

氏 名 後 藤 晋

学位（専攻分野） 博士(理学)

学 位 記 番 号 総研大甲第394号

学位授与の日付 平成11年3月24日

学位授与の要件 数物科学研究科 核融合科学専攻

学位規則第4条第1項該当

学 位 論 文 題 目 Direct-Interaction Approximation - Principles and  
Applications

論 文 審 査 委 員 主 査 教 授 林 隆 也  
教 授 岡 本 正 雄  
教 授 木 田 重 雄  
教 授 木 村 芳 文 (名 古 屋 大 学)  
教 授 東 井 和 夫 (核 融 合 科 学 研 究 所)

## 論文内容の要旨

It has been phenomenologically shown and widely supported by experiments that statistical properties in small scales of turbulence of incompressible fluids exhibit some universality irrespective of the kinds of fluids, boundary condition and the Reynolds number. On the other hand, this system is believed to be governed by the Navier-Stokes equations which consist of the equations of motion and of continuity. However, relationships between these equations and phenomenologies on statistical properties of small-scale motions have not been clearly understood primarily because such a statistical theory is hard to construct due to the nonlinearity of the basic equations. Since the nonlinearity causes an infinite hierarchy of moments, we never obtain a closed set of equations for a finite number of statistical quantities without any assumptions. This is the so-called closure problem in the statistical theory of turbulence. We adopt the direct-interaction approximation (DIA), which was originally proposed by Kraichnan (1959), to attack and solve the closure problem.

The DIA is an excellent approximation in the sense that the nonlinearity is never neglected and no adjustable parameter is introduced in the formulation. Unfortunately, however, it is known that a closed set of equations obtained by a naive application of DIA (Kraichnan 1959) to the Navier-Stokes system is inconsistent with experimental observation. Especially, it is  $E(k) \propto k^{-3/2}$  that the closure equations predict as the energy spectrum  $E(k)$  in the inertial range, where the  $k^{-5/3}$  power law is observed by many experiments. This inconsistency implies incompleteness of the application of DIA to the Navier-Stokes system. Although Kraichnan (1965) improved the application method of DIA and succeeded in deriving the  $k^{-5/3}$  power law, the formulations are too complicated to be justified. Moreover, in spite of its long history and important role in the field of the statistical theory of turbulence, the essence of DIA may have been misunderstood by many researchers. This is due to the fact that validity conditions and applicability of DIA were not clear.

We introduce a model equation, consisting of quadratic nonlinear and linear dissipative terms, which is simpler than the Navier-Stokes equation but still possesses its important mathematical structures. Then, it is shown that DIA is valid for such a system that has weak nonlinear couplings and large numbers of degrees of freedom even if nonlinearity of the system is strong (i.e., the nonlinear terms are larger than the linear ones in magnitude). Furthermore, we clarify similarities and differences between DIA and a Reynolds-number expansion so-called RRE (Reynolds-number reversed expansion). For some known systems, including the Navier-Stokes system and the present model, these two approximations yield an identical set of equations for the correlation and the response functions. Owing to this fact, these two approximations have sometimes been identified erroneously. It must be stressed, however, that DIA and RRE are based upon completely different ideas and working assumptions. Hence, we should distinguish these two theories. This is reasonable because the validity conditions of DIA depend on the strength of non-

linear couplings and the number of degrees of freedom, but not on the Reynolds number, while the validity of RRE depends crucially on magnitude of the Reynolds number.

We further investigate the validity condition of DIA and the relationships between DIA and RRE from a viewpoint of the strength of nonlinear couplings by extending the model equation. It is then shown that DIA is valid for systems such that the average number of direct interactions between a pair of modes is much smaller than the square root of the number of degrees of freedom, and that RRE may be regarded as an approximation under which the nonlinear terms are replaced by a joint-Gaussian random variables. The last approximation, called normal nonlinear term approximation, has the same validity conditions as DIA.

Small-scale motions of turbulence may be statistically homogeneous, and the number of degrees of freedom of this system increases in proportion to the  $9/4$  power of the Reynolds number. Hence, small-scale motions of turbulent fields at high Reynolds number satisfy the two validity conditions of DIA, i.e., weakness of nonlinear couplings and largeness of the degrees of freedom. This implies that DIA is applicable to this system. As mentioned above, however, when we apply DIA to the Eulerian velocity correlation function and the Eulerian velocity response function (Kraichnan 1959), we encounter the difficulty that the resultant closure equations are incompatible with experiments. Here, we instead apply DIA to the Lagrangian velocity correlation function and the Lagrangian response function with the help of the position function (Kaneda 1981), which is a map between the Eulerian and the Lagrangian fields. The resultant equations yield not only the well-known  $k^{-5/3}$  power law predicted phenomenologically by Kolmogorov (1941) of the energy spectrum, but also the functional form in the entire universal range, which excellently agrees with experimental data.

We next apply DIA to passive scalar fields (temperature, particle concentration, smoke, and so on) advected by turbulence without affecting fluid motions. Then it is systematically shown that solutions to the resultant closure equations by DIA for the Lagrangian correlation and the response functions for the velocity and the passive scalar fields are completely consistent with the phenomenologies on the scalar spectrum by Obukhov (1949) and Corrsin (1951) in the inertial-advective range, Batchelor, Howells & Townsend (1959) in the inertial-diffusive range, and Batchelor (1959) in the viscous-advective range.

## 論文の審査結果の要旨

プラズマ科学や流体力学、宇宙物理学など広い範囲の分野で、2次の非線形項をもつ偏微分方程式が基本的で重要な役割をしている物理現象が多い。そのような非線形力学系の解は一般に極めてカオティックで、時間的にも空間的にも複雑に変動し、瞬間場の解析よりむしろ、平均場の取り扱いが実際的でもありまた重要となる。ところが、基礎方程式の非線形性のため、統計的平均量を記述する連立方程式系が無限連鎖となり、そのままでは解を得ることができない。この完結の問題を解決するために、従来から実に多くの理論が提案されてきたが、現象論的な議論で、実験と合わせるための調節パラメータを含んだ理論がほとんどである。ただひとつ特色ある例外は、本論文の対象としている直接相互作用近似(DIA、Direct-Interaction Approximation)である。これは、もともと Kraichnan (1959)によって、かなり直感的に定式化されたもので、乱流に代表される強非線形の現象にも適用されるものとして多くの研究者に注目されてきた。しかし、不幸なことに、主として理論構成の複雑さのゆえに、DIAの本質が専門家(Kraichnan自身も含めて)の間で正しく理解されていなかった(これは本論文で明らかになったことである)。それは、場の理論で成功をおさめたダイアグラム法によって、DIAの結果が「弱非線形理論」の結果と(ある場合に)一致することが示されたからである。仮に、DIAが弱非線形理論であるとすれば、それがなぜ強非線形現象をうまく記述できるのかというのが長年の謎であった。

本論文は、このDIA理論の本質を明らかにし、上記の謎を解決するとともに、実際の乱流場(ナビエ-ストークス方程式)に適用し、実測値と極めてよく一致する結果を示したものである。まず、(1)非線形結合の強さという概念を導入し、(2)DIAは、「自由度が大きく」、「非線形結合が弱い」場合に(ただし従来からの理解とは異なり非線形項は大きくてもよい)良い近似であることが、これらの性質を陽に用いた新しい定式化によって、2次のモデル力学系を用いて示された。検証は、自由度の数と非線形性の強度を表すパラメータを広範囲に変えた直接数値シミュレーション(DNS)と比較することにより組織的かつ詳細になされた。さらに、(3)非線形結合の強さと近似の精度の関係を確率論的に議論し、DNSデータが説明された。そして、(4)DIAを実際の乱流場に適用し、一様等方乱流のエネルギースペクトルが導出された。これは、さまざまな乱流の観測データと、慣性領域と粘性領域の全範囲にわたって、極めてよく一致する。パッシブスカラー(温度や濃度など乱流によって流されるスカラー量)にも適用され、パワースペクトルのシュミット数依存性が導出された。これも実測値とよく一致している。この研究内容は非線形力学の統計理論の分野において本質的あり、また解析は極めて緻密である。これによって、DIA理論がなぜ乱流のような多自由度系の強非線形現象を精度よく記述するかの正しい理解が得られたことになる。さらに、理論の本質がわかったことにより、磁場や回転、剪断などの付加的な効果の入った力学系の解析の方針が明確になった。よって、本論文は学位論文として十分ふさわしい学術内容をもっていると判定する。

後藤晋氏の学位論文の審査は、審査委員全員の出席の下、本人による本論文の内容の説明と、これに引き続く詳細な質疑応答により行った。その結果、申請者は本論文の意義を明確に審査員を納得させ得たとともに、物理学一般、統計理論や数値解析など数物科学において広くしっかりした学術知識を身につけていることを確認した。また、2月4日に行われた公開発表会においても、1時間の発表を要領よく行い、それに引き続く質疑応答に対する的確な対応を行った。また、査読付き英文論文を3編発表（内2編は主著者）している。本論文は英語でまとめられた150頁を超えるものであり、英語の学力に関しても十分であると認められる。

以上の結果により、本審査委員会は試験に合格と判定した。