

氏 名 関 口 昌 由

学位（専攻分野） 博士(理学)

学 位 記 番 号 総研大乙第91号

学位授与の日付 平成13年9月28日

学位授与の要件 学位規則第4条第2項該当

学 位 論 文 題 目 Symmetric Collinear Four Body Problem via Symbolic
Dynamics

論 文 審 査 委 員 主 査 教授 木下 宙
助教授 谷川 清隆
助教授 吉田 春夫
助教授 吉澤 正則 (国立天文台)
助教授 吉川 真 (宇宙科学研究所)

論文内容の要旨

Symmetric collinear four-body problem (hereafter, referred to as SC4BP) is a special case of the general Newtonian four-body problem in which the bodies are distributed symmetrically about the center of masses on a fixed common line. SC4BP is a Hamiltonian system of two degree of freedom. We analytically study SC4BP independently of the values of mass ratio and energy. We numerically study the case of equal-mass and negative energy. The present work is the first systematic study of SC4BP, and provides rich qualitative features in SC4BP with the aid of symbolic dynamics.

The first study of SC4BP was made by Simó and Lacomba (1982, *Celes. Mech.*, **28**, 49-62). They studied the flow on the quadruple collision manifold, especially the invariant manifolds associated with the critical points. They obtained some special values of mass ratio for which the invariant manifolds change their behavior qualitatively. Roy and Steaves (1998, *Planet Sp. Sci.*, **46**(11/12), 1475-1486) obtained homothetic solutions for some special four-body systems including SC4BP. Sweatman (2001, *Celes. Mech.*, to appear) numerically found some interesting behavior of orbits in SC4BP, and pointed out similarity of the phase structure to the one in the collinear three-body problem.

It is easily understood that there are four states of motion in SC4BP. They are quadruple collision, 2-2 ejection (distant two binaries), 1-2-1 ejection (one central binary and two isolated bodies), and interplay (repeating different binary collisions). In general, orbits travel among these four states. It is natural to ask how they travel among the states. This question requires a qualitative study of the phase structure in SC4BP.

Our purpose is to clarify qualitatively the structure of phase space in SC4BP, namely (1) classification of motion, (2) search of the classified orbits, and (3) their distribution in the phase space. The suitable method for (1) is symbolic dynamics. In SC4BP, any orbit (except for the homothetic solution) experiences an infinity of binary collisions. There are two types of binary collision. One is a *single binary collision*. The other one is a *simultaneous binary collision*. We assign different symbols to them ("0" to the former, "2" to the latter). Thus, orbits are replaced by symbol sequences. For instance, orbits in 2-2 (resp. 1-2-1) ejection state are replaced by sequences repeating 2 (resp. 0). Replacement of orbits by symbol sequences ignores quantitatively small differences among orbits, but it keeps their qualitative differences.

We introduce a Poincaré mapping on a surface of section. This is one of basic tools for the study of dynamical systems. The Poincaré mapping reflects the flow in the phase space. Our surface of section is the set of phase points in central configuration. The surface of section is the global surface of section, i.e., all orbits in SC4BP intersect the surface of section at least once. In addition, the surface of section is a compact, two dimensional disk. Our Poincaré mapping and surface of section, therefore, are very convenient to study the totality of motion. Our purpose is achieved by studying the mapping on the surface of section, and by both analytically and numerically investigating the distribution of symbols sequences on the surface of section.

In order to remove collision singularities, we define new variables after McGehee (1974,

Inventiones Mathematicae, **27**, 191-227), and we blow-up the phase point of quadruple collision to the *quadruple collision manifold* (QCM for short). This technique enables us to understand totally the mapping on the surface of section and the flow on QCM.

Our main theoretical results are summarized into five issues. First, the surface of section is proved to be a global surface of section as we mentioned above. Second, the immediate future symbols after crossing the surface of section and the immediate past symbols before crossing the surface of section depend on where the orbit crosses the surface of section. Any orbit except for the homothetic solution experiences two different types of binary collision before and after crossing the surface of section. This allows us to find *un-realizable words* of symbols. Third, the set of points leading to quadruple collision forms arcs. We call them *quadruple collision curves* (QCC for short). The end-points of a QCC are on QCM, and never meet each other. Fourth, QCCs form boundaries between regions of different symbol sequences. Fifth, we obtain escape criteria by simple two-body consideration. We express these escape criteria on the surface of section the surface of section.

In numerical analyses, we regard the surface of section as the set of initial values as well, and carry out numerical integrations for points on the surface of section with fine mesh, and replace them with words. Thus, we have a distribution of words on the surface of section, and derive the following results. The region is thought to contain the invariant region. This is an evidence for the existence of orbits staying permanently in the interplay state. Second, some families of unstable periodic orbits are confirmed. This indicates the existence of orbits from ejection to interplay state permanently (or from interplay to ejection). We can classify various periodic according to the length of symbols. Third, we find some un-realizable words. There never exists any orbit whose symbol sequence contains an un-realizable word. In order to list up all un-realizable words, we divide the surface of section into some sub-regions and obtain mapping-rules among the sub-regions. Then, we have some sequences of un-realizable words. Fourth, escape regions on the surface of section are numerically determined. These contain the escape regions obtained analytically. Fifth, it is found that the distribution of words has the stratified structure in the sea of chaos on the surface of section. This is consistent with our theoretical results. Finally, initial points leading to quadruple collision are numerically discovered to form curves on the surface of section. Thus, a method searching for such points is established.

This work has been the first detailed description of the phase structure in SC4BP. Our results are expected to be applied for and are extended to the more general case of four-body problem.

少数N体問題においてはNを3、4、5と増やしていくにつれて質的に新しい現象が発現することが知られている。たとえば有限時間に天体が無限遠に去る運動の有無はNに依存する。したがってN体問題の詳細な研究をN=3の場合にとどめておくことはできない。一方、星団や銀河のグローバルな構造進化において、少数N体相互作用が重要な役割を果たすことが知られている。しかし、連星の形成による（あるいは形成された連星と単独星との相互作用による）系の運動エネルギーの増減以外は、少数N体系の相互作用による構造進化への定量的な見積もりはほとんど得られていない。さらに、4体問題においては、配置を対称な形に制限（直線4体問題、菱形4体問題など）した上で、4体衝突近傍を通過する軌道のふるまいがこれまでの研究対象であった。同じ対称配置の条件の下でも、もう少し一般的な軌道、例えば必ずしも4体衝突近傍を通過しない軌道のふるまいについては研究が行われていなかった。

本申請者は、このような状況を背景に、3体問題との類似あるいは非類似性を見ること、および対称型直線4体問題（自由度2）の相空間構造を明らかにするために系統的研究を行った。手法は以下の通りである。多重衝突の正則化のためにMcGehee変数(McGehee, 1974)へ変換する。この変換を施すことで、2体衝突をくり返す直線4体系の時間発展を4体衝突の発生まで追うことが可能となる。系には2種類の2体衝突があるので、それに0と2を割り当てる。すると軌道は、4体衝突に至らない限り、左右に無限に長い0と2の記号列として表現される。軌道の初期値全体は2次元曲面上に表現される。この初期値面（相空間と同値であり、かつポアンカレ断面になっている）の各点に上記記号列が対応する。記号列付きの初期値面を記号力学を用いて解析する。このようにして、以下の重要な結果を得た。

- 1 escape判定条件を解析的に求めた。これは軌道数値積分時間を減らすためにも利用した。
- 2 4体衝突にいたる軌道が相空間の構造を規定していることを明らかにした。
 2. 1 初期値面上で4体衝突に到る軌道の集合が曲線をなすことを証明し、
 2. 2 その曲線によってカオス領域がフラクタル層構造に分割されることを明らかにした。
 2. 3 実現されない記号列が存在することを示した。これは存在し得ないタイプの軌道があることを示したことに相当する。また周期記号列の存在を示した。これは周期軌道の存在を意味する。
- 3 1次元かつ対称という非常に制限された問題ではあるが、4体の最終運動として、連星で逃げる確率が両側の2体が逃げる確率より大きいことを示した。
- 4 初期値面は、大きく3つの領域に分類される。すなわち、安定な周期軌道とそのまわりの準周期軌道群、escape領域、そしてカオス的に点に移り合うカオス領域である。直線3体問題の相空間構造と類似している。この類似は両者の衝突多様体の幾何学構造が似ていることから来る。

以上のように、本申請者の今回の研究によって対称型直線4体問題の相空間の構造は深く理解されたと言えよう。この研究は、配置が制限されているとは言え、4体問題の一般軌道の系統的な研究として最初のものであるという点で価値が高く、また記号力学、ポアンカレ断面など、力学系分野で使われる技術を駆使したことにより、今後の少数N体問題研究の方向性を示した点で評価できる。直線3体問題と軌道構造が類似するという結果は、力学系としての自由度が同じであることによっても考えられ、自由度による少数N体問題の分類の可能性が開けた。以上より、本論文は学位論文として十分質の高いものであると審査員全員の意見が一致した。