自由落下三体問題における衝突軌道、振動運動とカオス

谷川清隆
国立天文台、〒１８１　三鷹市大沢２－２１－１
Email: tanikawa@cc.nao.ac.jp

三体問題の歴史を簡単に振り返り、振動運動について略述し、衝突軌道の数値的求め方を述べ、最後に衝突軌道とくに三体衝突と脱出の数値計算の結果を用いて振動運動の存在について議論する。

1. 三体問題小史

三体問題は、３個の質点がニュートンの万有引力で引き合ったらどんな運動をするか、という単純な問題である。この問題はニュートン (1687) 以来３００有余年の歴史を持つ問題であるが、いまだに満足のいく答えがない。歴史に名の残る数学者、物理学者、天文学者がそれぞれの時代に、いわばその時代の期待を担ってこの問題に挑戦してきた。ラグランジュ、オイラー、ポアンカレ、パンルベ、ブルンス、ズンドマン、フォン・ツァイペル、ジーゲル。

粗っぽく言って、１９世紀の終わりにブルンスやポアンカレが三体問題の解全体を代数関数や解析関数で表わすことは不可能であると証明したので、２０世紀に入ると、三体問題研究はいくつかの道に分かれた。それらをすべて記述するには三体問題にはあまりに多くの研究者が関係しており、とても筆者の手に負えるものではないが、間違いを覚悟で大きく２つに分けてみる。

１つは解全体を時間無限の過去 (初期運動) や未来の状態 (最終運動) によって定性的に分類、記述しようという試みである。これはフランスの Chazy(1922) に始まり、旧ソ連の研究者に引き継がれた。Hilmi, Merman, Alekseev 等の名前を挙げることができる (Alekseev, 1981)。全エネルギーが正であるか負であるかによって運動の分類は異なる。負の場合を考えると、無限の未来の状態として考えられるのは、(i) 一体と二体に分かれて走りさる、(ii) 三体系が壊れずにいる、(iii) 振動運動を行う、の３つである。(振動運動については後で述べる。) 無限の過去の状態も３つに分類できるから、無限の過去から未来までのふるまいは $3 \times 3 = 9$ 個に分類できる。たとえば、過去が (i) で未来が (ii) なら一体の捕獲である。これらが三体問題の相空間の中で、どのような割合を占め、互いにどのような関係にあるか。これが問題である。一体の脱出の判定基準を定式化する吉田の試みはこの流れに属する (Yoshida, 1972)。初期値で判定できれば三体問題の最終運動を決めたことになるからである。

もう１つの流れでは、なぜ解全体を知っている関数で表わせないのかの追求が行われた。つまりなぜ、あるいはどのように積分不可能なのか。これは三体衝突を調べることに相当する。二体衝突にしろ三体衝突にしろ、複数の物体が空間で同一の場所を占めるときには運動方程式で加速度が無限大になってしまうので、運動方程式自体に意味がなくなってしまう。いわば、解があの世に行ってしまうのである。二体衝突に関しては、正則化と呼ばれる変数変換が２０世紀のはじめに考案された (Whittaker(1937) の 424 ページ参照)。正則化を行うともとの運動方程式を含むような新しい運動方程式が得られ、あの世はなくなる。解はもとの運動方程式の解の特異点を通って解析的につながってしまう。そこでもとの運動方程式にもどっても解が存在すると解釈するのである。三体が同時衝突を起こすとき何が起こるのか。Siegel(1941) は三体衝突点が一般に真性特異点であることを示した。これが三体問題の解全体が解析関数で表わせないことの理由である。しかし、解全体をもっと制限の緩い関数で表わそうとする試みはその後も行われた。

三体問題の研究は 1960 年代と 1970 年代に大きく変わった。実のところ、この変革の直前には三体問題の研究はおそらく閉塞状況にあったと思われる。

まず三体問題の数値計算が 1960 年代に始まった。数値研究は三体問題に限らない。これはよく知られているように、一般の研究者に汎用計算機の使用時間が割り当てられ始めたことによる。三体問題の数値的研究は天文学者からの貢献である。もちろん以前から三体問題の数値研究は行われて来た。その結果が理論家から信用されないこともあったという (Alekseev, 1981)。制限三体問題では周期軌道の探索が、デンマークのコペンハーゲン学派 (Strömgren, 1925)、東北大学の松隈 (Matukuma, 1930) らによって行われた。

一般三体問題に話を限っても、1960年代以後多くの研究者の名を挙げることができる。藪下 (Yabushita, 1966)、Agekyan & Anosova (1967)、Szebehely & Peters (1967)、Saslaw et al. (1974)、Heggie(1975)、Broucke(1979)、Mikkola (1984) 等など。(日本の藪下氏が最初であることに注意。) 天文学から三体問題への要請の中で重要なものとして、連星形成の問題を解くことがある。宇宙には連星が多い。これは生まれたときからなのか、それとも後から形成されたのか。また球状星団や銀河の中で連星の役割も重要である。三体近接衝突のあとで連星が形成されると、高速で一体が飛び出す。三体相互作用でエネルギーが発生したと解釈できる。したがって、恒星系の進化にとって連星形成確率はたいへん重要な意味を持つ。また最近では、銀河を単位として連銀河、銀河群、銀河団の運動が注目され、やはり三体問題の数値計算が行われている (Valtonen, 1988; Anosova & Tanikawa, 1995)。

三体問題を数値計算で調べるといっても、尽くすべきパラメータは質量の組み合わせ、また9個の座標と9個の速度である。エネルギー保存則や角運動量保存則を使っても、調べるべき初期条件は気の遠くなるほど膨大である。したがって、人々は、平面問題、直線問題、二等辺問題、自由落下問題など初期値を制限して考えざるを得ない。いわば群盲像をなでるといった状況である。

もうひとつの変化は1970年代に起きた。Siegel & Moser の教科書 (1971) の影響かもしれない。1960年代後半の力学系研究の新しい流れ (Smale, 1967) の影響を受けていることは確かなようだ。McGehee(1974) が新しい変数を導入した。彼の変数はいまや McGehee 変数と呼ばれ、三体衝突の近くを通る解を記述することがこれによってたいへん容易になった。三体の慣性モーメントの 1/2 乗 (rとする) を動径座標、三体の形を角度座標とした「極座標」を取り、時間を $r^{3/2}$倍引き伸ばす。すなわち、新しい時間をτとして $dt = r^{3/2}d\tau$と置く。$r = 0$ が三体衝突であることは明らかである。もとの時間で有限時間で三体衝突に達する解は、新しい時間τでは無限時間かかる。非常に単純な変換である。コロンブスの卵だ。

さて McGehee 変数では、三体衝突 $r = 0$ も方程式の記述範囲に入ってしまう。三体問題のもとの方程式では三体衝突のとき右辺が無限大になってしまうので、三体衝突の状態というのは定義されておらず、意味がない。ところが McGehee の変数では三体衝突の状態に意味があるのである。三体衝突の状態そのものが多様体として表わされ、しかもその多様体上の流れは勾配的 (gradient-like) で非常に単純である。

McGehee の変数を使って古くからの多くの問題が一部解決された。代表的な2つが非衝突特異性と振動運動の存在の問題である。非衝突特異性については解説がある (谷川,1995; Saari and Xia, 1996)。また McGehee 変数を考慮した数値計算も行われ始めた (Heggie and Sweatman, 1991)。

2. 振動運動

振動運動の研究の歴史も長い。Chazy(1922) は三体問題の最終運動の分類を行ったが、その仕事の中で、論理的可能性として振動運動を指摘した。三体問題の振動運動とは、一体が連星に近づいたり遠ざかったりを繰り返すが、この振動の振幅が有界でない運動である。三体間の3つの距離を $r_{ij}, 1 \leq i < j \leq 3$ と書くと、振動運動は次式を満たす運動である。

$$\limsup \max r_{ij} = \infty \quad \text{かつ} \quad \liminf \min r_{ij} < \infty. \tag{1}$$

Sitnikov(1960) は三次元制限三体問題でこの運動の存在を証明した。

制限三体問題について説明が必要であろう。この問題は、二体の質量が有限で、第三体の質量がゼロの三体問題である。これは一般三体問題の極限の場合であり、たとえば、小惑星の運動を太陽と木星の影響の下に考えるときには悪くないモデルである。本質は第三体が残りの二体にまったく影響を与えないという点にある。

Sitnikov の発想は本質的に今日のいわゆるパチンコ効果を利用することである。彼は楕円運動する連星の重心を通って楕円運動に垂直に運動する第三体を考えた。この制限三体問題は2つのパラメータで記述できる。第三体が連星の軌道面を通過するときの速度 v_0とそのときの連星の楕円運動の位相ϕ_0である。どのϕ_0に対しても、初期値 v_0を0から増やしていくと、v_0が小さいうちは、第三体は無限遠に逃げずに戻ってくる。さらに v_0を増やすと、いずれは第三体が無限遠に去ってしまうような初期速度がある。それを v_0^∞と書く (これはϕ_0の関数である)。一方、連星が近点から遠点に向かっているときに連星の軌道面を通過すると第三体が加速されることを彼は証明する (これがパチンコ効果である)。上の2つの性質を併せると、v_0^∞

に十分近い速度ではじめに連星面を通過し、無限遠の近くまで放り出された第三体が戻ってきて連星面を通過するとき、連星が遠ざかっているなら、この第三体は2度目の放出で無限遠に去る。彼は、これを満たす初期速度が区間として存在することを示す。最初の速度を少し小さく取れば、2度目の放出で無限遠に行かずに戻ってくる。しかし3度目に逃げる初期値がある。以下同様に、4度目、5度目、$\cdots$で無限遠に逃げる速度の初期区間があることを示す。初期値の量はどんどん減っていくがゼロにはならない。その結果、振動を繰り返し、$t \to \infty$ のときその振動の振幅が無限大に向かう運動があることを示す。

以上が Sitnikov の方法のあらすじである。第三体が連星の運動に影響を与えないことから証明が簡単になっていることが判る。引き続き同じく旧ソ連の Alekseev(1968) は第三体の質量がゼロでなく、しかし非常に小さい場合を考え振動運動の存在を証明した。その後、Saari and Xia(1989) が直線三体問題でその存在を証明し、Xia(1994) が平面問題で $m_1, m_2 \gg m_3$ として存在を証明した。直線三体問題の場合を除き、Alekseev(1968) も Xia(1994) も制限三体問題からの摂動問題として振動運動の存在を証明した。

平面問題で三体の質量が同じ程度の場合はいまのところ未解決である。第三体が連星に戻ってきたとき、強く連星に影響を及ぼすので理論解析が難しい。5節では数値的にではあるが、この問題への我々の貢献について述べる。

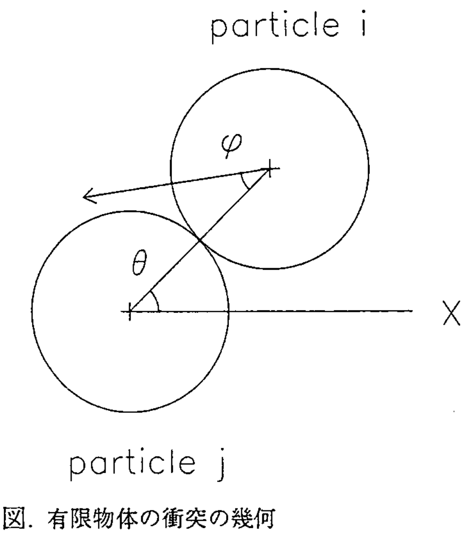
3. 衝突軌道を数値的に求める方法

通常、物理系の分野では現象を調べるとき、まず周期運動の存在および安定性の解析から始まる。周期運動がある程度判ると、非周期運動の解析が続く。

三体問題でも周期軌道を見つける努力はされている。もっとも手っ取り早いのは、制限三体問題からの解析接続で求める。制限三体問題ではいくつもの周期軌道の族が知られており、研究の基礎となっている (Hagihara, 1975)。はじめに $m_3 = 0$ として制限三体問題の周期軌道を求め、m_3をゼロから大きくして近くの初期条件を調べるのである。また一般三体問題ですでによく知られた周期解から始めて解析接続する (Hénon, 1974)。やみくもに周期軌道を見つけるのはむずかしい。

三体問題の場合、周期軌道とともに重要なのが衝突軌道である。理論解析の結果からも判る通り、三体問題の複雑さの原因は衝突軌道にある。二体衝突だけでなく、三体衝突軌道を数値的に求める方法があれば、たいへん好都合である。

ところが、平面三体問題の場合には質点同士の二体衝突軌道を数値的に求めるうまい方法がある (Tanikawa et al., 1995)。しかもこの方法によれば、三体衝突軌道まで得られてしまう。逆説的だが、質点の代わりに、大きさを持つ物体を考える。物体の半径を Rとすると中心間距離が $2R$のとき衝突する。衝突を2つのパラメータで表わす。平面座標 (x, y) を取り、添字の大きな物体から見たもう一方の物体の方位角をθ、速度の方向をφ で表わす (1図参照)。φ は正面衝突のとき0になるように取る ($-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$)。衝突に参加しない物体が十分遠くにあるとき、衝突時には衝突する物体の二体問題と思ってよいから、正面衝突ならほぼ直線的に近づく。したがって、Rを十分小さく取れば、$\varphi \simeq 0$ が質点同士の衝突に対応する。

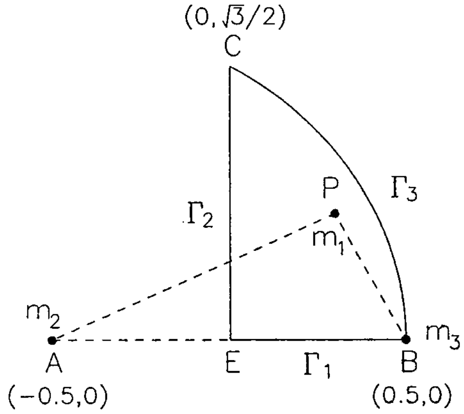


1図. 有限物体の衝突の幾何

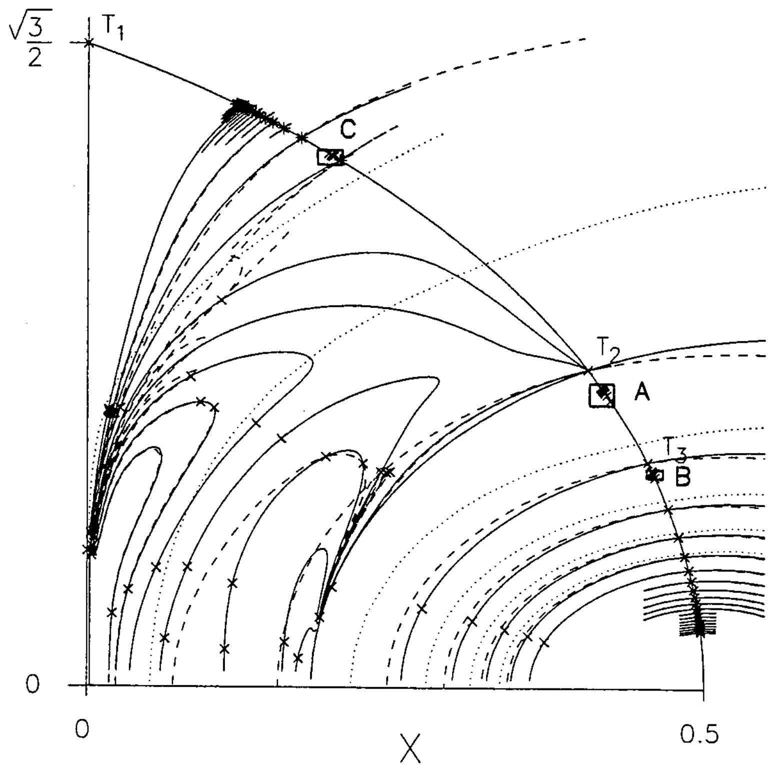
軌道を数値積分し、二体間の最小距離が$2R$になったら積分を止め、(θ,φ) を計算する。初期値を変えて数値積分すると、別の (θ,φ) の組が得られる。初期値を連続的に動かして計算したとき、φ が$+$から$-$あるいは$-$から$+$に符号を変えれば、符号の変わるあたりに質点としての衝突があるはずである。これが二体衝突を数値的に求める方法である。

4. 自由落下三体問題

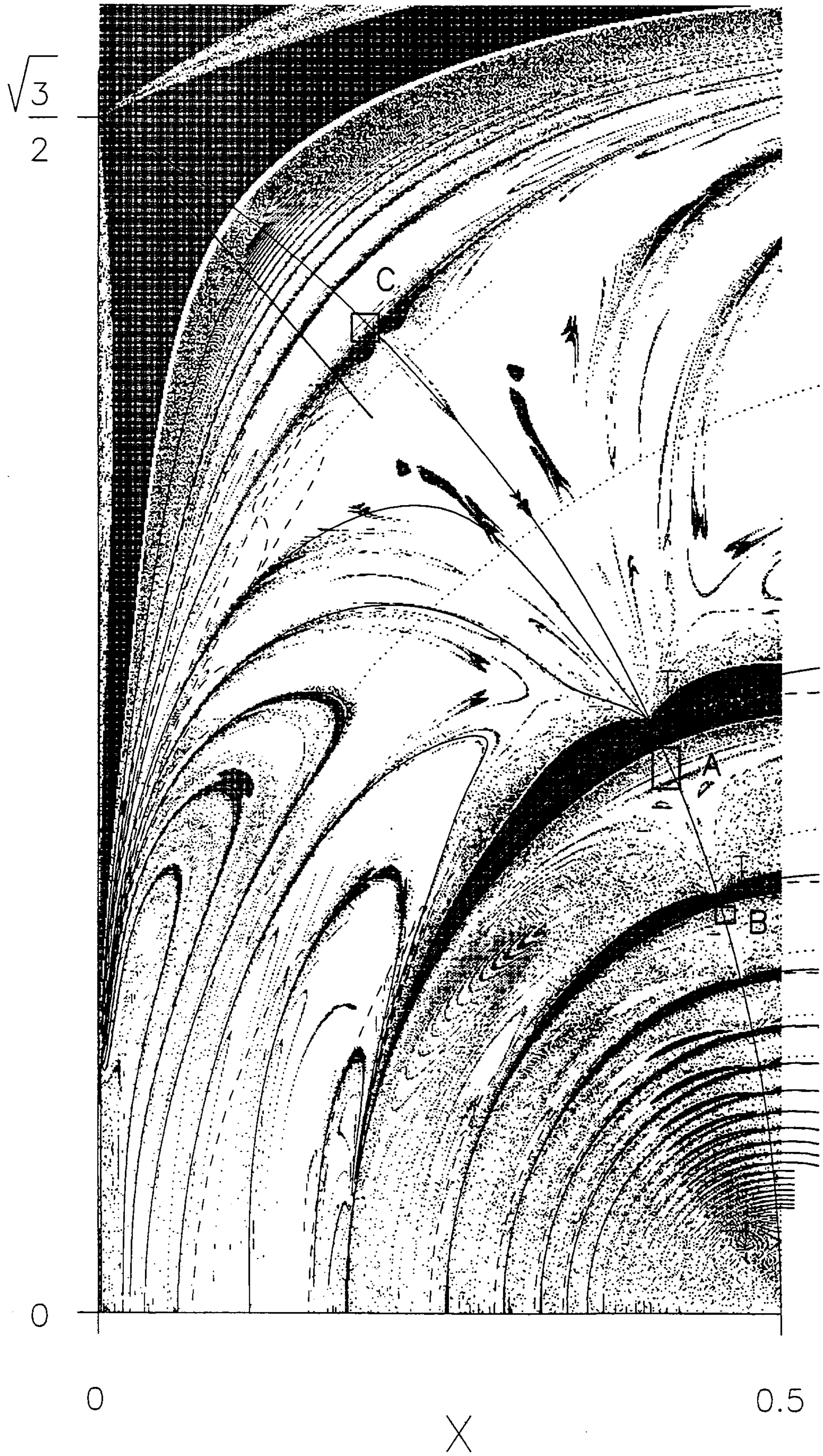
三体の初期速度がゼロの三体問題を考える。すると三体系はエネルギーは負で、角運動量はゼロであり、平面三体問題となる。三体の質量を等しくとる。三体を２図に示されるように配置する。どの初期値の場合も m_2と m_3は A、B点に置く。m_1だけは実線で囲った領域 (Dと呼ぶことにする) の任意の点から出発する。このようにすると、底辺 $\geq$ 左斜辺 $\geq$ 右斜辺なる三角形をすべて尽くす。三体の質量が同じだから、可能な配置をすべて尽くしたことになる。三角形の大きさを尽くしていないが、これは適当に尺度変換すればよい。２図の$\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$はそれぞれ、直線三体問題、$m_2,m_3$を底辺とする二等辺問題、$m_1,m_3$を底辺とする二等辺問題である。この問題を自由落下三体問題と呼ぶ (Agekyan & Anosova, 1967)。



２図. 自由落下三体問題の幾何と初期値面



３図. 自由落下三体問題の初期値面の構造. 衝突点



4 図．自由落下三体問題の初期値面の構造．脱出軌道と衝突軌道

我々は自由落下問題で衝突軌道を計算すると同時に最終運動も決定したい。衝突軌道と最終運動の関係を調べたいからである。最終運動が一体の脱出となるケースは比較的求めやすい。脱出の判定条件が使える (Yoshida, 1972)。最後まで有界にとどまる運動は決めにくい。これはいまのところ軌道全体から脱出軌道と振動運動を引いた残りとしてしか得られない。

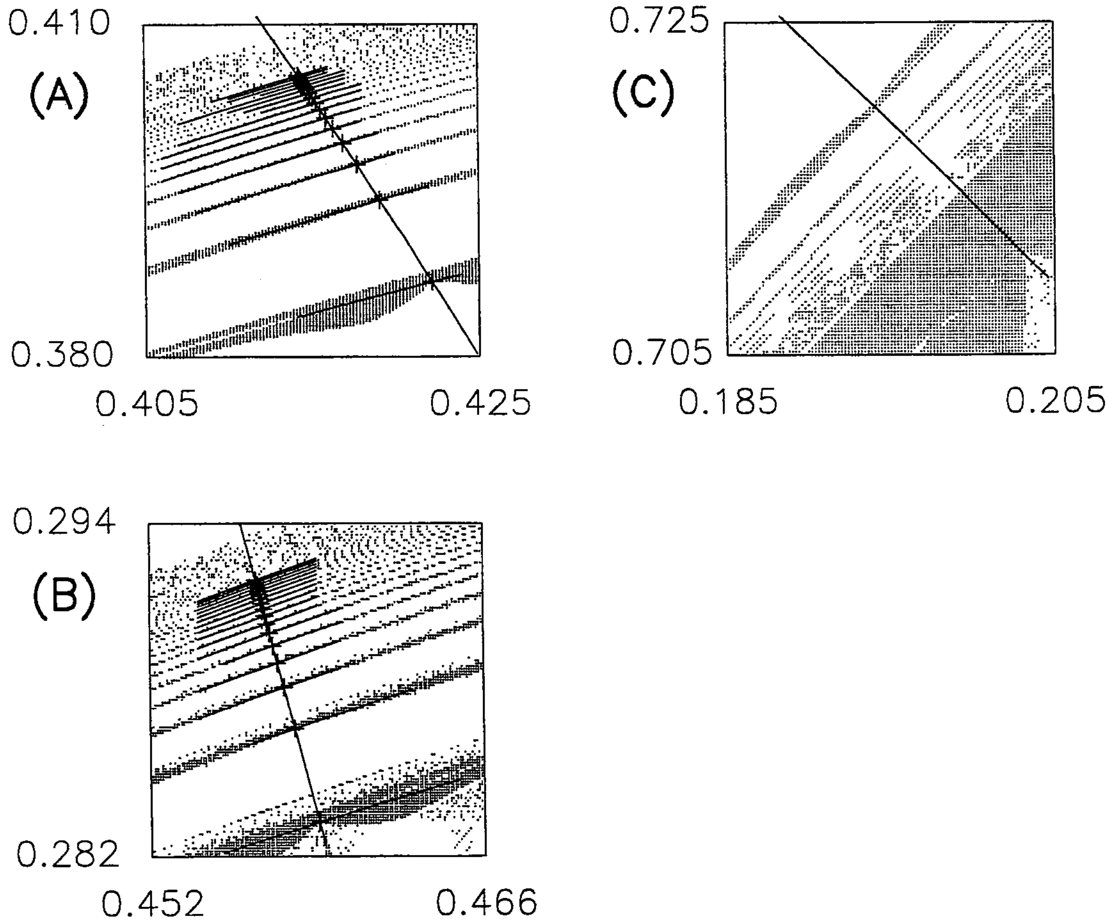
結果を説明する前に用語を導入しよう。衝突軌道の初期値を衝突点と呼ぶ。同様に脱出軌道、放出軌道の初期値を脱出点、放出点と呼ぶ。二体衝突点の集合が曲線をなすとき、その曲線を (二体) 衝突曲線と呼ぶ。

まず衝突軌道の探索の結果が3図がである。衝突曲線がたくさん見えている。点線も破線も衝突曲線である。領域 Dの境界$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$も衝突点の集合である。×印は三体衝突点を表わす。これが実線と破線の衝突曲線の交点として得られることが、我々の成果のひとつである。三体衝突点のうち、円弧上で右下に単調に集積するものを $T_i, i=1,2,\ldots$ とする。図中には T_1, T_2, T_3まで記しておいた。

3回の近接衝突後までに脱出した軌道の初期値を衝突曲線とともに4図に描いた。見やすさのため、領域 Dの外側を付け加えた。脱出点が帯状構造をしていることが判る。しかも特定の衝突曲線が脱出帯に埋め込まれている。右欄外にはみ出た部分以外は重なってしまって判らない。円弧上の三体衝突点が脱出帯の中央に位置する。これが重要な観察である。

4図の枠A、B、C内の領域を5図に拡大した。5 A図と5 B図は1回目の三体近接衝突時の脱出点に2回目の三体衝突時の脱出点が集積することを示す。5 C図は2回目の三体近接衝突時の脱出点に3回目の三体衝突時の脱出点が集積することを示す。

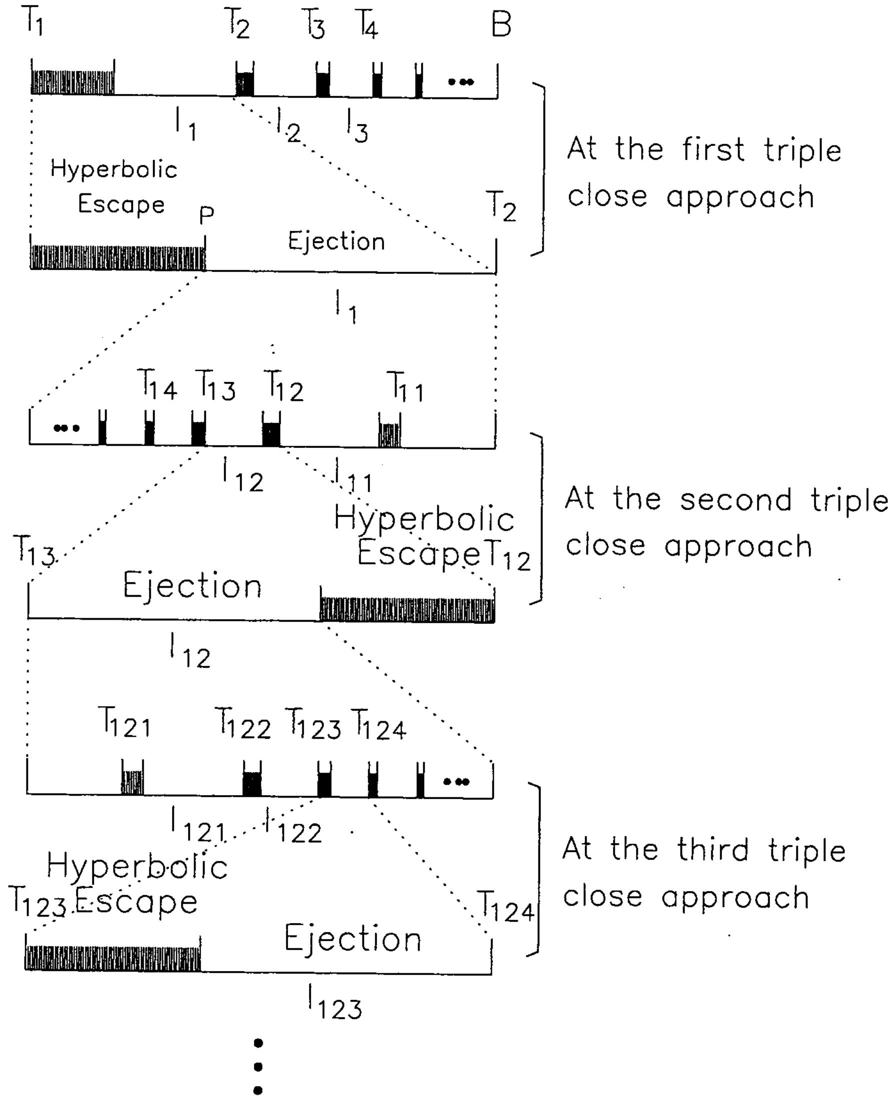
5節ではこの観察から振動運動の存在について議論する。



5図. 4図の枠 A, B, Cの拡大

5. 平面三体問題の振動運動

はじめに二等辺問題を詳しく考察し、その後結果を二等辺問題以外に拡張する。



6 図. 二等辺問題の脱出点と放出点の分布

4 図で左上から右下に延びる円弧に注目しよう。これは m_1、m_3を底辺、m_2を頂点とする二等辺問題の初期値集合である。この三体配置では脱出が起こらない限り、m_2は m_1、m_3の中点を通って往復運動する。円弧上の構造は定性的に 6 図のようにまとめることができる。最上段の図はこの円弧全体が示されている。$T_i, i = 1, 2, \ldots$ は三体衝突点の列であり、それぞれその右に広がっている区間は 1 回目の三体接近後に脱出 (escape) する軌道の初期値である。空白の部分では m_2は放出 (ejection) されるだけである。T_1、T_2間では m_1と m_3が 1 回二体衝突をした後で m_2が左から右に通過する。T_2、T_3間では m_1と m_3が 2 回二体衝突をした後で通過する。以下 T_n、T_{n+1}間では m_1と m_3が n 回二体衝突をした後で通過する。

二段めは T_1、T_2間を拡大したものである。Pは放物脱出点であって、m_2は無限遠で速度ゼロになる。したがって m_2の放出距離は T_2から Pに向かうと無限大まで増加する。数値計算によれば、増加は単調である。

三段目を見よう。これは 2 回目の三体接近後の状態を示す。Pに向かって脱出点の減少区間列が集積している。1 回目に放出された m_2が m_1、m_3のところに戻ってきて、今度は左から右に通過して無限遠に逃げ去る初期値を表わす。一番右の区間は m_2が一度目に放出されている間に m_1と m_3が 1 回二体衝突を行っ

た初期値であり、左隣りの区間は2回二体衝突を行った初期値であり、以下同様。Pに近づくにつれて、m_2の放出距離が大きくなるから、m_2が返ってくるまでにm_1とm_3が行う二体衝突の数は増大し、回数は無限大に発散する。脱出区間がPに集積するのはこのためである。

四段目は三段目の一部の拡大図である。どこを拡大しても様子は同じはずである。ここでは三体衝突点T_{12}、T_{13}間を拡大した。空白部分は前と同様、放出の初期値である。

五段目、六段目の説明はもはや不要であろう。一段目、二段目と同じことが繰り返される。

この数値結果を解釈しよう。ただし、数値計算では6図の...の部分は決して最後まで行えない。そこは理論研究に期待するしかない。我々は次の仮定を置いて、何が言えるかを考える。

仮定. 6図の...の部分は無限に続く。

6図に放出区間の一部に名称を記しておいた。次のような開区間列である。

$$
\begin{array}{ll}
I_{i_1}, & i_1 \in \mathbf{N}; \\
I_{i_1 i_2}, & i_1, i_2 \in \mathbf{N}; \\
I_{i_1 i_2 i_3}, & i_1, i_2, i_3 \in \mathbf{N}; \\
\ldots, & \\
I_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_n}, & i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n \in \mathbf{N}; \\
\ldots, &
\end{array}
\tag{2}
$$

ここで$I_i, i = 1, 2, \ldots$は6図の最上段に記してある通り、1回目の三体接近で脱出しなかった初期値を表わす。6図の三段目はI_1の拡大であり、$I_{11}, I_{12}, \ldots$は2回目の三体接近で脱出しなかった初期値を表わす。さらに、6図の五段目はI_{12}の拡大であり、$I_{121}, I_{122}, \ldots$は3回目の三体接近で脱出しなかった初期値を表わす。一般に$I_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_n}$は$n$回目の三体接近で脱出しなかった初期値を表わす。

これらの開区間列の閉包の共通部分をとってみよう。つまり、

$$
\begin{aligned}
I = \ & \left(\cup_{i_1 \in \mathbf{N}} \bar{I}_{i_1}\right) \cap \left(\cup_{i_1, i_2 \in \mathbf{N}} \bar{I}_{i_1 i_2}\right) \cap \left(\cup_{i_1, i_2, i_3 \in \mathbf{N}} \bar{I}_{i_1 i_2 i_3}\right) \\
& \cap \ldots \cap \left(\cup_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n \in \mathbf{N}} \bar{I}_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_n}\right) \cap \ldots
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Iはカントール集合である。これは中央無限大分の1カントール集合である。この集合は連続濃度を持つ。この集合は

$$
\limsup \max r_{ij} \leq \infty \quad \text{かつ} \quad \liminf \min r_{ij} < \infty, \tag{4}
$$

を満たす初期点と、可算個の放物脱出点および三体衝突点を含む。

(3)式で和の取り方に条件

$$
n \to \infty \quad \text{のとき} \quad i_n \to \infty \tag{5}
$$

をつけて得られる集合をI_{os}と書くと、これは振動運動の初期値である。なぜなら、6図をみれば判るように、添字を大きくすると放物脱出点に近づくからであり、条件(5)は振動しながら振幅が大きくなること、また振幅が無限大になることを表わすからである。しかもこの集合は無限集合である。よって、我々の仮定のもとで次の結果が得られた。

主張 1. 平面二等辺三体問題には振動運動が無限個存在する。

次に二等辺でない三体問題を考えよう。我々の場合、初期値面Dの内部がこれである。4図を見て欲しい。領域D内の左上部分に脱出帯を横断する線分を書き込んでおいた。円弧が脱出帯を横切るのと同じことである。この線分上でも6図の構造がそっくりそのまま見えるはずである。脱出帯を横断的に横切るなら直線である必要もない。任意の曲線でよい。厳密な証明は今後の課題にするとして、このことから、円弧上の振動運動点がDの内部に無数の曲線として延びていることが判る。よって

主張 2. 平面三体問題には振動運動が無限個存在する。自由落下三体問題では、振動運動が初期値面に無数の曲線として存在する。

参考文献

T. Agekyan and J. Anosova: *Soviet Physics-Astronomy* **11** (1967), 1006-1014.

V. Alekseev: in *Three Papers in Dynamical Systems*, Amer. Math. Soc. Transl. **116**, 97-169.

J. Anosova and K. Tanikawa: *Astrophys. Space Sci.* **234** (1995), 191-205.

R. Broucke: *Astron. Astrophys.* **73** (1979), 303-313.

J. Chazy: Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **39** (1922), 29-130.

Y. Hagihara: *Celestial Mechanics* Vol.IV, Part 1 (Japan Society for Promotion of Science), 1975.

D. Heggie: *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **173** (1975), 729-787.

D. Heggie and W. Sweatman: *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **250** (1991), 555-575.

M. Hénon: *Celestial Mechanics* **10** (1974), 375-388.

T. Matukuma: *Proc. Imp. Acad. Japan* **6** (1930), 6.

R. McGehee: *Invent. Math* **27** (1974), 191-227.

S. Mikkola: *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **207** (1984), 115-126.

I. Newton:*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687. 和訳はプリンシピア(中野猿人訳、講談社、１９７７年). またS. Chandrasekhar による Newton's Principia(Oxford Unv. Press, 1995) を参照されたい.

D. Saari and Z. Xia: *Notices of the AMS* **42** (1996), 538-546.

W. Saslaw, M. Valtonen, and S. Aarseth: *Astrophys. J.* **190** (1974), 253-270.

C. Siegel: *Ann. Math.* **42** (1941), 127-168.

C. Siegel and J. Moser: *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer, 1971.

K. Sitnikov: *Dokl. Akad. Nauk USSR* **133** (1960), 303-306.

S. Smale: *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 747-817.

E. Strömgren: *Ergebnisse d. exakt Naturw.* IV, 233, 1925, Springer, Berlin.

V. Szebehely and C. Peters: *Astrophys. J.* **72** (1967), 876-883.

K. Tanikawa, H. Umehara, and H. Abe: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **62** (1995), 335-362.

K. Tanikawa and H. Umehara: in The Proceedings of the 28th Symposium on 'Celestial Mechanics' (eds. H. Kinoshita and H. Nakai), 1996, 15-22.

谷川清隆、数理科学、１９９５年６月号、１６－２３ページ.

M. Valtonen: *Vistas in Astronomy* **32** (1988), 23-48.

E. Whittaker: *Analytical Dynamics of Particles*, Cambridge Univ. Press, Fourth Edition, 1937.

Z. Xia: *J. Diff. Equations* **110** (1994), 289-321.

S. Yabushita: *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **133** (1966), 133-143.

J. Yoshida: *Publ. Astron. Soc. Japan* **24** (1972), 391-408.