

複素変数で見る古典力学*

吉田春夫 (国立天文台・総研大)

e-mail:yoshida@gauss.mtk.nao.ac.jp

1 力学系の積分可能性

線形の調和振動や太陽の万有引力を受ける惑星の運動が「解ける」という事実は初年級の力学で学ぶ事柄である。しかし初年級の力学は決して「解がわかっている」問題を越えた「解けない」問題について言及することはない。

運動方程式の解に対して、値が一定となる関数を第一積分 (積分, 保存量) と言う。例えばハミルトニアン自身, Hamilton 方程式の第一積分である。自由度 n の Hamilton 系ではハミルトニアン以外に $(n-1)$ 個の包含系をなす一価の第一積分が存在するとき積分可能であると言われる。積分可能な Hamilton 系では解は実際に求積操作によって求められる。そこで当然

Hamilton 力学系の基本問題

与えられた Hamilton 系の積分可能, 不可能性を判定せよ。

という問題意識がわき起こるが, 今日の我々の知識はこの基本問題の解決には程遠い。

自由度 1 の系は常に積分可能である。よって積分可能性が問題となるのは自由度 2 の系以上である。その自由度 2 の Hamilton 系ではただ 1 つの独立な積分 $\Phi = \text{const.}$ の存在が積分可能性を意味する。そしてこの最も簡単な自由度 2 の場合においてすら「基本問題」に対する解答は知られていない。

話をより具体的にするために, 1 つのパラメータ ϵ を含む自由度 2 の Hamilton 系

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{4}(q_1^4 + q_2^4) + \frac{\epsilon}{2}q_1^2q_2^2 \quad (1)$$

を考える。この系は 4 次の同次式ポテンシャル中の質点の運動を記述し, $\epsilon = 0, 1, 3$ の時に積分可能である。実際

$$\epsilon = 0 : \Phi = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{4}q_1^4$$

$$\epsilon = 1 : \Phi = q_1p_2 - q_2p_1$$

$$\epsilon = 3 : \Phi = p_1p_2 + q_1q_2(q_1^2 + q_2^2)$$

が各々の場合のハミルトニアンと独立な第一積分であることは簡単にチェックできる。しかし他の ϵ に対しても第一積分が存在するかもしれない。つまり積分可能性を納得することは容易だが (但し発見は一般に困難である), その逆の積分不可能性を納得するのは別の次元の話となるわけである。図 1, 図 2, 図 3 はそれぞれハミルトン系 (1) の $\epsilon = 1, 3, 5$ の時の典型的な軌道をプロットしたものである。

*1996 年度湘南レクチャー「非線形現象の数理」講義録

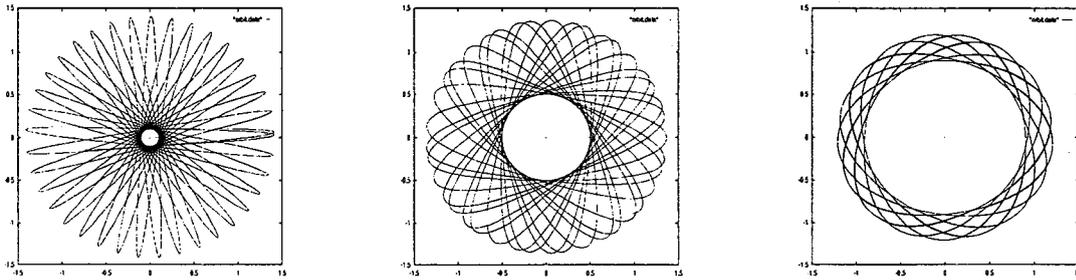


図 1: $\epsilon = 1$ の時の (q_1, q_2) 面における 3 つの初期条件に対する軌道

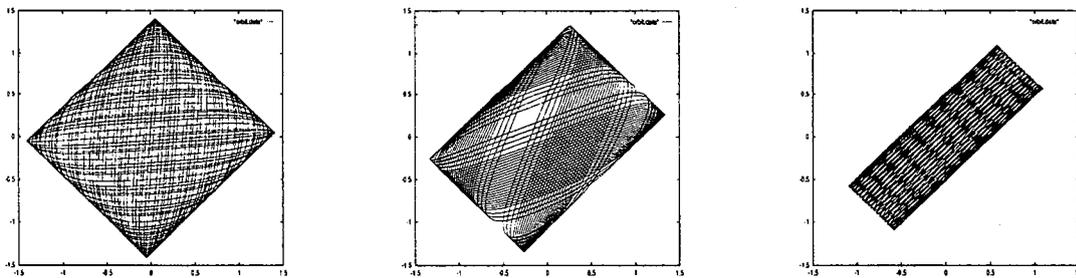


図 2: $\epsilon = 3$ の時の (q_1, q_2) 面における 3 つの初期条件に対する軌道

積分可能系の古典的な例としては、ケプラー問題、重力 2 中心問題、楕円体上の測地流、剛体の自由回転などがある。今世紀後半になって発見された現代的な例としては戸田格子 (Toda lattice) がある。

1.1 Poincaré 写像

自由度 2 の Hamilton 系に対して、運動方程式の直接の数値計算によって、その系の積分可能、不可能性を納得する方法がある。それが Poincaré 写像の計算である。

4 次元の相空間の中でエネルギー積分 $H = \text{const.} = E$ は 3 次元の超曲面 (等エネルギー曲面) を定め、解軌道はこの等エネルギー曲面上に束縛される。そして 3 つの「座標」 (q_1, q_2, p_2) がこの等エネルギー曲面上の位置を一意的に定める。今この等エネルギー曲面上 $q_1 = 0$ で決められる 2 次元の断面 (surface of section) を考え、軌道がこの断面を横切る時の交点に注目する。有界な軌道は一般にこの断面を無限回横断する。それに応じて (q_2, p_2) を座標とする交点 $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ は無限の点列を形成する。ハミルトニアンとエネルギー値 $H = E$ を決めた時に、運動方程式から写像 $P_i \rightarrow P_{i+1}$ は一意的に決まる。これを Poincaré 写像 (Poincaré map) と言う。周期解はこの Poincaré 写像の不動点に対応する。図 4 は図 1, 図 2, 図 3 の軌道についての Poincaré 写像をプロットしたものである。

積分可能系に対する Poincaré 写像は滑らかな曲線族 (不変曲線) を生成する。例えば Hamilton 系 (1) において $\epsilon = 1$ の場合、 $H = E$ 及び $\Phi = C$ において $q_1 = 0$ とおいて得られる

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{4}q_2^4 &= E \\ -q_2 p_1 &= C \end{aligned}$$

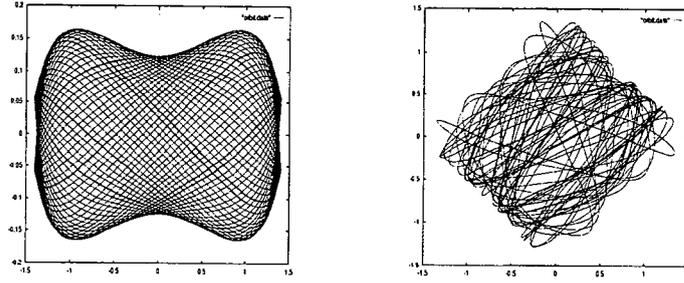


図 3: $\epsilon = 5$ の時の (q_1, q_2) 面における 2 つの初期条件に対する軌道

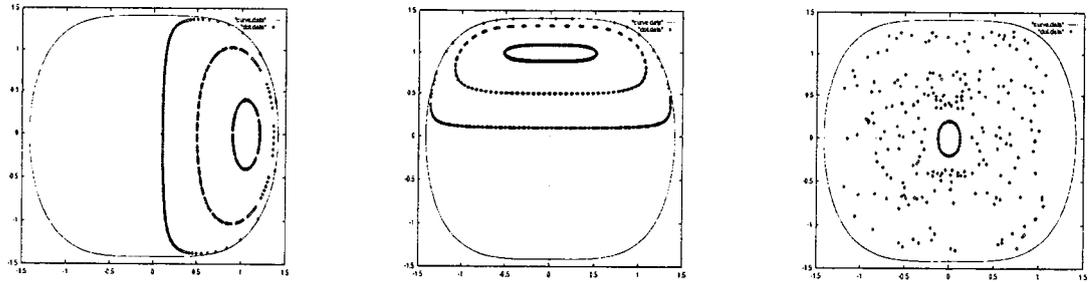


図 4: $\epsilon = 1, 3, 5$ に対する Poincaré 写像. 初期値は全て図 1-図 3 に対応

から変数 p_1 を消去すれば (q_2, p_2) 面内の関係式

$$\frac{1}{2} \left(\frac{C^2}{q_2^2} + p_2^2 \right) + \frac{1}{4} q_2^4 = E \quad (2)$$

を得るが、これは固定したエネルギー値 E に対し、 C を変化させることによって滑らかな曲線族を与えることがわかる。そして数値的に得られる点列はこの曲線上に束縛される。よって規則性の無い Poincaré 写像はその系の積分不可能性を強く示唆することになる。つまりすべての ϵ で (1) が積分可能とはならないのである。そこで当然問題となるのが

問題

Hamilton 系 (1) において、すべての積分可能な ϵ を決定せよ。

である。

古典的な「解析力学」における種々の方法論は残念ながらこの種の問題に対して無力であった。その解答が得られるようになったのはここ 10 年ぐらいの間である。そこで本質的であったのが

- 運動方程式を複素変数で考える

ことであった。

2 運動方程式を複素変数で見る

我々が初めて複素数に出会うのは 2 次方程式である。実数を複素数に拡張することによって、すべての 2 次方程式は常に解を持つことになる。複素数を認めなければ、判別式による場合分け

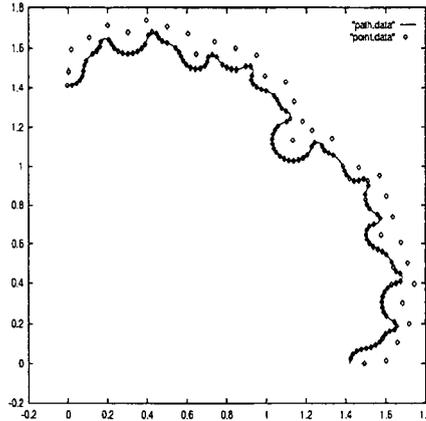


図 5: Hamilton 系 (6) において数値的に検出される解の特異点. 実線は $|q_2(t)|$ の等高線を表す.

の世界からの脱出は困難である. 逆説的だが複素 (complex) 化は代数方程式の理論を大いに単純 (simple) 化するのである.

次に複素数が威力を発揮するのは複素関数論の中の定積分の計算である. Cauchy の積分定理によって, ある種の定積分は複素平面内の特異点である極における留数に置き換えられてしまう. 一見「悪者」に見える特異点は, 実は役に立つ「正義の味方」なのである.

運動方程式に話を戻そう. Hamilton 方程式などの常微分方程式と初期条件の組は, 解 $q(t)$ の $t = 0$ の周りでの Taylor 級数展開

$$q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \quad (3)$$

を決定する. この Taylor 級数展開は一般に有限の収束半径 R を持つ. 収束半径 R は Cauchy-Hadamard の定理によって

$$1/R = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k} \quad (4)$$

で与えられる. この収束半径の存在は収束円上の解の特異点があることに起因する. 周期運動のように実軸上には特異点が現れない場合でも収束半径は一般に有限となる. それは複素平面での特異点に関与している.

線形の微分方程式では解の特異点は方程式自身の特異点に限られる. よって方程式自身に特異点のない調和振動では, 解は無窮大の収束半径を持つ三角関数で表現される. いっぽう非線形の微分方程式では解の特異点の位置は初期値に依存し, 前もってわからないことが多い. このため「動く」特異点と呼ばれる. 動く特異点の最も簡単な例は 1 階の非線形方程式

$$\dot{q} + q^2 = 0$$

の解

$$q = \frac{1}{t - c}$$

に見られる. この解は $t = c$ に 1 位の極を持つが, その位置 c は $t = 0$ での初期値 $q(0)$ に依存し, $c = -1/q(0)$ という関係にある.

この「動く」特異点の位置, 配置は与えられた微分方程式, 及び初期条件から数値的に求めることができる. Taylor 展開, あるいは Runge-Kutta 法などで複素平面上のいくつかの点 t_i で解の

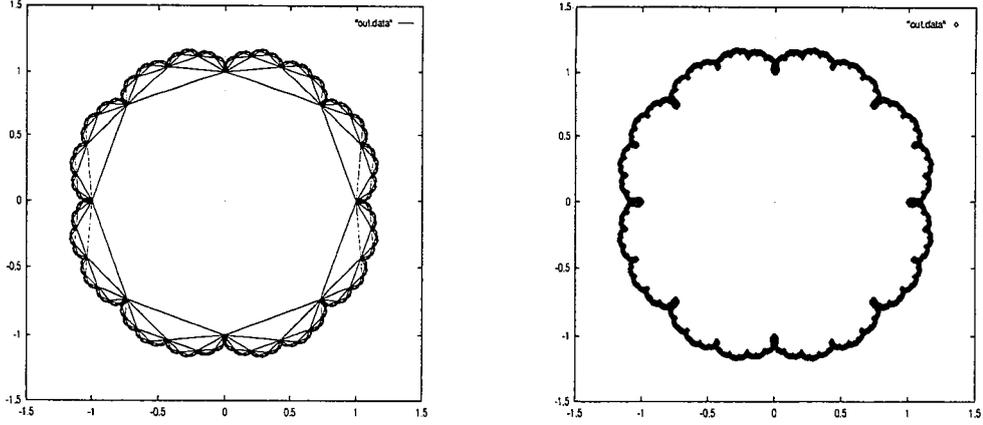


図 6: Hamilton 系 (6) の解の複素 t 平面上での特異点の分布. 文献 [3] による.

値 (近似値) を求めておき, t_i の周りでの Taylor 級数展開から収束半径を求めるという手続きを繰り返すのである. この数値的な「特異点探検」によって, 例えば解が楕円関数 $q = cn(t)$ で表される非線形振動

$$\ddot{q} + q^3 = 0 \quad (5)$$

においては, 特異点の配置の 2 重周期性が容易に確認される.

自由度 2 以上の Hamilton 系においてはこの特異点が集積し, 「自然境界」を形成している例がある. 3 次の同次式ポテンシャル系

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3 \quad (6)$$

において $t = 0$ の初期値を $q_1 = 1, q_2 = p_1 = p_2 = 0$ として「特異点探検」を行うと, 自己相似的な特異点の集積をみることができる. 図 5 は数値的に特異点の位置が検出される様子を示したものである. 図 6 (左) は自己相似的な特異点の分布を示したもので, そして図 6 (右) は結果として得られる解の自然境界である. この特異点分布の自己相似性は次の「特異点解析」における解の展開と深く関わっている. 詳しくは参考文献 [3,4] を参照せよ.

3 特異点解析

重力の作用下での固定点の周りの剛体の運動 (コマの運動) は Euler-Poisson の方程式

$$\begin{aligned} A \frac{d\omega_1}{dt} &= (B - C)\omega_2\omega_3 + z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3, & \frac{d\gamma_1}{dt} &= \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3 \\ B \frac{d\omega_2}{dt} &= (C - A)\omega_3\omega_1 + x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1, & \frac{d\gamma_2}{dt} &= \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1 \\ C \frac{d\omega_3}{dt} &= (A - B)\omega_1\omega_2 + y_0\gamma_1 - x_0\gamma_2, & \frac{d\gamma_3}{dt} &= \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2 \end{aligned} \quad (7)$$

によって記述される. ここで未知変数は角速度ベクトルの成分 $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ および方向余弦 $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ であり, 他に系を指定するパラメータとして固定点の周りの主慣性モーメント (A, B, C) および固定点からみた重心の位置ベクトルの成分 (x_0, y_0, z_0) を持つ. この系はパラメータ (A, B, C, x_0, y_0, z_0)

の任意の値に対して共通に3個の第一積分

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} (A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) + x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3 &= \text{const.} \\ A\omega_1\gamma_1 + B\omega_2\gamma_2 + C\omega_3\gamma_3 &= \text{const.} \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= \text{const.}\end{aligned}$$

を持つ。Euler-Poisson の方程式においては4番目の積分の存在が系の積分可能性を意味する。19世紀の末、1889年の時点において4番目の第一積分が見つかったのは

$$\begin{aligned}(a) \quad x_0 = y_0 = z_0 = 0 \\ (b) \quad A = B, x_0 = y_0 = 0\end{aligned}$$

の2つの場合だけであった。これらはそれぞれ Euler, Lagrange の場合と呼ばれる。そして各々の場合の4番目の積分はそれぞれ

$$\begin{aligned}(a) \quad A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = \text{const.} \\ (b) \quad C\omega_3 = \text{const.}\end{aligned}$$

である。

1889年 S. Kowalevski はこの Euler-Poisson 方程式の新たな積分可能な場合を発見した。その時に用いられたアイデア、手法が特異点解析である。Euler, Lagrange の場合ともに解は時間 t の楕円関数で表され、いずれの場合も有理型関数である。そして解の複素 t 平面における特異点は極 (pole) 以外にない。そして解はこれらの特異点の近傍で十分な数の任意定数を含む Laurent 級数展開が可能となる。そこで Kowalevski は、逆にどのようなパラメータの値に対してこの「特異点が極のみ」という性質を解が持ちうるかに着目した。そして、ある具体的な計算によって先の Euler, Lagrange の場合以外の唯一の可能性が

$$(c) \quad A = B = 2C, y_0 = z_0 = 0$$

であることを示した。そしてこのパラメータ値に対して Euler-Poisson 方程式 (7) の4番目の第一積分

$$(c) \quad (\omega_1^2 - \omega_2^2 - x_0\gamma_1)^2 + (2\omega_1\omega_2 - x_0\gamma_2)^2 = \text{const.}$$

を「発見」し、実際に楕円関数の本質的な拡張である種数 (genus) 2 の超楕円関数による一般解の表現を得た。この積分可能系は Kowalevski のコマ (コワレフスカヤのコマ) と呼ばれる。

3.1 特異点解析の例

ここでは Hamilton 系 (1) に対して特異点解析を実行し、既知の積分可能な場合のパラメータ値 ϵ の特殊性を実感することしよう。

ハミルトニアン (1) から導かれる q_1, q_2 についての微分方程式は

$$\ddot{q}_1 = -q_1(q_1^2 + \epsilon q_2^2), \quad \ddot{q}_2 = -q_2(q_2^2 + \epsilon q_1^2) \quad (8)$$

である。今、解 $q = q(t)$ が $t = t_0$ に特異点を持つとしよう。 $t - t_0$ を改めて t と置いても微分方程式は変わらないから、常に $t = 0$ に特異点があると考えて良い。 $t = 0$ で特異点をもつ (8) の最も簡単な解は

$$q_1 = d_1 t^{-1}, \quad q_2 = d_2 t^{-1} \quad (9)$$

の形をしたものである。ここで d_1 および d_2 は連立代数方程式

$$2d_1 = -d_1(d_1^2 + \epsilon d_2^2), \quad 2d_2 = -d_2(d_2^2 + \epsilon d_1^2)$$

の根である。この代数方程式には本質的に 2 つの異なる根の組がある。それは

$$d_1 = 0, \quad d_2 = \pm\sqrt{-2} \quad (10)$$

および

$$d_1 = \pm\sqrt{\frac{-2}{1+\epsilon}}, \quad d_2 = \pm\sqrt{\frac{-2}{1-\epsilon}} \quad (11)$$

である。これらの係数 d_1, d_2 が虚数となることは、運動方程式の解の特異点が t の実軸上には現れないことの一つの帰結である。

特殊解 (9) を展開の主要項とし、展開係数に任意定数を含む解の展開を得るために、 e_1 および e_2 を定数とする

$$q_1 = d_1 t^{-1} + e_1 t^{-1+\rho}, \quad q_2 = d_1 t^{-1} + e_2 t^{-1+\rho} \quad (12)$$

なる解を考えよう。実際 (12) を微分方程式 (8) に代入し、 e_1, e_2 の 2 次以上の項を無視すれば e_1, e_2 についての線形方程式

$$\begin{pmatrix} (\rho-1)(\rho-2) + 3d_1^2 + \epsilon d_2^2 & 2\epsilon d_1 d_2 \\ 2\epsilon d_1 d_2 & (\rho-1)(\rho-2) + 3d_2^2 + \epsilon d_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = 0$$

が得られる。この線形方程式の係数行列式が 0 となる条件は主要項 (10) に対しては

$$(\rho+1)(\rho-4) (\rho^2 - 3\rho + 2(1-\epsilon)) = 0 \quad (13)$$

なる 4 次の多項式となり、主要項 (11) に対しては

$$(\rho+1)(\rho-4) \left(\rho^2 - 3\rho - 4 \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \right) = 0 \quad (14)$$

となる。この方程式の 4 つの根を ρ_i と記し (但し $\rho_3 = 4, \rho_4 = -1$ とする), (12) では省略された高次の非線形項も含むことによって最終的には微分方程式 (8) に対する

$$q_i = t^{-1} [d_i + f_i(I_1 t^{\rho_1}, I_2 t^{\rho_2}, I_3 t^{\rho_3})], \quad (i = 1, 2) \quad (15)$$

なる形の解の展開が得られる。ここで I_1, I_2, I_3 は 3 つの任意定数、そして $f_i(x, y, z)$ は x, y, z についての Taylor 級数を表す。

指数 ρ_i はパラメータ ϵ の値に依存し一般には複素数となり得るから、上の展開 (15) は必ずしも Laurent 展開とはならない。この展開が Laurent 展開、すなわち特異点が極となり解はその周りで一価となるためには指数 ρ_1 および ρ_2 が 2 つの主要項 (10), (11) に対して共に整数とならなければならない。(13), (14) からこれが可能となるのは $\epsilon = 0, 1, 3$ の時のみであることが確かめられる。そしてこれらのパラメータ値に対しては系は実際に積分可能でありハミルトニアンと独立な多項式の第一積分が存在している。

Kowalevski は以上に述べた計算と本質的に同じ手続きによって Euler-Poisson 方程式 (7) に対して (a) Euler, (b) Lagrange, (c) Kowalevski の場合を特徴づけた。そして (c) Kowalevski の場合に「幸いにも」4 番目の第一積分を発見し系を求積にと導いたのである。

実は同じような例題、すなわちパラメータを含む Hamilton 系で特異点解析によって選別されたパラメータ値が積分可能な場合となっている例は数多く存在している。いくつかの新しい積分可能系が特異点解析によって「発見」すらされている。そこで当然問題となるのがこの特異点解析と積分可能・不可能性の間の厳密な論理的関係である。

4 特異点解析に関する厳密な結果

特異点解析の要点は4次式(13), (14)の根として得られる指数 ρ_i がすべて実整数となることを要請している。これらの指数 ρ_i をその歴史的理由から Kowalevski 指数 (Kowalevski Exponent, KE) と呼ぶことにしよう。無理数や虚数の KE は実整数の KE の対極にある。

一般に k 次の同次式ポテンシャル $V(q_1, q_2)$ を持つ自由度 2 の Hamilton 系 (但し $k \neq 0, \pm 2$)

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V(q_1, q_2) \quad (16)$$

に対して

定理 1

積分可能 \Rightarrow すべての KE は有理数。

が証明できる。つまり無理数や虚数の KE は系の積分不可能性を意味する。また一般に自由度 n の同次式 Hamilton 系においては互いにペアをなす KE の組み ρ_i, ρ_{i+n} の差, $\Delta\rho_i = \rho_i - \rho_{i+n}$ に対して

定理 2

$\Delta\rho_i$ が有理数体上一次独立 \Rightarrow ハミルトニアンと独立な解析的第一積分は存在しない。

ことが証明できる。

また自由度 2 の同次式 Hamilton 系においてはより強い主張ができる。それによれば結果として

定理 3

Hamilton 系 (1) は $\epsilon = 0, 1, 3$ の時のみ, 独立な解析的第一積分を有する。

ことが結論される。詳しくは参考文献 [1,2] を参照されたい。

以上は経験的な特異点解析を正当化する試みとして, 積分可能性の必要条件として特異点解析を捕らえる研究である。より興味深い, 特異点解析の要請が積分可能性の十分条件を与えるか否かについてはまったく不明であり, 今後の研究に期待されるところが大きい。

参考文献

- [1] 大貫義郎・吉田春夫：岩波講座現代の物理学 1「力学」, 岩波書店 (1994)。
- [2] 吉田春夫：数理科学 1981 年 1 月号, 1985 年 2 月号, 1989 年 5 月号, 1995 年 6 月号の記事
- [3] H. Yoshida, Self-Similar Natural Boundaries of Non-integrable Dynamical Systems in the Complex t -Plane, in *Chaos and Statistical Methods* (Springer, ed. by Y. Kuramoto) 42 (1984)
- [4] Y.F. Chang, J.M. Greene, M. Tabor, and J. Weiss, The Analytic Structure of dynamical Systems and Self-Similar Natural Boundaries, *Physica* **8D**, 183 (1983)

拡張 Encke 法による 常微分方程式の超高精度数値積分

福島登志夫 (国立天文台)
181 東京都三鷹市大沢 2-21-1
toshio@nao.ac.jp

1 いとぐち

近年の計算機の速度向上により、微分方程式系で記述される物理モデルを研究する方法として、直接、基本の微分方程式群を数値積分して解く手法がますます流行している。これまでのところ、いわゆる力学系などで用いられることの多い常微分方程式については、汎用の数値積分法自体の研究がかなり進展し、解くべき問題の性質に応じて、簡便性、高速性、高精度、頑健さ (= 数値的不安定を起しにくい) などの諸性質を持つ代表的な数値積分法が出そろいつつある (Hairer *et al.* 1993, Hairer and Wanner 1991)。現在は、解くべきモデルの持つ代表的な性質を利用した (その意味では、汎用ではない) 手法の研究が盛んで、正準形式で記述できる Hamilton 力学系に対するシンプレクティック積分法がその好例である。これについては、本論集中の吉田春夫氏の解説を参照されたい。

さて、計算環境の進歩によって、個々の数値的手法の優劣が逆転することはよくある。有名な例は対数計算であろう。ひところ、その発明によって天文学者の寿命が大きく延びたとまでいわれた対数表であるが、関数電卓の普及後は見る影もない。三角関数表もその同類である。逆に、古臭いと思われた昔の方法が、一躍脚光を浴びる場合も少なくない。ここでは、その一例として Encke 法 (Encke 1854) のリバイバルの話 (Fukushima 1996) を述べよう。

2 Encke 法とは

頃は 19 世紀半ば。1846 年に、天王星の軌道に対する影響からアダムス、ルヴェリエの両者によって理論的に予測された場所に、弱冠 34 歳のガレがたった一晚の観測で海王星を発見した例を挙げるまでもなく、数多の天文学者がニュートン力学と万有引力の法則を応用して、いろいろな天体の軌道を決めようと躍起になっていた時代のことである。

当時のベルリン天文台長である Encke は、軌道計算の難物として有名であった周期彗星などの離心率が大きい (= 軌道楕円が細長い) 天体に対し、軌道を精度よく計算するため

に、苦心惨澹の上、一つの方法を考案した。ちなみに Encke とは、配下の若き助手ガレに海王星の予想位置を探索するよう（しぶしぶながら）命じた張本人である。

Encke の編み出した方法（Encke 法とよばれる）のエッセンスは「小さい量に着目して計算すれば、全体として精度よく計算できる」というものである。統計学の初歩で習う「平均を計算するとき、仮平均からの差を平均して仮平均に加える」も、これと同工異曲である。言われてみれば「なるほど」と誰しもうなずけるような簡単な着想ではある。名前が残るような大発見は、えてしてそういう単純なアイデアから生じることが多い。

ここで着目したいのは、Encke がこの方法を考えた時代は、計算環境といえば対数表・三角関数表と一群の熟練した計算助手（コンピュータとは一味違う computer）しかなかった点である。C++ もなければ UNIX WS もなく、ましてやスパコンなどは夢のまた夢。こんな時代でも、いやこんな時代だからこそ、当時の計算屋は計算効率の向上に血道を上げたのである。何せ、アホな計算や無駄な計算をやらせても計算機は文句を言わないが、計算助手は確実に文句を言うし、ストライキだってしかねない。

森口繁一先生の講義で、第二次世界大戦直後にアメリカに留学したとき、IBM かどこかの Computer Room に入って、何十人ものうら若き女性が一斉に手回し計算機を回しているのを目の当たりにして感動した、という昔話を聞いた覚えがある。私の前の職場で聞いた話であるが、計算助手に若い女性が多かった時代の計算屋（＝計算監督？）は、人間関係などで苦労が多かったそうである。

さて、Encke が直面した問題は、周期彗星の軌道計算である。周期彗星は、太陽の周りをほぼ楕円軌道を描いて回っている。軌道の楕円軌道からのずれ（摂動と呼ぶ）は、木星など惑星の影響によるものであり、その大きさは、もとの楕円軌道に対して千分の一以下の小さな量である。楕円軌道については、離心率がどんなに大きくても、ケプラーの法則から解析的にいくらでも精度よく求めることができる。もともとの微分方程式を直接数値積分する正統的な方法（これは、最初に実際の問題に適用した人の名を取って Cowell 法と呼ばれている）で計算しようとする、特に離心率が大きい場合は、計算精度を確保するために積分の刻み幅を細かく取らねばならず、数値積分しなくてもわかる楕円軌道の部分の計算に、結局、多大な時間と計算資源を費やすことになる。

特に、有効数字について考えてみよう。有効数字 6 桁の電卓（あるいは手計算）で真の軌道全体を数値計算すると、誤差は 6 桁目に出る。つまり、絶対誤差は相対誤差に等しく、百万分の 1 程度である。一方、摂動の大きさは千分の一程度だから、摂動だけを数値計算する場合、最終的な計算精度が 6 桁しか必要でなければ（そして、当時の観測精度はこの程度だった）、計算に必要な有効数字は 3 桁でよいことになる。つまり、計算助手が筆算するとき書きとめていく数字の量が半減することになる。これは、驚異的な生産性の向上である。逆に考えると、有効数字 6 桁の計算でも軌道全体からみた絶対誤差は十億分の 1 程度となる。解析的にわかる楕円軌道の部分が、これに見合う十分な精度で計算できれば、直接計算とあまり変わらない手間で、全体として計算精度が 9 桁保証されることになる。これが Encke 法の極意である。

3 Encke 法の数学

Encke 法を数学的に表現してみよう。微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = X_0(x, t) + X_1(x, t), \quad x(0) = x_0$$

を解くことを考える。今

$$\frac{d\xi}{dt} = X_0(\xi, t), \quad \xi(0) = x_0$$

なる微分方程式が解析的に解け、その解が時間 t と初期値 x_0 の既知関数 $\xi(t; x_0)$ としてわかっているとしよう。これを参照解 reference solution もしくは非摂動解 unperturbed solution とよぶ。周期彗星の軌道運動の場合、楕円軌道の部分がこれにあたる。

もし、摂動をもたらす力 X_1 が非摂動部分の力 X_0 に比べて小さいとすると、真の解 x の大きさは非摂動解 ξ の大きさとあまり変わらないであろう。したがって、両者の差 $\Delta x \equiv x - \xi$ を新しい変数とすれば、微分方程式は

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \Delta X_0 + X_1(x, t), \quad \Delta x(0) = 0$$

と書き直される。ただし x は $\xi(t) + \Delta x$ の意味であり、 ΔX_0 は、

$$\Delta X_0 \equiv X_0(\xi(t) + \Delta x, t) - X_0(\xi(t), t)$$

で表わされる非摂動部分の力の差で、摂動 Δx が小さくとどまる限り、摂動力 X_1 と同程度の小さい量であると期待される。

ΔX_0 はほぼ同じ大きさを持つ 2 つの量の差であるから、これをそのまま計算すると桁落ちが生じる（ここに気がついたのが Encke の偉いところで、式を文字のまま操作するだけでなく、自分で実際に数値を入れて計算をしていないとなかなか気がつかないものである）。これを避けるために、分母の有理化などのテクニックを用いて、たとえば、 $X_0 = x^2$ のとき $\Delta X_0 = (2\xi + \Delta x)\Delta x$ などと、解析的に桁落ちが無くなるように書き換えることができたとする。こうすれば、書き換えた微分方程式の右辺はいずれも小さい量なので、小さくなった分だけ有効数字が稼げる。こうやって「 ΔX_0 の表現を桁落ちが無いように書き換えた後、 Δx に対する微分方程式を直接数値積分する方法」を Encke 法と呼ぶのである。

4 Encke 法の没落

手計算の時代は一世を風靡した Encke 法であったが、電子計算機の発達以降は、Cowell 法などの直接的数値積分法に押されてほとんど使われなくなってしまった。その理由は、いくつかある。一つは、あまりの煩雑さに手計算時代には省みられることのなかった「刻み幅を可変にする」手法が取り入れられて数値積分法が進歩したため、Encke 法の独壇場であった離心率が大きい場合でも、同じ程度の計算時間で済むようになったことがある。Encke 法では微分方程式の解析的な書き換えが伴うため、物理モデルが複雑になればなる

ほど、計算の前準備として余計な手間がかかり、簡便性を求める研究者から次第に敬遠されるようになってきた。

もう一つのより深刻な理由は、Encke法が前提としている「摂動 Δx は常に小さいままでいる」という仮定が、実際には満たされないことが多いことである。書き直された微分方程式の右辺が、はじめは小さい量であったとしても、その時間的平均値がゼロでないと、時間が経つにつれて摂動が時間に比例して大きくなり、ついには上記の仮定が満たされないことになる。周期彗星の軌道の場合でいうと、軌道の大きさ・形は当初の楕円軌道からあまり変わらないとしても、軌道上の位置がしだいにずれていくのである。

このように、振幅や軌道の大きさなどの作用変数は時間に比例するような（永年的という）ずれは生じにくいだが、位相や軌道上の位置角などの角変数には永年的な変化が生じることが多い。いったん摂動が成長してしまうと、もはやEncke法は有効でなくなる。ほうっておくと位相が180度ずれてしまい、ほぼ同じ量の差をとったつもりが実質的に和をとったことになり、誤差が真の解自体の2倍まで跳ね上がってしまうことさえ起きる。

この現象は手計算時代に既に気づかれており、そのような場合はあらためて参照軌道を取り直し、新しい摂動を十分小さくしてからもう一度Encke法を適用することが行われた。この新規巻き直しを参照軌道の規正rectificationという。残念ながら、一般的に言えば、摂動が小さいままでいる参照軌道を選ぶことはかなり難しい。長期間の解がわかれば、時間平均をとることにより、丈夫で長持ちする参照軌道を見つけることは可能である。が、これは話があべこべで、そもそも解を求めるために数値積分を実行するのであるから、解がわかっているならば参照軌道は必要ない。特に、激しく振動する成分を真の解が含んでいると、平均的に正しい参照軌道を見つけるのは至難の業であり、参照軌道の規正を頻繁に行わなければならない。規正は手間のかかる作業であり、計算誤差も混入しやすいため、こうなるとEncke法の利点が失われてしまうのである。

5 拡張Encke法

しかし、これは「小さい量に着目して計算すれば、全体として精度よく計算できる」というEnckeのアイデアが悪いからではない。要は、参照軌道の選び方の問題である。なぜ長持ちする参照軌道が見つけにくいかというと、参照軌道が複雑な関数形をしているからである。では、なぜ参照軌道が複雑な形をとるかといえば、これは、非摂動部分の力 X_0 の関数形が複雑な形をしているからである。もし、適当な変数変換を施して、参照軌道がシンプルになるような新変数を採用すれば、話は変わってくる。一番シンプルな軌道といえば、定数もしくは時間の一次関数以外にない。こう考えてくると「まず変数変換を施して参照軌道をシンプルにしてからEncke法を適用する」というアプローチが考えられる。これを拡張Encke法と呼ぼう (Fukushima 1996)。

拡張Encke法を数学の言葉で述べよう。ちょっと特殊な形の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = X_0(y) + X_1(x, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = Y_1(x, y, t), \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0,$$

を解くことを考える。この微分方程式系は一見非常に特殊な形に見えるが、実はそうでは

ない。正準形式の力学系は、適当な正準変換によってこの形に持ってくるができる。その意味では、かなり一般的な形をしていると言ってよい。さて、参照軌道は

$$\frac{d\xi}{dt} = X_0(\eta), \quad \frac{d\eta}{dt} = 0, \quad \xi(0) = x_0, \quad \eta(0) = y_0,$$

という自明な微分方程式を解く (?) ことによって

$$\xi = x_0 + X_0(y_0)t, \quad \eta = y_0$$

と定数および時間の一次関数として表現される。したがって、この参照軌道に対して Encke 法を当てはめれば、解くべき微分方程式は

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \Delta X_0 + X_1(x, y, t), \quad \frac{d\Delta y}{dt} = Y_1(x, y, t), \quad \Delta x(0) = 0, \quad \Delta y(0) = 0,$$

となる。ただし

$$x = \xi + \Delta x = x_0 + X_0(y_0)t + \Delta x, \quad y = \eta + \Delta y = y_0 + \Delta y$$

の意味であり、

$$\Delta X_0 \equiv X_0(\eta + \Delta y) - X_0(\eta)$$

は、桁落ちが無いように書き換えてあるものとする。これが拡張 Encke 法である。

物理的に簡単なモデルである 1 次元調和振動子の場合、Encke 法だと成長してしまうような摂動に対しても拡張 Encke 法が有効であることを解析的に示せる例がいくつかある。詳細は Fukushima(1996) に譲る。

6 数値例

拡張 Encke 法の有効性を示す例を 2 つほどお見せしよう。図 1 は、離心率の大きな軌道の例として、倍精度計算で、小惑星 Icarus (離心率約 0.83、周期 10 ヶ月強) の軌道を約 2000 年にわたって各種の数値積分法で計算した結果である。図の縦軸は 4 倍精度計算の結果と比較して得られた誤差の対数で、横軸は時間の対数である。ここに、Cowell はもとの微分方程式を直接数値積分する Cowell 法、Encke は本来の Encke 法、Encke+Gauss は Gauss の軌道要素を新変数にとった拡張 Encke 法を、それぞれ示す。いずれの Encke 法においても、参照軌道の規正は一切行わなかった。明らかに、規正無しの Encke 法では、はじめこそ摂動が小さいので、Cowell 法に対し、6 桁以上の高精度を誇っているが、軌道上を一回転もしないうちに、摂動が成長して参照軌道が使い物にならなくなり、最終的には Cowell 法と似たり寄ったりの結果となっている。これに比べ、拡張 Encke 法では、最初の 6 桁以上の精度の差をキープするばかりでなく、Cowell 法が時間の 2 乗で誤差を拡大し続けるのに対し、拡張 Encke 法では時間の 1.5 乗でしか成長しない (なぜかは不明) ので、その差はますます拡大し、2000 年後には約 9 桁にまでなっていることが見て取れよう。

さて、拡張 Encke 法は、その精神からいって天体の軌道運動だけに当てはまるアイデアではない。摂動論で取り扱える問題ならすべて適用が可能である。その例として、天体の

自転運動を取り上げよう。図2はモデル化した地球の自転を約100年にわたって数値積分した結果である。ここに、Eulerは力学の教科書によく現れるEuler角に関する力学方程式(Euler方程式という)を直接数値積分する方法で、Newは自転角と角運動量の5成分を新変数にとった場合の拡張Encke法(Fukushima 1996)を、それぞれ示す。

地球の自転の場合、周期彗星の場合の楕円運動に相当する基本的運動は、空間に対し固定された回転軸の周りの一様回転である。摂動を及ぼすのは月・太陽によるトルクであり、回転軸の変化および回転角の非一様性として現れる。地球の自転は、つい最近まで時計の代わりに用いられていたぐらい一様性が高いから、拡張Encke法によって、この一様回転部分を差し引くと、残る摂動の大きさは10億分の一程度と非常に小さい。図に表れている驚異的な誤差の大きさの違いは、この摂動と一様回転の大きさの違いがそのまま表れた結果である。明らかに、時間が経ってもこの優位性はくずれず、拡張Encke法で求めた結果は地球が3万回以上回転した後でも、従来の方法に比べて約9桁高精度である。

7 おわりに

一度は「摂動論という解析的な見通しによさと、数値計算による精密さとを兼ね備えた最良の方法」とまで詠われたが、可変次数可変刻み幅多段法パッケージなどのタフで便利な近代的数値積分法の台頭により、舞台裏へと追いやられたEncke法。しかし「古い皮袋に新しい酒を盛る」のたとえの通り、線型非摂動解をもつ変数に変数変換した後に適用するというアイデアにより、Encke法は、超高精度を追求する現代において立派によみがえったといえる。

たまには温故知新も悪くはない。

参考文献

- [1] Encke, J.F., 1854, *Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1857*, Königlich Akademie der Wissenschaften, Berlin.
- [2] Fukushima, T., 1996, Generalization of Encke's Method and Its Application to the Orbital and Rotational Motions of Celestial Bodies, *Astron. J.*, 1263-1277.
- [3] Hairer, E., Nørsett, S.P. and Wanner, G., 1993, *Solving Ordinary Differential Equations I, 2-nd ed.*, Springer-Verlag, Berlin.
- [4] Hairer, E. and Wanner, G., 1991, *Solving Ordinary Differential Equations II*, Springer-Verlag, Berlin.

Figure 1. Orbital Integration Error of Icarus

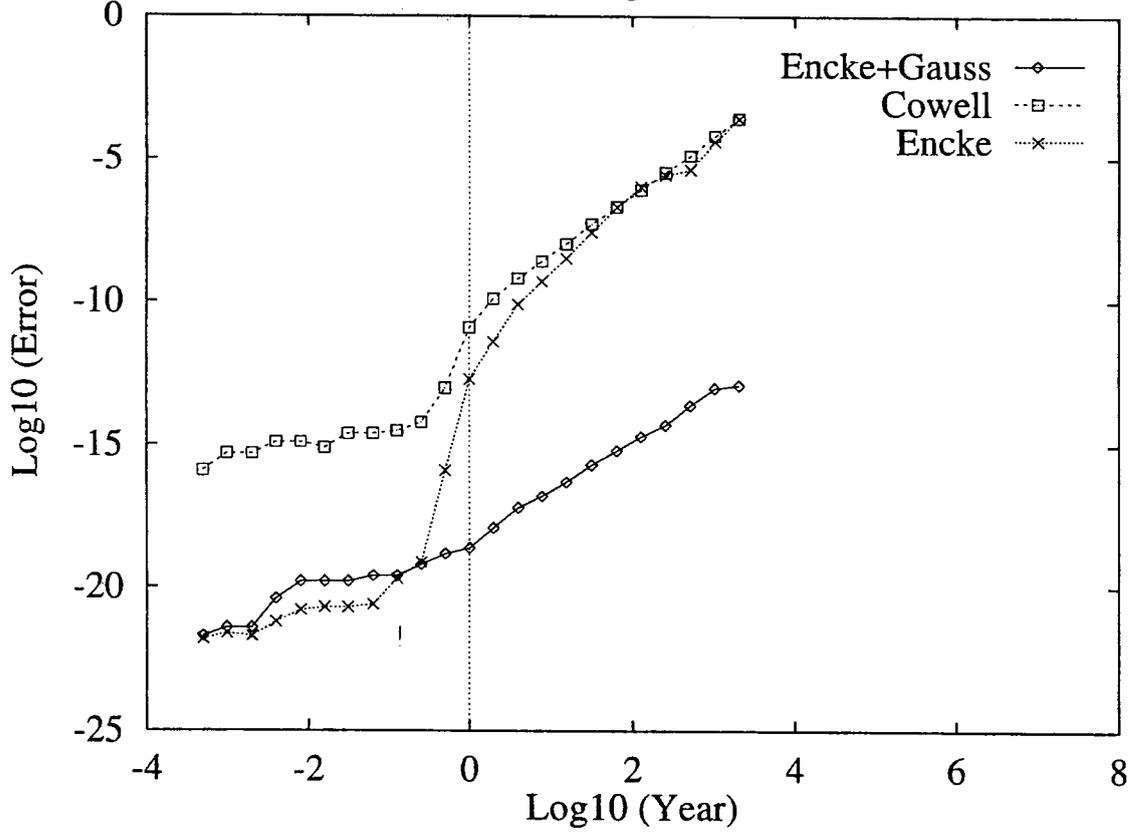


Figure 2. Integration Error of Earth Rotation

