡張Encke法の有効性を示す例を２つほどお見せしよう。図１は、離心率の大きな軌道の例として、倍精度計算で、小惑星Icarus（離心率約0.83、周期１０ヶ月強）の軌道を約２０００年にわたって各種の数値積分法で計算した結果である。図の縦軸は４倍精度計算の結果と比較して得られた誤差の対数で、横軸は時間の対数である。ここに、Cowellはもとの微分方程式を直接数値積分するCowell法、Enckeは本来のEncke法、Encke+GaussはGaussの軌道要素を新変数にとった拡張Encke法を、それぞれ示す。いずれのEncke法においても、参照軌道の規正は一切行わなかった。明らかに、規正無しのEncke法では、はじめこそ摂動が小さいので、Cowell法に対し、６桁以上の高精度を誇っているが、軌道上を一回転もしないうちに、摂動が成長して参照軌道が使い物にならなくなり、最終的にはCowell法と似たり寄ったりの結果となっている。これに比べ、拡張Encke法では、最初の６桁以上の精度の差をキープするばかりでなく、Cowell法が時間の２乗で誤差を拡大し続けるのに対し、拡張Encke法では時間の1.5乗でしか成長しない（なぜかは不明）ので、その差はますます拡大し、2000年後には約９桁にまでなっていることが見て取れよう。

さて、拡張Encke法は、その精神からいって天体の軌道運動だけに当てはまるアイデアではない。摂動論で取り扱える問題ならすべて適用が可能である。その例として、天体の

自転運動を取り上げよう。図２はモデル化した地球の自転を約１００年にわたって数値積分した結果である。ここに、Euler は力学の教科書によく現れる Euler 角に関する力学方程式（Euler 方程式という）を直接数値積分する方法で、New は自転角と角運動量の５成分を新変数にとった場合の拡張Encke 法(Fukushima 1996) を、それぞれ示す。

地球の自転の場合、周期彗星の場合の楕円運動に相当する基本的運動は、空間に対し固定された回転軸の周りの一様回転である。摂動を及ぼすのは月・太陽によるトルクであり、回転軸の変化および回転角の非一様性として現れる。地球の自転は、つい最近まで時計の代わりに用いられていたぐらい一様性が高いから、拡張Encke 法によって、この一様回転部分を差し引くと、残る摂動の大きさは１０億分の一程度と非常に小さい。図に表れている驚異的な誤差の大きさの違いは、この摂動と一様回転の大きさの違いがそのまま表れた結果である。明らかに、時間が経ってもこの優位性はくずれず、拡張Encke 法で求めた結果は地球が３万回以上回転した後でも、従来の方法に比べて約９桁高精度である。

7　おわりに

一度は「摂動論という解析的な見通しのよさと、数値計算による精密さとを兼ね備えた最良の方法」とまで詠われたが、可変次数可変刻み幅多段法パッケージなどのタフで便利な近代的数値積分法の台頭により、舞台裏へと追いやられたEncke 法。しかし「古い皮袋に新しい酒を盛る」のたとえの通り、線型非摂動解をもつ変数に変数変換した後に適用するというアイデアにより、Encke 法は、超高精度を追求する現代において立派によみがえったといえる。

たまには温故知新も悪くはない。

参考文献

[1] Encke, J.F., 1854, *Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1857*, Königlich Akademie der Wissenschaften, Berlin.

[2] Fukushima, T., 1996, Generalization of Encke's Method and Its Application to the Orbital and Rotational Motions of Celestial Bodies, Astron. J., 1263-1277.

[3] Hairer, E., Nørsett, S.P. and Wanner, G., 1993, *Solving Ordinary Differential Equations I, 2-nd ed.*, Springer-Verlag, Berlin.

[4] Hairer, E. and Wanner, G., 1991, *Solving Ordinary Differential Equations II*, Springer-Verlag, Berlin.

Figure 1. Orbital Integration Error of Icarus

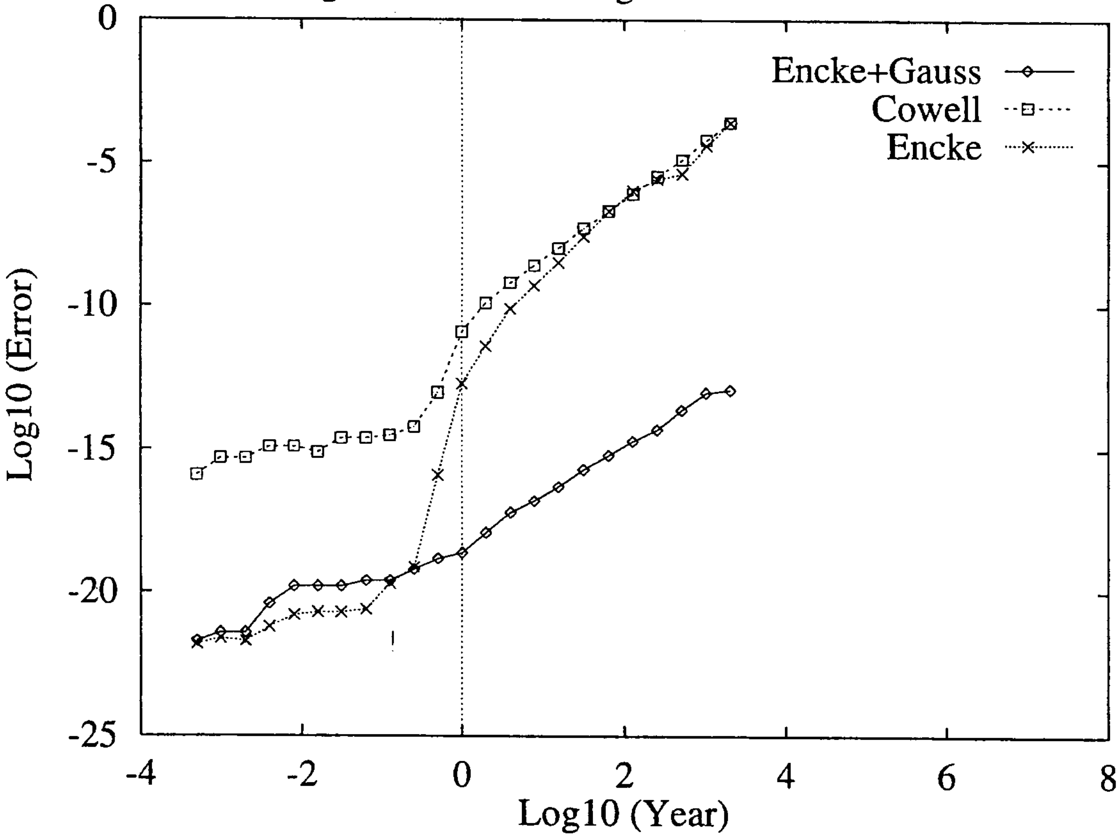

Figure 2. Integration Error of Earth Rotation