

# プラズマにおける力学系の分岐とカオス

標準写像における周期軌道の分岐と  
イオンシースに関連した散逸系カオス

広瀬 敬一

博士(理学)

総合研究大学院大学

数物科学研究科  
核融合科学専攻

平成11年度

## はじめに

本論文は、プラズマにおける力学系の分岐とカオス問題に対して離散的な保存力学系である標準写像 (Chirikov-Taylor mapping) と散逸微分方程式系でモデル化されるイオンシースに関連したカオスについて研究を行った結果である。

これまでプラズマにおけるカオス実験例が少ないことや、プラズマ中の複雑な現象にカオス物理で取り上げられてきた単純なモデルを適用するのは現実的でないなどの理由で、プラズマ中のカオスに関する理論的研究があまりなされなかった。

実際の実験に対し、偏微分方程式系でコンシステントに系をモデル化し、カオスを見出した例に、Benard convection という上下2枚の平行平板で流体をはさみ下から熱して対流をおこす有名な現象がある。この現象は、ある条件でカオスを起こし、別の条件では乱流となる。例えば上下の温度差が臨界値を超すとカオスが発生する。これを記述したのがローレンツの方程式系である。それによると上下板の温度差が十分に大きくなると、数多くのモードの波が発生し、乱流が発生する。この間については数多くの研究がなされており、これらはコンシステントにカオスの問題をモデル化した重要な例である。つまりプラズマのカオスにおいても、このようなあまり複雑過ぎなくて理論的にコンシステントに扱える現象があれば理想であるともいわれている。

上述のとおりプラズマにおけるカオスの問題は、プラズマ自体が自由度が大きく複雑な多体粒子系の問題であるため、実際のプラズマ実験で得られた現象を理論解析や数値解析によって再現したり、セルフコンシステントにそれを説明することは難しいとされている。しかしながら、以前に比べて現在では、プラズマそれ自体が、少数自由度力学系の性質をもっていることから統計力学的に粒子の振舞いを扱うことができる非線形現象の理論解析手法の発展と多体粒子を扱う程の計算機能力の飛躍的な進歩などに支えられたことなどを理由にして、多くのカオスに対する研究成果があげられている。

この成果を代表する一つが、プラズマが生んだ有名なカオス物理である磁場配位モデルのツイスト写像である。磁力線は磁場の発散がないことから保存力学系 (ハミルトン系) であらわされる。このハミルトニアン方程式は、正準変換により離散的な写像モデルに記述され、それらは時間発展に対して位相構造の空間量が変化しないため、一般に非線形保測写像 (Area Preserving Map) と呼ばれている。このモデルツイスト写像による解析は、実際にモデルにそった磁力線の方程式を計算機で長時間にわたって解析することよりも、その系の全体の特徴や性質、解の定性的な振舞いを見出したりする場合において大変有効な手法であり、これまで数多くのプラズマ閉じ込め実験で観測されている特異的な磁場配位の現象を説明したり、その特徴を定めている。

プラズマのカオス (磁力線のカオス) は、対称性を破る強い摂動が加わることで発生する。この磁力線カオスが発生することは、トーラス配位の磁気面が壊れ、入れ子状態に存在していたアイランド構造が破壊されて平衡状態が破られたことを意味する。特に高温プラズマ閉じ込め磁場の配位やプラズマ加熱の問題などは、それらの基礎方程式がハミルトンの正準方程式に従うことから、非線形力学系の理論体系に基づくモデル写像によった研究が数多く行われている。そのモデル写像の一つが標準写像 (Chirikov-Taylor mapping) である。この標準写像は、プラズマに関連した問題をはじめ、その他にも保存系のあらゆる非線形保測写像の現象や特徴を標準的に示すことができるため広く研究されている。

標準写像は、写像式の位相空間量(運動量と位置座標)、および非線形パラメータの変化、あるいは初期値のとりかたによってさまざまな相空間構造が観測される。非線形パラメータが小さい場合は、系の非線形性が弱いため、位相面は安定な周期島構造が支配的な状況になる。それに対して非線形パラメータを除々に増加すると、安定な島の最外殻(KAM Curve)が次第に崩壊し、位相面は広域カオスに変化する。標準写像においては、このような安定軌道からカオスへの遷移において数多くの問題があり、それらを究明することは上述した物理的問題に関してはもちろんのこと、その他にも非線形動力学系の基礎的課題を説明することができるため大変重要視されている。

そこで本論文、第1部では、標準写像に対してその位相空間でのカオス軌道と周期軌道(アイランド構造)が複雑に絡み合った系のそれぞれの軌道の特徴を見出すことを行う。Chapter 1では、標準写像におけるカオス領域に対する解析を行い、パラメータ変化による粒子の複雑な挙動を粒子の運動量拡散を求めることより統計的に系の性質を定める。特に運動量の拡散過程において異常拡散現象をもたらすことで知られている加速モードの運動を詳しく説明し、その存在領域や相空間構造を詳しく分析する。写像の非線形パラメータの増加にともなって周期島には、対称性が崩壊し、やがて系は広域カオス遷移する。その遷移間、位相面では数多くの分岐現象が繰り返される。それら諸種の分岐現象は、カオス形態を特徴づけるため大変重要なものである。そこでChapter 2では、分岐点を理論的に定め、その位相構造の対称性の特徴を明確にする。Chapter 3～Chapter 4では、Chapter 2での解析をさらに精密化して分岐種による対称構造の相違点、また周期軌道に対する特異的な対称構造をそれぞれ見出し、標準写像における周期軌道や分岐現象の相空間構造の普遍的な性質を提唱する。

このようにして第一部では、標準写像におけるカオス軌道と周期軌道のそれぞれの問題に対する研究を行う。

プラズマを離れてカオス物理全般では、散逸系のカオス現象が主流をしめている。理論的に散逸系のカオスとは、共存する不変集合により決定される。カオス軌道が存在する相空間のカオス領域には、すべての軌道が不安定で、無限個の周期軌道が存在しており、それらは多種多様な形態を持っている。このような多種のカオス体系は、カオス軌道上での運動の長時間平均とゆらぎにより、カオス軌道群の幾何学的な形態と相空間の粒子の統計的性質により特徴づけられる。諸種の分岐によるカオス形態は、異常な輸送現象や相空間の質的变化を見出すことにより究明することができる。このようにして、周期的あるいはカオス的な系は、統計的な理論数値解析手法や相空間構造に対する数値解析手法に基づいて定量的に特徴づけられ、ついでその際に重要となる普遍性や諸種の相似則(スケーリング)、そして周期軌道からカオスへと遷移する固有のルートが見出される。

例えば、散逸系である基礎プラズマ生成実験でカオスらしき波形の繰り返しがみられずに連続的なスペクトルを持つ波形が観測された場合、それが本当にカオスかどうかは、上述した散逸系カオスを決定する普遍量をもとめることにより判定する必要がある。通常の実験では、制御パラメータを変えることにより、カオスにいたる遷移行程を見出すことが可能である。この遷移行程が明確に存在し、これを経て到達した状態がブロードな連続スペクトルで特徴づけられる時、カオスが発生している可能性がある。実験でこのカオスにいたるルートの存在を観測した場合は、カオスを同定するに大きな役割を果たす。しかし、多くのプラズマ実験の場合は、不安定化可能なモード数が多いため、遷移ルートを明確にただけでは実験カオスを同定できない場合が多い。それゆえ実験カオスを同定するには、時系列データなどからカオスを特徴づける物理量(普遍量、相似則(スケーリング))を求める必要がある。

これまでのプラズマ実験報告では、カオスを十分に検証したものは少ない。それは上述したカオスを決定する遷移現象には当てはめているが、その際に重要な普遍量やその発生機構までにはいって十分な議論がなされていないからである。しかしながら、最近では、実験装置に工夫が施され、理論的実験的に十分にカオス現象を説明する結果が得られてきている。これはプラズマ実験で得られた時系列データの解析において、少数自由度系のカオス現象を決定する倍周期カオス、準周期カオス、

間欠性カオスといった3つの固有な遷移過程をそれぞれ顕著に観測し、おつて普遍量が明確に定められていることから十分にいえる。これらの散逸系のカオス現象が、プラズマ実験系で観測されたことは、非常に興味深いことであり、プラズマカオス物理において大きな貢献であると言える。

ところが散逸系プラズマにおけるカオスの発生機構は、理論的に不明確な点が多い。そこで我々は、第2部において、実際に散逸系である非平衡開放系プラズマ生成装置において観測されたカオス現象、「ダブルプラズマ実験におけるカオス現象」を理論的に解析する。特に本論文では、実験で観測されている3つの固有の遷移過程のうちの倍周期ルート、準周期ルートに関連したカオス現象に対して具体的に解析を行う。

倍周期 (period doubling) ルートカオスは、安定な周期軌道がパラメータの変化にともない周期倍化分岐をおこし、もとある周期軌道が連続的に  $2, 4, \dots, 2^n$  と分岐を繰り返す、 $n \rightarrow \infty$  の時、個々のアトラクターが無限に階層構造を作るストレンジアトラクターを形成する遷移過程である。このカオスへの遷移間隔 (分岐間隔) には普遍的な Feigenbaum のスケーリング測が存在し、それがこの種のカオスへの遷移行程を特徴づける。そこで Chapter 5 では、実験を散逸系モデル方程式で記述し、そこから得られたカオス遷移行程やその系でのカオスを決定する普遍量や相空間構造 (ストレンジアトラクター) の形態を明確に定め、実験と比較し検討する。

ダブルプラズマ実験では、イオンシース中に不安定性を観測され、それに外部振動を印加することで準周期 (quasi period) ルートのカオス現象を観測している。準周期アトラクタ上の軌道は、トロイダル方向とポロイダル方向の回転数比 (rotation number) が無理数となっている状況を意味しており、これは、プラズマにおいてはトーラスの無理面、つまり閉じた磁気面と同じ構造をしている。この準周期ルートが観測されたカオス現象に対して、我々は Chapter 6 にて実験を粒子シミュレーションモデル化し、セルフコンシステントにその発生原因を究明する。

このようにして第2部では、実際のプラズマ基礎実験で観測されたカオス現象に対する、その遷移ルートや発生機構の問題を議論する。

第3部では、本論文の保存、散逸系のそれぞれの解析結果をまとめ、今後の課題を議論する。

最後に、研究指導して下さった 核融合科学研究所 上村鉄雄教授、神奈川大学 羽鳥尹承教授、中部大学 市川芳彦教授 に感謝致します。

そして、保存系カオスの問題についていろいろと有益な御助言を頂いた 福井高等専門学校 野村保之助教授、名古屋大学 斎藤理史博士、中部大学 村上和歌子および智子氏、散逸系カオスの問題について有益な御助言を頂いた、中央大学 河野光雄教授、核融合科学研究所 小森彰夫教授、名古屋大学 大野哲靖博士 に感謝致します。

本論文について有益な御指摘を頂いた 核融合科学研究所 伊藤 公孝教授、本論文の作成においてお世話になった、核融合科学研究所計算機センター、理論シミュレーション研究センターの方々に感謝致します。

# 目次

|                              |    |
|------------------------------|----|
| はじめに                         | i  |
| プラズマにおける保存系カオスの問題            | 1  |
| 1 標準写像における異常拡散と多重周期加速モード     | 2  |
| 1.1 序論                       | 2  |
| 1.2 3周期加速モードの解析              | 3  |
| 1.3 3周期加速モードの安定性             | 6  |
| 1.4 5周期加速モード                 | 8  |
| 1.5 拡散係数                     | 9  |
| 1.6 結論                       | 11 |
| 2 標準写像における3周期加速モードの分岐現象      | 12 |
| 2.1 序論                       | 12 |
| 2.2 3周期加速モードの安定性の解析          | 13 |
| 2.3 3周期加速モードの分岐現象の対称線解析      | 17 |
| 2.4 結論                       | 22 |
| 3 標準写像における周期軌道の分岐現象と高次対称性    | 23 |
| 3.1 序論                       | 23 |
| 3.2 2周期加速モードの対称性構造と分岐        | 24 |
| 3.3 2周期加速モードの分岐島における対称構造     | 28 |
| 3.4 4周期固定モードの対称構造            | 28 |
| 3.5 4周期固定モードにおける無反射双曲型分岐の対称性 | 30 |
| 3.6 結論                       | 32 |
| 4 標準写像における周期軌道の無反射双曲型分岐の対称性  | 36 |
| 4.1 序論                       | 36 |
| 4.2 標準写像における運動量反転の対称性        | 37 |
| 4.3 4周期固定モードにおける無反射双曲型分岐現象   | 38 |
| 4.4 3周期加速モードにおける無反射双曲型分岐現象   | 40 |
| 4.5 結論                       | 42 |
| プラズマにおける散逸系カオスの問題            | 43 |

|     |                            |    |
|-----|----------------------------|----|
| 5   | ダブルプラズマイオンシースにおける粒子のカオスの挙動 | 44 |
| 5.1 | 序論                         | 44 |
| 5.2 | イオンシースの散逸系モデル方程式           | 45 |
| 5.3 | 分岐とカオスへの遷移                 | 47 |
| 5.4 | 考察と結論                      | 51 |
| 6   | イオンシースにおけるカオス励起機構          | 54 |
| 6.1 | 序論                         | 54 |
| 6.2 | シミュレーション                   | 56 |
| 6.3 | イオンシースにおける不安定性             | 58 |
| 6.4 | イオンシース不安定性におけるカオス現象        | 62 |
| 6.5 | 結論と課題                      | 67 |
|     | まとめ                        | 69 |
| 7   | まとめ                        | 69 |
| 7.1 | 保存系カオスの問題                  | 69 |
| 7.2 | 保存系の今後の課題                  | 71 |
| 7.3 | 散逸系のカオスの問題                 | 72 |
| 7.4 | 散逸系の今後の課題                  | 72 |
|     | 参考文献                       | 73 |

# 第1部 プラズマにおける保存系カオスの問題

非線形力学系の理論的手法としては、統計力学的運動方程式に基づく方法も用いられるが、自由度の小さい Hamilton 力学系の取扱としては Poincaré(1892) による写像の方法が有効であり、その手法に基づいた研究が数多くなされている。例えば、高速応答超電導素子としてのジョセフソン接合の内部磁束を格子に離散化した状態方程式により写像化した Josephson Map(Filippov *et al.*, 1987)、磁場内での電子のスピン運動をノンツイストモデル写像化した Harper Map、プラズマの波動加熱における波と相互作用する粒子の非線形運動を記述した Stochastic Heating Map(Karney, 1979)、プラズマ核融合装置トカマク内での粒子の運動を記述した Tokamap(Balescu, 1998) 等々、諸種の写像モデルが存在する。

これらすべては、ハミルトンニアン方程式で記述され、そこでの相平面の微小領域の面積が時間発展とともに不変に保たれる Liouville の定理が成立するため、これらは一般に非線形保測写像 (Area preserving map) とも呼ばれる。なかでも、最も基礎的であらゆる非線形力学系モデルに対応している標準写像 (Chirikov-Taylor mapping, 1979) は、上記のプラズマに関連した非線形保測写像モデルでの系における現象や特徴を標準的に示すことができるため広く議論されている。

我々は、この標準写像における位相空間内でカオスと周期軌道が複雑に絡み合った系に対して、カオス軌道の統計的な性質と周期軌道の相空間構造の特徴を第1部にて詳しく議論する。

標準写像での統計的な粒子の挙動は、運動量成分の拡散運動を数値計算することによって定めることができる。しかしながら、そこでは Fermi(1949) 加速機構でしられている加速モード (Accelerator Mode) の存在により、ある領域では拡散係数に異常拡散が生じるため拡散の理論計算 (J.D.Meiss and Mackay, 1983) が、数値実験を満足しないことが知られている。そこで我々は、Chapter 1 において異常拡散に寄与する加速モードの存在領域を定量的に定め、その相空間構造を明確に示す。そして、カオス軌道の長時間の複雑な振舞が、ただ単にブラウン運動によって記述できる問題ではなく、周期軌道との複雑な絡み合いを考慮した統計法則 (Lévy flight) によって議論されねばならないことを拡散係数の結果より実証する。

前節 Chapter 1 ではカオス軌道に対して議論したが、Chapter 2 ~ Chapter 4 では、周期軌道やカオス遷移に重要な諸種の分岐現象に着目した解析を行う。標準写像は、時間の可逆性が許されるので写像を満足する運動量空間 (Tanikawa and Yamaguchi(1989)) と座標空間 (Pina and Lala(1987)) を反転した Involution(Birkhoff, 1927) の積に分解することができる。この Involution 分解の不動点集合を描いたのが対称線であり、 $N$  回写像することで、位相面は  $N$  周期の不動点集合 (対称線) で埋めつくされる。そして位相平面内の対称線のそれぞれの交点より軌道の周期性が決定される。

この原理に基づき我々は、対称線を高次に拡張し、標準写像における周期構造や加速モード、さらに諸種の分岐現象に対して、それを適応し対称構造の特徴を定める解析を行った。特にこれまで保存系写像における分岐現象の研究は、殆んどが倍周期分岐 (Hyperbolic with reflection) に対するものであった。しかし本論文では、周期軌道の安定性を定量的に解析した結果、同周期分岐現象 (Hyperbolic without reflection) が標準写像において存在していることを見出した。そこで本節においては、このような特異的な分岐現象や周期軌道の具体的な構造の特徴などを対称線解析によって説明し、標準写像における相空間構造の普遍的な性質を提唱する。

# Chapter 1

## 標準写像における異常拡散と多重周期加速モード

Multiple-periodic accelerator modes give rise to anomalous enhancement of the stochastic diffusion process in the standard map in the domain of the nonlinear stochastic parameter  $A < 1$ . The quantitative analysis of the multiple-periodic accelerator modes has been undertaken to explore contribution of the accelerator modes for the anomalous diffusion. In particular, detailed information of the period-3 and the period-5 accelerator modes such as their existence domain and their stability have been presented in connection with the anomalous enhancement of the diffusion process.

### 1.1 序論

熱核融合制御において超高温プラズマをトロイダル磁気容器に閉じ込める目的のためには磁気面の構造を詳しく解析しなければならない。この磁気容器に閉じ込められたプラズマ粒子の長時間におよぶ振る舞いを分析することは重要な課題である [1]。磁力線の配位を定める基礎方程式が Hamilton の正準方程式に従うことから、非線形力学系の理論体系に基づき磁気面の研究が数多く行われている [2] [3]。また、与えられた磁気面に閉じ込められるプラズマ粒子の動的特性やプラズマ粒子の波動加熱の研究にもこの非線形力学系の理論的手法は極めて有意義な結果をあたえることが知られている [4][5]。

非線形力学系の理論的手法としては、統計力学的運動方程式に基づく方法も用いられるが、自由度の小さい Hamilton 力学系の取扱としてはポアンカレの写像の方法が有効である。特に、二次元位相平面における面積保存写像はトカマクやステラレーターなどのトロイダル磁気容器の磁気面の解析に広く用いられている。それらの面積保存写像は多くの場合、局所的な近似により Chirikov [6] などにより詳しく研究された写像、

$$\begin{pmatrix} q_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_n + p_{n+1} \\ p_n + f(q_n) \end{pmatrix} \pmod{1} \quad (1.1.1)$$

$$f(q_n) \equiv A \sin(2\pi q_n)$$

この写像は非線形保測写像の特徴を示す標準的な写像であるので、広く標準写像と呼ばれている。非線形パラメータ  $A$  が十分小さい場合にはこの写像によって記述される軌道の軌跡は安定な不動点 ( $q_f = 0, p_f = 0$ ) の周りに閉じた規則軌道を描くが、非線形パラメータ  $A$  が臨界値  $A_c = 0.1546 \dots$



において最大不変曲面 (KAM surface) が崩壊し、系は広域的なカオスの状態に遷移し系の統計的特性は位相平面における軌道の統計的拡散によって特徴づけられる。

数値実験による運動量変数の自乗平均の観測結果から定められる拡散係数は、ファインマンの経路積分によって漸近的に評価された理論値 [7]

$$D = \frac{A^2}{4} \frac{1 - 2J_1^2(2\pi A) - J_2^2(2\pi A) + 2J_3^2(2\pi A)}{(1 + J_2(2\pi A))^2} \quad (1.1.2)$$

(但し、 $J_n(x)$  は  $n$  次のベッセル関数) と比較することにより、(1.1.1) 式に対して得られる加速モード

$$q_0^{(a)} = \frac{1}{2\pi} \sin^{-1}\left(\frac{l}{A}\right) \quad p_0^{(a)} = 0 \quad (1.1.3)$$

$$(l = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

による異常拡散の寄与が  $A \approx |l|$  の領域で顕著になることが観察された。この基本加速モードの周囲にはポアンカレ・バーコフ分岐により高周期の加速モードが生成し個々の軌道の時間発展の長時間相関効果を生ずる。この現象は Karney [8] などにより研究され、また Meiss 等は安定な島構造の周辺領域の粘着性という概念を導入してハミルトン力学系の輸送現象を研究している [9]。

これまで市川等 [10] は、標準写像の非線形パラメータ  $A$  が 1 より小さく (1.1.3) 式で定められている基本加速モード\*の存在が許されない領域においてもいくつかの拡散現象の共鳴的增加を観測し、これらの異常拡散の鋭いピークが標準写像の多重反復写像に対して存在が許される多重周期加速モード\*の寄与による可能性を観察している。

ハミルトン力学系における広域的ストキャスティシティへの遷移点の近傍における輸送現象について MacKay [11] 等は拡散係数が

$$D \propto (A - A_c)^\eta \quad \eta \approx 3.0 \quad (1.1.4)$$

というスケール則に従うと主張しているが、我々の見出した多重周期加速モードの寄与は非線形パラメータ  $A$  が 1 より相当に小さい領域にも見られることから、非線形パラメータ  $A$  の小さい領域における異常拡散現象の寄与に注意しなければならないことを強調しておきたい。

これまで過去に行われていた数値解析の結果は、観察事実を述べた現象論であったが、そこに現われる多重周期加速モードの構造、その安定性などを多重反復写像の解析により明らかにする研究が進められ、2 周期加速モード [12] の構造が明らかにされた。本論文では、それらの結果に基づき 3 重周期加速モード及び 5 重周期加速モードの存在条件、安定性などについて詳細な解析を行い、市川等において観察されていた結果を定量的に精密化する。

## 1.2 3 周期加速モードの解析

(1.1.1) 式を 2 回反復して得られる写像式は

$$\begin{aligned} q_{n+2} &= q_{n+1} + p_{n+2} \\ &= q_n + 2p_n + 2F(q_n) + F(q_n + p_n + F(q_n)) \\ p_{n+2} &= p_n + F(q_{n+1}) \\ &= p_n + F(q_n) + F(q_n + p_n + F(q_n)) \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

\*基本加速モードは、1 ステップの写像反復で写像関数  $A \sin(2\pi q_n) = m$  ( $m: \text{integer}$ ) で表されるトーラスである。一方、多重周期加速モードは、 $\sum_{i=n}^{n+s} A \sin(2\pi q_i) = m$  ( $s: \text{integer}$ ) といったように多重反復写像で表されるトーラスである。これらの加速モードは、通常の周期軌道同様に時間発展とともに位相空間の面積保存が成立するトーラスである。

となる。ただし、 $F(q_n) = A \sin 2\pi q_n$  である。この2周期における加速モードが存在する座標  $(p_0, q_0)$  条件及び安定性は広瀬等 [12] によって議論されている。本論文では、加速モードの解析を3周期に拡張し、拡散係数の異常発散領域に寄与する領域をさらに定量的に求める。

(1.2.1) 式をさらに反復させ、得られる3回の反復写像式 (1.2.2) を考える。

$$\begin{aligned}
 q_{n+3} &= q_{n+2} + p_{n+3} \\
 &= q_n + 3p_n + 3F(q_n) + 2F(q_n + p_n + F(q_n)) \\
 &\quad + F(q_n + 2p_n + 2F(q_n) + F(q_n + p_n + F(q_n))) \\
 p_{n+3} &= p_{n+2} + F(q_{n+2}) \\
 &= p_n + F(q_n) + F(q_n + p_n + F(q_n)) \\
 &\quad + F(q_n + 2p_n + 2F(q_n) + F(q_n + p_n + F(q_n)))
 \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

一般に3周期加速モードの条件は

$$\begin{aligned}
 p_3 &= p_0 + m \\
 q_3 &= q_0 + l
 \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

で求められる。ここで  $m, l$  は任意の整数であり、 $m$  が運動量空間における加速ステップの大きさを与える。実際、市川等 [10] によって初期値  $p_0 = 0$  の3周期加速モードは数値的に定められている。今回は、このことを考慮しそれらやその他のモードを理論解析的に導く。

(1.2.3) 式を (1.2.2) 式に適用し、3周期加速モードの存在条件を導くと、運動量成分については

$$F(q_0) + F(q_0 + F(q_0)) + F(q_0 + 2F(q_0) + F(q_0 + F(q_0))) = m \tag{1.2.4}$$

同様に位置座標に対しては

$$3F(q_0) + 2F(q_0 + F(q_0)) + F(q_0 + 2F(q_0) + F(q_0 + F(q_0))) = l \tag{1.2.5}$$

の関係が導ける。よって (1.2.4)、(1.2.5) 式から3周期加速モード条件

$$\Phi^{(3)}(A, q_0) \equiv 2F(q_0) + F(q_0 + F(q_0)) = l - m = M \tag{1.2.6}$$

を得る。この時の  $M$  は任意の整数である。そこで (1.2.6) 式の条件をみたす解を求め、3周期加速モードの座標  $q_0$  を定める。Fig.1.1 は、(1.2.6) 式を非線形パラメータ  $A = 0.5 \sim 1.2$  に関して描いたもので横軸は位相平面における位置座標を表わしている。この Fig.1.1 において (1.2.6) 式の関数  $\Phi^{(3)}(A, q_0)$  が各パラメータ  $A$  に対して任意の整数  $M = l - m = 1, 2, \dots$  で交わる場合に3周期で運動量が  $m$  ステップ増加する加速モードが存在する。

$A > 1$  の場合は、市川等 [10] により基本加速モード (fundamental accelerator mode) の解析が行われており、そのモード即ち Period-1 Step-1 の周囲に存在する3周期モードの範囲は  $1.030 < A < 1.100$  と報告されている。この数値実験結果は、Fig.1.1 において  $A = 1.1, M = 3, q = 0.288$  付近の値から確認できる。また、この点の変曲点でもあることから period-3 squeezing の分岐現象が予測される [12]。

Fig.1.1 では、 $A < 1$  においても各パラメータと任意の整数  $M$  との交点が数多く存在しているのが観察できる。そこで Fig.1.2 のように左側の頂点を  $T1$ , 右側の頂点を  $T2$  とし、非線形パラメータ  $A$  に対して関数  $\Phi^{(3)}(A, q_0)$  が任意の整数  $M$  と交わる点を  $c1, c2, c3, c4$  とし、そのそれぞれの交点を初期値とした場合の軌道の安定性を議論し、3周期モードの存在領域の臨界値を定める。

$T1$  が  $M = 1$  で接するパラメータ  $A$  の臨界値は

$$\frac{d}{dq} \Phi^{(3)}(A, q) = 4\pi\alpha + 2\pi A(1 + 2\pi\alpha) \cos 2\pi(q + \beta) \tag{1.2.7}$$

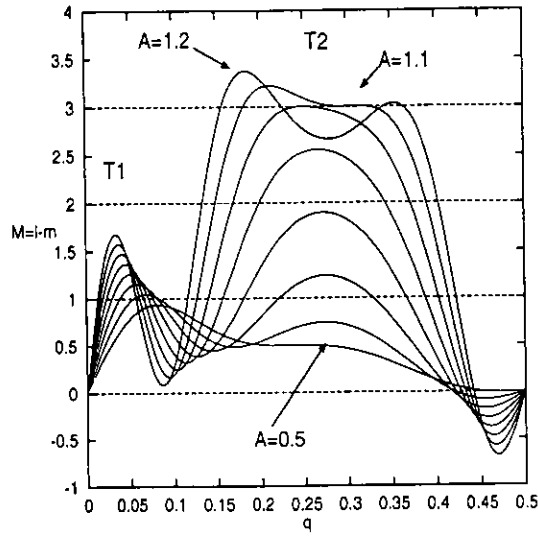


Figure 1.1: Existing condition  $\Phi^3(A, q)$  for period-3 accelerator modes at  $A = 0.5 \sim 1.2$ .

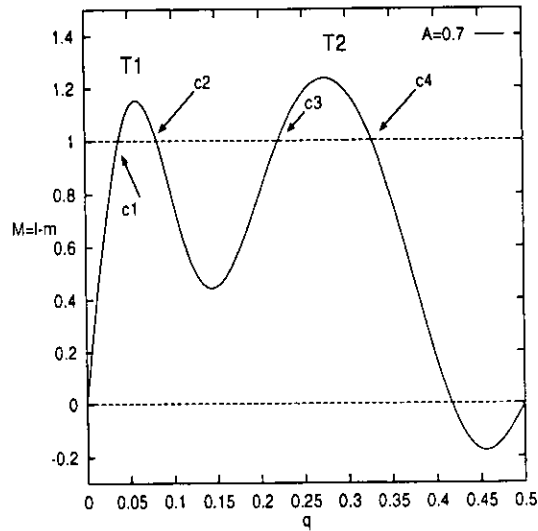


Figure 1.2: Existing condition  $\Phi^3(A, q)$  for period-3 accelerator modes at  $A = 0.7$ . Solid line indicates value of  $\Phi^3(A, q)$ .  $C3 \sim C4$  satisfy the equivalent condition Eq.(1.2.6).

の  $\frac{d}{dq}\Phi^{(3)}(A, q) = 0$  となる点を数値計算すれば求まる。ただし  $\alpha = A \cos 2\pi q$ ,  $\beta = A \sin 2\pi q$  である。その結果、頂点  $T1$  が  $M = 1$  で接する条件として

$$A_{s1} = 0.5589, \quad q_0 = 0.0733 \quad (1.2.8)$$

と定まり、同様に頂点  $T2$  が  $M = 1$  と接する条件は、

$$A_{s2} = 0.6578, \quad q_0 = 0.2762 \quad (1.2.9)$$

と求まる。

同様に、 $M = 2$  の場合は頂点  $T1$  は交点をもたず、頂点  $T2$  だけが交点をもつ。この場合の臨界値は

$$A_{s3} = 0.8144, \quad q_0 = 0.2720 \quad (1.2.10)$$

と求まる。

(1.2.8),(1.2.9),(1.2.10) をそれぞれの初期値にとり、(1.1.1) 式から時間発展に対する運動量変化を求めた結果、それらは3周期特有の比例増加 ( $p_n/n = m/3 : m = 1, 2, \dots$ ) を示し、(1.2.8),(1.2.9) は、period-3 step-1(P3S1)、(1.2.10) は、period-3 step-2(P3S2) の加速モードの運動を満足する初期値として確認された。

これら加速モードの運動量の初期値は  $p_0 = 0$  であるため、3周期加速モードの位相平面における位置座標の関係は、(1.2.6) 式と (1.2.1)、(1.2.2) 式から

$$q_0 = q_2 = q_3 \quad (1.2.11)$$

がいえる。同様に運動量座標には (1.2.1)、(1.2.6) 式から modulus を考慮して

$$p_2 = M - F(q_0) = F(q_0) = -p_1 \quad (1.2.12)$$

の関係を得られる。したがって

$$p_1 = -p_2 \pmod{M = l - m} \quad (1.2.13)$$

であることが言える。実際に (1.2.8) 式の臨界値付近  $A = 0.55951$   $q_0 = 0.074$   $p_0 = 0$  に初期値をおいた位相平面が Fig.1.3 である。そこでは微小な構造であるが、3周期の加速モード (period-3 step-1) が存在しているのが確認できる。その加速モードの初期値 ( $p_0, q_0$ ) は時間発展とともに時計回転の方向に写像されている。このことより3周期加速モードの (1.2.11)、(1.2.13) 式の関係が成立している事が確認できる。

この様にして、加速ステップ  $m = 1, 2$  の値に対応する3周期加速モードの出現する臨界値を決定できた。しかし臨界値  $A_s$  を超えるとき生じる4つの交点  $c1 \sim c4$  は3周期加速モードが存在する可能性を示しているので、交点  $c1 \sim c4$  におけるそれらの安定性を議論しなければならない。次の節においてこの交点  $c1 \sim c4$  における3周期加速モードの安定性を議論し存在領域を定める。

### 1.3 3周期加速モードの安定性

3周期島構造の安定性を議論する。線形安定性により Fig.1.1、Fig.1.2 に描かれている各非線形パラメータに対して得られた交点  $c1 \sim c4$  の線形安定性を解析する。 $(q_n, p_n)$  の近傍  $(q_n + \delta q_n, p_n + \delta p_n)$  の点は、標準写像 (1.1.1) 式により  $(q_{n+1}, p_{n+1})$  の近傍  $(q_{n+1} + \delta q_{n+1}, p_{n+1} + \delta p_{n+1})$  に変換される。この時  $(\delta q_n, \delta p_n)$  と  $(\delta q_{n+1}, \delta p_{n+1})$  は、接線写像  $\delta T$  によって

$$\begin{pmatrix} \delta q_{n+1} \\ \delta p_{n+1} \end{pmatrix} = \delta T \begin{pmatrix} \delta q_n \\ \delta p_n \end{pmatrix} \quad (1.3.1)$$

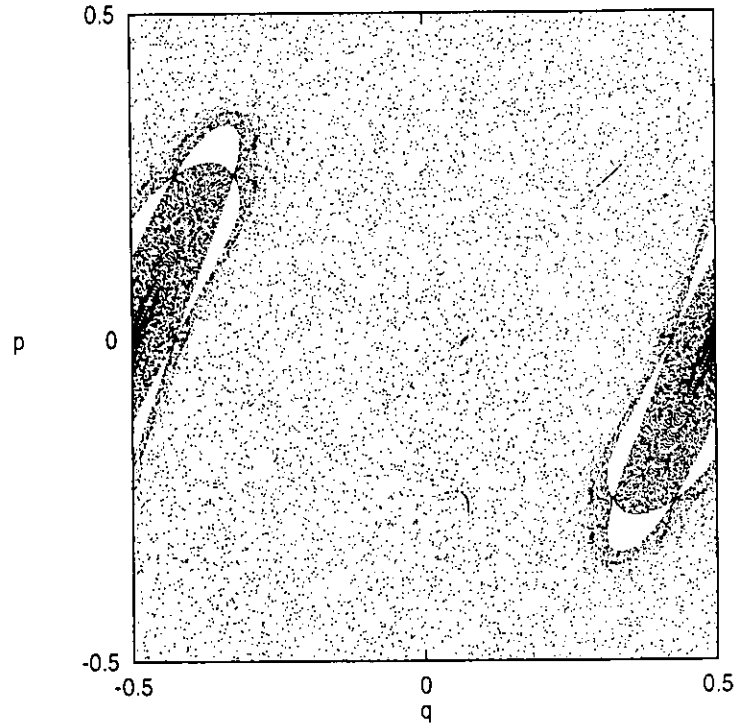


Figure 1.3: Phase portrait of the standard map at  $A = 0.5595$ . Period-3 step-1 accelerator mode islands are observed at  $p_0 = 0.0, q_0 \approx 0.074, p_1 \approx 0.25, q_1 \approx 0.30, p_2 \approx -0.25, q_2 \approx 0.074$ .

$$\delta T = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_{n+1}}{\partial q_n} & \frac{\partial q_{n+1}}{\partial p_n} \\ \frac{\partial p_{n+1}}{\partial q_n} & \frac{\partial p_{n+1}}{\partial p_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_n & 1 \\ \alpha_n & 1 \end{pmatrix}$$

と書ける。ここで

$$\alpha_n = 2\pi A \cos 2\pi q_n$$

である。 $(p_0, q_0)$  に対する3次の接線写像は

$$\begin{pmatrix} \delta p_3 \\ \delta q_3 \end{pmatrix} = (\delta T)^3 \begin{pmatrix} \delta p_0 \\ \delta q_0 \end{pmatrix} \quad (1.3.2)$$

と書ける。ここで

$$(\delta T)^3 = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_0 & 1 \\ \alpha_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 & 1 \\ \alpha_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.3.3)$$

である。これを用いて  $(p_0, q_0)$  の安定性は、Greene による Residue の定理 [13]

$$R = \frac{1}{4} [2 - \text{Tr}(\delta T)^3] \quad (1.3.4)$$

により、 $0 < R < 1$  の場合は不動点近傍は安定であり、 $R$  値がそれ以外の場合は不動点を含め、その近傍が不安定であると判別できる。そこで3周期加速モード島が存在する条件を満たしている Fig.1.1、Fig.1.2 における各非線形パラメータに対する交点  $c1 \sim c4$  の安定性を調べた。その結果、 $M = 1$  に対する period-3 step-1 の加速モードは、(1.3.4) 式から  $c1, c3$  は不安定と分かった。それに対して  $M = 1$  との交点  $c2$  は

$$0.5589 < A < 0.5595 \quad (1.3.5)$$

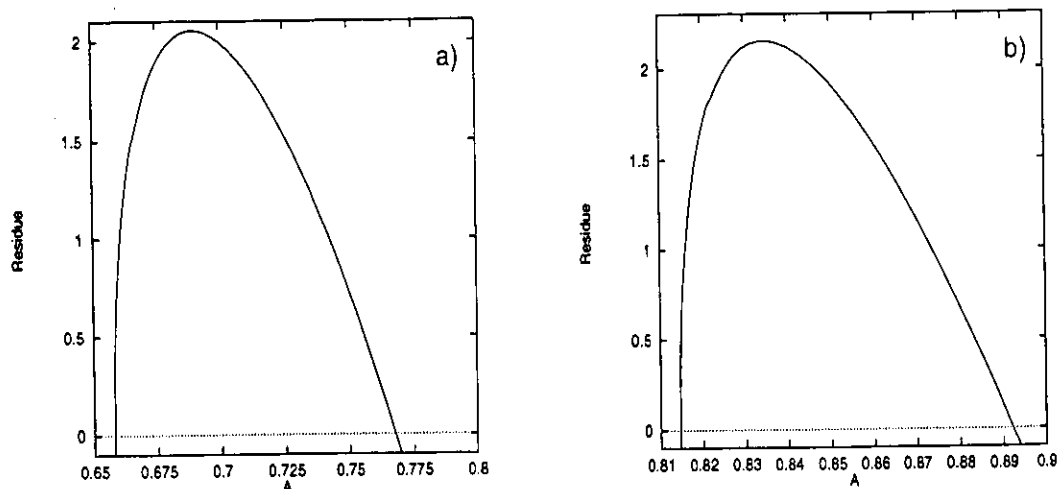


Figure 1.4: Residue of period-3 accelerator mode for the case of  $M = 1$ (a) and  $M = 2$ (b). As function of the stochastic parameter  $A$ .

交点  $c4$  は

$$0.6578 < A < 0.6605 \quad (1.3.6)$$

$$0.7421 < A < 0.7674 \quad (1.3.7)$$

の領域で安定であることが分かった。

同様に  $M = 2$  の場合の交点  $c3, c4$  の安定性を考える ( $M = 2$  の場合、 $c1, c2$  は交点を持たない)。交点  $c3$  が初期値の場合は不安定、一方、交点  $c4$  では

$$0.8144 < A < 0.8158 \quad (1.3.8)$$

$$0.8734 < A < 0.8919 \quad (1.3.9)$$

の領域で安定であることが分かった。

Fig.1.4では、これら非線形パラメータ  $A$  に対する安定領域 (1.3.5)~(1.3.9) を示す。そこでは  $R \rightarrow 1$  へと不安定化したのちに  $R \rightarrow 0$  へと不安定化する放物線的傾向のある興味深い安定曲線が観測される。

## 1.4 5周期加速モード

ここでは前節の解析を拡張して5周期加速モードに関する分析を行う。(1.1.1)式を5回反復させると

$$\begin{aligned} \Phi^{(5)}(A, q) \equiv & 4F(q) + 3F(q + F(q)) + 2F(q + 2F(q) + F(q + F(q))) \\ & + F(q + 3F(q) + 2F(q + F(q)) + F(q + 2F(q) + F(q + F(q)))) \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

を得る。加速モードの条件は

$$\Phi^{(5)}(A, q) = m - l = M \quad (1.4.2)$$

となる。ここで  $m, l$  は、運動量、位置方向のステップ数を示す整数である。Fig.1.5では、非線形パラメータ  $A = 0.4200$  及び  $A = 0.6064$  に対する  $\Phi^{(5)}(A, q)$  を示す。ここでは  $M = 1, 2$  及び  $3$  に多数の交点が存在するが、 $A = 0.4200$  の場合は  $M = 2$ 、 $A = 0.6064$  の場合は  $M = 4$  と  $q$  の幅広い部分で接している事実注目する。これらに対する安定性は、5次の接線写像による residue の計算から

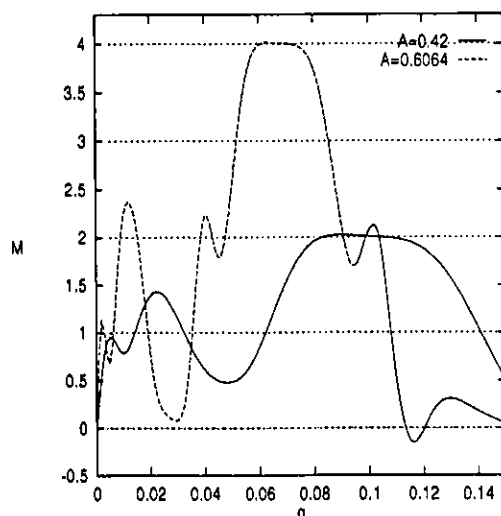


Figure 1.5: Existing condition  $\Phi^5(A, q)$  for period-5 accelerator modes at  $A = 0.4200$  and  $0.6064$ , respectively.

多数の交点の安定性を計算することは行わずに heuristic な方法であるが、この  $M = 2$  及び  $M = 4$  の線と  $\Phi^5(A, q)$  が接する近傍における軌道の特性を時間発展に対する運動量変化の数値計算によって直接観察することで定める。

その結果、 $A = 0.4200$  に対しては、 $p_0 = 0$ 、 $q_0 = 0.105$  の近傍の軌道は周期5ステップ1 (P5S1) で運動量が増加し、 $A = 0.6064$  に対しては、 $p_0 = 0$ 、 $q_0 = 0.070$  の近傍の軌道は周期5ステップ2 (P5S2) で運動量が増加することが確認された。この周期5の場合には、整数  $M$  が加速モードのステップの大きさ  $m$  と一致しないことに注意しておく。

## 1.5 拡散係数

軌道の拡散を観測することによって系の統計的な性質を評価することができる。ここで軌道の集団の拡散係数は

$$D = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \langle (p_i(T) - p_i(0))^2 \rangle \quad (1.5.1)$$

で定義される。 $\langle \ \rangle$  は、粒子軌道  $i$  についてのアンサンブルである。標準写像においては、Cary, Meiss 等 [8][9] によって詳細な理論的拡散係数の評価が行われている。位相平面内において加速モードを含む初期値をとると、時間発展とともに運動量が増加し、拡散係数の値は異常な値を示す。

通常、拡散理論においてカオス領域における運動量の2乗平均は時間発展とともに線形に増加するが、初期値に加速モードの存在する領域を含む場合には、運動量の2乗平均は時間に対して2次関数的に増加する。

Fig.1.6では、拡散係数の数値実験をそれぞれ軌道1000個、時間ステップ  $10^5$  程度、非線形パラメータ  $A$  の領域  $0.5 \sim 1.0$ 、初期値  $p_0 = 0.0$ 、 $q_0 = -0.5 \sim 0.5$  に対して行った結果を示す。そして Table 1.1 では、拡散係数の計算結果から観測されるそれぞれのピーク値に対して、これまでに定めた加速モードが存在する安定領域と比較した結果を示す。

これらの結果から各々拡散係数における異常領域には3周期モードが存在することが分かり、更に、前節の結果に基づいて Fig.1.6で観察される  $A \approx 0.6$  における鋭いピークは周期5ステップ2の加速モードの寄与であることが結論できる。

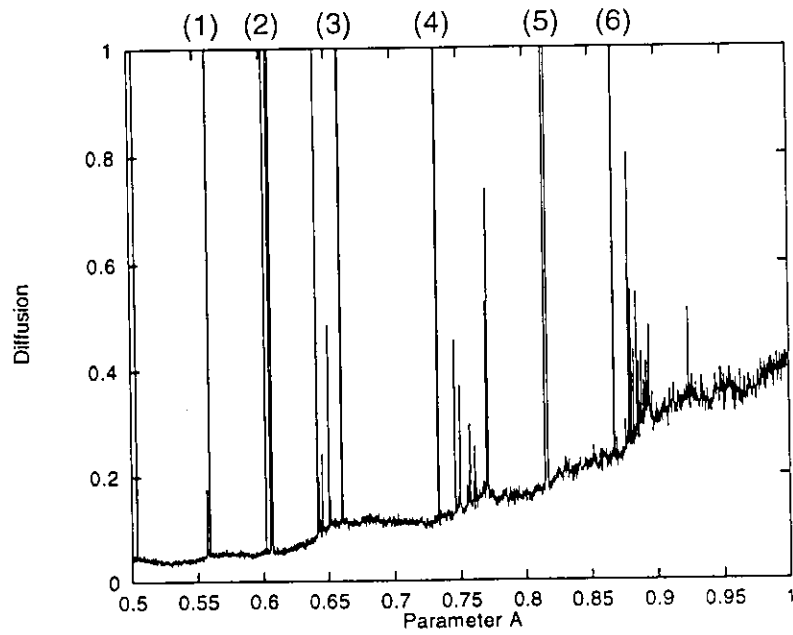


Figure 1.6: Numerical result of diffusion coefficient at  $0.5 < A < 1.0$ .  $10^5$  particles are initially distributed uniformly at  $p = 0$ .

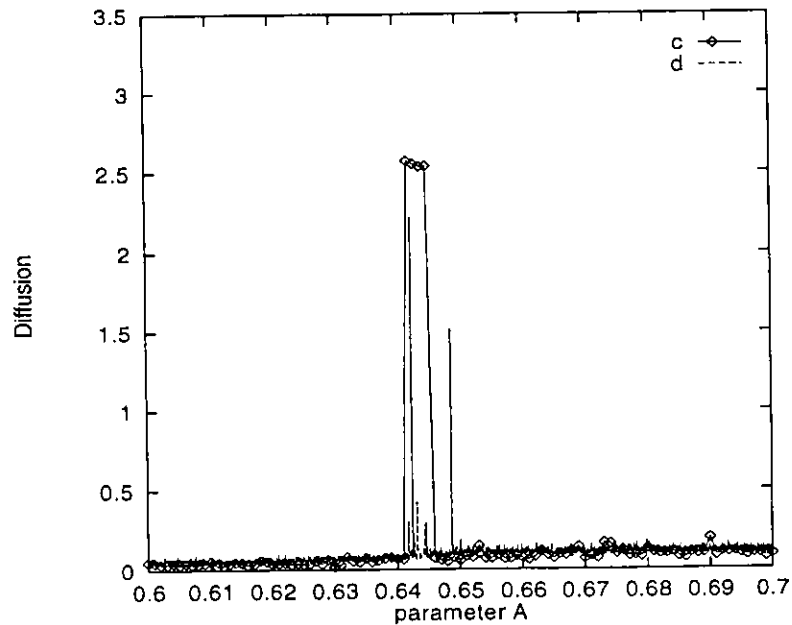


Figure 1.7: Diffusion coefficient in the region  $0.6 < A < 0.7$ , for  $10^5$  particles with initial distribution along  $p = -0.2$ . Line (c) includes the contribution of the period-2 accelerator mode. Diffusion coefficient for the chaotic particle is also shown by dashed line (d).



Table 1.1: A various contribution of accelerator modes for diffusion coefficient

| peak position | mode identification | stable region         |
|---------------|---------------------|-----------------------|
| (1)           | period-3 step-1     | $0.5589 < A < 0.5595$ |
| (2)           | period-5 step-2     | $A \approx 0.6064$    |
| (3)           | period-3 step-1     | $0.6578 < A < 0.6605$ |
| (4)           | period-3 step-1     | $0.7421 < A < 0.7674$ |
| (5)           | period-3 step-2     | $0.8144 < A < 0.8158$ |
| (6)           | period-3 step-2     | $0.8734 < A < 0.8919$ |

次に我々が過去に理論的に存在領域を定めた2周期加速モード [12] の寄与も議論する。2周期加速モード (period-2 step-1) の存在領域は

$$0.64037 < A < 0.65130 \quad (1.5.2)$$

と定められている。(1.5.2) 式の領域の鳥構造は位相平面で  $(q_1, p_1) = (0.105, -0.2)$ ,  $(q_2, p_2) = (0.11, -0.2)$  付近で存在するため、 $p_0 = 0$  とした Fig.1.6 の拡散係数では2周期加速モードによる寄与は不明確である。

そこで Fig.1.7では、それらを明確にするために非線形パラメータ  $A$  と初期値  $(q_0, p_0)$  を2周期加速モードが存在する領域周辺のカオス軌道にとった結果 (d) と定量的に2周期加速モードの異常拡散の寄与を明確にするため、初期値を  $(q_0, p_0) = (0.11, -0.2)$  とした場合の結果 (c) のそれぞれの拡散係数の数値実験結果を示す。その結果から、(c),(d) の両方の場合にピーク値が2周期加速モードが安定に存在する領域に観測される。特に (d) における結果は、加速モードが共存する系でのカオス軌道の粒子の拡散過程において、ある時間に加速モード近傍に付着し、そして安定島の粘着効果によりピーク値が生まれているといった異常拡散の原因を明確に示唆している。

その他にも Fig.1.6の拡散係数の数値実験結果から  $A \approx 0.65$ ,  $A \approx 0.75$  及び  $A \approx 0.88$  近傍においては異常拡散のピークの幅が広く複雑な構造を示している。これは非線形パラメータ  $A$  が (1.2.8)、(1.2.9) 及び (1.2.10) の安定領域の値より大きくなった場合に生ずる倍周期分岐によるものであると考えられる。また  $A \approx 0.5$  に対して観察される拡散のピークの原因は何かは定かではない。市川等 [10] の観察結果からは、それが7周期の加速モードの寄与によるものと推論されるが、ここでは結論できない。

## 1.6 結論

今回の標準写像における多重周期加速モードの理論的な解析で、そのモードの寄与により拡散係数において異常拡散領域を構成する微細構造を解明した。これらの結果は非線形パラメータが1以下といった微小な領域における現象であったゆえに興味を持たれた。ただ、拡散係数の解析結果から明確に示すことができなかった  $A \approx 0.5$  の異常増大領域については、おそらく7周期加速モードの寄与であると同定したが今後の解析において明確にする。

拡散係数に対する本解析結果により、カオス軌道の粒子が加速モード周辺に写像された場合には、加速モード島周辺に働く粘着効果によって加速モード的な運動をすることが明らかになった。将来は、レビー統計により、多重周期加速モードが存在するような複雑な系の拡散過程を理論的に解析し、本研究の結果と比較することが課題である。

## Chapter 2

# 標準写像における 3 周期加速モードの分岐現象

Upon the change of the stochastic parameter, the period-3 accelerator mode of the standard map becomes unstable through hyperbolic transition with reflection when the residue  $R$  goes over the unity, while it undergoes hyperbolic transition with reflection for the residues  $R$  becomes negative. The former case is nothing but the period-doubling bifurcation, in which the formation of new periodic orbits are confirmed with the known symmetry analysis. The hyperbolic transition without reflection, however, leads to the birth of a pair of period-3 orbits, which can not be identified as the intersection of known symmetry lines. This finding calls for special interests to explore some kind of hidden symmetry for the hyperbolic transition without reflection in the period-3 accelerator modes of the standard map.

### 2.1 序論

非線形保測写像はプラズマ粒子の異常輸送の問題やトカマクやステラレータなどのトロイダル磁気容器の磁気面の解析などに対して広く用いられている [2][3][14]。各種の非線形保測写像は局所的な近似により標準写像モデルに還元され、写像式のパラメータ値を変化させることによって規則運動と不規則運動の複雑な絡み合いを詳しく観測することができる。非線形パラメータ  $A$  を増加すると Poincaré-Birkoff 分岐が起こり周期的運動が支配的な系であったのがカオス領域が支配的な系へと変化する。このようなカオスへの遷移過程で起こる典型的な分岐種は大きく分けて 4 つの分岐比 (branching ratio) の値  $\nu = 1/5, 1/4, 1/3, 1/2$  ( $\nu = l/m$ : rotations/period) で区分される [15]。  $\nu = 1/4$  の場合は strong-resonance と呼ばれる分岐現象が見られクレモナ写像において議論されている [16]。  $\nu = 1/3$  の場合は squeezing 現象と関連した興味深い分岐が起こる [12]。  $\nu = 1/2$  の場合は倍周期分岐現象が起こる。特にこの倍周期分岐現象は数ある分岐類のなかでも精力的に高周期、高次元にわたって Hénon map やシンプレクティック写像等を用いた解析が詳細に行われている [17][18]。これら数々の分岐類のなかでも倍周期分岐現象に関して我々は拡散係数の異常増大領域を非線形パラメータが 1 より小さい領域で引き起こすことで知られている多重周期加速モードに対して行い、特に標準写像の period-3 catastrophe [19][20] に代表され、period-3 squeezing 現象などを引き起こす 3 周期加速モードに注目して解析を行う。

通常、分岐比  $\nu = 1/2$  で分岐が起こると不安定化した不動点の種類は Fig.2.1 の様に反射を伴わない双曲型 (hyperbolic without reflection) と反射を伴う双曲型 (hyperbolic with reflection) の二つの現象が考えられる。これまでこの種の解析では、反射を伴う双曲型不動点をもつ分岐 (倍周期分岐)

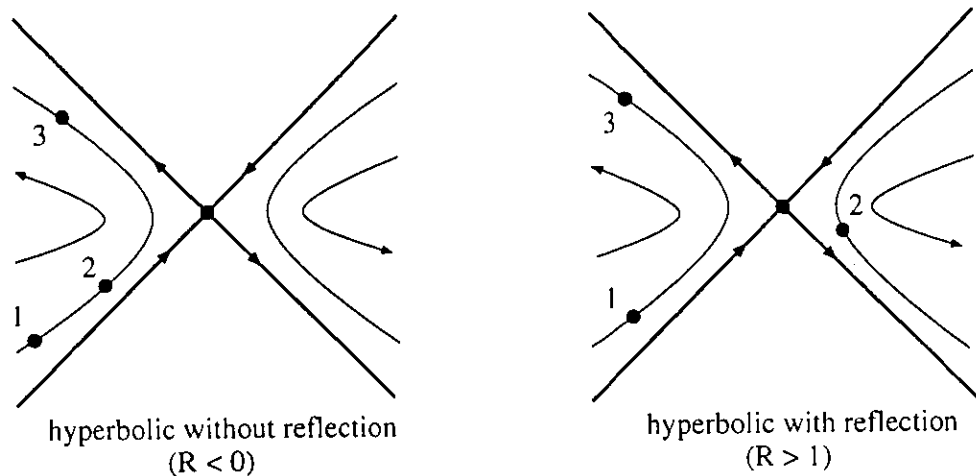


Figure 2.1: The left structure shows the bifurcation of the hyperbolic without reflection. Here, the point on the orbit does not jump to the opposite side orbit. For the case of the bifurcation of hyperbolic with reflection, the point jumps to the opposite orbit. The point numbers indicate the sequence of time steps.

が取り上げられてきたが、本解析では反射を伴わない双曲型不動点をもつ同周期分岐に着目した解析を行い、その分岐島の構造を明確にする。

分岐島構造の解析には、3周期多重周期加速モードに対して行い、倍周期と同周期分岐が生ずるパラメータ領域を定めた。この3周期加速モードおよび両分岐現象がそれぞれ存在するパラメータ領域は後節で詳しく説明する。(\*本論文ではFig.2.1の反射、非反射的双曲型の不安定点の種類による分岐をそれぞれ反射を伴う分岐(倍周期分岐)、反射を伴わない分岐(同周期分岐)と呼ぶことにする。)

次節では3周期加速モードが存在する条件を求め、接線写像[21]を用いて線形安定性を議論する。接線写像のtraceで定義される剰余  $R(\text{residue})$ [13] の値は  $0 < R < 1$  ならば不動点近傍は安定点で位相平面での運動は楕円軌道を描く。 $R > 1$  と  $R < 0$  場合は不動点はそれぞれ双曲、非双曲型の不安定点となり位相平面では反射を伴う分岐(倍周期分岐)と伴わない分岐現象(同周期分岐)といった性質の異なる分岐現象が観測できる[22]。そこで剰余の計算結果より反射を伴うか伴わないかの分岐が起こる初期値を特定し、分岐現象の構造を具体的に位相平面で図示した。第3節では反射を伴うものと伴わないものとの分岐がそれぞれ生じた場合に対し、その分岐により生まれた島構造の周期性と性質をより詳しく説明するため対称線[23]-[25]による解析を行い、その結果を述べる。最後に3周期加速モードの分岐現象の解析結果と本研究において新たに生じた問題点をまとめて議論する。

## 2.2 3周期加速モードの安定性の解析

この節ではChapter 1の結果をふまえて定量的に3周期加速モードが安定に存在する標準写像における非線形パラメータ  $A$  の領域を説明する[12]。標準写像は

$$\begin{pmatrix} q_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_n + p_{n+1} \\ p_n + f(q_n) \end{pmatrix} \quad (2.2.1)$$

ただし  $f(x) = A \sin 2\pi x$  で与えられる。(2.2.1)式を2、3回反復させると、それぞれ

$$\begin{aligned} q_{n+2} &= q_{n+1} + p_{n+2} \\ &= q_n + 2p_n + 2f(q_n) + f(q_n + p_n + f(q_n)) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

$$\begin{aligned}
p_{n+2} &= p_n + f(q_{n+1}) \\
&= p_n + f(q_n) + f(q_n + p_n + f(q_n))
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

および

$$\begin{aligned}
q_{n+3} &= q_{n+2} + p_{n+3} \\
&= q_n + 3p_n + 3f(q_n) + 2f(q_n + p_n + f(q_n)) \\
&\quad + f(q_n + 2p_n + 2f(q_n) + f(q_n + p_n + f(q_n)))
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

$$\begin{aligned}
p_{n+3} &= p_{n+2} + f(q_{n+2}) \\
&= p_n + f(q_n) + f(q_n + p_n + f(q_n)) \\
&\quad + f(q_n + 2p_n + 2f(q_n) + f(q_n + p_n + f(q_n)))
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

と書ける。3周期加速モード  $(q_0^*, p_0^*)$  は以下の条件を満たす周期軌道である。

$$\begin{aligned}
p_3^* &= p_0^* + m \\
q_3^* &= q_0^* + l
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

ここで  $m, l$  は任意の整数であり、 $m$  が運動量空間における加速ステップの大きさを与える。標準写像における3周期加速モードの運動量は  $p_0^* = 0$  となるものが存在することが知られており [10]、今回はこのことを仮定し (2.2.6) 式を (2.2.4), (2.2.5) 式に代入して3周期加速モードの存在条件を定めると (2.2.5) 式から

$$f(q_0) + f(q_0 + f(q_0)) + f(q_0 + 2f(q_0) + f(q_0 + f(q_0))) = m \tag{2.2.7}$$

同様に位置座標に対しては (2.2.4) 式から

$$3f(q_0) + 2f(q_0 + f(q_0)) + f(q_0 + 2f(q_0) + f(q_0 + f(q_0))) = l \tag{2.2.8}$$

を得る。よって (2.2.7), (2.2.8) 式から3周期加速モードの存在条件として

$$\Phi^3(A, q_0) \equiv 2f(q_0) + f(q_0 + f(q_0)) = m = l/2 \tag{2.2.9}$$

を得る。ここで  $m$  と  $l$  は  $m = l/2$  を満たす整数である。つまり加速モードは条件を満たす  $q^*$  と  $p = 0$  の組  $(q, p) = (q^*, 0)$  で与えられる。次に3周期加速モードの条件式 (2.2.9) 式を満たす  $q^*$  と  $p = 0$  の組の線形安定性を議論する。 $\mathbf{X}_0 = (q^*, 0)$  とした場合、その加速モードでの近傍点  $\mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X}_0$  で写像を線形化すると接線写像 [21]  $\Delta T$  により

$$\begin{aligned}
\Delta\mathbf{X}_3 &= T(\mathbf{X}_3)\Delta\mathbf{X}_2 \\
&= T(\mathbf{X}_3)T(\mathbf{X}_2)\Delta\mathbf{X}_1
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

となる。(2.2.10) 式を書き換えると

$$\Delta\mathbf{X}_3 = \Delta\mathbf{T}_0\Delta\mathbf{X}_0 \tag{2.2.11}$$

となる。ここでの行列  $\Delta\mathbf{T}_0$  は

$$\Delta\mathbf{T}_0 = \prod_{i=0}^2 T(\mathbf{X}_i) \tag{2.2.12}$$

である。したがって接線写像から求まる固有値方程式は

$$\lambda^3 - [Tr(\Delta\mathbf{T}_0)]\lambda + 1 = 0 \tag{2.2.13}$$

Table 2.1 : The stable region of accelerator modes for  $m = l/2 = 1$ 

| critical position $q_{min}, q_{max}$ | mode identification | stable region ( $A_1 < A < A_2$ ) |
|--------------------------------------|---------------------|-----------------------------------|
| 0.07345, 0.07496                     | period-3 step-1     | $0.5589 < A < 0.5595$             |
| 0.27546, 0.28872                     | period-3 step-1     | $0.6578 < A < 0.6605$             |
| 0.34797, 0.35686                     | period-3 step-1     | $0.7421 < A < 0.7674$             |

Table 2.2 : The stable region of accelerator modes for  $m = l/2 = 2$ 

| critical position $q_{min}, q_{max}$ | mode identification | stable region ( $A_1 < A < A_2$ ) |
|--------------------------------------|---------------------|-----------------------------------|
| 0.27285, 0.28118                     | period-3 step-2     | $0.8144 < A < 0.8158$             |
| 0.33176, 0.33989                     | period-3 step-2     | $0.8734 < A < 0.8919$             |

となる。この時  $|Tr\Delta T_0| < 2$  であれば固有値  $\lambda$  は複素共役の解をもち、不動点近傍は楕円軌道となり不動点は楕円点となる。この  $Tr\Delta T_0$  を用いて剰余 [13] は

$$R = \frac{1}{4}(2 - Tr\Delta T_0) \quad (2.2.14)$$

と定義され、 $R$  の値が  $0 < R < 1$  の場合は不動点は安定点となり、 $R < 0$  かつ  $R > 1$  の場合は不安定点となる。この剰余の式を用いて 3 周期加速モード条件 (2.2.9) 式を満たす  $q^*$  と  $p = 0$  の組  $\mathbf{X}_0 = (q^*, 0)$  の安定性解析を行なった結果を Table 2.1, 2.2 に示す。

Table 2.1, 2.2 の  $q_{min}, q_{max}$  は非線形パラメータ  $A_1, A_2$  における位置座標  $q$  をあらわしている。Table 2.1 は 3 周期加速モードが存在する条件 (2.2.9) 式の  $\Phi^{(3)} = m = l/2 = 1$  の場合の安定領域を示している。ここでの安定領域  $A$  に対する位置座標  $q$  を初期値にとって時間変化に対する運動量変化を計算すると  $m = l/2 = 1$  の場合は、すべて  $step/period = dp/dt = 1/3$  となる。このことより Table 2.1 の  $m = l/2 = 1$  の場合は period-3 step-1 の加速モードといえる。同様に  $m = l/2 = 2$  の場合はすべて  $step/period = 2/3$  となるため、Table 2.2 に示された  $A$  の領域に存在する加速モードは period-3 step-2 の加速モードといえる。実際に 3 周期加速モードが安定な領域の初期値  $A = 0.559, p_0 = 0, q_0 = 0.074$  を用いて位相平面図を描くと Fig.2.2 となる。そこでは微小な構造であるが 3 周期加速モード (period-3 step-1) が存在しているのが確認できる。また、その他の Table 2.1, 2.2 の非線形パラメータ  $A$  の安定領域に対しても Fig.2.2 のような 3 周期島構造が同様に見られる。

Period-3 step-1, 2 の非線形パラメータ  $A$  に対してのそれぞれの剰余 (residue) を計算した結果が Fig.2.3 である。Fig.2.3(1) は period-3 step-1 の加速モードに関するもので剰余の値が非線形パラメータ  $A$  の変化に対して単調に増加しているのが観察できる。Fig.2.3(2) は period-3 step-1、Fig.2.3(3) は period-3 step-2 の加速モードに対する剰余の値をそれぞれ示しており、それらは剰余の値が増加して極大値をとった後に減少し負になるような傾向が見られる。そこで Fig.2.3(1),(2) と (3) の剰余の計算結果の傾向が違う点に注目してさらに詳しく分析を行なった。

不安定の  $R > 1$  近傍では安定な不動点が分岐によって不安定化 (不安定点) して反射を伴う双曲型になり倍周期分岐がおこる。この反射的双曲型 (hyperbolic with reflection) の不安定点をもつ倍周期分岐での粒子の動きは Fig.2.1 の右図のようになる (1→2→3)。そこでは時間発展により軌道上の粒子が不安定点をとびこえ双方の軌道との往復運動を行う。この運動により周期は倍化し、period-3 step-1 の加速モードは period-6 step-2 モードとなる。

一方、 $R < 0$  の近傍では分岐によって不安定化した点の型が反射を伴わない双曲型になる。この非反射的双曲型 (hyperbolic without reflection) の場合、軌道上の粒子は Fig.2.1 の左図の様に片方の軌道上だけで運動するため分岐による周期の倍化は起こらない [22]。このため period-3 step-1 加速モー

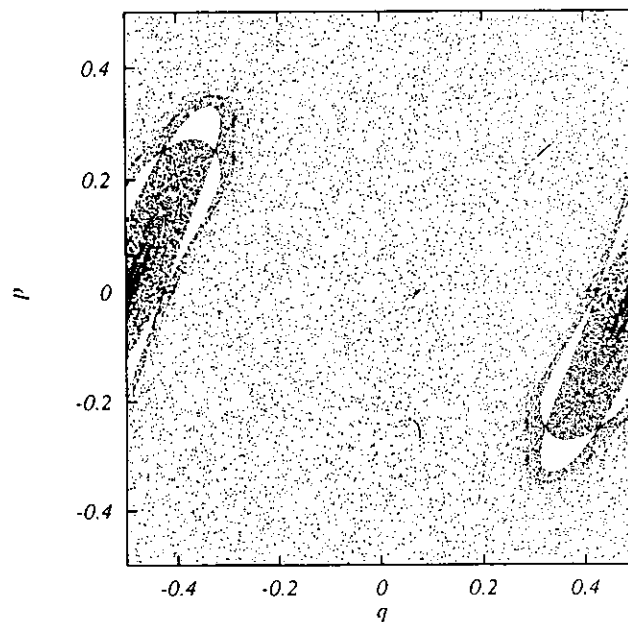


Figure 2.2: Phase portrait of the standard map at  $A = 0.5595$ . Period-3 step-1 accelerator mode islands at  $p_0 = 0.0, q_0 \approx 0.074, p_1 \approx 0.25, q_1 \approx 0.30, p_2 \approx -0.25, q_2 \approx 0.074$ .

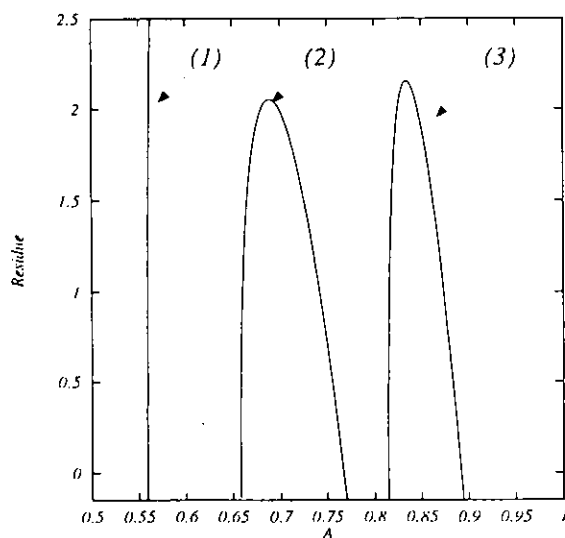


Figure 2.3: The lines (1) and (2) shows the residue value for period-3 step-1. The line (3) stands for the period-3 step-2 accelerator modes.

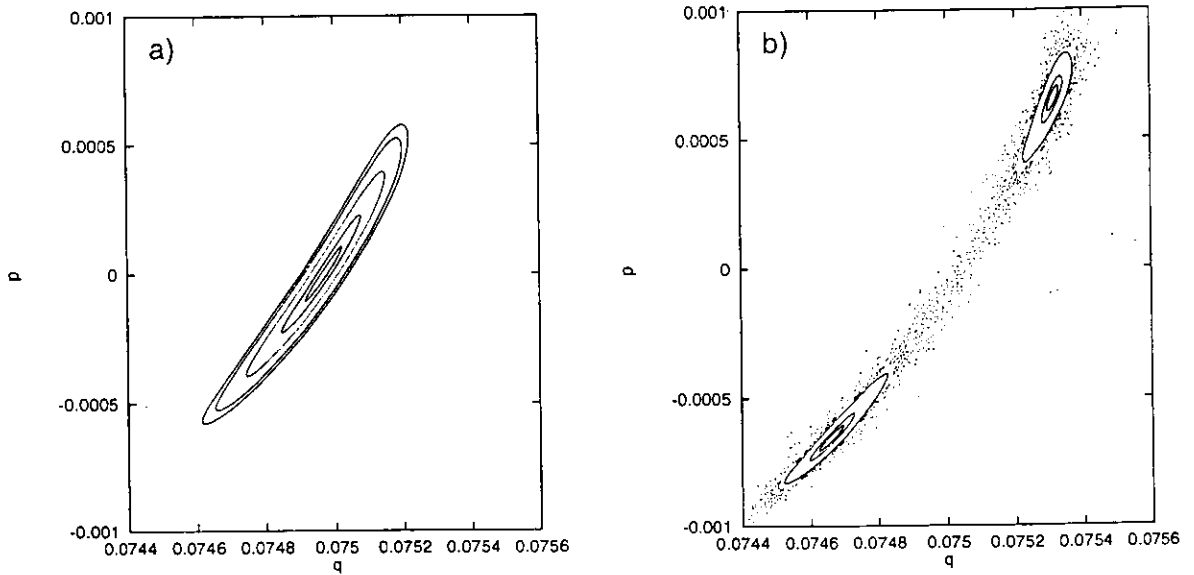


Figure 2.4: a): Structure of elliptic accelerator mode island for  $A = 0.5595$ . b): Structure of bifurcated island with reflection at Residue  $\approx 1$  and  $A = 0.55955$ .

ドは分岐後もそのモードであり続ける。しかしそれは分岐前のモードとは全く違った性質で本解析の加速モードの条件 (2.2.9) 式からは導けないものである。これら剰余の計算結果 (Fig.2.3(1),(2),(3)) より 3 周期加速モードは反射的・非反射的・双曲型の 2 つの不安定点の種類があることから倍周期と同周期の両方の分岐現象が存在すると推測できる。

実際に分岐現象の違いをすべて明確にするため剰余の計算結果  $R \approx 1$  と  $R \approx 0$  におけるパラメータを初期値にとり、位相平面で描いたのが Fig.2.4 ~ Fig.2.8 である。Fig.2.4 ~ Fig.2.8 の a) は分岐直前、b) は分岐後の島構造をそれぞれ示している。Fig.2.4 ~ Fig.2.8 の分岐後のすべての図に対して安定な片方の島だけに初期値をとると Fig.2.4, Fig.2.5 と Fig.2.7 の様に 2 つの島構造が分岐後に見られる。これは反射を伴う分岐 (倍周期分岐) が起こっていると考えられるからである。一方、Fig.2.6 と Fig.2.8 では、反射を伴わない分岐が起こっているため初期値をとった島構造しか描かれていないのが分かる。

これら Fig.2.4 ~ Fig.2.8 の結果、3 周期加速モードにおける反射を伴うか伴わないかの分岐現象が剰余の  $R > 1, R < 0$  のそれぞれの場合に対して実際に起こっていることが観測できたのと同時に分岐後の安定島内部の粒子の運動 (周期軌道) が Fig.2.1 と同じようになっていることが分かった。さらに我々は、次節において反射を伴うか伴わないかのそれぞれの分岐現象の周期性変化や特徴を対称線を用いて議論する。

### 2.3 3 周期加速モードの分岐現象の対称線解析

この節においては 3 周期加速モードの分岐現象がどのような特徴をもつかを対称線を用いて議論する。

多重周期加速モードの対称性は、写像によって位置座標が変化せず運動量座標だけが変化するため、標準写像 (2.2.1) 式による運動量の反対称性  $p = -p$  を考慮すればよい。

写像  $T$  と逆写像  $T^{-1}$  は、それぞれ運動量反転の Involution の積 (詳しくは chap 4 参照)

$$T = J_1(n) \cdot J_0(m) \quad (2.3.1)$$

$$T^{-1} = J_0(m) \cdot J_1(n) \quad (2.3.2)$$

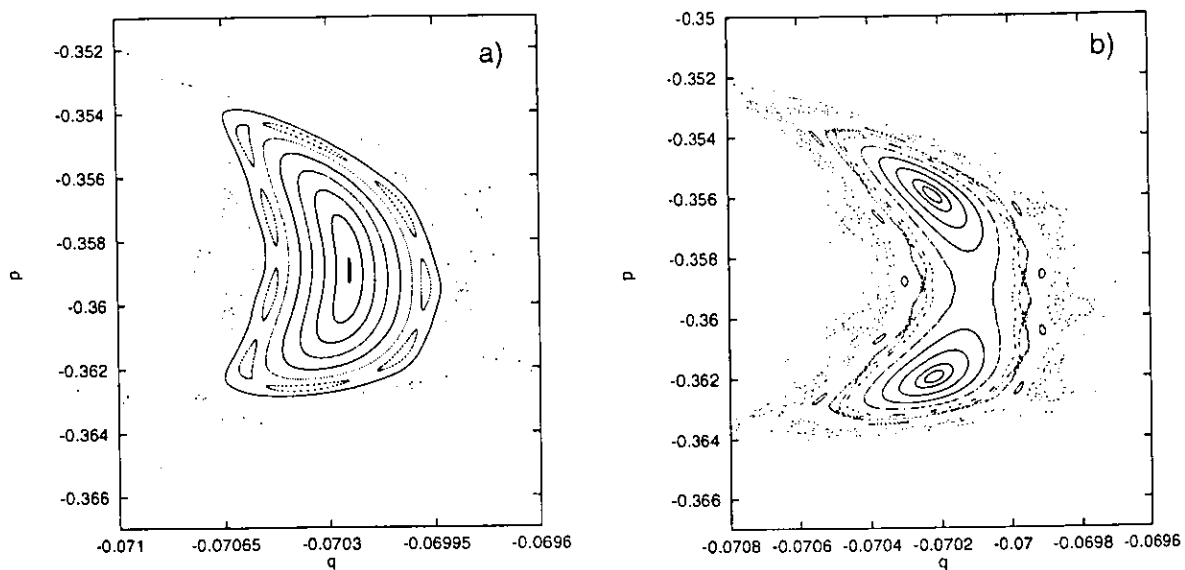


Figure 2.5: a): Structure of elliptic accelerator mode island for  $A = 0.6605$ . b): Structure of bifurcated island with reflection at  $\text{Residue} \approx 1$  and  $A = 0.6606$ .

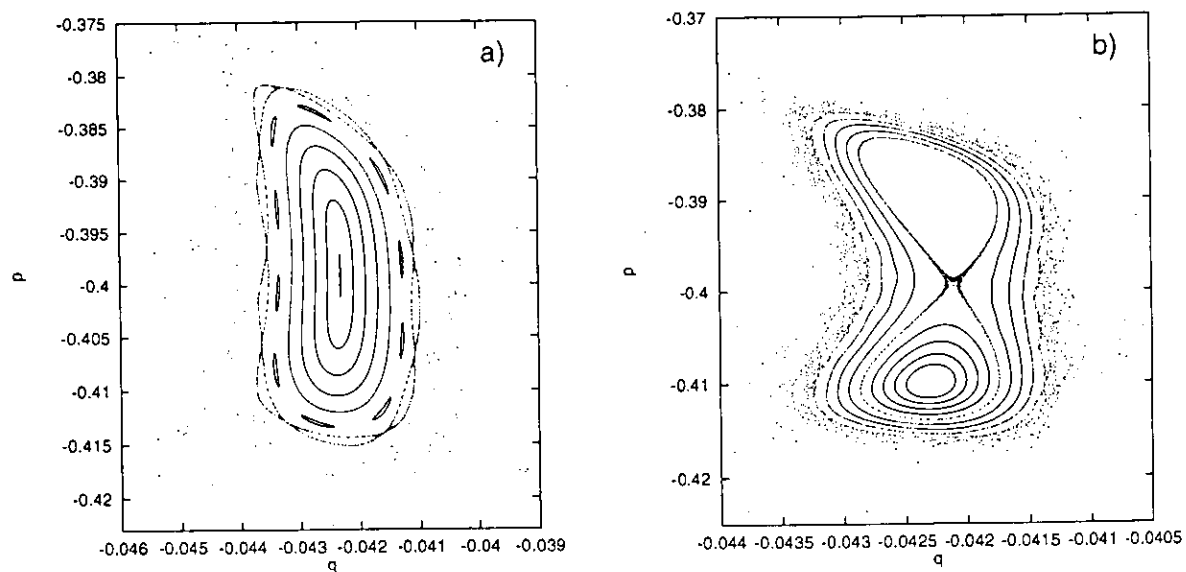


Figure 2.6: a): Structure of elliptic accelerator mode island for  $A = 0.7674$ . b): Structure of bifurcated island without reflection at  $\text{Residue} \approx 0$  and  $A = 0.7677$ .



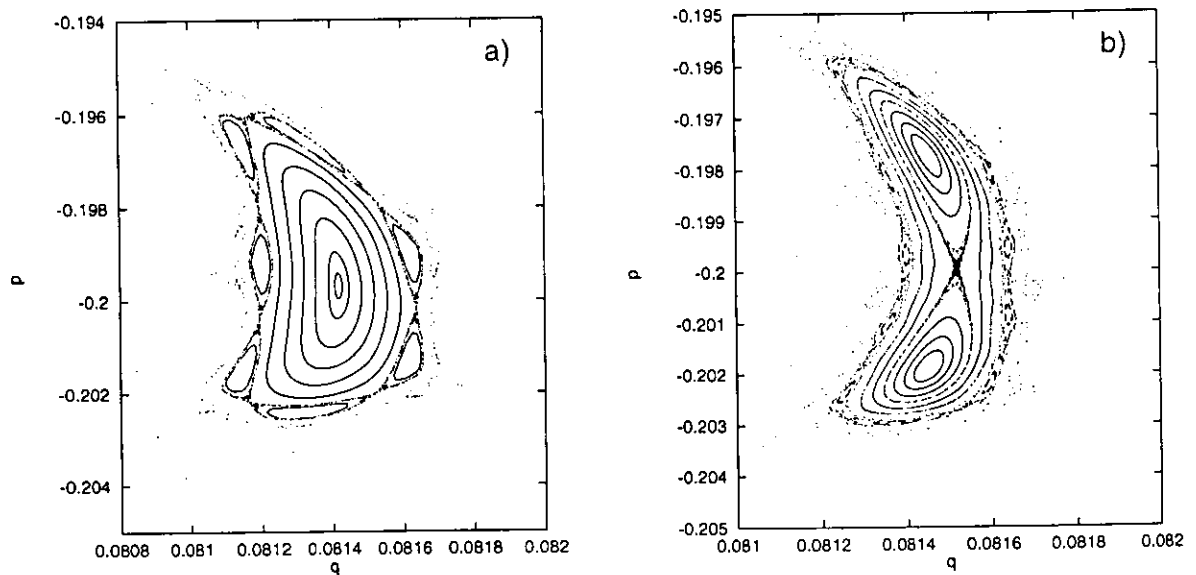


Figure 2.7: a): Structure of elliptic accelerator mode island for  $A = 0.8158$ . b): Structure of bifurcated island with reflection at  $\text{Residue} \approx 1$  and  $A = 0.8159$ .

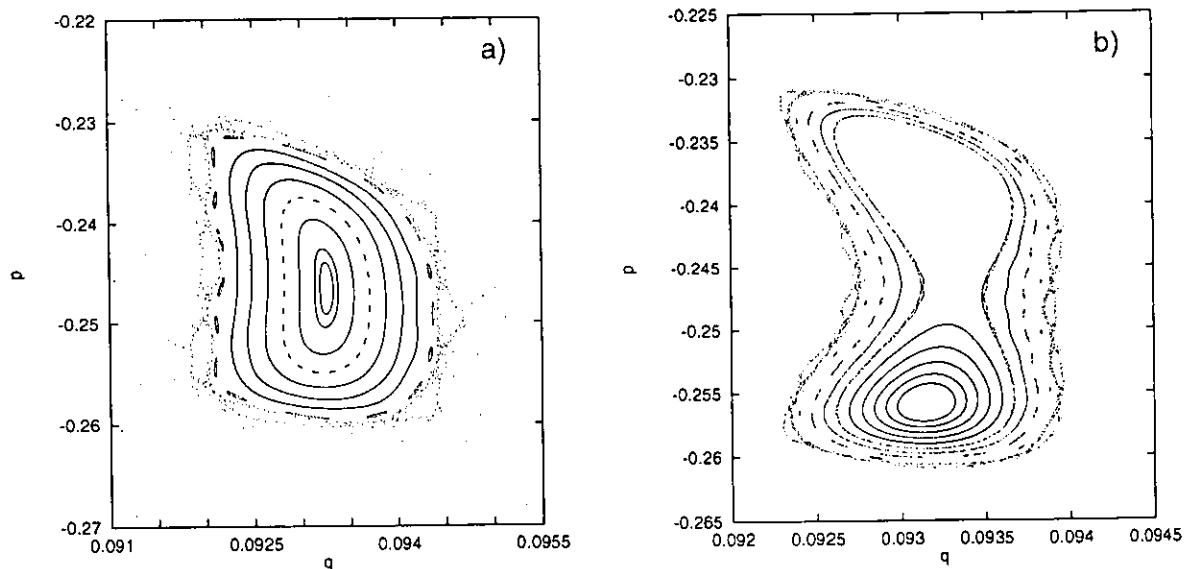


Figure 2.8: a): Structure of elliptic accelerator mode island for  $A = 0.8915$ . b): Structure of bifurcated island without reflection at  $\text{Residue} \approx 0$  and  $A = 0.8920$ .

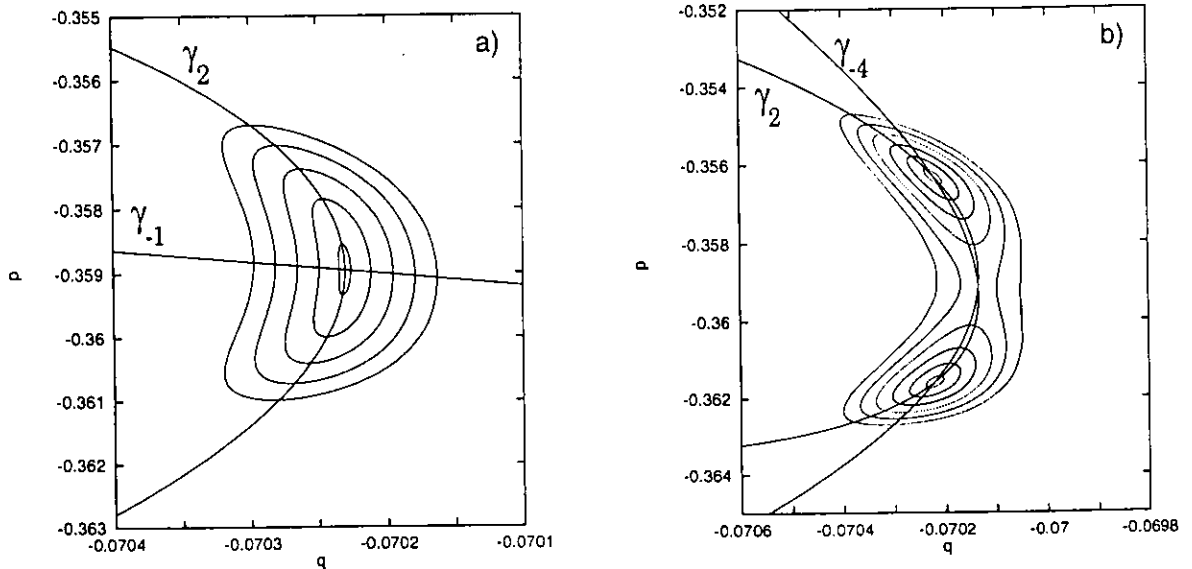


Figure 2.9: a): Symmetry lines  $\gamma_2$  and  $\gamma_{-1}$  at  $A = 0.6605$ . b): Symmetry lines  $\gamma_2$ ,  $\gamma_{-4}$  at  $A = 0.6606$ , which go through the period-6 island and unstable hyperbolic points.

に分解される。ここでの整数  $m, n$  は、それぞれ標準写像における加速モードの運動量増加量 (ステップ数) を示す値である。この場合の  $J_0, J_1$  は、それぞれ

$$J_0(m) : \begin{cases} p' = -p + 2m \\ q' = q - p + m \end{cases} \quad (2.3.3)$$

$$J_1(n) : \begin{cases} p' = -p + f(q - p) + n \\ q' = q - 2p + f(q - p) + n \end{cases} \quad (2.3.4)$$

で与えられる。(2.3.3) と (2.3.4) 式より構築される対称線  $\gamma_j(m)$  と  $\gamma_k(n)$  の交点は、標準写像  $T$  による周期点を与え、その周期数は  $|j - k|$  の約数  $N$  によって定められる。3周期加速モードは、倍周期分岐による周期性変化を考慮すれば、対称線  $\gamma_{-1}, \gamma_2$  と  $\gamma_{-4}$  により周期性を決定することができる。それらの対称線は、(2.3.3), (2.3.4) および (2.3.2) 式より

$$\gamma_{-1} : 2p = -f(q) + 2m \quad (2.3.5)$$

$$\gamma_2 : 2p = f(q - p) + n \quad (2.3.6)$$

$$\gamma_{-4} : 2p = -2f(q) - f(q + p + f(q)) - f(q + 2p + 2f(q) + f(q + p + f(q))) + 2m \quad (2.3.7)$$

と書ける。

(2.3.5)~(2.3.7) 式の対称線を Fig.2.4~Fig.2.8の全ての分岐位相図に対して描いた結果が Fig.2.9 ~ Fig.2.12である。( \* Fig.2.9~Fig.2.12 の島構造は対称線の交点を考慮するため、島内部の初期値を減らして描いた。) Fig.2.9と Fig.2.11は倍周期分岐が起こっている状態で Fig.2.10と Fig.2.12 は同周期分岐が起こっている状態を示している。Fig.2.9と Fig.2.11では  $\gamma_2, \gamma_{-1}$  の交点 (3周期点) が不安定化し、倍周期分岐により  $\gamma_2, \gamma_{-4}$  の交点として6周期点および分岐後の不安定点を与えている。しかし Fig.2.10と Fig.2.12 の同周期分岐の場合、分岐前の3周期島は対称線  $\gamma_{-1}, \gamma_2$  の交点で分岐前の安定な3周期点を定めるが分岐後においては分岐島の不動点がそれで示されていない。さらに対称線を用いて同周期分岐によって生まれた3周期加速モードを解析したがそれらを満足する対称線は見出せなかった。

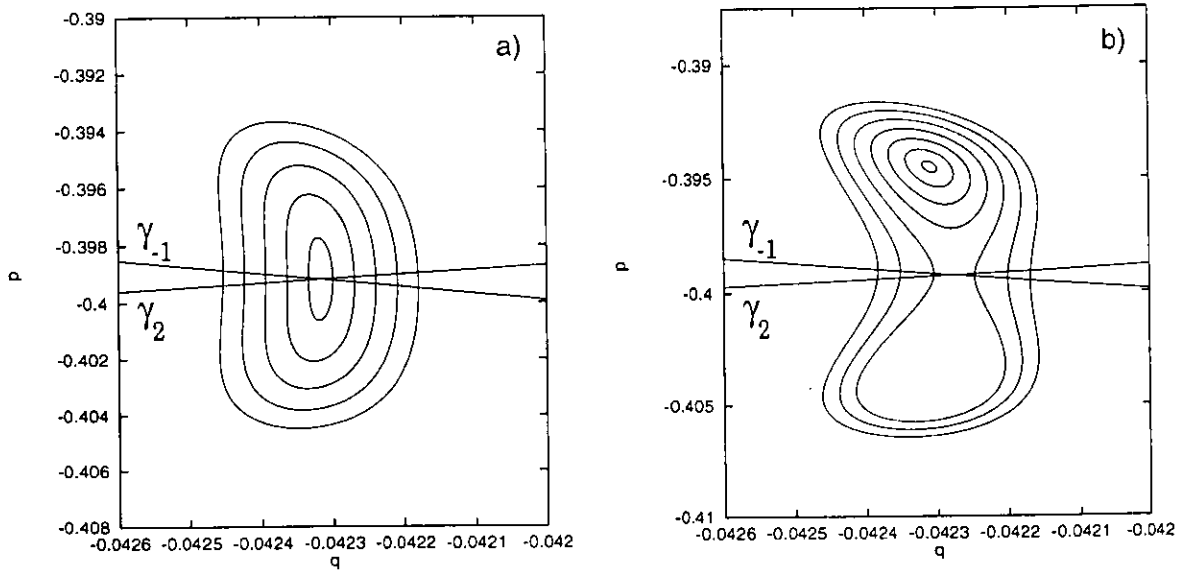


Figure 2.10: a): Symmetry lines  $\gamma_{-1}, \gamma_2$  go through the period-3 island at  $A = 0.7674$ . b): At the increased parameter  $A = 0.7677$ , Notice that the symmetry lines  $\gamma_2, \gamma_{-4}$  do not go through the bifurcated island. The bifurcated island is remained to be the period-3 step-1 accelerator mode.

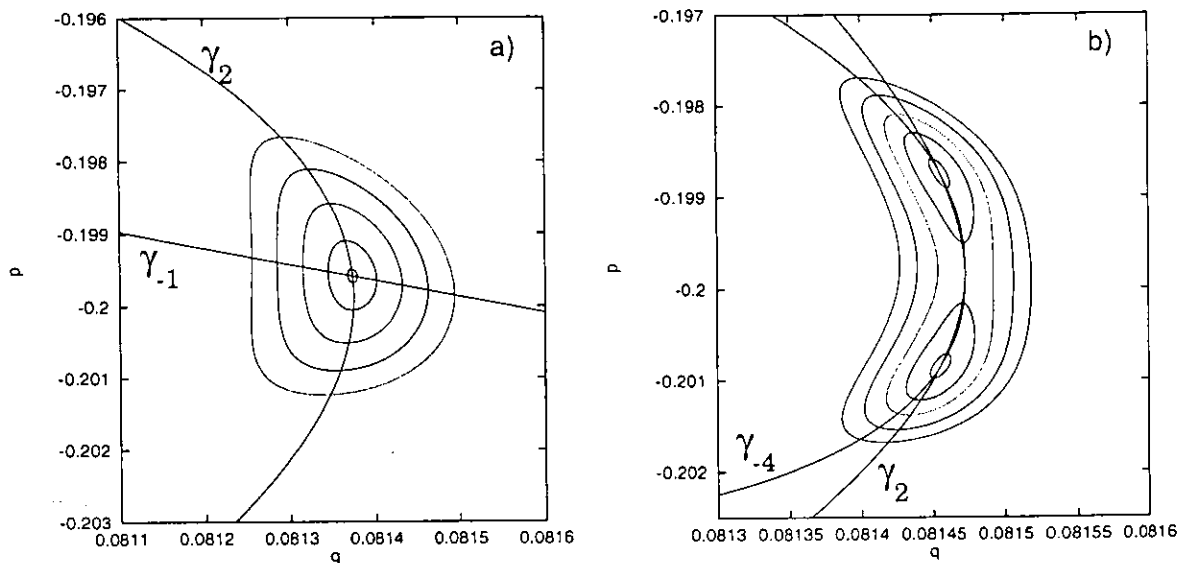


Figure 2.11: a): Symmetry lines  $\gamma_2$  and  $\gamma_{-1}$  at  $A = 0.8158$ . b): Symmetry lines  $\gamma_2, \gamma_{-4}$  at  $A = 0.8159$ , which go through the period-6 island and unstable hyperbolic points.

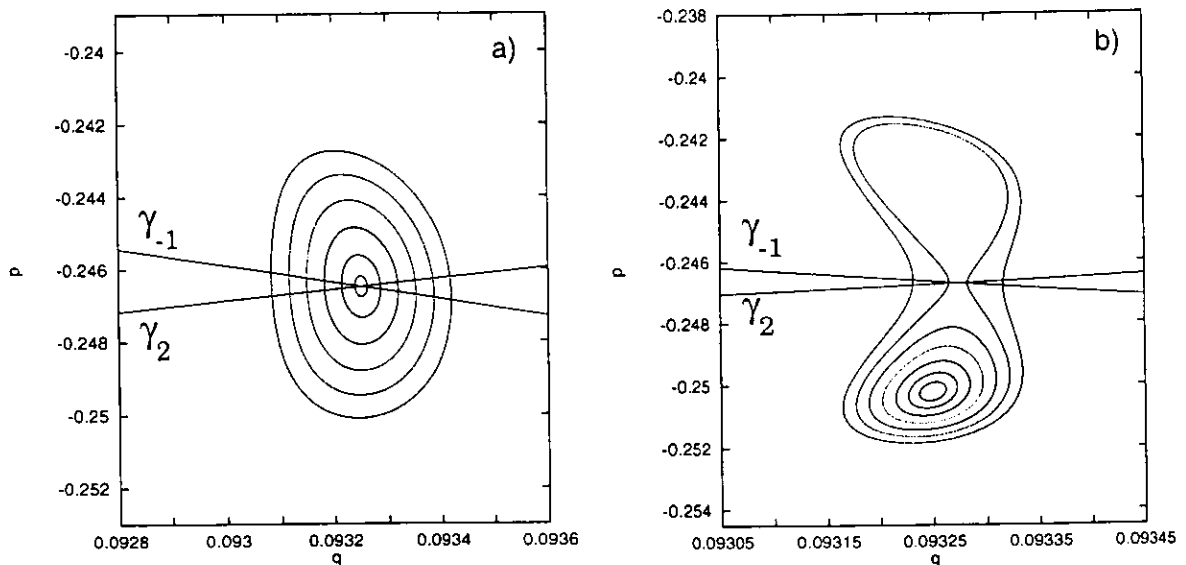


Figure 2.12: a): Symmetry lines  $\gamma_{-1}, \gamma_2$  go through the period-3 island at  $A = 0.8915$ . b): At the increased parameter  $A = 0.8920$ , Notice that the symmetry lines  $\gamma_2, \gamma_{-4}$  do not go through the bifurcated island. The bifurcated island is remained to be the period-3 step-1 accelerator mode.

これらの結果より、同周期分岐は、新たに生じた同周期島の周期点と同じ周期であるにもかかわらず、それらを分岐前と同じ対称線によって示せないことが分かった。このようなことは twist 条件を満たさない写像 [27] におけるセパトリックスのリコネクション前後に対して見られ、この現象は Saitô [28] によっても報告されている。それゆえに分岐現象およびリコネクション現象には、まだ知られていない隠された対称性が存在していると考えられ、これらを究明することは大変興味ある課題といえる。

## 2.4 結論

3 周期加速モードの構造解析を具体的に行った結果、位相平面の安定性を判別する剰余の値が非線形パラメータ  $A$  の増加に対し単調増加する場合だけでなく、Fig.2.3 の様にある値を上限に放物線的に変化し安定化する状態を観測した。この点に着目して数値解析を行った結果、剰余値が単調増加を続け不安定化する場合には反射を伴う分岐が起こり、逆に剰余値が減少して安定化して負の値をとった場合には反射を伴わない分岐が生じていることがその位相図より明らかになった。さらにそれら同周期、倍周期分岐によって生まれる新しい安定島構造に対して対称線を用い、それぞれの分岐種の性質を定めることを行った。その結果、3 周期加速モードはステップ数に関係なく対称線  $\gamma_2, \gamma_{-1}$  の交点として定めることができた。反射を伴う分岐、すなわち倍周期分岐が起こると 3 周期加速モードは 6 周期化し、対称線  $\gamma_2, \gamma_{-4}$  の交点はそのモードを特徴づけた。しかしながら反射を伴わない分岐、同周期分岐がおこると 3 周期加速モードは、ちがった対称性をもつ 3 周期加速モードのペアをつくるが、その新たに生じた 3 周期加速モードは通常の 3 周期の対称線  $\gamma_2, \gamma_{-1}$  の交点として表す事ができなかった。つまり標準写像の問題で知られている運動量、位置座標の反転の Involution では現せないといった特徴があることが分かった。

最後に多重周期加速モードにおける反射を伴うか伴わないかの分岐現象や Non-Twist 写像におけるセパトリックスリコネクションの現象等に共通している問題である隠された対称性の究明は非線形動力学系の基礎的課題として興味を持てる。

## Chapter 3

# 標準写像における周期軌道の分岐現象と高次対称性

The bifurcation process in the two dimensional area preserving mappings is investigated on the basis of symmetry structure analysis. Transition observed in the boundary islands has been studied throughly in terms of higher order symmetry analysis. In this present paper, we treat higher order symmetry for two type mode structure which one is period-2 accelerator mode and the other one is period-4 mode. The both cases for the period-4 orbits and period-2 accelerator mode orbit in the standard map have been studied throughly to analyze boundary islands formation around the principal period-2,4 islands, and the onset of the hyperbolic bifurcation with reflection and without reflection, respectively. It is illustrated explicitly that the bifurcation type of hyperbolic bifurcation with and without reflection, which gives rise to the birth of twin orbits with periodicity of the mother orbit.

### 3.1 序論

少数自由度のハミルトン系において、カオスと規則運動が混在する形態は、非線形力学系における固有の特性や諸種の分析手法により決定される。例えば、拡散係数は、諸種の物理現象において長時間の粒子の統計的秩序を定めるのに用いられ、標準写像においては、カオスと規則運動が混在する系の運動特性を広域なパラメータ領域にわたって示すことができる [29]。

標準写像では、制御パラメータの変化により安定な周期軌道が Poincaré-Birkoff 分岐理論に従って幾度も分岐を繰り返して系が広域カオスへと遷移する。その分岐形態や分岐後あらたに生まれた周期島の相空間構造には、普遍的な構造と性質が存在する。なかでも、本章で扱う標準写像における多重周期加速モードは、時間発展とともに運動量が比例増加するために、その周期島周辺では、そこにはたらく粘着性効果の影響で拡散係数の数値解析においてある制御パラメータ領域に異常発散をもたらす [10]。

そこで我々は、周期固定モードと加速モードに対して粘着効果が働くカオスの海と規則運動である周期島との境界領域の相空間構造の分析を行い、それと同時に両方のモードの構造が分岐によりどのような質的变化を示すかをそれぞれ比較分析をし、保存ハミルトン系カオスにおける周期島の最外殻の構造に対する固有の特徴を定める。

ハミルトン系の安定、不安定軌道の周期性は、非線形保測写像における対称線 [30][31] の解析手

法により、定めることができる。そのため、我々は上記の目的に従って2周期加速モードと4周期固定モードに対して、Involution分解の定義に基づいて構築した高次の対称線 [32][33] を用いて、安定軌道の相空間構造とその周辺の島の周期性を議論する。そしてまた、定められた2周期加速モードと4周期固定モードのそれぞれのカオスへの分岐行程とそこでの位相面における周期島の対称構造をカオス領域を含んでいる広域にわたり分析し、その特徴を見出す。

第2節では、標準写像における加速モードに対する対称線を説明し、2周期加速モードの相空間構造を高次対称線を用いて議論する。第3節では、2周期加速モードに倍周期分岐が起こった場合の島構造とその分岐島周辺の相空間構造の特徴を高次対称線により定める。第4節では、4周期固定モードの相空間構造を2節と同様に高次対称線を用いて議論する。第5節では、この4周期固定モードの分岐現象が、倍周期分岐ではなく無反射双曲型 (hyperbolic without reflection) であることを示し、前節のモードと異なる分岐形態での相空間構造と特徴を高次対称線を用いて議論し、比較検討する。最終節では、全ての解析結果のまとめと今後の課題を議論する。

## 3.2 2周期加速モードの対称性構造と分岐

### 3.2.1 標準写像における運動量反転の対称性

標準写像における対称線についての詳細は *chapter 4* において説明する。本説では、その内容を含めて簡単に運動量反転の対称線を記述する。

標準写像は

$$\begin{pmatrix} q_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} \equiv T \begin{pmatrix} q_n \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_n + p_n + f(q_n) \\ p_n + f(q_n) \end{pmatrix} \quad (3.2.1)$$

ここでの写像関数  $f(x)$  は、 $A \sin 2\pi x$  である。ここでは、運動量の反転性が許されるので Involution の積

$$T = J_1(n) \cdot J_0(m) \quad (3.2.2)$$

に分解することができる。ここでの整数  $m, n$  は、それぞれ標準写像における加速モードの運動量増加量 (ステップ数) を示す値で、通常の固定周期モードでは必要としない。また、写像  $T^1$  に対する逆写像  $T^{-1}$  は

$$T^{-1} = J_0(m) \cdot J_1(n) \quad (3.2.3)$$

で与えられる。± $j$  次の Involution  $J_{+j}(m)$  と  $J_{-j}(n)$  はそれぞれ

$$J_{+j}(m) = T^{j-1} J_1(m) \quad (3.2.4)$$

$$J_{-j}(n) = T^{-j} J_0(n) \quad (3.2.5)$$

で与えられる。対称線  $\gamma_j(m)$  と  $\gamma_k(n)$  の交点は、標準写像  $T$  による周期点を与え、その周期数は  $|j-k|$  の約数  $N$  によって定めることができる。

基本対称線は

$$\gamma_{-1}(m) : 2p = -f(q) + m \quad (3.2.6)$$

$$\gamma_0(m) : 2p = 2m \quad (3.2.7)$$

$$\gamma_{+1}(n) : 2p = -f(q-p) + n \quad (3.2.8)$$

と書ける。したがって高次の対称線は、

$$T^m \gamma_j = \gamma_{j+2m} \quad (3.2.9)$$

の関係式から導かれる。

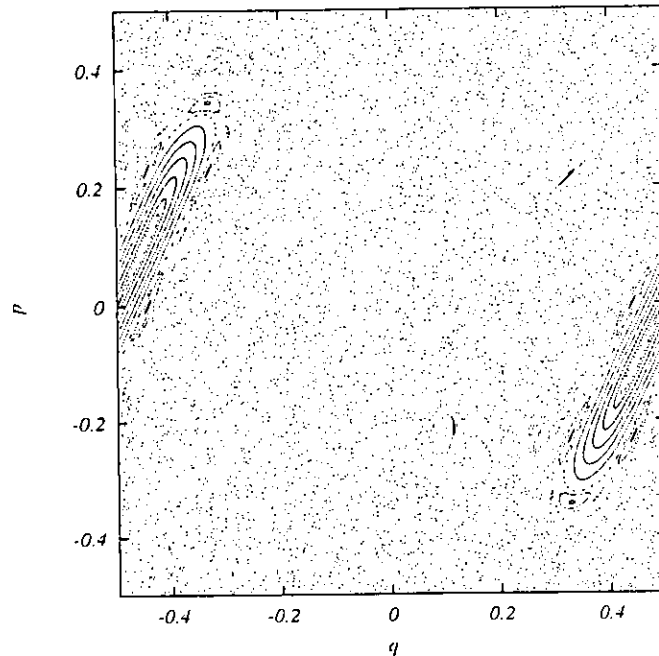


Figure 3.1: Phase portrait of the standard map at  $A = 0.65$ . Two streak shaped islands at the points of  $(q \approx 0.1, p \approx -0.2)$  and  $(q \approx 0.3, p \approx 0.2)$  represent the period-2 step-1 accelerator mode (P2S1 mode in short).

### 3.2.2 2周期ステップ1加速モードの対称性 ( $A = 0.6506$ )

標準写像において  $A = 0.6500$  の位相図を Fig.3.1に示す。そこでは、 $(q \approx 0.1, p \approx -0.2)$  と  $(q \approx 0.3, p \approx 0.2)$  付近において、2つの微小な加速モード島が確認できる。

Fig.3.2 (a) の位相図は、非線形パラメータ  $A$  を  $0.6506$  の場合の加速モードの構造である。そこでは、2周期加速モードの最外殻に12個の軌道、さらにその内側には7つの島が観測できる。Fig.3.2 (b) は、その島の周期性を定めるため、 $\pm 1$  から  $\pm 13$  次の対称線によって、それぞれの交点から満足する島の周期数を定めた。その結果、全ての対称線が中心安定点を通過していることから中心点は周期2ステップサイズ1の周期軌道であることが再確認できる。そして中心安定点よりやや外側の7つの軌道は、それぞれ対称線  $(\gamma_1(1), \gamma_{-13}(0))$ ,  $(\gamma_3(2), \gamma_{-11}(1))$ ,  $(\gamma_5(3), \gamma_{-9}(2))$ ,  $(\gamma_7(4), \gamma_{-7}(3))$ ,  $(\gamma_9(5), \gamma_{-5}(4))$ ,  $(\gamma_{11}(6), \gamma_{-3}(5))$  と  $(\gamma_{13}(7), \gamma_{-1}(6))$  の交点から14周期ステップ7の加速モードであることがいえる。また同様に最外殻の12個の島は、対称線  $(\gamma_{13}(7), \gamma_{-11}(1))$  の交点から24周期の加速モードであるのが分かる。

### 3.2.3 4周期ステップ2加速モードの対称性 ( $A = 0.6515$ )

Fig.3.3では、非線形パラメータ  $A$  を  $0.6515$  に変化させた位相図を示す。そこでは、倍周期分岐により中心の安定点が不安定化して2周期加速モード島が2つに分離しているのが観察できる。その分岐島の中心から離れたカオス的な領域の中には7つの軌道、分岐島を取り囲む連続的な軌道の最外殻には9つの軌道が見られる。さらに注意深く観察すれば、それより内側には11個、それより中心島にむかっては13個の軌道が存在しているのが観察できる。

Fig.3.4 (a) では  $A = 0.6515$  におけるそれぞれの対称線  $\gamma_1(1)$ ,  $\gamma_5(3)$ ,  $\gamma_9(5)$ ,  $\gamma_{13}(7)$ ,  $\gamma_{17}(9)$ ,  $\gamma_{-3}(5)$ ,  $\gamma_{-11}(1)$  と  $\gamma_{-15}(1)$  を示す。これらのそれぞれの対称線の交点より、倍周期分岐により不安定化した

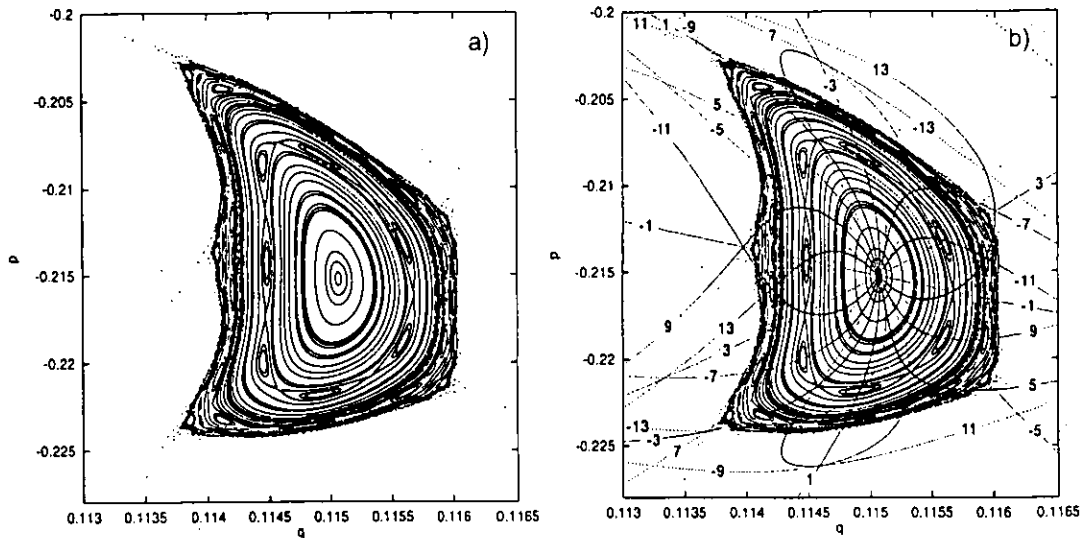


Figure 3.2: a): The island portrait of the P2S1 mode for the value of  $A = 0.6506$ . b): The symmetry lines of the  $\pm 1 - th$  to  $\pm 13 - th$  order for the value of  $A = 0.6506$ .

中心点は4周期軌道であることが確認でき、それと同時に倍周期分岐によって加速モードのステップ数は、分岐前の2倍に変化していることが分かる。一方、Fig.3.4 (b) は、Fig.3.4 (a) とは異なる対称線  $\gamma_3(2)$ ,  $\gamma_7(4)$ ,  $\gamma_{11}(6)$ ,  $\gamma_{15}(8)$ ,  $\gamma_{-1}(6)$ ,  $\gamma_{-5}(4)$ ,  $\gamma_{-9}(2)$ ,  $\gamma_{-13}(0)$  と  $\gamma_{-17}(2)$  を示しており、それらは倍周期分岐した島は通過していないのがわかる。

Fig.3.4の両方の対称線を合わせるとカオス領域に存在する7つの軌道は、それぞれ  $(\gamma_5(3), \gamma_{-9}(2))$ ,  $(\gamma_9(5), \gamma_{-5}(4))$ ,  $(\gamma_7(4), \gamma_{-7}(3))$ ,  $(\gamma_{-11}(1), \gamma_3(2))$ ,  $(\gamma_{-3}(5), \gamma_{-17}(2))$ ,  $(\gamma_{-1}(6), \gamma_{-15}(1))$ ,  $(\gamma_{-13}(0), \gamma_1(1))$  の交点から14周期ステップ7の加速モード、同様に最外殻の9つの島構造は、 $(\gamma_1(1), \gamma_{-17}(2))$ ,  $(\gamma_3(2), \gamma_{-15}(1))$ ,  $(\gamma_5(3), \gamma_{-13}(0))$ ,  $(\gamma_7(4), \gamma_{-11}(1))$ ,  $(\gamma_9(5), \gamma_{-9}(2))$ ,  $(\gamma_{11}(6), \gamma_{-7}(3))$ ,  $(\gamma_{13}(7), \gamma_{-5}(4))$ ,  $(\gamma_{15}(8), \gamma_{-3}(5))$  と  $(\gamma_{17}(9), \gamma_{-1}(6))$  の交点から18周期ステップ9の加速モード軌道と決定できる。さらにその内側の7つの軌道は  $(\gamma_1(1), \gamma_{-13}(0))$ ,  $(\gamma_3(2), \gamma_{-11}(1))$ ,  $(\gamma_5(3), \gamma_{-9}(2))$ ,  $(\gamma_7(4), \gamma_{-7}(3))$ ,  $(\gamma_9(5), \gamma_{-5}(4))$ ,  $(\gamma_{11}(6), \gamma_{-3}(5))$  と  $(\gamma_{13}(7), \gamma_{-1}(6))$  の交点であることから14周期ステップ7の軌道と決定できる。その他にも Fig.3.4は、最外殻の内側に見られる11個の軌道を対称線  $(\gamma_5(3), \gamma_{-17}(2))$ ,  $(\gamma_7(4), \gamma_{-15}(1))$ ,  $(\gamma_9(5), \gamma_{-13}(0))$ ,  $(\gamma_{11}(6), \gamma_{-11}(1))$ ,  $(\gamma_{13}(7), \gamma_{-9}(2))$ ,  $(\gamma_{15}(8), \gamma_{-7}(3))$  と  $(\gamma_{17}(9), \gamma_{-5}(4))$  の交点より22周期軌道、それよりさらに内側に存在する13個の軌道を  $(\gamma_9(5), \gamma_{-17}(2))$ ,  $(\gamma_{11}(6), \gamma_{-15}(1))$ ,  $(\gamma_{13}(7), \gamma_{-13}(0))$ ,  $(\gamma_{15}(8), \gamma_{-11}(1))$  と  $(\gamma_{17}(9), \gamma_{-9}(2))$  のそれぞれの交点が26周期の軌道と決定している。

これらの解析結果を注意深く分析すると、中心島が倍周期分岐を起こしている中心島の周期性は対称線の交点より4周期軌道であるのに対して、その分岐島を取り巻く周辺の周期性は中心島の分岐による周期変化に関係なく2周期軌道のままであることがわかる。

この節での高次対称線を分岐島周辺に対して用いた結果をまとめると中心島は倍周期分岐により2周期から4周期軌道に変化したため4周期性を満足させる対称線の交点として特徴づけられるが、Fig.3.4の分岐島を取り囲む周辺の7, 9, 11と13個のそれぞれの島構造は、中心部で倍周期分岐が起きたにもかかわらず、外側の境界の島構造は、はじめの2周期ステップ1加速モードに付随した軌道のままであることが分かる。



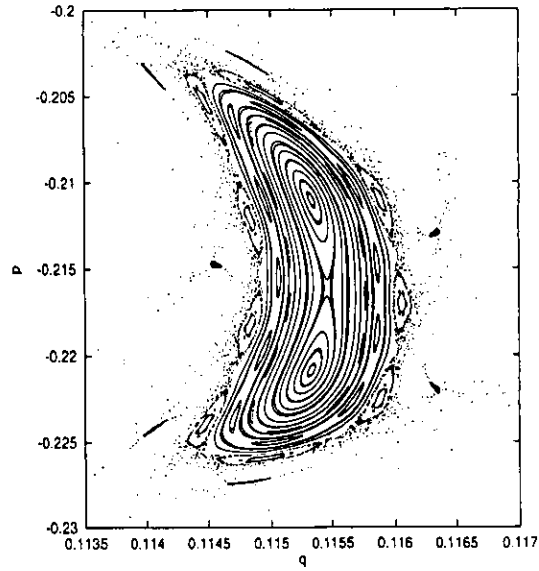


Figure 3.3: The island portrait of the P2S1 mode for the value of  $A = 0.6515$ . At the center, the P2S1 orbit becomes unstable, and is bifurcated into the period-4 step-2 orbit. The 9-cycles and the 11-cycles are easy to identify. These cycles belong to the original period-2 mode.

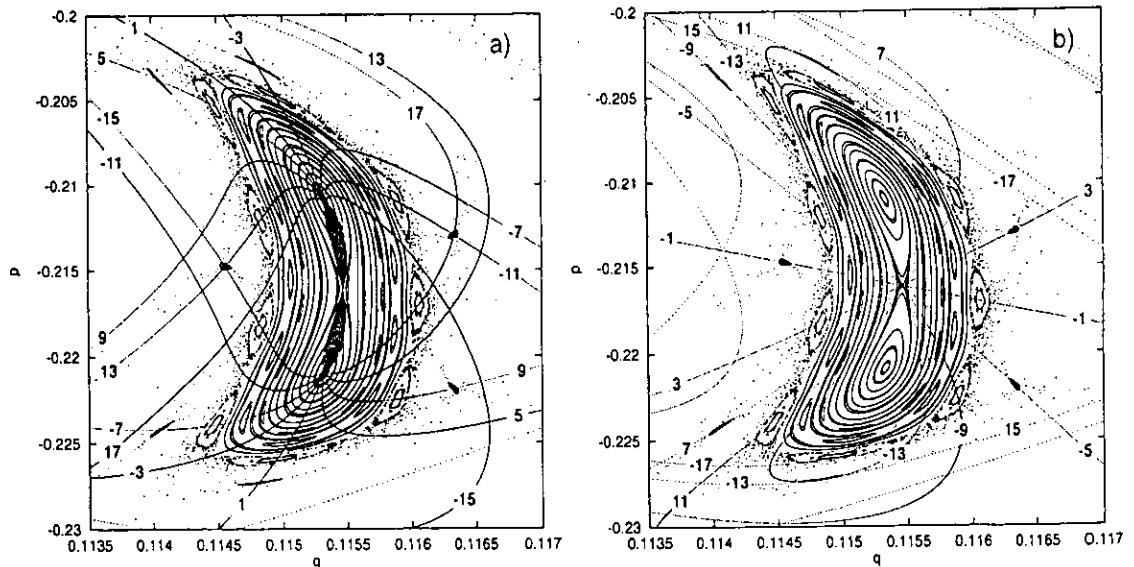


Figure 3.4: a): The group of the symmetry lines of  $\gamma_1(1)$ ,  $\gamma_5(3)$ ,  $\gamma_9(5)$ ,  $\gamma_{13}(7)$ ,  $\gamma_{17}(9)$ ,  $\gamma_{-3}(5)$ ,  $\gamma_{-7}(3)$ ,  $\gamma_{-11}(1)$ ,  $\gamma_{-15}(1)$  for the value of  $A = 0.6515$ . b): The group of the symmetry lines of  $\gamma_3(2)$ ,  $\gamma_7(4)$ ,  $\gamma_{11}(6)$ ,  $\gamma_{15}(8)$ ,  $\gamma_{-1}(6)$ ,  $\gamma_{-5}(4)$ ,  $\gamma_{-9}(2)$ ,  $\gamma_{-13}(0)$ ,  $\gamma_{-17}(2)$  for the value of  $A = 0.6515$ .

### 3.3 2周期加速モードの分岐島における対称構造

倍周期分岐が完全に終ると安定島周辺を幾つかの周期をもった島々を取り囲み、独立した2つの周期島があらわれる。Fig.3.5a)では、その分岐により  $A = 0.6520$  において生まれた4周期ステップ2の加速モード島を示す。そこではカオス領域との境界付近で7つの軌道、ついでその内側では6つの軌道が観測できる。これらの島は倍周期分岐によりそれぞれ28周期と24周期であることが予測される。

前節と同様に完全に分岐が終了した場合の Fig.3.5の安定島に対して14本の対称線を用いて周期性を分析する。前節では1~17次と-3~-15次の対称線を分岐島に適用したが、ここではそれをさらに高次に拡張して25~-27次の対称線をそれぞれ分岐した後の独立した安定島周辺の6つと最外殻の7つの軌道に適用し、それらの周期性を対称線の交点から同定する。

その結果を示したのが Fig.3.5 b) である。完全分岐後の島の最外殻7つの軌道は、 $(\gamma_1, \gamma_{-27})$ ,  $(\gamma_9, \gamma_{-19})$ ,  $(\gamma_{-11}, \gamma_{17})$ ,  $(\gamma_{-3}, \gamma_{25})$ ,  $(\gamma_5, \gamma_{-23})$ ,  $(\gamma_{13}, \gamma_{-15})$ ,  $(\gamma_{-7}, \gamma_{21})$  の交点より28周期、それより内側の6つの軌道は、 $(\gamma_{-3}, \gamma_{-27})$ ,  $(\gamma_5, \gamma_{19})$ ,  $(\gamma_{13}, \gamma_{-11})$ ,  $(\gamma_{21}, \gamma_{-3})$ ,  $(\gamma_5, \gamma_{-19})$ ,  $(\gamma_{13}, \gamma_{-11})$  の交点より24周期であることが分かる。

前節においては中心島だけが分岐した場合、分岐島以外の周辺の周期数は倍周期軌道ではなく、もとの周期軌道に属するモードであった。しかしながら Fig.3.5のように完全に倍周期分岐がおわり、島が独立に分離した状態の構造においては、その周辺島々の周期数も倍周期に変化しているのが高次の対称線解析結果において確認できる。

### 3.4 4周期固定モードの対称構造

ここでは標準写像における規則運動の4周期固定モード(周期軌道)をモデルにした解析を前節と同様に行い、相空間構造の特徴を見出す。

Fig.3.6の a), b), c) は、それぞれ  $A = 0.4900, 0.4950$  と  $0.500$  における位相面での4周期軌道の1部の軌道図である。Fig.3.6の a) は、 $(q, p) = (0.255, 0)$  に安定不動点をもつ4周期軌道で、そこでは最外殻に8つの島が観察できる。さらに非線形パラメータ  $A$  を  $0.4950$  に変化させると、Fig.3.6b) 図の様になり最外殻の島は5つに変化し、 $A = 0.500$ (Fig.3.6c)) になると、最外殻の島は7つになり、そこでは位相構造がこれまでの Fig.3.6 a), b) と比べて運動量方向に圧縮され変化しているのが観測できる。

これらの相空間構造の変化を特徴づけるのに対称線解析は非常に有効である。Fig.3.7では、これまでと同様に運動量方向の反転に対する対称線を Fig.3.6a) の位相構造に対して用いた結果を示す。Fig.3.6a) の最外殻の8つの軌道は、単純には32周期性と予測される。しかしながら Fig.3.7より最外殻島の8つの島は32周期性を示す対称線の交点では示されず、それらは  $(\gamma_{-8}, \gamma_8)$  と  $(\gamma_0, \gamma_{\pm 16})$  の交点、もう一つは、 $(\gamma_4, \gamma_{12})$  と  $(\gamma_{-4}, \gamma_{-12})$  の交点といった様に異なった2つの組の対称線の交点により8つの島構造が16周期であると決定される。このことから最外殻の8つの軌道は、単純に32周期ではなく4つの軌道16周期がペアになって構成された形態であることが分かる。この解析結果より位相図の形態から直接的に周期性は判断できないことがいえる。(この事実は最外殻8つの軌道内を初期値にとり、それに対する時間発展を求めることによっても32周期ではなく16周期であることが確認された。)

次に位相図 Fig.3.6b) の  $A = 0.4950$  について対称線による同様の解析を行った結果を示す。ここでの最外殻の5つの軌道は、それに対する対称線を描いた Fig.3.8より、交点  $(\gamma_8, \gamma_{-12})$ ,  $(\gamma_{16}, \gamma_4)$ ,  $(\gamma_4, \gamma_{16})$ ,  $(\gamma_{12}, \gamma_{-8})$ ,  $(\gamma_{\pm 20}, \gamma_0)$  で示されることから20周期軌道と分かる。さらに、それより内側の6つの軌道は  $(\gamma_4, \gamma_{-20})$ ,  $(\gamma_8, \gamma_{-16})$ ,  $(\gamma_{12}, \gamma_{-12})$ ,  $(\gamma_{16}, \gamma_{-8})$ ,  $(\gamma_{20}, \gamma_{-4})$  の10本の対称線のそれぞれの交点より、24周期であることが示される。

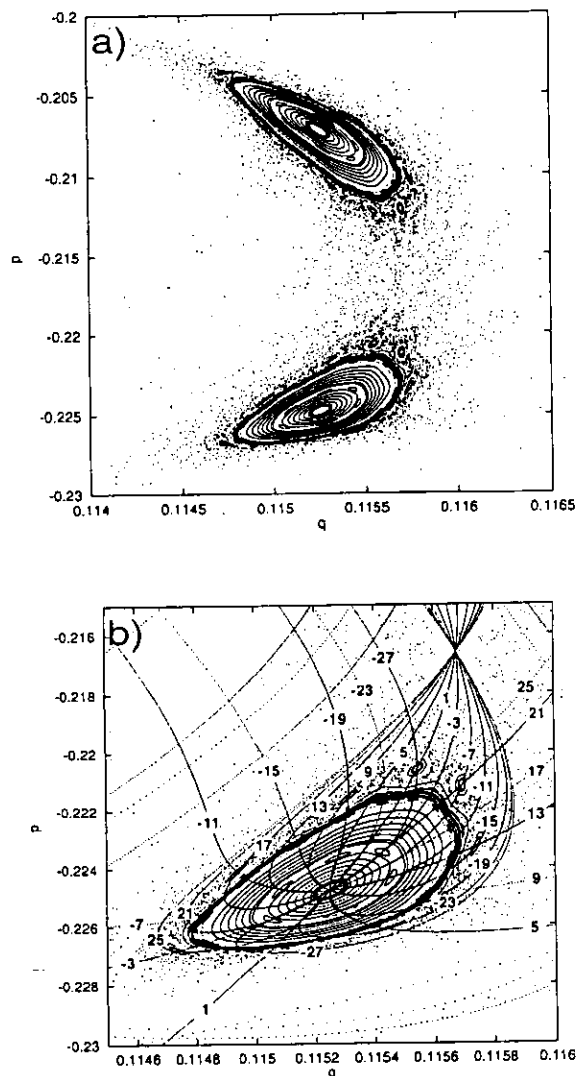


Figure 3.5: a): The island portrait of the bifurcated islands at the value of  $A = 0.6520$ . In the edge region, the 7-cycles could be identified. In the central region, the 6-cycles are visible. b): The symmetry lines of the  $-27th$  order up to the  $+25th$  order for the value of  $A = 0.6520$ .

最後に位相図  $A = 0.500$  の場合の Fig.3.6c) に対して対称線をそれぞれ  $\gamma_{\pm 4}$ ,  $\gamma_{\pm 4}$ ,  $\gamma_{\pm 8}$ ,  $\gamma_{\pm 12}$ ,  $\gamma_{\pm 16}$ ,  $\gamma_{\pm 20}$ ,  $\gamma_{\pm 24}$  と  $\gamma_{\pm 28}$  を用いた結果を Fig.3.9に示す。ここでの最外殻の7つの島構造は、 $(\gamma_8, \gamma_{-20})$ ,  $(\gamma_{16}, \gamma_{-12})$ ,  $(\gamma_{-4}, \gamma_{24})$ ,  $(\gamma_4, \gamma_{-24})$ ,  $(\gamma_{12}, \gamma_{-16})$ ,  $(\gamma_{-8}, \gamma_{20})$  と  $(\gamma_0, \gamma_{\pm 28})$  の交点より定められることから28周期であるとわかる。それと同時に、それより内側の9つの島は、 $(\gamma_8, \gamma_{-28})$ ,  $(\gamma_{16}, \gamma_{-20})$ ,  $(\gamma_{24}, \gamma_{-12})$ ,  $(\gamma_{12}, \gamma_{-24})$ ,  $(\gamma_{20}, \gamma_{-16})$ ,  $(\gamma_{28}, \gamma_{-8})$  の交点から36周期であるのが確認できる。さらにその7個の島と9個の島の間にある8つの微小な島々は、対称線  $(\gamma_4, \gamma_{-28})$ ,  $(\gamma_8, \gamma_{-24})$ ,  $(\gamma_{12}, \gamma_{-20})$ ,  $(\gamma_{16}, \gamma_{-16})$ ,  $(\gamma_{20}, \gamma_{-12})$ ,  $(\gamma_{24}, \gamma_{-8})$  と  $(\gamma_{28}, \gamma_{-4})$  の交点であることから32周期性であることが分かる。これまでこの節では、Fig.3.7 ~ Fig.3.9 の様に高次対称線を用いた結果により中心島とその周辺島の周期性を定めてきた。そしてそれら高次の対称線の様相は  $A = 0.4900$  と  $A = 0.4950$  の島構造に対しては、1つの安定点  $p = 0, q = 0.25$  を焦点にして、それを取り囲むようにして拡張している形態が見られた。しかしながら Fig.3.9の  $A = 0.500$  では、 $p$  軸上の焦点が2つになって、上記の様相とは少し違う。これは、これまでの1つの安定点が不安定化し、分岐により相空間構造の変化が

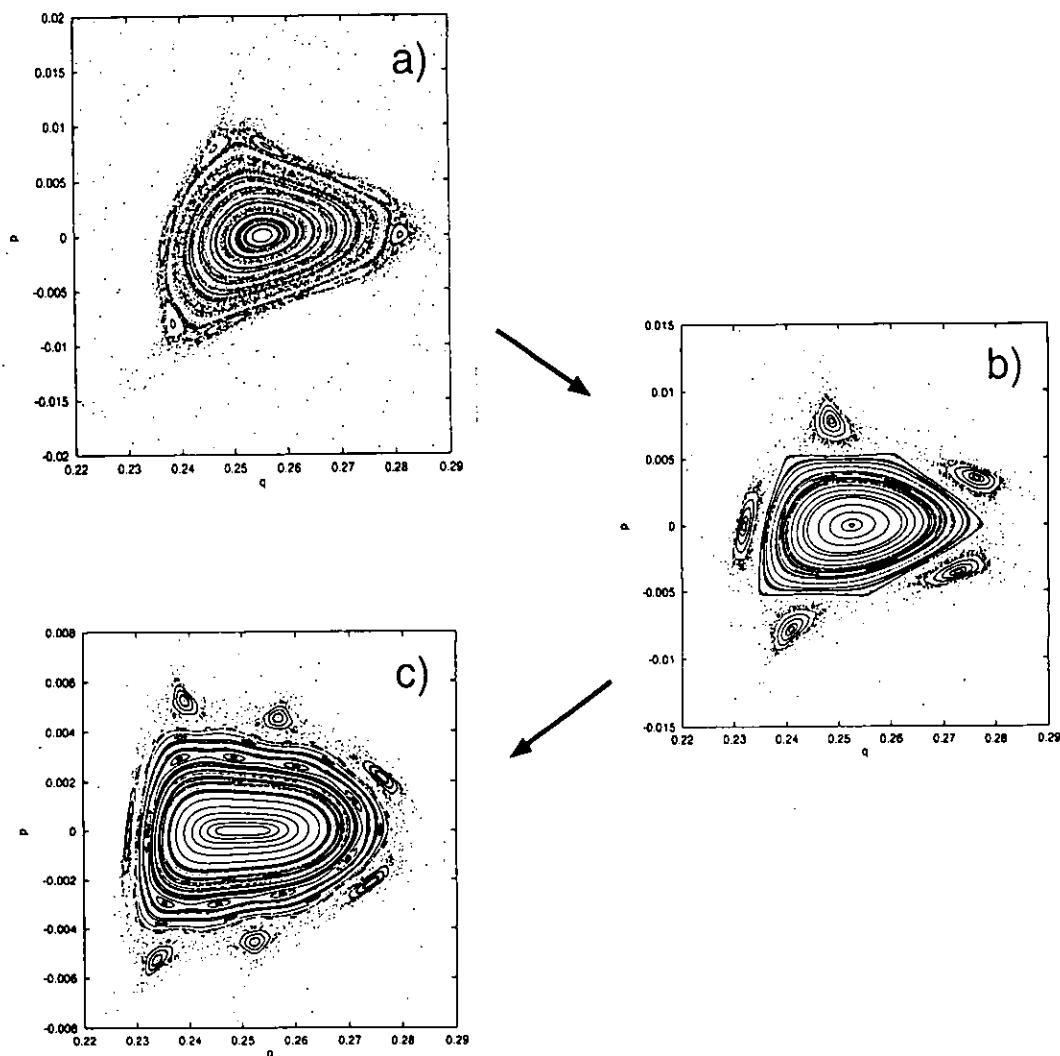


Figure 3.6: Phase portrait of the period-4 orbits a) for the value of  $A = 0.4900$ , b) for the value of  $A = 0.4950$  and c) for the value of  $A = 0.5000$ . The ordinate scale of c) is enlarged by the factor two.

起きようとしていることを示唆している。このように、対称線の焦点を分析することで、位相図の観察からだけでは判別ができない分岐がおこる臨界値やその位相構造を観察することが可能である。この対称線の交点から導かれた分岐臨界値 ( $A = 0.500$ ) からの相空間構造の変化の解析は、次の節にて議論する。

### 3.5 4周期固定モードにおける無反射双曲型分岐の対称性

前節の非線形パラメータ  $A = 0.500$  (Fig.3.9) では、4周期安定点が不安定化し分岐が起きようとしている臨界状態にあることが考えられる。しかしそこでは、4周期性を示す対称線+4次と  $p$  軸上0次の交点により、中心の不安定周期点と分岐により新たに生まれた両側の2つの島の周期点が見られていることから分岐による周期変化はまだ見られていないのが分かる。

位相図 Fig.3.10 (a),(b) は、パラメータ  $A$  を 0.5020 に変化させ、それぞれ初期値を左の島中心付近と右の島中心付近においた結果である。それよりこの分岐種は互いに分岐島の粒子輸送がおこら

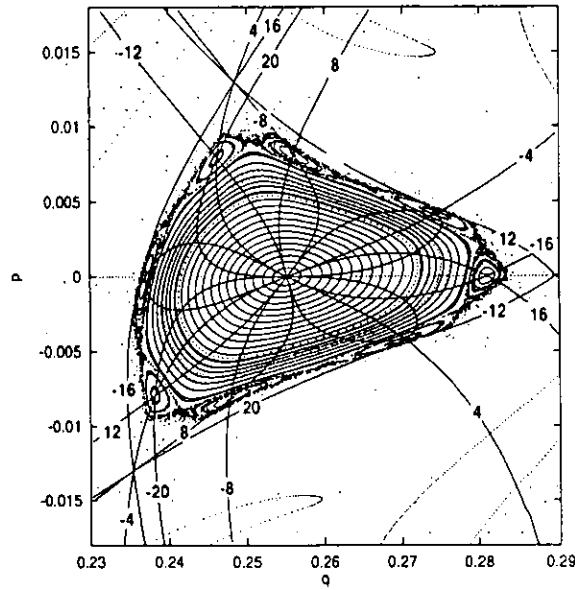


Figure 3.7: The set of symmetry lines of the order of  $\pm 4, \pm 8, \pm 12, \pm 16$  and  $\pm 20$ , for the value of  $A = 0.4900$ . The intersections of the symmetry lines define two sets of the stable period-16 orbits.

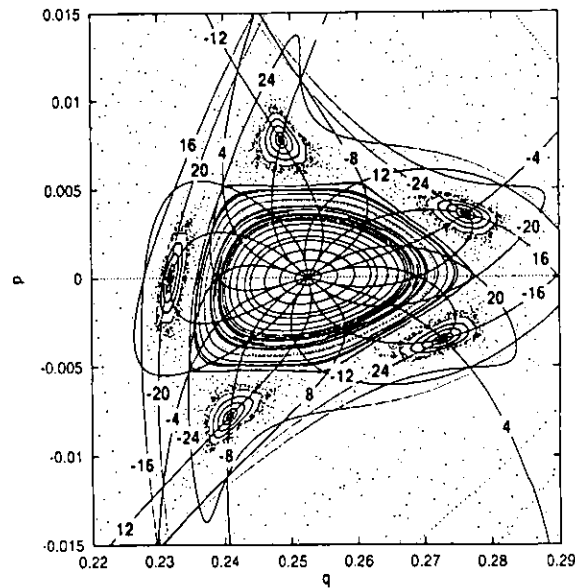


Figure 3.8: The set of symmetry lines of the order of  $\pm 4, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \pm 20$  and  $\pm 24$  for the value of  $A = 0.4950$ . The intersections of the symmetry lines define the stable period-20 orbits as well as the unstable period -20 orbits. At the same time, twelve intersections of the period-24 orbits (appear to be the cycle-6 structure) are visible. Between these orbits, there are four intersections of the pairs of  $(\gamma_{24}, \gamma_{20})$  and  $(\gamma_{20}, \gamma_{24})$  suggesting existence of 11-cycles islands.

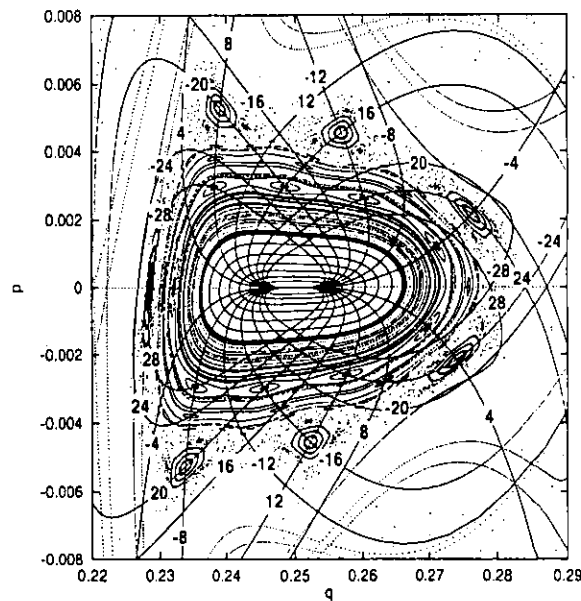


Figure 3.9: The set of symmetry lines of the order of  $\pm 4, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \pm 20, \pm 24$  and  $\pm 28$ , for the value of  $A = 0.5000$ . The outermost 7-cycles define the period-28 orbits, while the 9-cycles are visible inside of the boundary domain.

ない無反射双曲型の分岐であることが判明し、分岐後の周期変化は起きないことが分かる。したがって上記にも説明した Fig.3.9において4周期性を示す対称線が  $p$  軸上の3つの周期点を示すことができた要因は、このことからわかる。

Fig.3.10の無反射双曲型の分岐による相空間の対称構造を明確にするため、Fig.3.11においては、 $A = 0.5020$ での $\pm 4$ 次、 $\pm 8$ 次、 $\pm 12$ 次、 $\pm 16$ 次、 $\pm 20$ 次、 $\pm 24$ 次と $\pm 28$ 次の対称線を示し、そして、Fig.3.12においては、Fig.3.10とFig.3.11の両方を合わせたものを示す。Fig.3.12では、最外殻に9つの島が観察でき、それらはそれぞれ対称線 $(\gamma_8, \gamma_{-28}), (\gamma_{12}, \gamma_{-24}), (\gamma_{16}, \gamma_{-20}), (\gamma_{20}, \gamma_{-16}), (\gamma_{24}, \gamma_{-12})$ と $(\gamma_{28}, \gamma_{-8})$ の交点を満足していることから36周期軌道であるのが分かる。さらにその内側の11個の島は、対称線 $(\gamma_{-20}, \gamma_{24})$ と $(\gamma_{24}, \gamma_{-20})$ の交点から44周期であることが分かる。

次に Fig.3.13, Fig.3.14では、完全に分岐が終った  $A = 0.5050$ における位相図とそれに対する対称線を描いたものを示す。Fig.3.13では、分岐により分離独立した島が見られ、その最外殻には5つの島が見られる。それらは Fig.3.14の5本の対称線 $\gamma_4, \gamma_8, \gamma_{-12}, \gamma_{\pm 16}, \gamma_{20}$ の $(\gamma_0, \gamma_{20}), (\gamma_4, \gamma_{-16})$ と $(\gamma_8, \gamma_{-12})$ のそれぞれの交点より20周期であることが分かる。この結果、無反射双曲型の分岐により分離独立した島の周期性は、分岐前のもとの周期性と変わらないことが確認される。これらの結果より、中心付近で無反射双曲型の分岐が生じた場合、その周辺の島々は分岐による周期性変化は分岐後も起こらないことが対称線による解析で立証された。

### 3.6 結論

2周期加速モードの解析は、非線形パラメータ  $A = 0.6515$ において倍周期分岐が生じ、中心安定点は不安定化する。しかしその値においては、分岐によりあらたに生まれた島の周期性は倍化するにもかかわらず、その周辺の周期性は変化していないことが Fig.3.4 から分かった。パラメータを  $A = 0.6520$ にまで変化させると、Fig.3.5に見られるように島々が完全に独立した形態になった。この場合における対称線は、不安定中心点周辺の周期軌道が4周期性の対称線の交点ですべてあら

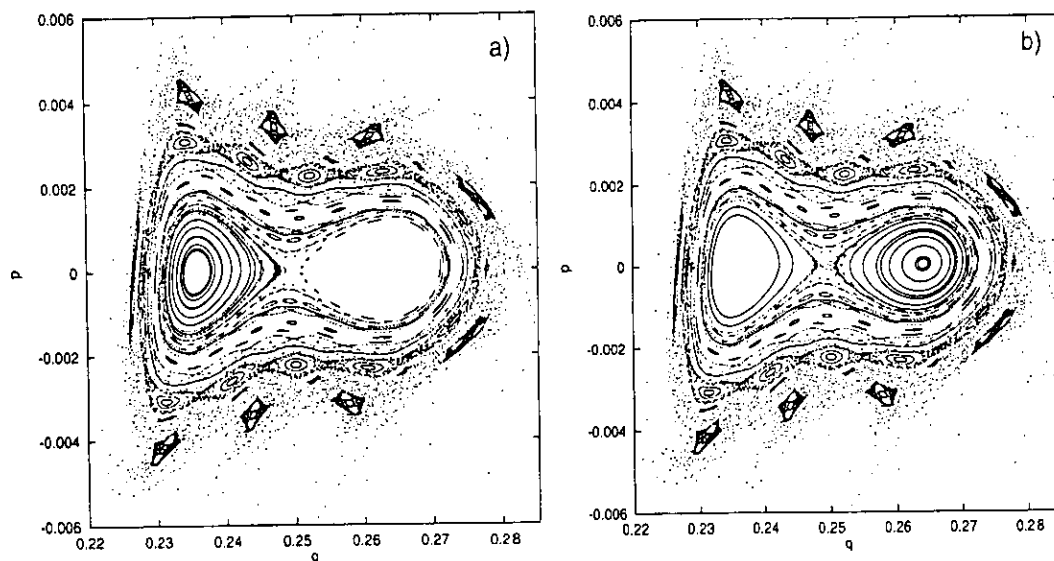


Figure 3.10: The phase portrait of the island with initial condition in the left side a) and right side b) region for the same value of  $A = 0.5020$ , respectively.

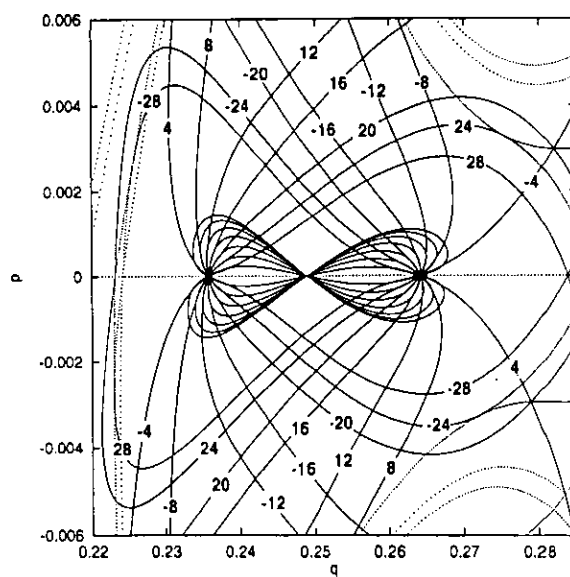


Figure 3.11: The set of symmetry lines of the order of  $\pm 4, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \pm 20, \pm 24$  and  $\pm 28$ , for the value of  $A = 0.5020$ .

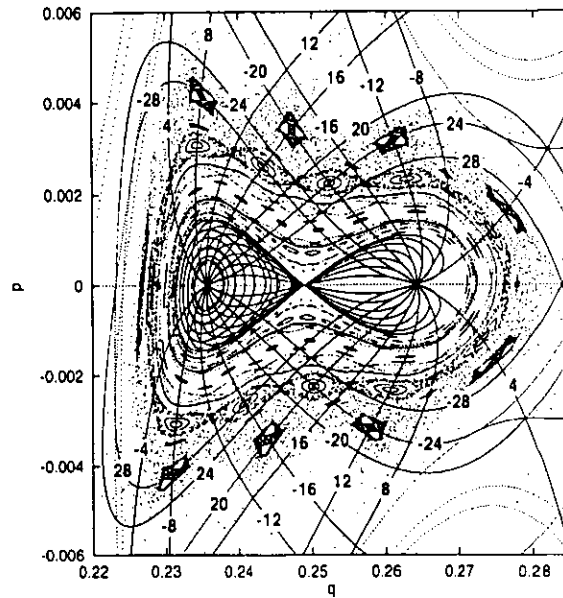


Figure 3.12: Superposition of the phase portrait of Figure 3.10 with the set of symmetry lines shown in Figure 3.11.

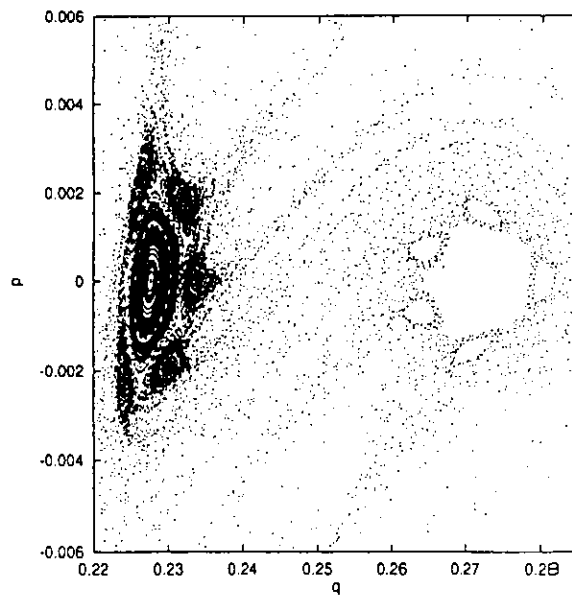


Figure 3.13: For the higher value of  $A = 0.5050$ , the hyperbolic bifurcation without reflection is completed. The separated island at the left side accompanies the 5-cycle islands.



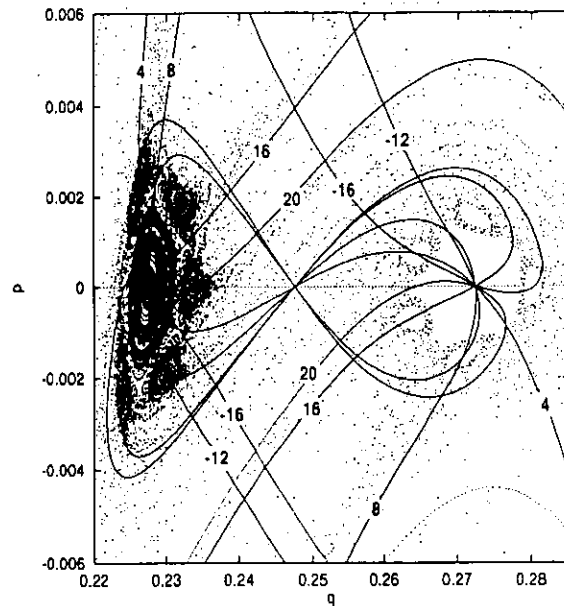


Figure 3.14: The set of symmetry lines of the order of  $+4, +8, \pm 16, -12$  and  $20$  are superposed on the phase portrait of Figure 3.13, thus confirming the principal island has retained the original periodicity of  $4$ , with period- $20$  satellite islands.

わせたことから、これは4周期加速モードに変化していることがいえる。

このような結果から安定点が不安定化し倍周期分岐が始まるいわば分岐過程の初期の段階では、分岐島を覆う周りの周期軌道は、分岐による周期倍化の影響を受けていないことがいえる。したがって倍周期分岐が起こり、その分岐を覆う周期軌道が完全にもとの倍の周期性で現れる決定的な制御パラメータ値での位相形態は、分岐過程上どのような意味を持つのかは、今後議論すべき点だといえる。

4周期固定モードに対する解析では、Fig.3.7において最外殻の8つの軌道が単純に32周期ではなく、4つの軌道16周期がペアになって構成されているといった興味深い位相構造の形態が高次対称線解析により見出せた。さらにこの4周期固定モードでは、セパトリックスをはさんで粒子の輸送が行われない無反射双曲型の分岐が生じていることが分かった。そこでその分岐構造に対して高次の対称線を用いた結果、この分岐種には分岐による倍周期変化はおきていないことを確認することができた。

最後に、高次の対称線により標準写像における2周期加速モードと4周期固定モードのカオスと周期軌道との境界の軌道や島の内部軌道の周期性を定めたり、分岐現象によるその相空間構造の周期性の変化を決定したことより、相空間構造の形態の特徴や現象を見出すことができたといえる。また、高次の対称線は、カオスが支配的な領域での不明確な周期軌道を見出すことができる有効な手法であるといえる。

## Chapter 4

# 標準写像における周期軌道の無反射双曲型分岐の対称性

For the area preserving maps, the linearized tangent map determine stability of the fixed point. When the trace of the tangent map is less than  $-2$ , the fixed point is inversion hyperbolic, thus the subsequent points of mapping alternate across the fixed point. That is to say, the fixed point undergoes period doubling bifurcation. While for the trace of the tangent map is larger than  $+2$ , the fixed point undergoes the hyperbolic bifurcation without reflection. Here, the processes of the hyperbolic bifurcation without reflection in the standard map have been examined in terms of the higher order symmetry in the momentum inversion. It is shown that the higher order symmetry lines approach asymptotically to the separatrix of the hyperbolic fixed point, and the existing symmetry lines can not determine the structure of the periodic islands.

### 4.1 序論

標準写像では非線形パラメータ  $A$  の増加にともない位相面における周期軌道が分岐を繰り返し、やがてカオス領域が支配的な系へと遷移するが、その場合の位相平面に数多く存在する周期軌道の特性は、位置座標反転と運動量反転の二つの Involution における不動点集合である対称線を用いた解析によって説明することができる。

これまで我々は、3周期加速モードについて相空間構造や対称性の解析を行ってきた [26]。通常の加速モードでは安定性を決定する剰余値 (Residue) [13] が非線形パラメータ  $A$  の増加にともない剰余値が単調増加するが、このモードは、ある値を上限にして放物線状に減少しながら安定化していく傾向が見られる [26]。そのため分岐が起こる  $R \approx 1$  越す付近と、 $R \approx 0$  を下回る付近とでは、島の相空間構造は倍周期分岐の構造を持つものの性質が異なっている。通常  $R = 1$  を越す付近では、反射をともなう双曲型分岐すなわち倍周期分岐が起こり3周期加速モードは6周期の加速モードに変化する。一方、 $R = 0$  を下回る付近では反射を伴わない双曲型分岐すなわち同周期分岐が起こり、周期は倍化をおこさない。したがって反射を伴わない双曲型分岐の場合、3周期の加速モードは分岐前の加速モードとは違った3周期加速モードのペアを2つつくる。

本節ではこのように分岐の相空間構造は同じであるが性質が違うそれぞれの分岐型に対し、それらの違いを対称線解析により特徴づけることを行う。これまでは低次の対称線解析結果において、反射を伴う双曲型分岐現象には、新たに生まれた島の周期性を満足する対称線の交点が存在するのに

対して、反射を伴わない分岐型では、そのような交点が存在しないという特徴的な結果を得ている [26] (Chapter 2)。

過去の我々の解析 Chapter 3 において、この無反射双曲型分岐は非線形パラメータ  $A = 0.5000$  における 4 周期固定モードにおいても観測されている。そしてこの分岐による分岐島の周期点あるいはそれを取り囲む周辺の安定島の周期性は、分岐がおこった後も周期が倍化せずに分岐前の周期であることが高次の対称線を用いた解析により確認されている。

それらをもとに本研究では、対称線を高次に拡張し無反射双曲型の分岐をおこす 3 周期加速モードと本解析で新たに見出した  $A = 0.6700$  付近に存在する周期軌道 (4 周期) に対する解析を行い、これら双方の共通した普遍的な性質を比較検討して、その分岐形態の特徴を見出す。そして、この 2 つのモードの無反射双曲型分岐に対する十分な解析から、これまで低次の対称線で得られていたセパラトリックス内の軌道、すなわち分岐後の島構造内部には対称線の交点が存在しない [26] ことを示唆した結果を決定的に立証する。

次節では、(Chapter 2) でも議論した運動量反転の対称性を加速モードの任意ステップ数に応じて記述する。第 3 節では、4 周期島に対してそれを用いて解析する。第 4 節では、同様に 3 周期加速モードに対して対称性を議論する。最終節では、結果をまとめ、今後の課題を議論する。

## 4.2 標準写像における運動量反転の対称性

標準写像は

$$\begin{pmatrix} q_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} q_n \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_n + p_n + f(q_n) \\ p_n + f(q_n) \end{pmatrix} \quad (4.2.1)$$

( $f(x) = A \sin 2\pi x$ ) で与えられる。この写像  $T$  は、Involution の積

$$T = J_1(n) \cdot J_0(m) \quad (4.2.2)$$

に分解することができる。標準写像は、運動量空間の反転が許されるので、Involution  $J_1(n)$  と  $J_0(m)$  は

$$J_0(m) : \begin{cases} p' = -p + 2m \\ q' = q - p + m \end{cases} \quad (4.2.3)$$

$$J_1(n) : \begin{cases} p' = -p + f(q - p) + n \\ q' = q - 2p + f(q - p) + n \end{cases} \quad (4.2.4)$$

と書くことができる。整数  $m, n$  は標準写像の多重周期加速モードの運動量増加量 (ステップ数) を定める任意整数であり、周期固定軌道の場合には考慮しない。

$J_0(m)$  と  $J_1(n)$  のそれぞれの積は、

$$J_0(m) \cdot J_0(m) = 1 \quad (4.2.5)$$

$$J_1(n) \cdot J_1(n) = 1 \quad (4.2.6)$$

と定義される。したがって (4.2.2) 式より逆写像  $T^{-1}$  は

$$T^{-1} = J_0(m) \cdot J_1(n) \quad (4.2.7)$$

と書ける。これより  $\pm j$  次の involution  $J_0(m)$  と  $J_1(n)$  は、それぞれ

$$J_{+j}(m) = T^{j-1} J_1(m) \quad (4.2.8)$$

$$J_{-j}(n) = T^{-j} J_0(n) \quad (4.2.9)$$

と書ける。Involution  $J_j(m)$  の不動点は  $j$  次の対称線  $\gamma_j(m)$  で

$$\gamma_j(m) : \{ \mathbf{R} \mid J_j(m) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \} \quad (4.2.10)$$

と定義することができる。ここでの  $\mathbf{R}$  は要素  $p, q$  の2次元ベクトルを意味する。対称線  $\gamma_j(m)$  と  $\gamma_k(n)$  の交点は、標準写像  $T$  における周期軌道の周期を与え、周期数は  $|j - k|$  の約数  $N$  によって定められる。

低次の Involution によって基本的な対称線は

$$\gamma_{-2}(m) : \quad 2p = -2f(q) + 2m \quad (4.2.11)$$

$$\gamma_{-1}(m) : \quad 2p = -f(q) + m \quad (4.2.12)$$

$$\gamma_0(2m) : \quad 2p = 2m \quad (4.2.13)$$

$$\gamma_{+1}(n) : \quad 2p = f(q - p) + n \quad (4.2.14)$$

$$\gamma_{+2}(2n) : \quad 2p = 2f(q - p) + 2n \quad (4.2.15)$$

と書ける。これを基に高次の対称線は

$$T^n \gamma_j = \gamma_{j+2n} \quad (4.2.16)$$

の関係式を用いて、基本対称線  $\gamma_0, \gamma_{-1}$  を写像することで構築できる。

### 4.3 4 周期固定モードにおける無反射双曲型分岐現象

前章では、標準写像において非線形パラメータ  $A = 0.500$  における4周期島の無反射双曲型の分岐の構造や性質などを中心島とそれを取りまく周辺島に対して、運動量反転の高次にわたる対称線解析により議論した。その結果、無反射双曲型分岐は、分岐による中心島やそれを覆う島の周期数変化が起こらないといった特徴を高次の対称線を適用することで確認できた。

本節では、新たに非線形パラメータ  $= 0.6700$  付近で無反射双曲型分岐を起こす4周期軌道に対して、高次対称線を用いてその分岐構造の特徴を詳細に議論する。

Fig.4.1 は、 $q = -0.13, p = 0.0$  に存在する4周期固定モードの1部の位相図と運動量反転の  $\pm 4, \pm 8, \pm 20, \pm 24, \pm 40$  次の高次対称線を同時に示したものである。そこでは、それらの全てが中心を通過していることから4周期固定モードであることが再確認される。この4周期軌道は  $A = 0.6728$  付近において安定点が不安定化し、中心の島は無反射双曲型の分岐を起こす。そして  $A = 0.6735$  まで変化させるとその分岐現象が Fig.4.2 (a) の様に観測される。そこでは、分岐島を取りまく周辺の11、12、13と20個の島の周期性が、それぞれ  $\pm 4$  次、 $\pm 8$  次、 $\pm 20$  次、 $\pm 24$  次と  $\pm 40$  次の運動量反転の高次の対称線の交点により示されている。しかしこの Fig.4.2 (b) では、外側の境界領域における周期軌道は、それら高次の対称線の交点で決定されていることに対して、分岐した内側の島の周期性は同周期分岐であるのにもかかわらず対称線の交点によって周期点が示されていないことがわかる。

次に  $A$  を  $0.6740$  にまで増加させると、Fig.4.3 (a) の様になる。そこでは無反射双曲型の分岐が完全に終わって島が分離独立し、分岐後の各々の島の外側の境界領域に7つの島、続いて最外殻より内側の領域には6つの島が観察できる。Fig.4.3 (b) では、Fig.4.3 (a) に対しての高次対称線  $\pm 36$  次と  $\pm 40$  次を示しており、その対称線の交点から同周期分岐後の安定島周辺領域の周期性変化が起こっていないことが分かる。しかしながら、この場合も、分岐島内部の周期性は現せておらず、すべての高次対称線は分岐島外側の周期性だけを決定している。

これらの結果より無反射双曲型分岐過程に対して高次対称線の様相は外側からセパトリックスに漸近しており、分岐島内部に称線線が存在していないことが分かる。

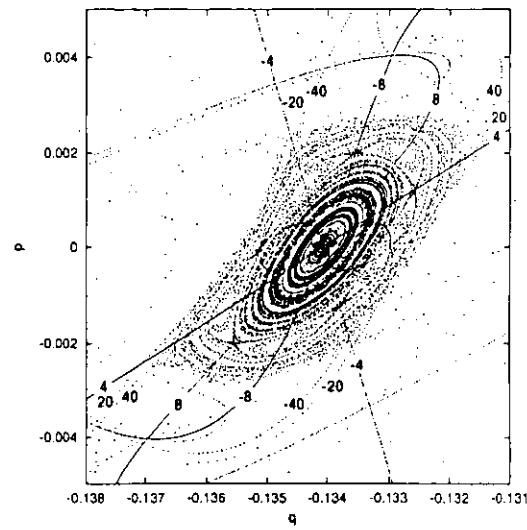


Figure 4.1: The island portrait of period-4 mode for the value of  $A = 0.6700$ , with the momentum inversion symmetry lines of the order  $\pm 4, \pm 8, \pm 20, \pm 24$ , and  $\pm 40$ .

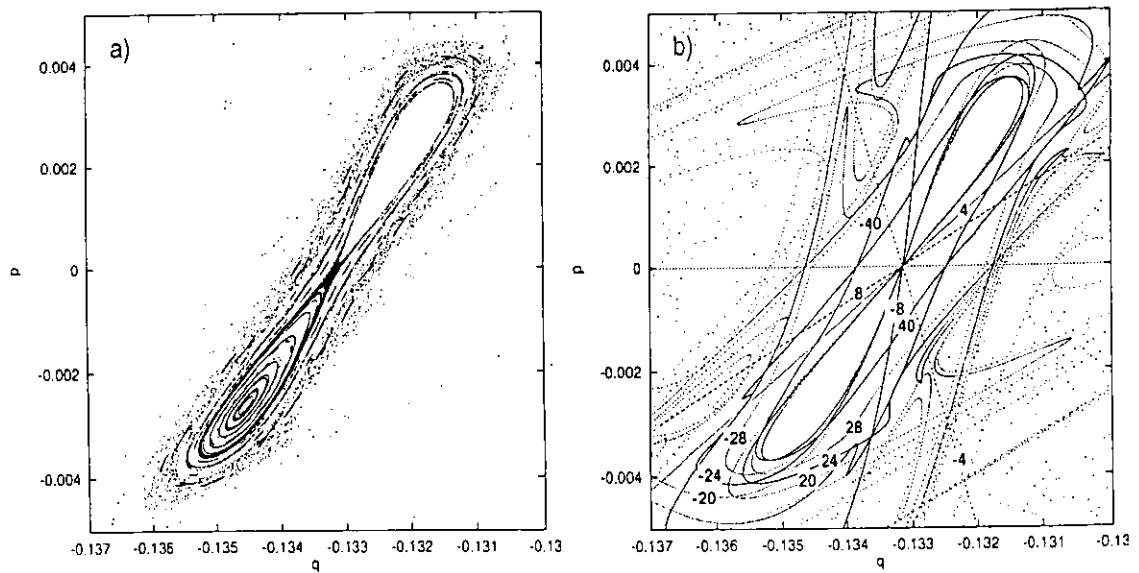


Figure 4.2: a): Period-doubling bifurcation observed for the value of  $A = 0.6735$ . b): The set of symmetry lines of the order of  $\pm 4, \pm 8, \pm 20, \pm 24$  and  $\pm 40$  for the value of  $A = 0.6735$ .

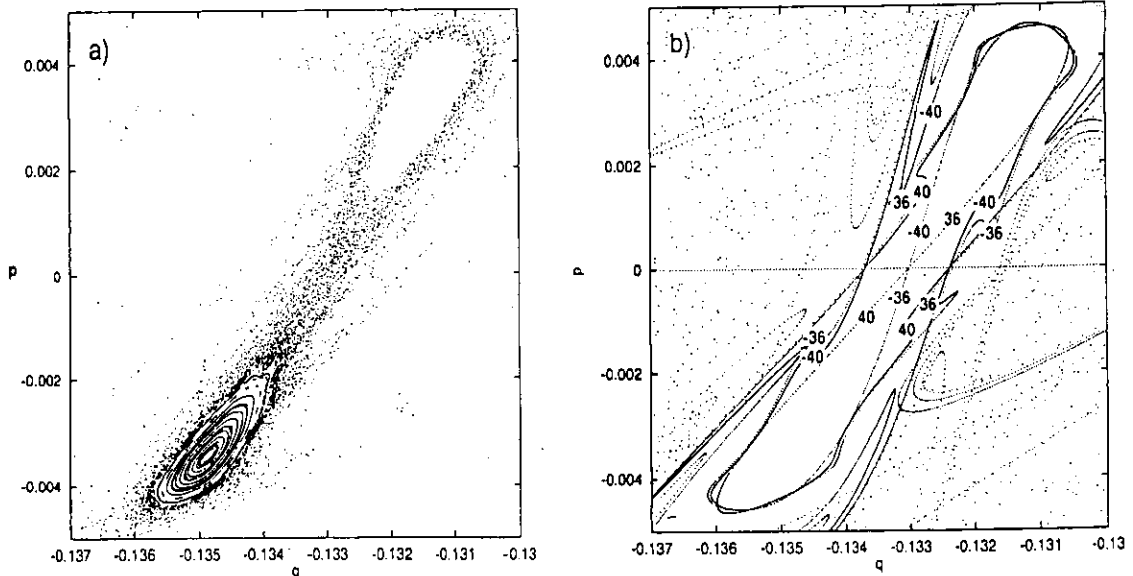


Figure 4.3: a): The phase portrait of the P4 island for the value of  $A = 0.6740$ . b): The set of symmetry lines of the order of  $\pm 36th$  and  $\pm 40th$  for the value of  $A = 0.6740$ .

#### 4.4 3周期加速モードにおける無反射双曲型分岐現象

この節は、前節とは違った標準写像における3周期加速モードで見られる無反射双曲型分岐現象に対して議論する。

我々は、過去に  $A = 0.7674$  付近に存在する3周期ステップ1の加速モードが無反射双曲型の分岐をおこすのを観測している [26]。そこで Fig.4.4 に、その  $A = 0.7674$  における3周期ステップ1の位相軌道とそれに対する運動量反転の高次の対称線  $\gamma_{-19}(3)$ ,  $\gamma_{-13}(3)$ ,  $\gamma_{-7}(3)$ ,  $\gamma_{-1}(6)$ ,  $\gamma_2(0)$ ,  $\gamma_8(3)$ ,  $\gamma_{14}(6)$  と  $\gamma_{20}(9)$  を同時に示す。そこでは加速モード島の最外殻に9つの軌道が見られ、それらが対称線  $(\gamma_{-19}, \gamma_8)$ ,  $(\gamma_{-13}, \gamma_{14})$  と  $(\gamma_{-7}, \gamma_{20})$  のそれぞれの交点を満足していることから、27周期ステップ9の加速モードであるのが分かる。同様に、それより内側の11個の軌道は、対称線  $(\gamma_{-19}, \gamma_{14})$  と  $(\gamma_{-13}, \gamma_{20})$  の交点を満足していることから、33周期ステップ11の加速モードであるのが確認される。

非線形パラメータ  $A$  を  $0.7677$  まで変化させると、中心島が無反射双曲型の分岐を起こすのが Fig.4.5 において観測できる。そしてまた Fig.4.5 では、その位相図とそれに対する高次の運動量反転の-19次、-13次、-7次、-1次、2次、8次、14次、20次の対称線を同時に示す。この場合も Fig.4.4 と同様に境界付近の9周期と11周期の周期数が、それを定めた分岐前と同様の対称線の交点で定められていることから分岐による周期変化が起こっていないことがここにおいても分かる。

さらに非線形パラメータ  $A$  を  $0.7690$  まで変化させると、位相図が Fig.4.6 (a) の様になり、そこでは分岐現象が周辺島にまでおよんで拡大し、それと同時に、その分岐島周辺は多くの周期島に取り囲まれているのが観察できる。この位相図 Fig.4.6 (a) に対して高次の対称線  $\gamma_{-25}$ ,  $\gamma_{-19}$ ,  $\gamma_{-13}$ ,  $\gamma_{-7}$ ,  $\gamma_{-1}$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_8$ ,  $\gamma_{14}$ ,  $\gamma_{20}$ ,  $\gamma_{26}$  を描いたのが Fig.4.6 (b) である。この場合の結果においても、前節の4周期固定モードと同様に高次の対称線は分岐した島内部には交点をもたず、その形態としてセパトリックスに漸近していることがわかる。

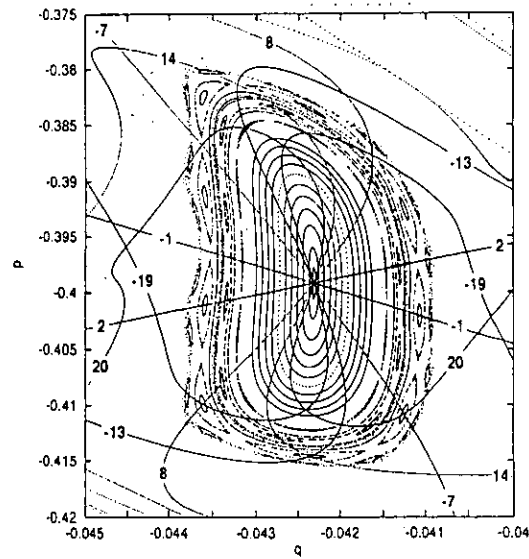


Figure 4.4: Phase portrait of the period-3 accelerator mode orbit with the set of symmetry lines of the order of  $\gamma_{-19}(3)$ ,  $\gamma_{-13}(3)$ ,  $\gamma_{-7}(3)$ ,  $\gamma_{-1}(6)$ ,  $\gamma_2(0)$ ,  $\gamma_8(3)$ ,  $\gamma_{14}(6)$  and  $\gamma_{20}(9)$  for the value of  $A = 0.7674$ .

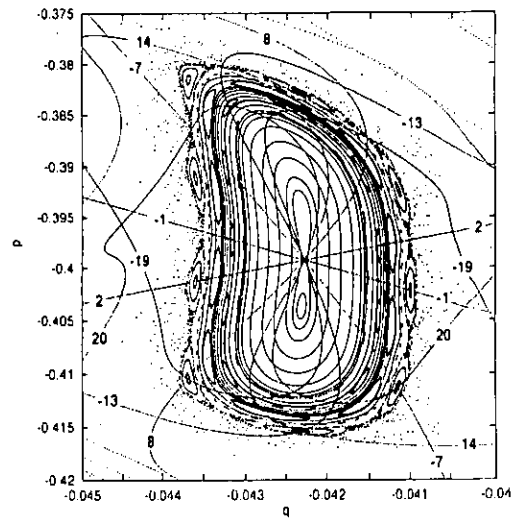


Figure 4.5: Phase portrait of the period-3 accelerator mode orbit with the set of symmetry lines of the order of  $\gamma_{-19}(3)$ ,  $\gamma_{-13}(3)$ ,  $\gamma_{-7}(3)$ ,  $\gamma_{-1}(6)$ ,  $\gamma_2(0)$ ,  $\gamma_8(3)$ ,  $\gamma_{14}(6)$  and  $\gamma_{20}(9)$  for the value of  $A = 0.7677$ . The central island undergoes hyperbolic bifurcation without reflection.

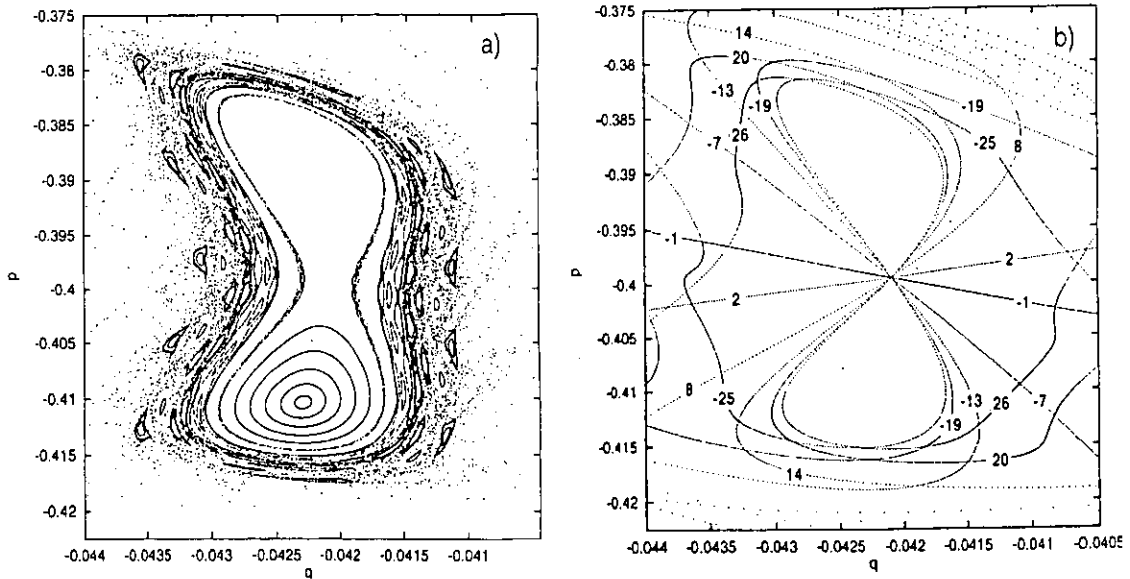


Figure 4.6: a): The complete bifurcated island structure of the period-3 accelerator mode orbit for the value of  $A = 0.7690$ . b): The set of symmetry lines of the order of  $\gamma_{-25}$ ,  $\gamma_{-19}$ ,  $\gamma_{-13}$ ,  $\gamma_{-7}$ ,  $\gamma_{-1}$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_8$ ,  $\gamma_{14}$ ,  $\gamma_{20}$ , and  $\gamma_{26}$  for the value of  $A = 0.7690$ . Their symmetry lines can not go through the bifurcated island inside.

## 4.5 結論

本解析では、4周期固定モードと3周期加速モードにおいて観測することのできる無反射双曲型の分岐現象について議論した。この無反射双曲型の分岐は、分岐点を飛び越えて粒子の輸送が行われないため周期の倍化は生じない現象である。このことは、高次の対称線を用いることで、分岐前後の島周辺の周期軌道の周期変化が起こらないことがそれぞれのモードにおいても証明された。

標準写像のように時間の可逆性が許される2次元写像モデルでは、運動量反転と位置反転による対称線の交点は、位相面での周期軌道の周期を与えることができる。しかしながら、今回の解析から分かるように無反射双曲型分岐により生まれた島構造は、それらでは満足にあらわすことができないことが高次に拡張した対称線解析の結果より十分にいえる。また、興味深いことにそれら無反射双曲型分岐構造に対する高次対称線の形態には、4周期固定モードと3周期加速モードの両方のモデル解析結果を共通してセパトリックスに漸近する特徴があることが分かった。

最後に、無反射双曲型分岐では、低次対称線解析結果 (*chapter 2*) により、これまでセパトリックス内には対称線の交点が存在しないといった予測が、高次の対称線を用いた本解析により十分に立証された。この結果は、無反射双曲型分岐に対する特徴でもあるがその原因が定かではない。それらの原因を究明することは今後の課題である。



## 第2部 プラズマにおける散逸系カオスの問題

散逸系の問題は、前述の保存系とは違い、位相空間の体積が収縮する系の問題である。この力学系は、初期状態からの立ち上がる過度状態の後、殆んどが安定吸引域(アトラクター)上に落ち着く。そしてこの有界な集合の構造は、多重ひも構造からなり、その局所部分は自己相似な入れ子構造になっている。このようなフラクタル構造をもつアトラクターが、奇妙なアトラクター (strange attractor) である。カオス軌道は、このようなアトラクター上を動き回る。このために、あらゆる系のカオスは、一見、偶然性を含み限りなく複雑ではあるが、それは精密に自己組織化された運動であり、自己相似なフラクタル構造をもつアトラクターを形成している特徴がある。

散逸系の運動を記述する微分方程式において、カオス形態を Poincaré プロットにより決定する手法は、生の時系列データあるいは位相軌道の形態から分析するよりも有効である。例えば、微分方程式の Lorenz 系の Poincaré 写像モデルとして Hénon and Pomeau(1975) が提案した Hénon 写像、1 階常微分方程式系では、生体の生殖問題をモデルとしたロジスティック写像 (May, 1976) 等がある。これら離散化されたモデルにおいて見いだされた普遍的なカオス形態や相似測は、あらゆる散逸カオス系モデルに見られる現象に対して共通しているため散逸系問題の基礎的な例として重要視されている。

この第2部では、散逸系のモデルとして実際の基礎プラズマ実験で観測されたカオス現象を取り上げる。1つは、ダブルプラズマ実験において観測された倍周期分岐ルートのカオス現象 (Kono *et. al*, 1992) に対して Chapter 5 で詳しく議論する。そこでは、プラズマ粒子の個々の振舞いを実験にそった強制振動系のモデル運動方程式で記述し、そこから得られるカオス的な解を定量的に解析する。本解析のポテンシャルモデルには、調和振動子のように軸に対して対称でなく、非対称な Child-Langmuir シースポテンシャルを用いる。このモデル方程式の解が実験に対応している結果が得られるかどうかは、重要な課題であるが、その他にもこのポテンシャルモデルにしたがって得られるカオス現象の特徴には、上記に述べた散逸系の基本モデルにおける普遍的なカオス形態や相似測に対してどのような相違点があるかを見出すことは興味深い課題である。

2つに、ダブルプラズマ実験で観測されたイオンシース不安定性に関連した準周期ルートのカオス現象に対して Chapter 6 にて詳しく議論する (Ohno *et. al*, 1993)。2つの軌道の振動数がそれぞれ  $f_0, f_1$  でそれらがトーラス曲面上に拘束される場合、状態として2つの可能性がある。一つは曲面を埋め尽くす準周期軌道であり、他の一つは曲面上に拘束されながら閉じてしまう周期軌道である。この2つの振動数の比  $f_1/f_0$  が有理数ならばトーラス曲面上には周期軌道が存在することになり、無理数ならば準周期軌道が存在することになる。とくに前者の場合、振動比が有理比になっていることから位相ロッキング (phase locking) とよぶ。準周期軌道が外部からの摂動により非線形性を増加した場合、系は、位相ロッキングしてカオス軌道に遷移する。これが準周期ルートのカオスの特徴づける。我々は、この遷移が確認された実験を粒子シミュレーションモデル化し、セルフコンシステントに実際の準周期ルートのカオス現象の発生機構を究明する。このシミュレーションによる解析は、散逸系モデル方程式の有効性を追求する点において興味深い問題であるといえる。

## Chapter 5

# ダブルプラズマイオンシースにおける粒子のカオス的挙動

Dynamical behavior of ion current in the ion sheath of the double plasma devices is analyzed in terms of the equation of motion with the Child-Langmuir Potential and the collisional damping term under the action of external oscillating electric field. Since the present model describes the forced oscillation system based on the non-autonomous differential equation, it characterizes the stochastic behavior of the dissipative nonlinear dynamical systems. The method of Poincaré section of surface provides us the detailed information of the periodic orbits, region of the chaotic solutions and determines the structure of the bifurcation process associated with transition between the periodic orbits and the chaotic solutions. In the present analysis, construction of the model potential and specification of relevant parameters are tried to be consistent with the experimental situation, with the expectation to give reliable account for the experimental observation. At the same time, the present analysis explores the generic aspect of the dissipative chaotic systems such as the re-merging of the period doubling bifurcation and formation of bubbles in the Feigenbaum trees.

### 5.1 序論

プラズマにおけるカオス現象は、これまでビームプラズマ実験系 [34] [35] やダブルプラズマ実験系等 [36][37] で報告されている。本論文では、ダブルプラズマ実験で観測されたグリッド電流のカオス的な振舞いに関して理論解析を行った。ダブルプラズマ実験では、メッシュ状のグリッドで領域を左右に分離し、各々の領域に温度、密度の違うプラズマを生成し、外部から交流電圧を印加する。グリッド近傍では急激な電位差が生じ、イオンシース領域が生成される。グリッドをはさんで左右の領域はプラズマ密度や温度が異なるため Fig.5.1 の様な非対称なイオンシースポテンシャルが形成される。プラズマ粒子 (イオン) のほとんどは、シースポテンシャルによる強電場によって加速され、グリッドへと流入し定常な電流が維持される。しかしながら、ダブルプラズマ実験ではプラズマ制御パラメータの選択により、グリッドに流れる電流の時系列にカオス的な振舞いが観測されている。これは、ある一部のイオン粒子が非対称なシースポテンシャルに捕捉されることが原因であるとされている。

このようなシナリオにしたがって河野等 [38] は、ダブルプラズマイオンシースのポテンシャルをモデル近似し、そのポテンシャル内での粒子の運動を強制振動系の微分方程式モデルによって記述し

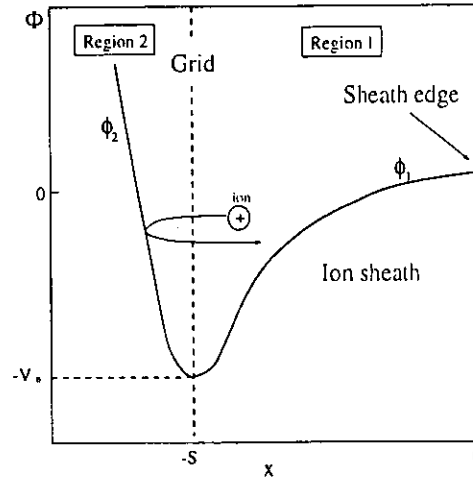


Figure 5.1: Ion sheath potential model for double plasma device.

た解析を行っている。しかし本研究では、その近似ポテンシャルとは違い、イオンシース電場が強い場合に成立する Child-Langmuir 則に従ったイオンシースポテンシャルを用いることによって、以前よりさらに現実的なモデルを構築した。そしてプラズマと中性粒子の衝突による散逸を減衰項にて考慮し、それらを強制振動系の散逸微分方程式モデルに導入し、粒子軌道のカオスへの遷移過程の解析を行った。

ダブルプラズマ実験のような非平衡開放系でしかも多体粒子が複雑に絡み合った問題において、実験系に即したポテンシャルモデルを用いた運動方程式を数値的に解くことによって、実験で観測されている倍周期分岐によるカオス遷移過程 (周期倍化 → カオス → 3 周期分岐 → カオス) が少数自由度力学系で説明できることを示す。そしてこのモデルの場合のカオス現象は、一般の散逸系のシンプルなモデル [12][19][41][42] で記述され議論されているカオス現象の場合の特徴とどういった相違点があり、どのような統計的性質が観察されるのか、これらを究明することができたことも興味深い結果といえる。

散逸系の問題におけるカオス現象は、幾つものアトラクターが自己相似的に微小な構造を入れ子状態で形成し、それが階層構造を築くといった幾何学的な特徴構造をもつストレンジアトラクターによって特徴づけられる。そして、それはカオスを示唆するに有効な現象の一つともいえる。本解析においてもストレンジアトラクターが観測された。これについては後節で述べる。

2 節では、Child-Langmuir を用いたポテンシャルを用いたモデル方程式を導出し、導入パラメータの値を実験結果から決定し、数値解析を行う。3 節では、その結果を議論する。そして、カオスへの遷移過程を詳しく述べ、カオス現象が見られる領域の定量的な解析をおこない、その統計的な性質を議論する。最終節では、結果のまとめ、今後の課題を議論する。

## 5.2 イオンシースの散逸系モデル方程式

電場が非常に強い場合には、Child-Langmuir によるシースの関係式、

$$\phi = -V_0 \left( \frac{x}{s} \right)^{\frac{4}{3}} \quad (5.2.1)$$

が成立する。ここで  $V_0$  は、 $x = s$  おけるポテンシャル、 $s$  はシース幅を表し、デバイ長  $\lambda_{De}$ 、電子温度  $T_e$  をもちいて

$$s = \frac{\sqrt{2}}{3} \lambda_{De} \left( \frac{2eV_0}{T_e} \right)^{\frac{3}{4}} \quad (5.2.2)$$

Table 5.1 : Parameter value of numerical analysis

| パラメータ                | 実験データ値                       |
|----------------------|------------------------------|
| 領域1のシース幅             | $s = 1\text{cm}$             |
| 領域1のポテンシャル           | $V_0 \approx 50\text{V}$     |
| 電子温度                 | $T_e \approx 1\text{eV}$     |
| 領域2のシース幅( $\alpha$ ) | $s$ の 10% ~ 20%              |
| 領域2のポテンシャル           | 領域1の 2 ~ 3倍                  |
| 電場接合パラメータ            | $\lambda = 0.1$              |
| 減衰パラメータ              | $\hat{\mu} = 0.002 \sim 0.2$ |

で与えられる。

外部振動電場  $E_{ext}$  を加えた場合のシース電場内のイオン粒子の運動方程式は、減衰を考慮すれば

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{e}{M} \left( -\frac{\partial\phi}{\partial x} + E_{ext} \sin\omega t \right) - \mu \frac{dx}{dt} \quad (5.2.3)$$

で与えられる。ここで  $\mu$  は、中性粒子との衝突による散逸を考慮した減衰パラメータである。数値解析にあたって、位置をシース幅、時間をイオンプラズマ振動でそれぞれ規格化 ( $x/s \rightarrow \hat{x}$ ,  $\omega_p t \rightarrow \hat{t}$ ) すると電場  $\hat{E} = -\partial\hat{\phi}/\partial\hat{x}$  は

$$\hat{E} = \frac{4}{3} \left( \frac{e}{\omega_{pi}^2 M} \right) \frac{V_0}{s^2} \hat{x}^{1/3} = \frac{3}{\sqrt{2}} \left( \frac{T_e}{eV_0} \right)^{1/2} \hat{x}^{1/3} \quad (5.2.4)$$

となり、外部振動電場  $E_{ext}$  は

$$\hat{E}_{ext} \equiv \left( \frac{e}{\omega_{pi}^2 M s} \right) E_{ext} = \frac{9}{4\sqrt{2}} \left( \frac{T_e}{eV_0} \right)^{1/2} \frac{E_{ext}}{(V_0/s)} \quad (5.2.5)$$

と書くことができる。グリッドを境界に生成される領域1, 2の異った電場をそれぞれ

$$\hat{E}_1(\hat{x}) = -\frac{\partial\hat{\phi}_1}{\partial\hat{x}} = \beta\hat{x}^{1/3} \quad (5.2.6)$$

$$\hat{E}_2(\hat{x}) = -\frac{\partial\hat{\phi}_2}{\partial\hat{x}} = A\beta(\hat{x} + \alpha)^{1/3} \quad (5.2.7)$$

と仮定し、結合パラメータ  $\lambda$  を導入して、これらの電場式を

$$\hat{E}_{union}(\hat{x}) = \frac{\hat{E}_1(\hat{x}) - \hat{E}_2(\hat{x})}{2} \tanh\left(\frac{\hat{x} + 1}{\lambda}\right) + \frac{\hat{E}_1(\hat{x}) + \hat{E}_2(\hat{x})}{2} \quad (5.2.8)$$

として結合し、グリッド近傍の電場の連続性を確保する。ここで  $\beta = \frac{3}{\sqrt{2}} \left( \frac{T_e}{eV_0} \right)^{1/2}$  であり、パラメータ  $A$  と  $\alpha$  は、それぞれ領域2におけるシースポテンシャルの勾配、シース幅である。これらのパラメータ値は、ダブルプラズマ実験における観測データ (Table 5.1) より定める。外部振動数、減衰項とポテンシャルは  $\hat{\omega} \rightarrow \omega/\omega_{pi}$ ,  $\hat{\mu} \rightarrow \mu/\omega_{pi}$ ,  $\hat{\phi} \rightarrow e\phi/M\omega_{pi}^2 s^2$  である。

したがって実際に数値解析で扱うモデル運動方程式は (5.2.3) 式に対応して

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{d\hat{t}} = \hat{v} \\ \frac{d\hat{v}}{d\hat{t}} = \hat{E}_{union}(\hat{x}) - \hat{\mu}\hat{v} + \frac{3}{4}\beta\hat{E}_{ext}\sin(\hat{\omega}\hat{t}) \end{cases} \quad (5.2.9)$$

となる。

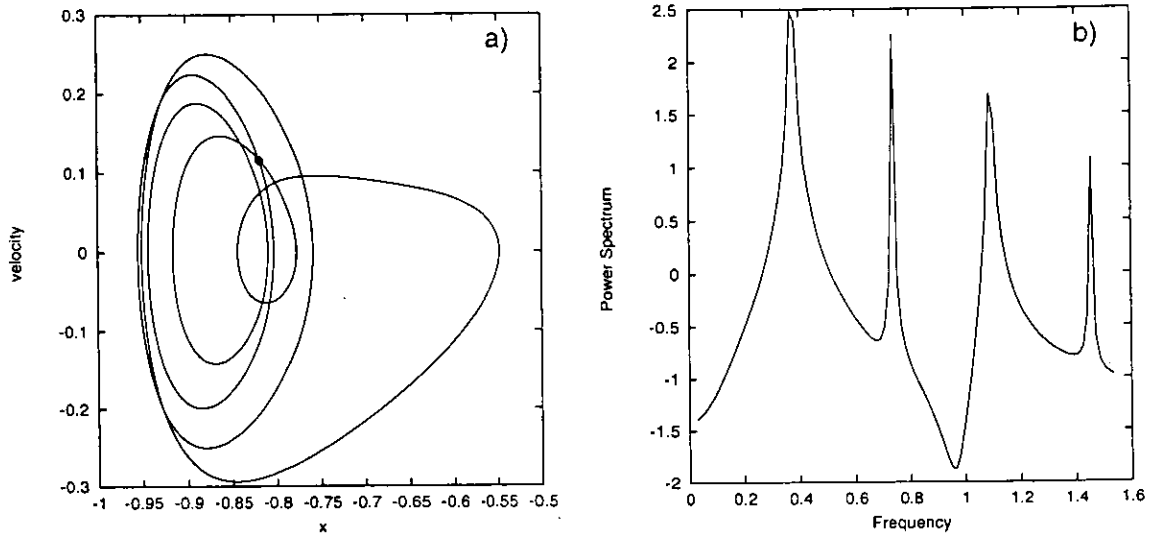


Figure 5.2: a):Phase space orbit of period-1 at  $\hat{\omega} = 0.360$ . b):Frequency spectra of x-axis for the phase space orbit a).

### 5.3 分岐とカオスへの遷移

ダブルプラズマ実験では、外部振動電場の振動数  $\hat{\omega}$  を制御してグリッド電流の応答を観測した場合と外部振動電場の振幅  $\hat{E}_{ext}$  を変化させて電流値の観測を行った場合のそれぞれに対してカオス現象が観測されている。本論文では (5.2.9) 式を用いて、カオス現象が観測されたそれぞれの実験に対応する数値解析を行った。

まず、(5.2.9) 式の減衰パラメータ  $\hat{\mu}$ 、外部振動電場  $\hat{E}_{ext}$  をそれぞれ 0.19, 1.13 に固定し、外部電場の振動数  $\hat{\omega}$  を変化させた場合、リミットサイクル状態となった位相軌道とその位置  $\hat{x}(t)$  に対するフーリエスペクトルから粒子軌道の周期を求めた。Fig.5.2 a) は、振動数を  $\hat{\omega} = 0.36$  とした場合の粒子の位相軌道で、Fig.5.2 b) は位置  $\hat{x}(t)$  に対するフーリエスペクトルである。フーリエスペクトル図では、 $\hat{\omega} = 0.36$  付近にピーク値がみられる。(  $\hat{\omega} = 0.36$  以上のピーク値は与えた周波数の高調波成分である。) これより Fig.5.2 a) は、周期 1 の軌道である。次に、振動数を  $\hat{\omega} = 0.40$  付近まで増加させると位相軌道図は Fig.5.3 a) のようになる。この軌道は、スペクトル図 Fig.5.3 b) に示すように初期に与えた半分の振動数  $\hat{\omega}/2 = 0.2$  付近でピークが見られることから、倍周期分岐による 2 周期軌道であるといえる。さらに振動数を  $\hat{\omega} = 0.44$  付近まで増加させると、軌道は Fig.5.4 a) に示すように複雑になり、対応するスペクトル図 Fig.5.4 b) もノイズ状態になる。これらのことから、系はカオス状態になったと考えられる。以上のように、外部振動電場の振幅を固定し振動数  $\hat{\omega}$  を変化させた場合、軌道が周期倍化を起こしてカオス状態に遷移する様子が明確に観測された。

(\* Fig.5.2 a), Fig.5.3 a) および Fig.5.4 a) の位相軌道上の点は、外部振動周期 ( $T = 2\pi/\hat{\omega}$ ) ごとの点をプロットしたもので (Poincaré Plot)、この点の数からも周期が確認できる。)

次に、外部振動電場の振動数を  $\hat{\omega} = 0.628$  に固定し、 $\hat{\mu} = 0.190$  として電場の振幅  $\hat{E}_{ext}$  を変化させて数値解析を行った。まず  $\hat{E}_{ext} = 1.02$  では Fig.5.5 a) に示す様に周期 1 の軌道がみられた。 $\hat{E}_{ext}$  を増加させ  $\hat{E}_{ext} = 1.06$  では Fig.5.5 b) の様に倍周期分岐による 2 周期の軌道が見られ、 $\hat{E}_{ext} = 1.08$  で 4 周期軌道 (Fig.5.5 c)),  $\hat{E}_{ext} = 1.083$  では 8 周期軌道 (Fig.5.5 d)) が観測された。さらに振幅を増加させると周期分岐が次々と繰り返され、やがて Fig.5.6 e) に示すように  $\hat{E}_{ext} = 1.1$  で軌道はカオス状態を示した。

さらに  $\hat{E}_{ext}$  を増加させた場合、 $\hat{E}_{ext} = 1.115$  付近でカオス状態が終り、Fig.5.6 f) に示す様に

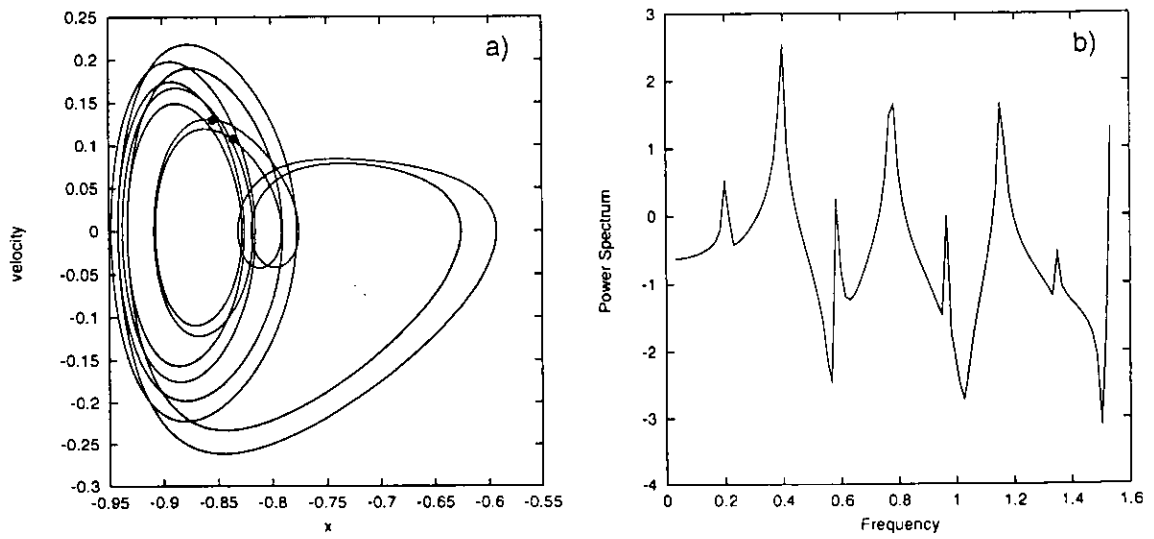


Figure 5.3: a):Phase space orbit of period-2 at  $\hat{\omega} = 0.40$ . b):Frequency spectra of x-axis for the phase space orbit a).

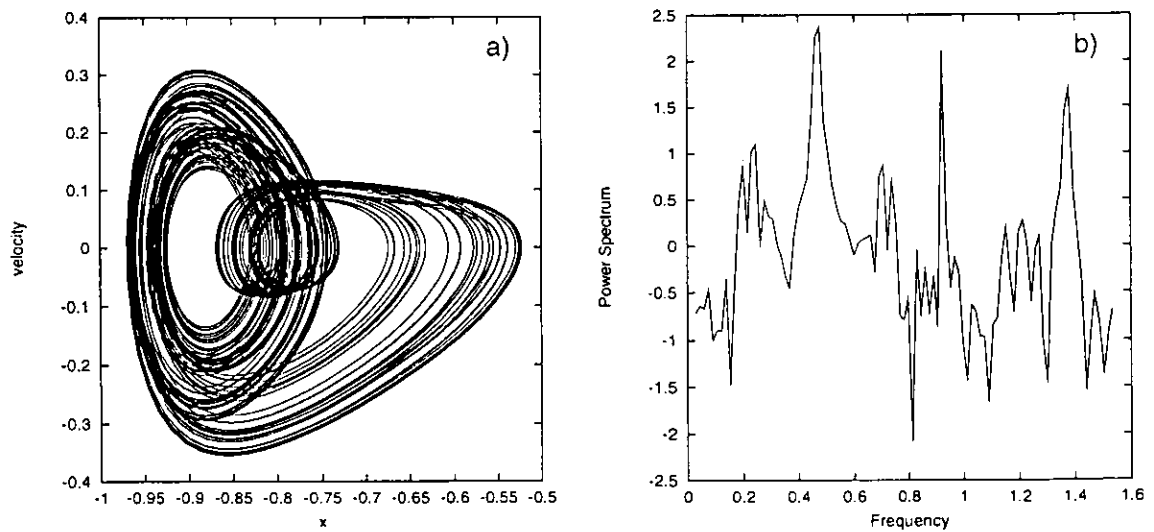


Figure 5.4: a):Phase space for chaotic orbit at  $\hat{\omega} = 0.440$ . b):Frequency spectra of x-axis for the phase space orbit a).

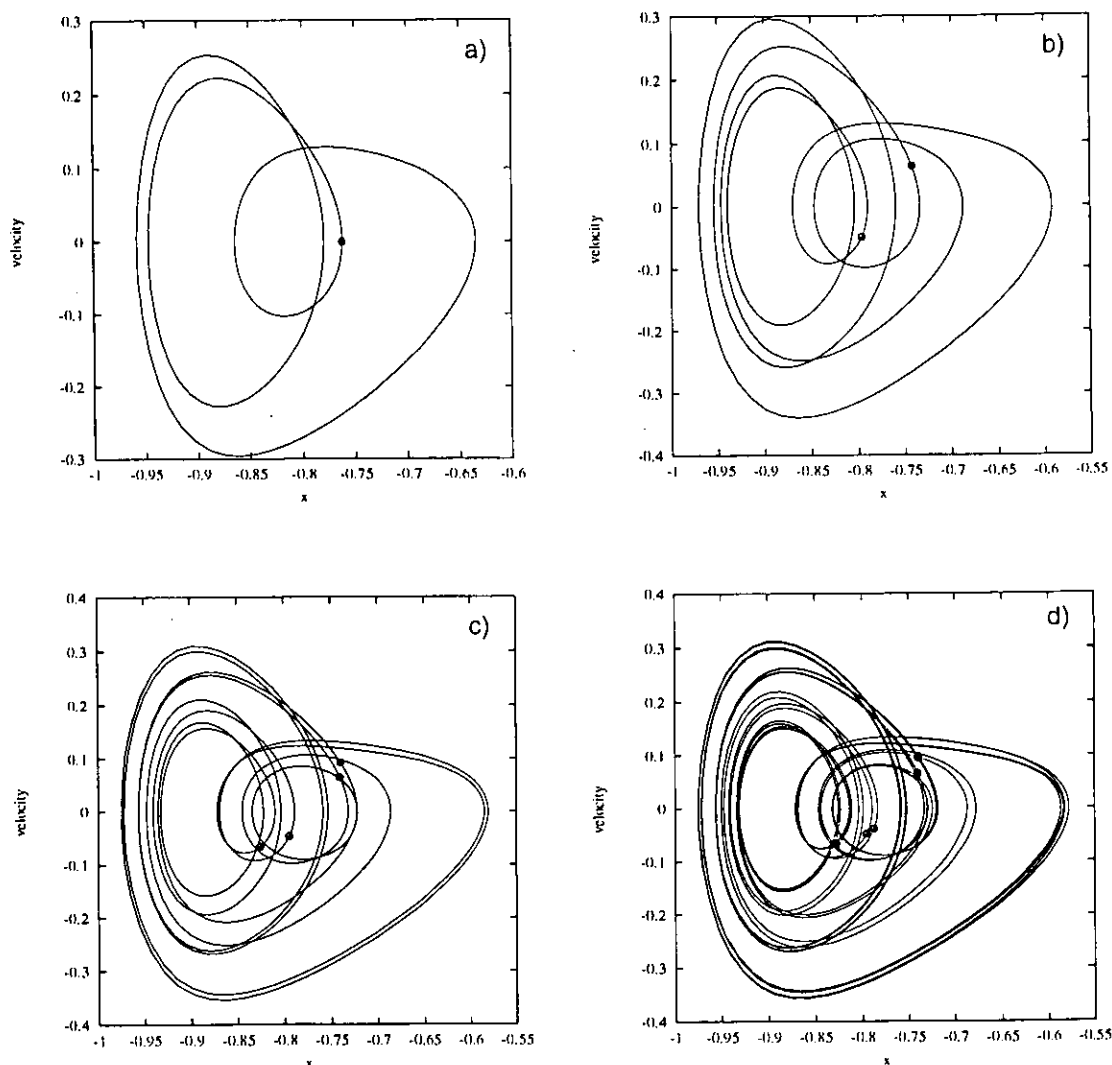


Figure 5.5: Phase space orbit of period-1(a), period-2(b), period-4(c), period-8(c) and  $\tilde{E}_{ext} = 1.020, 1.060, 1.080, 1.083$ , respectively. The point on the orbit indicate poincare plot, and number of the point stands for the period. The system have period doubling bifurcation route to chaos.

$\tilde{E}_{ext} = 1.117$  では3周期軌道が見られた。 $\tilde{E}_{ext} = 1.118$  付近では倍周期分岐によって6周期軌道 (Fig.5.6 g) がみられ、 $\tilde{E}_{ext} = 1.120$  で再びカオス状態になるのが観測された。

Fig.5.6 h) と Fig.5.7 a) は、 $\tilde{E}_{ext} = 1.138$  に対するカオス軌道の位相図とアトラクターを描いたものである。Fig.5.7 a) のアトラクターの一部分 A を詳細に描くと Fig.5.7 b) に示すようなアトラクターが見られ、湾曲部 B の一部を拡大すると Fig.5.7 c) となる。これらは、その相空間構造がフラクタル的な構造をしていることを示しており、このアトラクターがストレンジアトラクターであることが確認できる。

カオスへ遷移する分岐状況を定量的に観測するため、外部振動数を固定し、連続的に徐々に電場振幅  $\tilde{E}_{ext}$  を変化させて、各位相軌道のポアンカレプロットからその速度成分の値をとって分岐図を描くと Fig.5.8 のようになる。この図から、Fig.5.5 a)~Fig.5.6 h) で示された倍周期分岐が確認され、 $\tilde{E}_{ext} = 1.085$  付近でカオスに遷移していることがより明確になった。

ヘノン写像等の分岐図で、一般に  $2^n$  ( $n \rightarrow \infty$ ) の倍周期分岐が生じる分岐点を  $\xi_n$  とした場合、

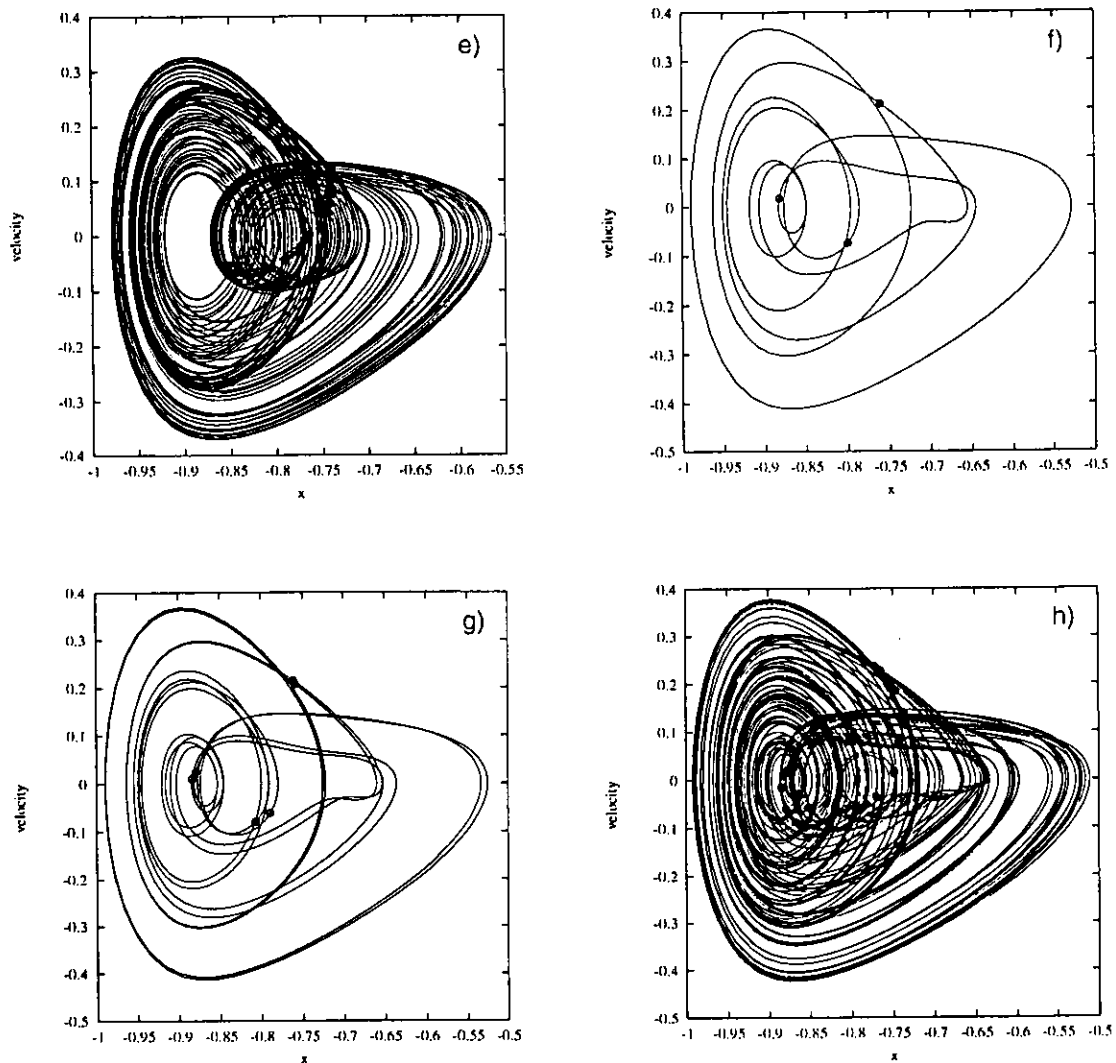


Figure 5.6: Phase space orbit of chaos(e), period-3(f), period-6(g), chaos(h) and  $\tilde{E}_{ext} = 1.1, 1.117, 1.118, 1.1138$ , respectively. The point on the orbit indicate poincare plot, and number of the point stands for the period. The system have period doubling bifurcation route to chaos.

Feigenbaum の相似則 [43] から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_n - \xi_{n+1}}{\xi_{n+1} - \xi_{n+2}} = 4.66920 \dots \quad (5.3.1)$$

に収束する。これを Fig.5.8 にあてはめてみると、 $\xi_1 = 1.035625$ 、 $\xi_2 = 1.074062$ 、 $\xi_3 = 1.008231$  であり、(5.3.1) 式から  $\delta_1 = 4.65$  となり、収束値に近い値であるといえる。以上のように、(5.2.9) の方程式系の分岐構造や遷移過程は、低次元微分方程式系に対するモデル写像における普遍的な相似則にしたがった特徴を持つといえる。

次に、減衰パラメータを  $\hat{\mu} = 0.205$  として分岐図を描くと Fig.5.9 に示すような結果になる。Fig.5.8 の  $\hat{\mu} = 0.19$  場合の分岐過程と同様に  $\tilde{E}_{ext} = 1.12$  付近までは倍周期分岐によりカオスへ遷移し、不連続性が生じて 3 周期軌道が生じているが、 $\tilde{E}_{ext} = 1.15$  付近では 3 周期が不完全に倍周期分岐をおこし、ふたたび 3 周期に収束する興味深い分岐現象が観測された。つまり、パラメータ  $\hat{\mu}$  の変化、すなわち散逸効果の寄与の制御によっては、必ずしも Feigenbaum カスケードが成立するとはいえない興味深い現象が見出された。この不完全倍周期カスケードの例は、Bier 等 [44] が低次元写



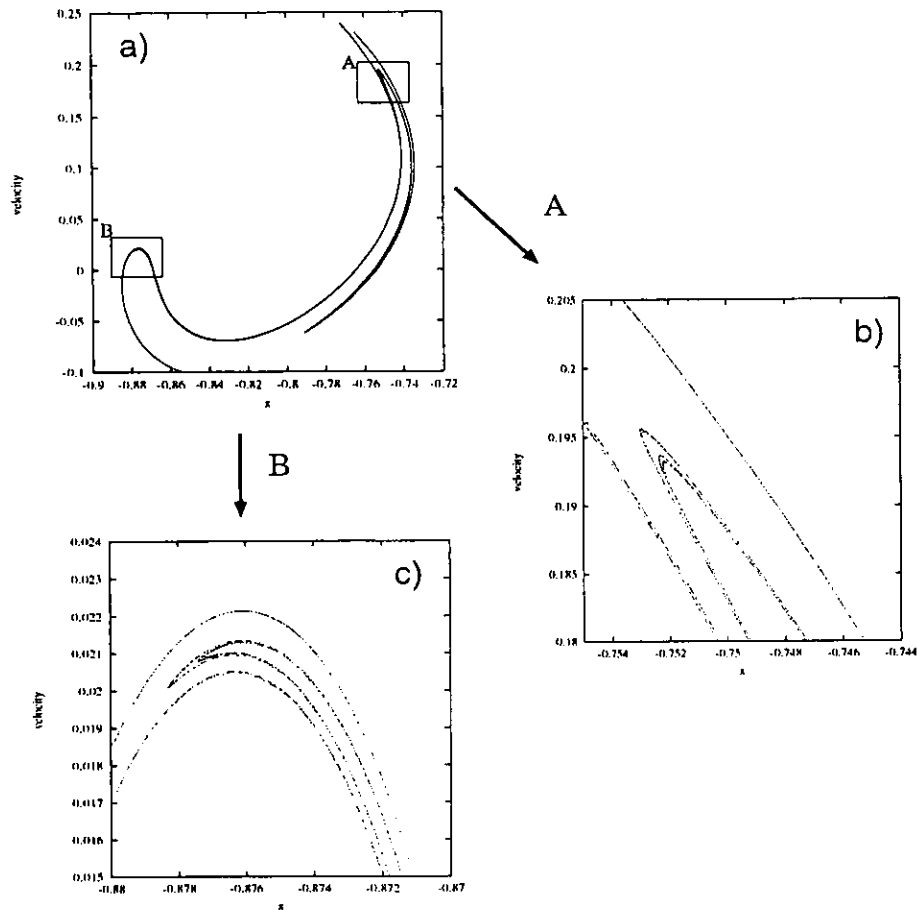


Figure 5.7: The Child-Langmuir sheath model attractor.

像において観測しているが、分岐原因の定量的な解析は行われておらず今後の課題である。

## 5.4 考察と結論

Child-Langmuir 則に従ったポテンシャルを取り入れた散逸系のモデル式におけるカオスへの遷移過程や特徴は、Fig.5.8 の分岐図で示したように、 $2^n (n \rightarrow \infty)$  で倍周期分岐が起こり、カオスに遷移し、カオス状態から3周期構造が生まれ、さらにその3周期が倍周期分岐を  $3^n (n \rightarrow \infty)$  で繰り返して再びカオス状態になる遷移形態を示している。このように、 $2^n, 3^n$  倍の周期分岐が観測された結果から、このモデル式の特徴は、Sarkovskii の周期軌道の順序理論 [40] に従っており、あらゆる周期数の位相軌道が存在することがいえる。さらに、Fig.5.8 の分岐図から、 $\bar{E}_{ext} = 1.085 \sim 1.117$  付近でカオス状態が続き、その後  $\bar{E}_{ext} = 1.117$  を越える付近で不連続性が生じて、3周期軌道が生まれる現象が確認できた。この不連続性分岐現象はヘノン写像において Tomita 等 [45] により報告されているように、不連続なバンド融合やアトラクター融合のクライシス [45] でもおこる普遍的な現象であるとされている。それが本解析モデルにおいて観測されたことは非常に興味深い点である。そのような普遍性が本モデル方程式にも成立するかどうか、そしてまた不連続分岐によるジャンプの大きさ等については、さらに具体的な解析が必要であり今後の課題である。

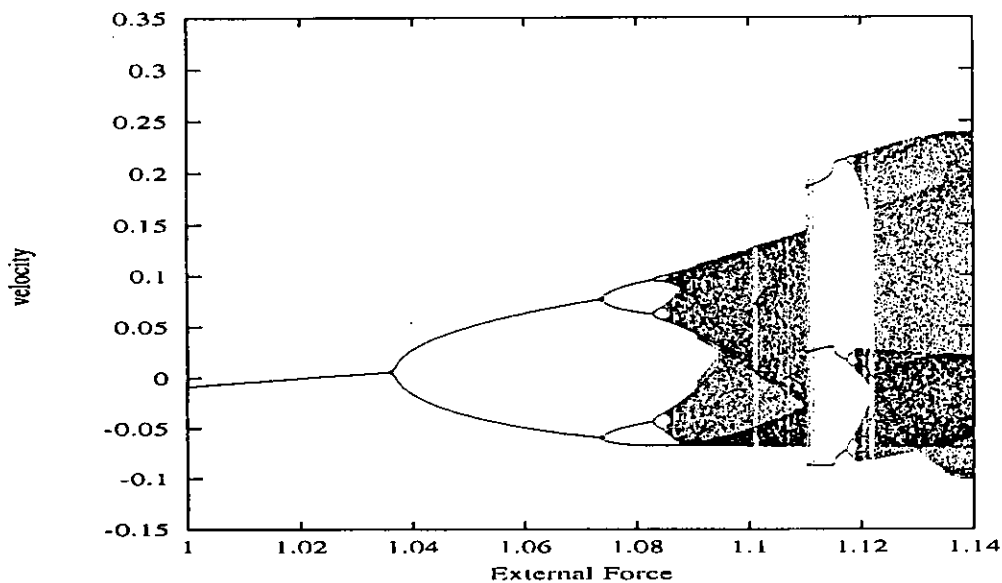


Figure 5.8: Numerical calculation of bifurcation sequence of Child-Langmuir potential model equation for the dissipative value of  $\hat{\mu} = 0.190$ .

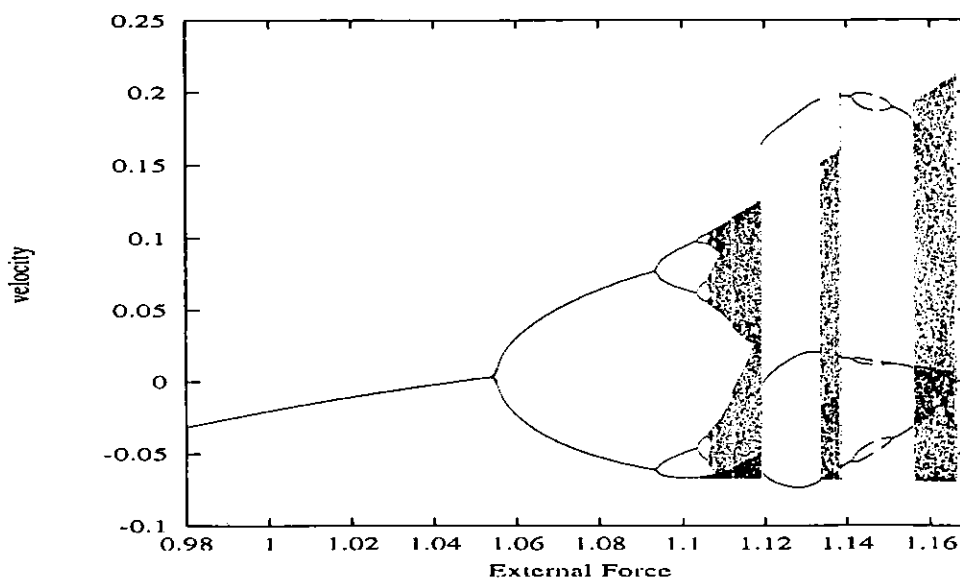


Figure 5.9: Numerical calculation of bifurcation sequence of Child-Langmuir potential model equation for the dissipative value of  $\hat{\mu} = 0.205$ .

Table 5.2 : Numerical results

| <i>parameter</i>  | <i>numerical result</i> |
|-------------------|-------------------------|
| $\hat{\mu}$       | 0.19                    |
| $\tilde{E}_{ext}$ | 1.132                   |
| <i>period</i>     | $\hat{\omega}$          |
| <i>period-1</i>   | 0.360                   |
| <i>period-2</i>   | 0.380 ~ 0.400           |
| <i>chaos</i>      | 0.440 ~ 0.470           |

Table 5.3 : Numerical result

| <i>parameter</i> | <i>numerical result</i> |
|------------------|-------------------------|
| $\hat{\mu}$      | 0.19                    |
| $\hat{\omega}$   | 0.6                     |
| <i>period</i>    | $\tilde{E}_{ext}$       |
| <i>period-1</i>  | ~ 1.02                  |
| <i>period-2</i>  | 1.021 ~                 |
| <i>period-4</i>  | 1.076 ~                 |
| <i>chaos</i>     | 1.1                     |
| <i>period-3</i>  | 1.117                   |
| <i>chaos</i>     | 1.12 ~                  |

Table 5.4 : Numerical result

| <i>parameter</i> | <i>numerical result</i> |
|------------------|-------------------------|
| $\hat{\mu}$      | 0.205                   |
| $\hat{\omega}$   | 0.6                     |
| <i>period</i>    | $\tilde{E}_{ext}$       |
| <i>chaos</i>     | 1.138                   |
| <i>period-3</i>  | 1.14                    |
| <i>period-6</i>  | 1.15                    |
| <i>period-3</i>  | 1.155                   |
| <i>chaos</i>     | 1.16                    |

もう一つの解析結果の特徴は、本解析のモデル式において Feigenbaum の相似則がほぼ成立したことから、本解析での Child-Langmuir 則を用いたポテンシャルモデルの強制振動系運動方程式が、散逸カオス系を代表とするシンプルなモデル写像における性質と同様な特徴をもつことが分かった。

Table 5.2~5.4 は、これまでの遷移過程に関する解析結果をまとめたものである。Table 5.2 は、上述した外部振動電場を固定して外部振動電場の振動数を変化させた場合の結果、Table 5.3 と Table 5.4 は、それとは逆に外部振動を固定し電場を変化させ、さらに減衰項 ( $\hat{\mu}$ ) を変化させた場合の結果である。本解析のモデル方程式で得られた Table 5.2 と Table 5.3 の遷移過程結果と実験で観測されている遷移過程 (周期倍化→カオス→3 周期分岐→カオス) とを比較すると、良い一致を示していると結論できる。

本解析結果では、Table 5.4 に示したとおり、減衰項 ( $\hat{\mu}$ ) を変化させることで必ずしも Feigenbaum のカスケードに従わず、異なった遷移が起こることを見出した。この結果は、実験においてプラズマ制御パラメータによって 2 倍周期分岐以外に多様な周期倍化や逆カスケードのシナリオが観測されていることを示している [39]。すなわち中性粒子の密度を変化させることによって、それらの現象が実験的に観測される可能性あることを提案する。事実、この傾向を示す実験結果も存在しており [46]、今後さらに詳しい検討をしたい。

## Chapter 6

### イオンシースにおけるカオス励起機構

In double plasma experiments, instability in the ion sheath is observed. Upon applying the external oscillating electric field, there occurs the chaos through the quasi periodic route. In the present study, in order to analyze the excitation mechanism of observed route of chaos, analysis based on the particle simulation has been undertaken to reproduce the observed chaos phenomena. It is confirmed that the instability in the ion sheath is induced by the trapped ions in the sheath potential. The period of the oscillation in the instability agrees with the period of the motion of the trapped ions, which in turn determines density variation at the sheath edge. Corresponding to the experimental condition, application of the external perturbation upon the unstable wave induces the quasi periodic motion. In particular, the variation of the amplitude of the external field gives rise to the phase locking, and finally the system was settled down to the chaotic state.

#### 6.1 序論

プラズマを代表とする非線形力学系のカオスに関する諸種の問題は、与えられる系に対しての空間量が時間発展によって変化しない保存系の問題、或は、プラズマ粒子の衝突効果により空間量が時間とともに減少する散逸系の問題にそれぞれ分かれる。本論文では、後者である散逸系のカオス、実際に非平衡開放系プラズマ実験で観測されたカオス現象に関して議論する。

非平衡実験系のプラズマは、少数自由度系の性質を持つものの実際の実験では自由度が大きいいため時間的にも空間的にも複雑な現象が起こりやすい。そのようなことから、これまで実験的に少数自由度系のカオスを実現することは難しいとされてきた。しかしながら最近では、ダブルプラズマ生成実験 [36][37] はじめビームプラズマ実験 [34][35] などにおいて、それらの実験系で得られた様々な時系列データに対して、フラクタル次元やリャプノフ指数を十分に検証した結果、少数自由度系のカオス現象が存在していることが観測されている。また、それらの実験では、散逸系カオス現象を特徴づける、ストレンジアトラクターを諸種の時系列データより見出したり、カオス遷移行程において普遍的性質であるファイゲンバウム定数 [40] をも実験系において説明し、プラズマのような複雑な多体粒子系の問題に対して少数自由度系のカオス現象が存在するといった興味深い結果を導くことに成功している。

しかし、カオス現象はダブルプラズマやビームプラズマ実験系において、上述したように観測されてはいるが、その発生機構や励起機構は未だ不明確な点が多い。ダブルプラズマ実験に対しては、

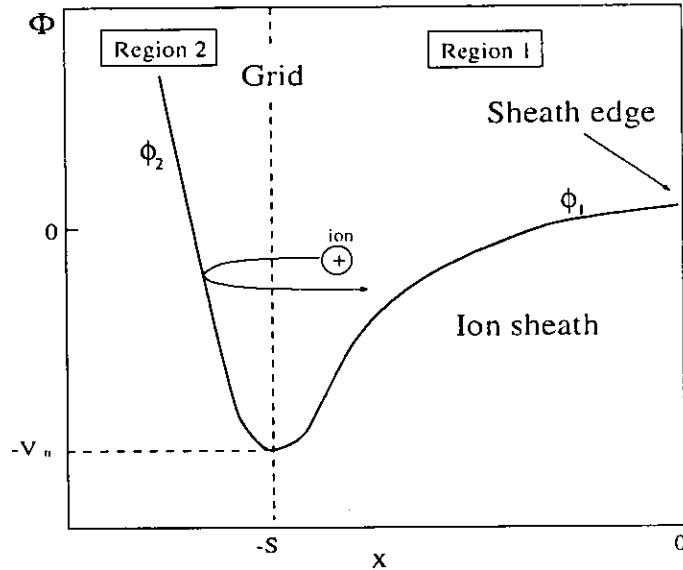


Figure 6.1: The Ion sheath potential model in double plasma experiment equipment.

理論的に実験を散逸系の強制振動系や非自律振動系の微分方程式モデルによった議論がされてはいるが、プラズマを多体粒子問題と考えた場合には、それは十分に実験を説明したとは言えないだろう。こうしたことから、ダブルプラズマ実験のカオス現象を微分方程式モデル [38] で議論した有効性を追求するため、或は、カオス発生機構やその励起機構を究明するためにも実際の実験をセルフコンシステントに説明する粒子シミュレーションによる研究が急務となっている。そこで本論文において我々は、ダブルプラズマ実験系をモデル化し、実際の実験において観測されているカオス遷移ルート、特に準周期ルートカオス [48] の発生機構に着目し、実験データから確立されている遷移現象を粒子シミュレーションにより再現し、カオス発生機構を明確にする解析を行った。

ダブルプラズマ実験装置は、Fig.6.1のようにメッシュグリッドをはさんで2つの領域に密度、温度が違うプラズマを生成する。そのためグリッド付近では性質の異なるイオンシースがそれぞれ形成される。このシースポテンシャルは単純に調和ポテンシャルで現されるものではなく、本質的に非線形であり、プラズマを制御するパラメータによって非対称になったりするため、そこには多様な非線形現象が存在する。実験は、そのイオンシースの非線形性をプラズマを制御することで高め、イオンシース内に不安定波を観測している。このイオンシース内の不安定波は、一部のイオン粒子がグリッドに直接流入せず、イオンシースポテンシャルに捕捉された粒子の影響であることが実験結果より分かっている。このイオンシース内の不安定波に対して、実験では、次に外部からグリッドに振動電場を変化させ印加することで、グリッドに流れる電流のスペクトルに準周期的な運動を観測している。この準周期運動が見られた後に、今度は外部振動電場の振幅を除々に増すことで、系の非線形性を強め、準周期カオスを特徴づけるカーリーヨークの位相ロッキングを観測している。このようにして、準周期ルートにしたがったカオス現象が観測されている [48]。

本論文は、ダブルプラズマ実験のイオンシース不安定性に関連した準周期カオスの問題に対して、次節で、ダブルプラズマ実験に対する粒子シミュレーションモデルと設定するパラメータを説明し、3節では、シミュレーションによって観測されたイオンシース中での不安定性とその励起原因を詳細に説明する。4節では3節で議論したイオンシース中での不安定性に対して外部摂動を加えることで励起される準周期カオスの遷移行程を詳しく説明する。そして最終節では、すべてのシミュレーション結果をまとめ、今後の課題を述べる。

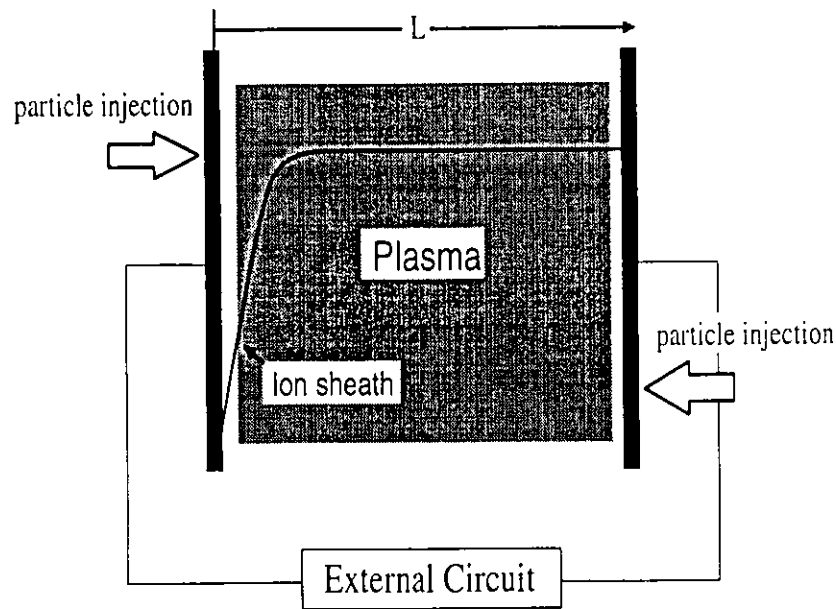


Figure 6.2: Performed simulation modeling on the double plasma experiment.

## 6.2 シミュレーション

### 6.2.1 ダブルプラズマ実験シミュレーションモデル

本解析では、Fig.6.2の様に、一次元静電粒子シミュレーションコードを用いる。右壁よりそれぞれ Maxwell 分布させたイオンと電子の粒子をそれぞれ一定流量入射して、装置中心部で平衡状態のプラズマを生成させる。ある時間後、左側壁にはイオンシースが形成され、電子はそのイオンシースポテンシャルに跳ね返され右壁に戻り、左側壁からはイオン粒子、右側壁からは電子がそれぞれ流出して外部回路を流れる電流となる。

ダブルプラズマ実験では、Fig.6.1に示した様にグリッドを境界にして非対称なイオンシースポテンシャルが生成される。そのためターゲット側のイオンシースに加速され左壁より流出するイオン粒子の一部は、グリッドを通過してドライバ側のシースポテンシャルに反射され戻り、イオンシースポテンシャル内に捕捉される。この場合のターゲット側のシースエッジポテンシャルから加速されるイオン粒子は、平均速度  $v_s = \sqrt{2e\phi/M}$  程度でグリッドを通過し、ほぼ同じ速度で右側(ターゲット側)の領域に戻って来る。

我々は、ダブルプラズマ実験のカオス現象は、このようなイオンシースポテンシャルに捕捉されたイオン粒子の運動とプラズマを制御する外部振動電場との関係に起因しているものと考え、シミュレーションモデル Fig.6.2 の左側の壁をダブルプラズマ装置のグリッドと仮定し、装置中心部が平衡状態プラズマになった時点より、架空のドライバ側のシースポテンシャルに反射された初期速度  $v_s$  のイオン粒子を左壁よりパルスの、或は、ビーム的に一定流量入射して解析を行った。

### 6.2.2 粒子シミュレーション

Fig.6.2におけるイオン、電子の運動は、運動方程式

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i$$

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{q_i}{m_i} E(x_i, t) \quad (6.2.1)$$

で定めた。ここでの  $x_i, q_i$  と  $m_i$  はそれぞれ  $i$  番目の粒子の位置、電荷と質量である。

電場とポテンシャルは、それぞれポワソンの方程式より

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= E \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i S_i(x - x_i) \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

で与えられる。この時の  $S_i$  は  $i$  番目粒子の要素、 $\epsilon_0$  は真空の誘電率である。プラズマ装置を流れる電流 ( $I$ ) は、制御する外部回路 (RLC circuit) の許容電荷  $Q$  と Kirchoff の電圧法則より

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= I \\ L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} + V_0(t) &= V(t) \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

で与えられる。ここでの  $L, R$  と  $C$  は、それぞれ外部回路のインダクタンス、レジスタンスとキャパシタンスであり、 $V_0$  は電圧源である。 $V$  はプラズマを挟んだ電位差、そして  $I$  と  $Q$  は、外部回路での電流と許容電荷である。プラズマ生成領域の左側の境界におけるプレートの電荷  $\sigma$  は

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sum_i q_i v_i \delta(x_i - L_x) - \frac{I}{A} \quad (6.2.4)$$

で与えられる。ここでの  $A$  はプレート面積、 $v_i$  は  $i$  番目粒子の速度、そして  $L_x$  はプラズマ生成領域の長さである。これよりポテンシャルの境界条件は、Gauss's の法則

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV + \frac{A_+ \sigma_+ + A_- \sigma_-}{\epsilon_0} = 0 \quad (6.2.5)$$

より定めた。ここでの  $S$  はプラズマと電極を取り囲む閉包面である。 $A_{\pm}$  は左右電極の面積、 $\sigma$  は左右それぞれの電極における表面電荷である。1 次元静電場シミュレーションにおいては、ポテンシャル境界条件は

$$\Phi_L = 0 \quad (6.2.6)$$

そして電場は

$$E_0 = \frac{\sigma_{\pm}}{\epsilon_0} \quad (6.2.7)$$

となる [47]。

シミュレーションでは、時間は電子のプラズマ振動 ( $\tilde{t} = \omega_{pe} t$ )、速度は電子の熱速度 ( $\tilde{v} = v/v_{te}$ )、距離はデバイ長 ( $\tilde{x} = x/\lambda_{De}$ ) でそれぞれ規格化した値を用いた。以上のようなシミュレーションモデルにおいて、右側の壁からイオン及び電子を連続的に入射した場合、ある数時間後には、左側の壁付近において定常的なイオンシースが形成され、プラズマ平衡状態になる。

Fig.6.3は、外部印加電圧をそれぞれ 5V, 10V, 15V に設定し、左壁から粒子の入射を行わない場合の粒子シミュレーション結果におけるイオンシースポテンシャルである。この結果、定常的なシースが形成されているのが確認できる。シース幅  $d$  は、電場が非常に強い場合に成立する Child-Langmuir の法則 (デバイ長 ( $\lambda_{De} = (\epsilon_0 T_e / en_e)^{(1/2)}$ )) を用いて

$$d = \frac{\sqrt{2}}{3} \lambda_{De} \left( \frac{2V_0}{T_e} \right)^{3/4} \quad (6.2.8)$$

で与えられる。

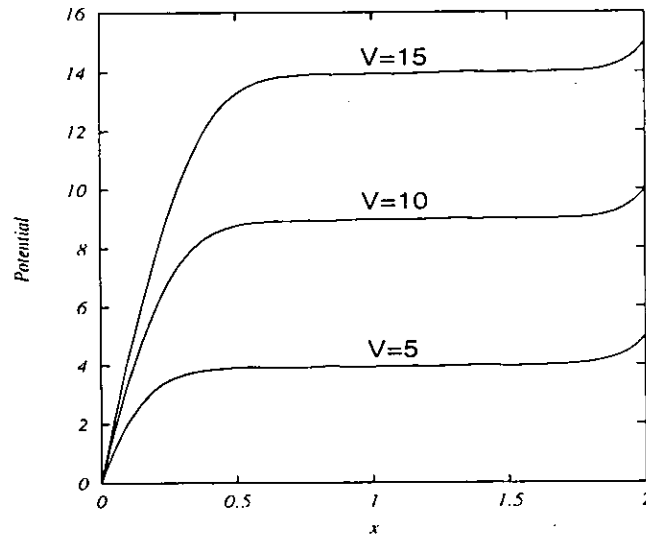


Figure 6.3: This shows the ion sheath potential respectively, which are formed by the change of external vibration electric field.

ここで、 $V_0$ はシースエッジにおけるポテンシャルである。シミュレーションでは、右側壁から粒子を連続的に入射するために右壁付近にも微小なイオンシースポテンシャルが生成される。それが原因で Fig.6.3では、右側の入射壁付近で印加電圧の1割程度の電圧降下が生じているのが観測できる [49][50]。したがって実質には印加電圧の9割程度が左壁付近のイオンシースにかかっている。このことを考慮した場合、Fig.6.3の外部印加電圧に対するイオンシースポテンシャルのシース幅  $d$  は、(6.2.8) 式の Child-Langmuir の法則に従っていることが確認された [51]。

## 6.3 イオンシースにおける不安定性

### 6.3.1 イオン粒子の断続的 (パルスの) な入射による不安定性

Fig.6.2の様に左壁からイオン粒子をある時間間隔で断続的 (パルスの) に一定量入射し、それがイオンシースポテンシャルに与える影響を定量的に解析する。

Fig.6.4は、中心部分のプラズマが飽和し平衡状態になった時に左壁から流出するイオン粒子速度と同じ程度の初速度で入射したイオン粒子の位相軌道を等時間間隔で示したものである。パルスの入射したイオン粒子は徐々に減速され、イオンシースポテンシャルに反射された後、今度は再び左壁に流出しているのがわかる。

Fig.6.5は、イオン粒子をパルス入射した場合のシースエッジ付近の異なる場所におけるポテンシャルの時間発展を示している。これは、イオン粒子を入射する前の定常的なポテンシャルの振動の平均値を入射後のポテンシャルの振動から引きさった結果で、それぞれ横軸はイオン粒子入射からの時間、縦軸はポテンシャル値 (入射前のポテンシャル値との差) を示している。この結果より、イオン粒子を入射すると定常状態にあったイオンシースポテンシャル値は、入射したイオン粒子がポテンシャルに捕捉されている間、励起される。そして、励起振幅が最も大きくなっているのは、入射イオン粒子が減速され方向を変えるシースエッジ付近であることがわかる。

このようにパル的にイオン粒子をシースポテンシャルに捕捉される速度で入射させたことにより、ポテンシャルの振動が励起されることが明らかになった。このことから実際のダブルプラズマイオンシースで観測される不安定性は、パル的に入射された捕捉粒子の運動の繰り返しに起因して



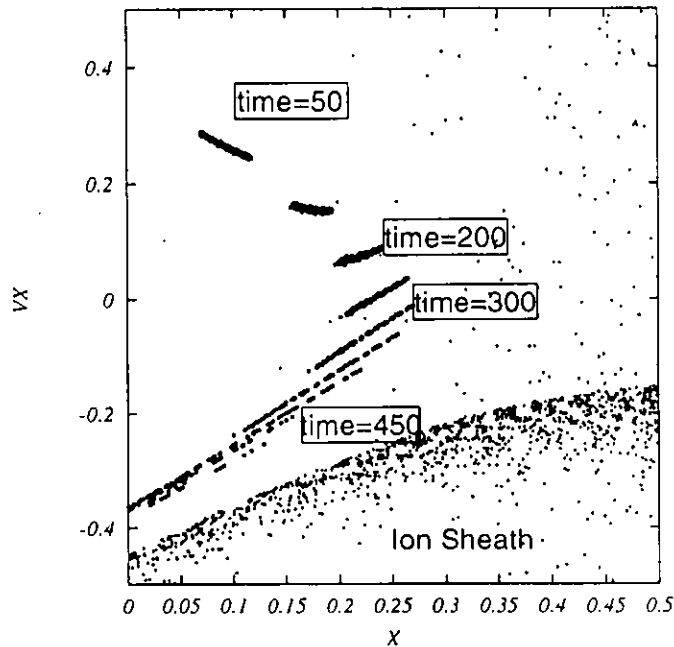


Figure 6.4: Trapped ion particle motion in an ion sheath potential of the each 50 times steps for the value of injection velocity  $\tilde{v}_{in} = 0.395$ .

いるものと考えられる。

### 6.3.2 イオン粒子の連続的(ビーム的)入射による不安定性

ダブルプラズマ実験のイオンシースポテンシャルに捕捉される粒子の熱速度は、ターゲット側のシースに十分に加速されるのでグリッドを抜けてドライバ側に向かう粒子は、ほとんどビーム的であるとされる。このことから、今度は左壁より入射するイオン粒子をビーム状態にし、パルス的なイオン粒子入射の場合と同様にシミュレーション解析を行った。この場合の入射イオンの流量は、右壁からの流量の30%~40%に設定し、初期速度  $\tilde{v}_{in}$  は前節同様にシースポテンシャルに捕捉されるように左壁から流出する速度よりやや小さくし、外部印加電圧の変化により調節して定めた。

実際のダブルプラズマ実験における測定と同様に外部印加電圧の変化に対して入射イオン粒子初期速度をシースポテンシャルに捕捉されるように制御し、左壁からのイオン電流を計測した結果を Fig.6.6に示す。この電圧電流 ( $V-I$ ) 特性結果は、実験の観測結果と同様に外部印加電圧が増加すると電流値が飽和することを示している。ダブルプラズマ実験では、電流値が飽和し始める領域(図内(a))より電圧をあげた場合に実験装置のグリッドを流れる電流値に不安定性が観測されている。そこで、外部印加電圧を10Vに設定し、不安定性の観測を行った。

Fig.6.7は、中心部分のプラズマが十分に平衡状態になった時点で左壁よりイオン粒子を熱速度が十分に小さい(ビーム)状態で入射した後の等時間間隔で描いた粒子の位相軌道である。パルス的にイオン粒子を入射した場合と同様に、イオンビームはシースポテンシャルで減速され、一度は  $T/2$ (周期  $T$ ) で見られるように右壁へ流れるが、やがてはイオンシースに押し戻されて左壁に加速され左壁に流出する。このようなイオンシースに捕捉される粒子運動が連続的に繰り返される。

Fig.6.8の(A)の左右の時系列は、それぞれ左壁から粒子を入射しない場合の電流とシースエッジ付近のポテンシャル振動の時系列である。そこでは双方共に不安定な振動は見られずプラズマが平衡状態であり熱ゆらぎが観測される。ビーム的なイオン粒子を左壁から入射した場合には、電流とポテ

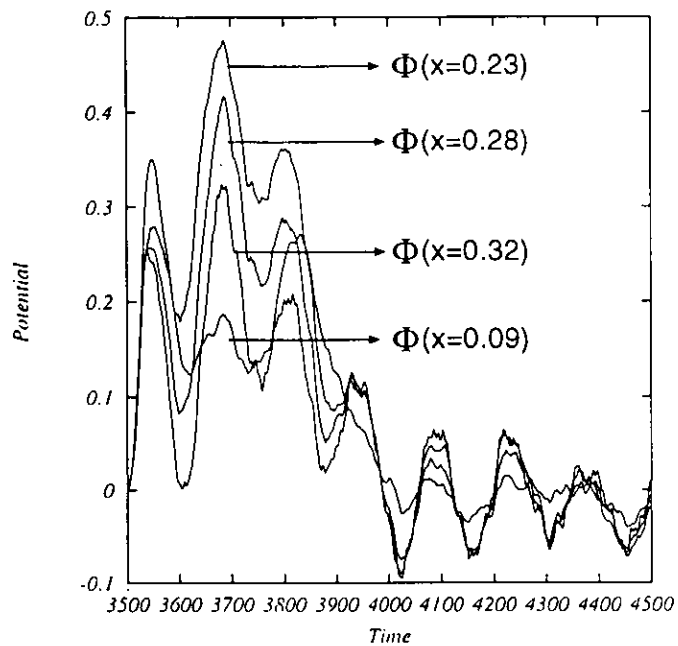


Figure 6.5: The ion sheath oscillation for each position at  $\hat{x} = 0.09, 0.23, 0.28,$  and  $0.32$ , respectively.

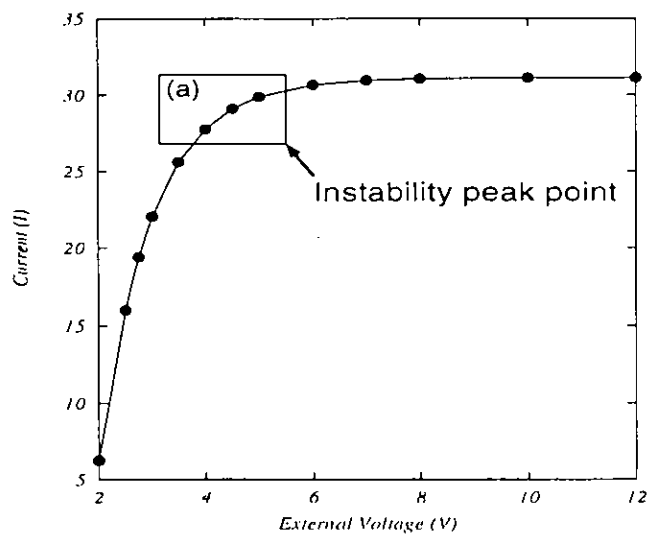


Figure 6.6: This shows the current-voltage characteristics for simulation result.

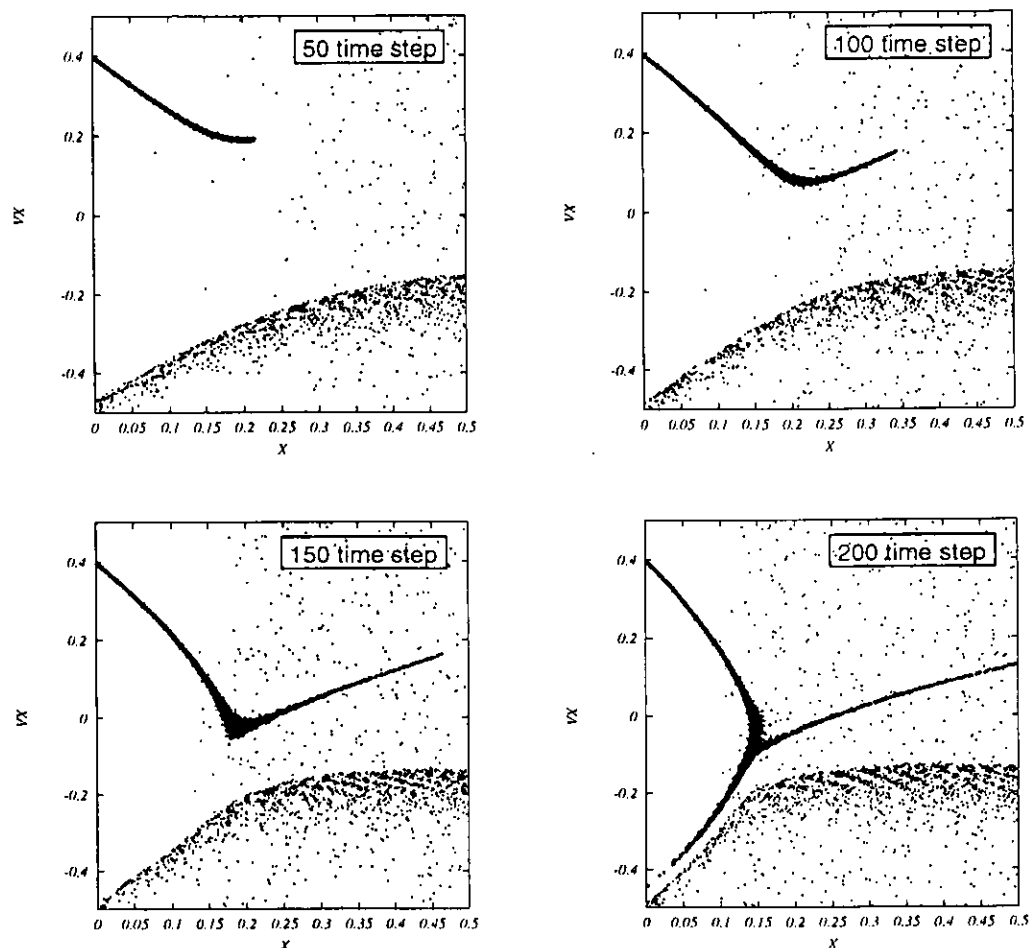


Figure 6.7: The time change of the phase in emitting the ion particle from the left wall in beam like.

ンシャルの時系列は Fig.6.8の (B) の様に変化する。この時の横軸はイオン粒子が入射されはじめてからの時間、縦軸はそれぞれ電流値とシースエッジ付近でのポテンシャル値を示している。この結果を Fig.6.8の (A) の状態と比較すると、イオン粒子がビーム状態で入射された後に電流値とポテンシャルが振動を起こしているのが分かる。イオンシースポテンシャル或は電流は、イオン粒子をビーム的にイオンシースに捕捉されるような速度で入射すると連続的に励起される。定常的なこの励起振動が、実験で報告されているイオンシースにおける不安定性の原因であると考えられる。

シミュレーションによる解析において、この不安定性は実験と同様に  $V-I$  飽和曲線 Fig.6.6の領域 a) より低い電圧では観測されなかった。これは外部印加電圧値が領域 a) より低くなればシースで加速される粒子の熱速度が大きくなり、不安定波が励起されなくなるためであると考えられる。Fig.6.8(C) は、(B) のイオン電流とポテンシャル値の振動周期を示したものである。励起された電流とポテンシャルの振動周期は、同じ周期性であり、さらにこの振動周期は Fig.6.7のイオンシースに捕捉された入射イオンの振動の周期と同程度であることが分かる。これらの結果から、この励起された不安定波はイオンシースに捕捉されたイオン粒子によるシースエッジ振動の自励振動であることが分かる。

Fig.6.9の上図は、シースポテンシャルに捕捉された入射イオン粒子の密度の時間的変化を示している。この密度変化の結果を位相軌道 Fig.6.7 と対応させた場合、もっとも密度の増減が大きい

は、入射イオン粒子の速度が最も減速する点、つまりシースエッジ付近であることがわかる。このシースエッジ付近での密度増減は、周期的であり、その周期は入射したイオンビームの振動周期と同じである。この機構によってイオンシース内には、不安定波が生じていると考えられる。さらに Fig.6.9 の下図は、時間に対する密度変化を位置に着目して描いたもので、もっとも入射イオンの密度増減が大きいシースエッジ付近は、時間に対して振幅が増減しているだけでなく位置方向にも入射イオン粒子と同様な周期で振動しているのが分かる。

これらのシミュレーション結果をまとめると、ダブルプラズマイオンシース中の不安定性は、捕捉イオン粒子の周期運動により、シースエッジにもたらされる密度の時間変化の周期と同程度であるシースエッジの自励振動であることが明らかになった。

## 6.4 イオンシース不安定性におけるカオス現象

### 6.4.1 準周期ルートカオス

準周期性の位相空間上での軌道(アトラクター)は、高温熱核融合プラズマの磁場閉じ込め装置のトラスの無理面つまり閉じた磁気面を示す。それに例えて、トロイダル方向とポロイダル方向の振動数をそれぞれ  $f_0, f_1$  とした場合、両方向の振動数比  $\rho = f_0/f_1$  が無理数の場合は磁気面が閉じる。この場合を準周期的であると言う。この準周期的な運動には、周波数スペクトルに多くのスペクトル線が現れ、その全てのスペクトル線が  $f_0$  と  $f_1$  の線形結合により定められる特徴がある。この準周期運動がカオスへ遷移する場合は、パラメータの制御によって  $f_0$  と  $f_1$  の振動比が有理比となる位相ロッキング領域が起これ、これがこのカオス遷移行程を特徴づける。このようなことを背景にダブルプラズマ実験で観測された準周期ルートによるカオス現象をシミュレーションにより再現し、そのカオス発生機構を明確に示す。

前節では、イオン粒子をビーム状態で左壁からシースポテンシャルに捕捉されるように入射した場合にシース不安定性の原因である不安定波を観測した。ここでは、その不安定波の振動数を  $f_0$  とし、それが存在している時に外部よりそれぞれ振幅  $V_{ac} = 0.4$ 、振動数  $f_1$  の高周波を加えて準周期的な系の振舞いをフーリエスペクトルから観測する解析を行った。

Fig.6.10は、不安定波  $f_0$  に対して外部より振動数  $f_1$  を順に変化させた場合のスペクトル図で、図中の a) ~ b) の  $\omega = 4.4192(n = 45)$  に存在しているのが不安定波の振動数  $f_0$  である。この不安定波  $f_0$  に、a) ~ b) の様に外部振動数  $f_1$  をそれぞれ  $n = 23, 28, 32, 45$   $n = \omega T/2\pi$  と変化させて印加した場合、 $f_0$  はそれらに抑制されず、その他に幾つものスペクトルが Fig.6.10 の a) ~ b) に現れる。さらに具体的に不安定波  $f_0$  に対して外部より印加する電場の振動数を  $n = 20 \sim 45$  に変化させた場合の個々の電流のフーリエスペクトルを示した結果が Fig.6.11 の上図である。そこではスペクトルのピーク値の変化が外部から印加する振動数変化との線形結合で現されるのが観測できる。次にこのスペクトル線形結合性をさらに明確にするため Fig.6.11 の上図の個々の振動数データからスペクトルのピーク値をプロットすると Fig.6.11 の下図の結果が得られる。この図内の観測したピークスペクトル値はそれを結ぶ線形な関数

$$A: f_0 - f_1 \quad (6.4.1)$$

$$B: 2(f_0 - f_1) \quad (6.4.2)$$

$$C: 2f_0 - f_1 \quad (6.4.3)$$

で与えられ、外部より与える  $f_1$  により、すべてのピークスペクトルの値  $f$  は、 $f = mf_0 + nf_1$  で定まっていることがいえる。このことからこの系は準周期的な運動をしていることがいえる。

次に外部振動の振幅  $V_{ac}$  を増加することで系の非線形性を高めてカオスへの遷移状況の観測を行った。ここでは、 $f_0/f_1$  が無理数になるように、 $f_1$  は  $n = 28$  に固定した。

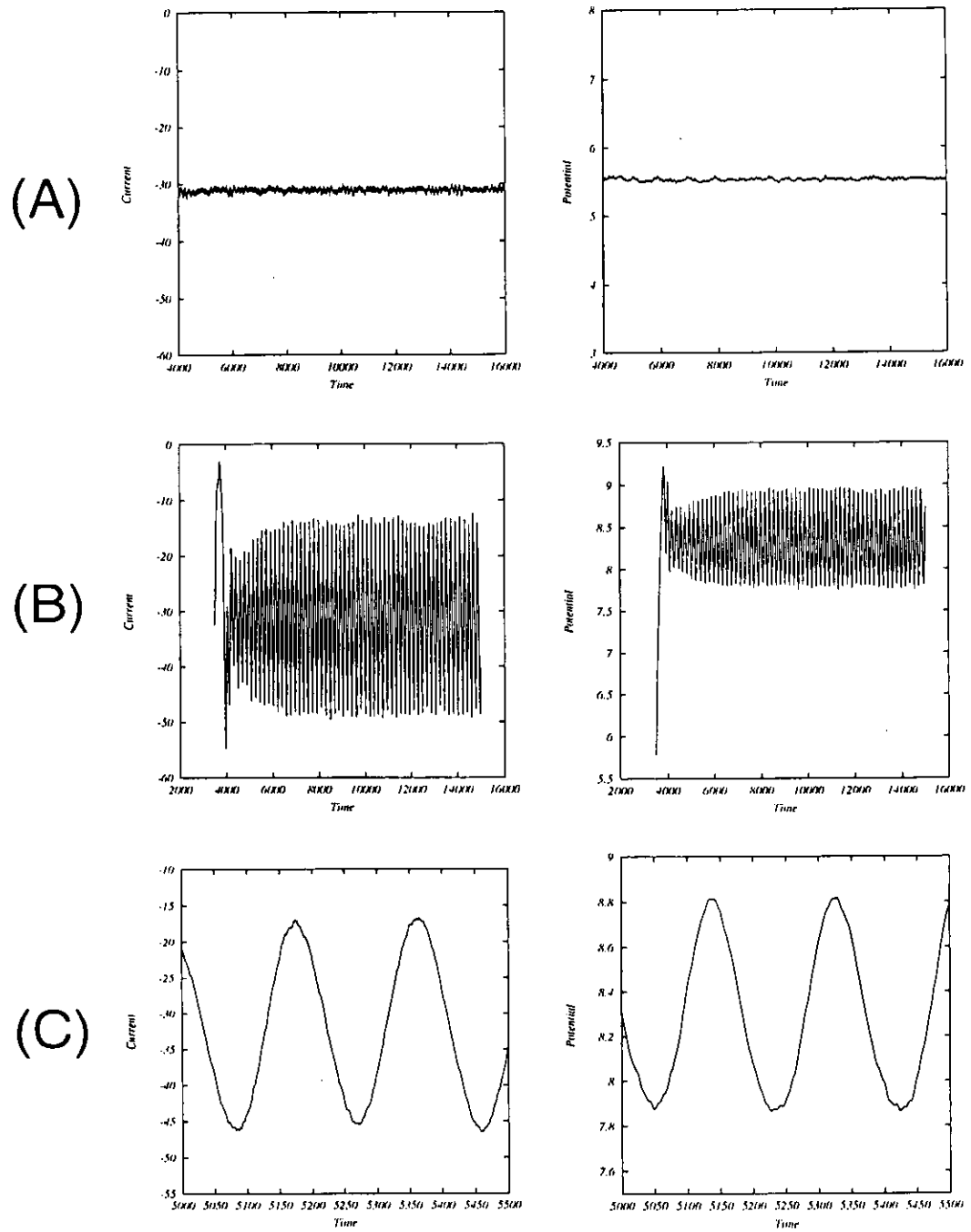


Figure 6.8: The top figure (A) is the time series of current value and potential of the sheath edge vicinity, in not emitting the ion particle from the left side wall. The center of figure (B) shows the time series of current and potential in emitting the ion particle from the left wall in beam like. The bottom figure (C) is expanded each period interval of upper diagram.

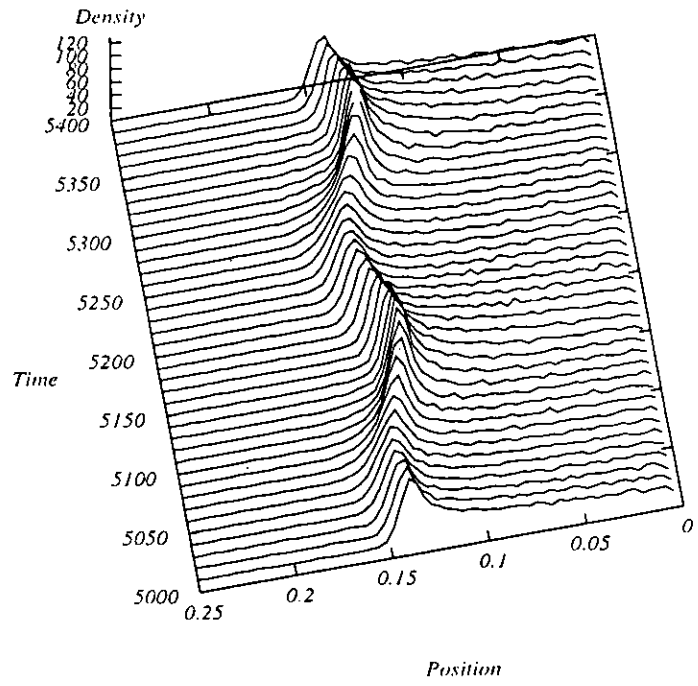
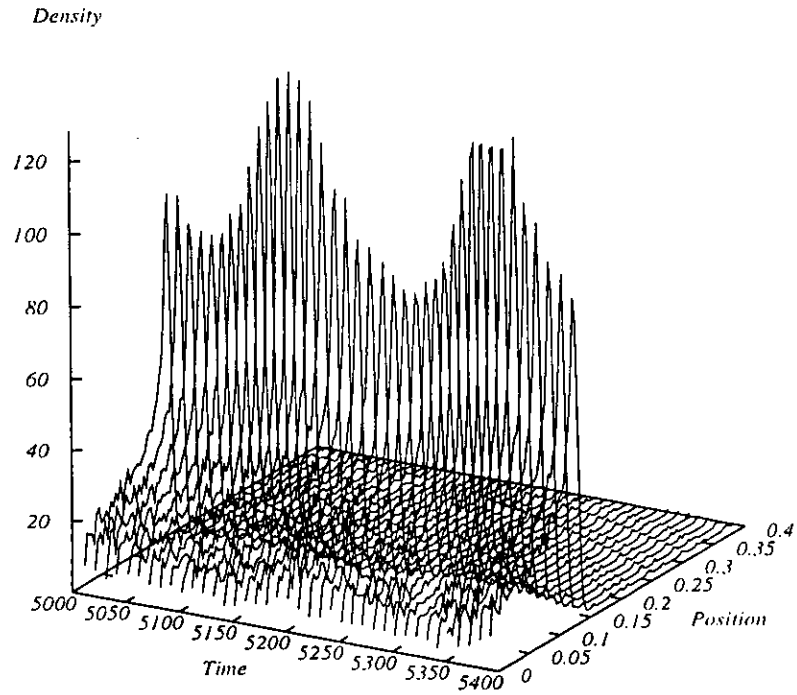


Figure 6.9: Upper diagram showed the time change of the density of the sheath edge vicinity in emitting the ion particle from the left wall in beam like. The rough sketch showed time change of the density of the sheath edge vicinity from the viewpoint of position coordinate.

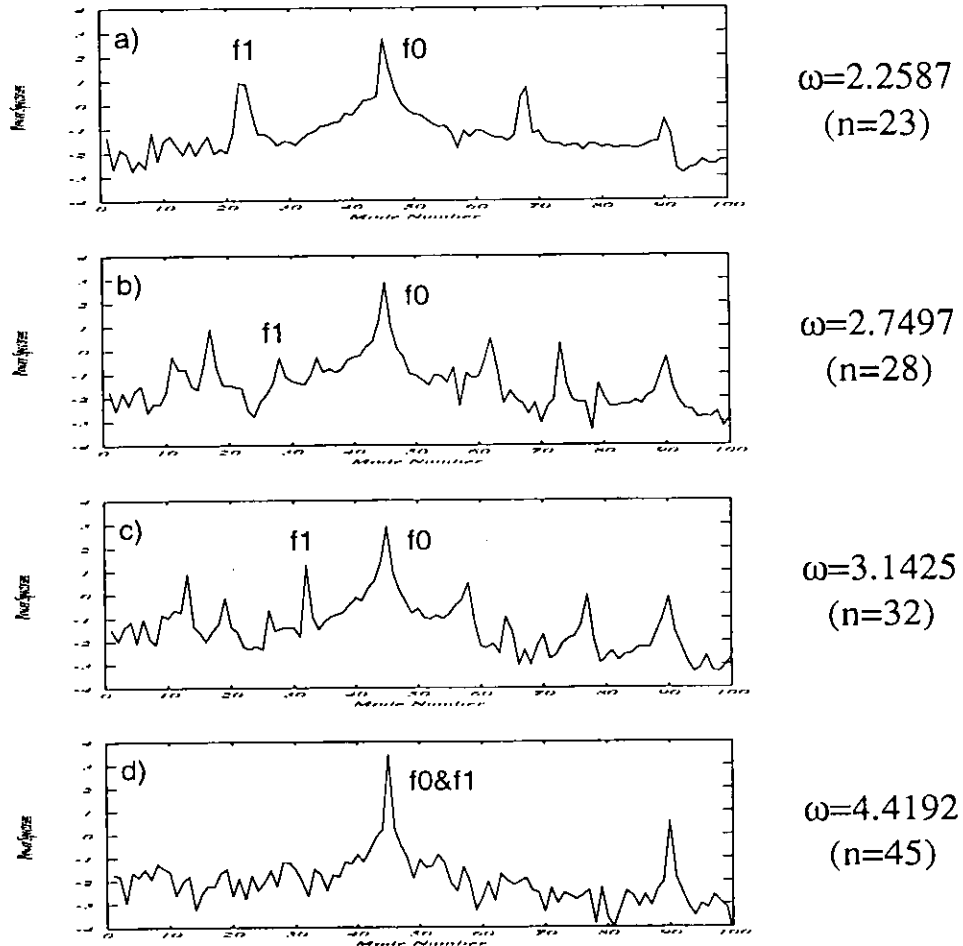


Figure 6.10: This 4-figure shows the current spectral change in giving high frequency from the outside, when instability wave existed.

Fig.6.12の(A)~(C)は、外部振動電場の振幅の変化に対して、それぞれ左から電流時系列、それに対するフーリエスペクトル、そして電流時系列  $I_t$  に対してある時間遅れ  $I_{t+\tau}$  をプロットした結果である。この時の  $\tau$  は、ピークスペクトルの周期数の  $1/m$  ( $m=3\sim 5$ ) で定め、系のカオスはこの相空間構造より観測した。

Fig.6.12(A)は、外部振幅  $V_{ac} = 0.4$ 、周波数  $f_1$  を  $n = 28$  で与えた場合のシミュレーション結果で、中図ではすべてのスペクトルが  $f_0$  と  $f_1$  の線形結合により定められる準周期運動を、右図のアトラクタでは、周期的な軌道を観察することができる。さらに外部振幅  $V_{ac} = 0.8$  にまで変化させた場合は(B)図のようになる。ここでは(A)に比べ外部からの非線形性が強くなるためスペクトルにノイズが含まれ、アトラクタでは周期性が完全に崩壊した状況になっている。ここにおいて系はカオス状態に遷移したといえる。また、本解析において  $V_{ac} = 0.6 \sim 0.75$  のカオス遷移前においては、電流時系列、FFT、アトラクタが殆んど変化しない状態を観測した。ここにおいて位相ロッキングが起こっていると考えられる。 $V_{ac}$  を  $2V$  まで増加させた場合の結果が(C)図である。ここでは不安定振動数  $f_0$  が外部からの強い非線形効果により打ち消され、スペクトルは外部振動数  $f_1$  の高調波成分が支配的な系に変化している。よってこの場合の位相軌道は、もともとある不安定波の振動数  $f_0$  による軌道ではなく、 $f_1$  の周期性をもった外部電場に駆動された軌道に変化したものであることがいえる。

これらの結果をまとめると、外部印加電圧の振幅が  $0 < V_{ac} < 0.6$  では、系は準周期的な運動を

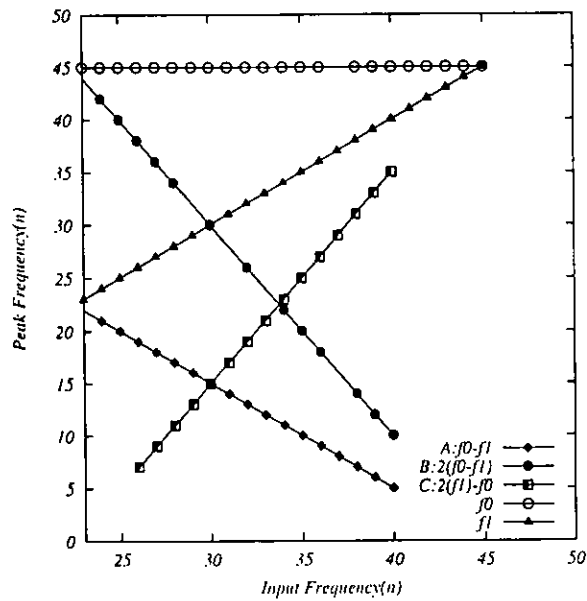
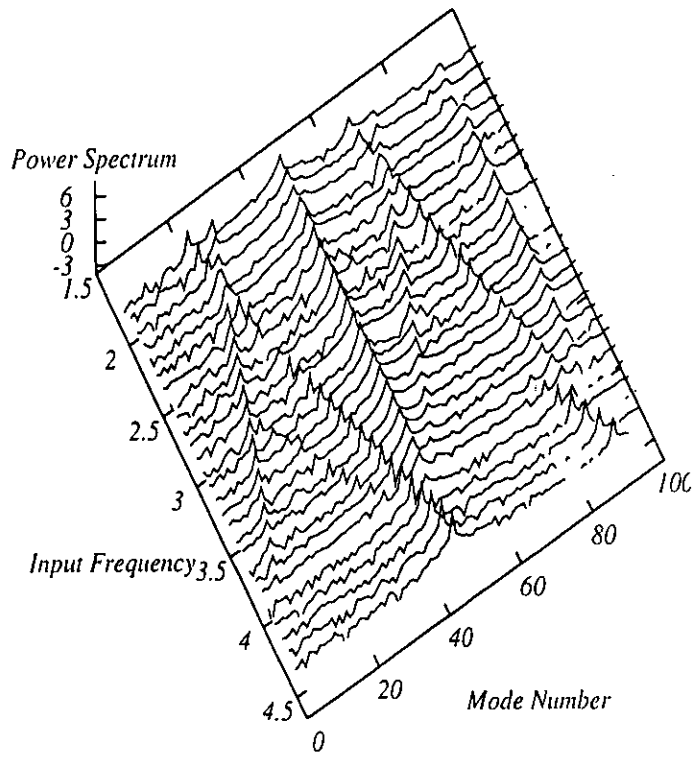


Figure 6.11: (Top): The current spectrum which changed by each high frequency given from the outside. (Bottom): This diagram shows the observed the current peak spectrum of (Top) by the high frequency given from the outside.



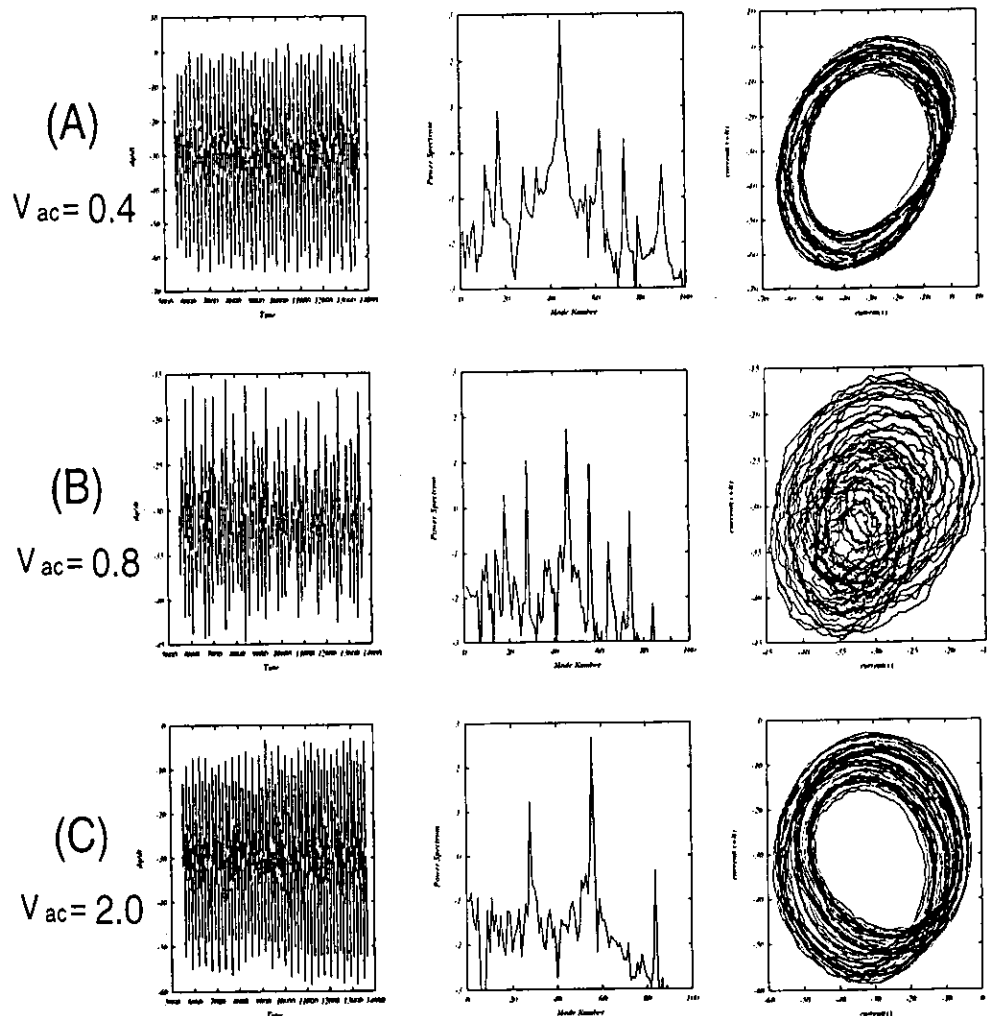


Figure 6.12: The top (A) shows the current time series, FFT of current, and phase structure of current for quasi-periodic motion. The (B) shows being a chaotic state. The bottom (C) shows the situation which it drives the system by removing the instability wave of the sheath in oscillatory electric field from the outside.

示し、それよりさらに振幅を増加させると  $0.6 < V_{ac} < 0.75$  では準周期のカオス遷移を特徴づける位相ロッキングがおこる。そして  $0.8 < V_{ac} < 1.2$  では系はストキャスティックになりそれ以上になると外部振動が支配的な運動に変化することがわかった。このようにして実験で観測された準周期ルートのカオス現象が、シミュレーションによって再現することができた。

## 6.5 結論と課題

### 6.5.1 結論

本論文では、ダブルプラズマ実験におけるイオンシース不安定性に関連した準周期ルートのカオス現象を粒子シミュレーションにより再現し、不明確であったカオス励起機構の原因を追求する解析を行ってきた。その結果、まず実験において不明確であったイオンシース不安定性は、ターゲット側のシースに十分に加速され、そのままグリッドに流れずにターゲットとドライバ側とのシースポテ

ンシャル内に捕捉されたイオン粒子の運動の寄与によるものであることが分かった。そしてイオン粒子がそのポテンシャルに捕捉され始めると、これまでゆらいでいたシースポテンシャルの振動とシースエッジ近傍の密度変化は、捕捉粒子の自励振動周期とほぼ同程度に変化するのが観測された。このことから、ダブルプラズマイオンシース内に生ずる不安定波の周期性は、イオンシースに捕捉されたイオン粒子の自励振動であるといった興味深い結果に結論づけられた。

次に、我々は、実験と同様にイオンシース中に存在する不安定波に対して外部から高周波を与えることで準周期運動を観測しカオスを励起させることを行った。その結果、外部からの振動電場振幅を増加させることで、系の非線形性は徐々に増大し、ストキャスティックに変化していくのが観測され、ある遷移パラメータ領域では、準周期カオスルートを特徴づけるカーリーヨークの位相ロッキング(周波数同期)現象を実験と同様に観測することができた。このような結果より、実験で観測されているイオンシース中の不安定性に関する準周期ルートのカオス現象は、本解析での粒子シミュレーションモデルによって再現できたといえる。

### 6.5.2 今後の課題

本シミュレーション解析において、イオンシース中で観測された不安定性は、左壁より入射するイオンビームの速度( $\tilde{v}_{in}$ )をグリッドに印加する電圧に対し定め、その入射流量を右壁からの入射流量の30%程度に設定したことにより得られた。

上記の不安定性が観測できたパラメータとは別に、入射流量を同じで入射速度 $\tilde{v}_{in}$ をシースエッジまで到達しない速度にした場合には、イオンシース中に不安定性波を観測することができなかった。このことから、必ずしも左壁から任意の速度、流量でビーム的にイオン粒子を入射すると不安定波が励起されるわけではないのがわかる。イオンシース内に不安定波を励起させるには、入射した粒子がシースエッジ付近まで到達する速度とシースエッジ近傍での密度の周期変化が顕著に見られる程の入射流量が必要である。これらが満足した場合にシースポテンシャル自体の周期性がイオンシースの捕捉粒子の自励振動に変化して、不安定性が観測されるのである。

以上のことをまとめると、平衡状態のプラズマ内で定常振動をしているイオンシース自体の周期性をイオン粒子をビーム的に入射することで変化させるには、1), 入射イオンビーム速度 2), 入射イオンビーム流量 3), シース幅を決める外部印加電圧 の3つの問題が関係することがいえる。本研究のシミュレーション解析でのパラメータで観測したイオンシース中の不安定性は、上記の3つの要素の条件を満足した一部の結果である。それゆえ、イオンシース中に不安定性を生じるパラメータには閾値が必ず存在していると考えられ、その領域を定量的に分析し明確にすることは、今後の課題である。そしてまた、イオンシース不安定性と捕捉イオン粒子の運動を考慮した理論の構築は興味ある課題である。

# Chapter 7

## まとめ

本節では、保存系カオスの問題として標準写像の諸種の問題を *Chapter 1* ~ *Chapter 4* にて議論した結果と散逸系カオスの問題としてダブルプラズマ実験装置でのカオス現象を議論した *Chapter 5* ~ *Chapter 6* での結果をそれぞれまとめる。そして、章末においては本論文での共通の問題であるカオス現象に対して議論し、今後の課題や展開を述べる。

### 7.1 保存系カオスの問題

*Chap 1* ~ *Chap 4* では、保存系のカオスと題して、高温プラズマ生成装置での粒子の運動をはじめその他、非線形力学系カオスの基礎的な例として議論されている標準写像に対する諸種の問題に対して解析を行ってきた。そこでは、位相における様々な固有の軌道とカオス軌道が共存する領域の問題に対して周期軌道の存在領域を定め、その相空間構造を明確にしたり粒子の長時間にわたる運動特性を拡散係数により統計的に記述した。

特に本解析では、標準写像における位相空間の解析においては固有の周期モードに限らず、理論的に定めた多重周期加速モードに対してそれらの運動特性やカオス遷移で重要な分岐問題をそれらのモードに対して議論してきた。Table 7.1 には、これまで *Chap 1* ~ *Chap 4* の解析にて定量的に定めた各種のモードを示し、以下に各章ごとの解析結果をまとめる。

*Chapter 1* では、標準写像の統計的性質を拡散係数の数値計算によって定めた。特に非線形パラメータ  $A$  が 1 より小さく、基本加速モード [10] の存在が許されない領域において拡散現象の共鳴的增加を観測し、これらの異常拡散の鋭いピークが標準写像の多重反復写像に対して存在が許される多重周期加速モードの寄与によることを明らかにした。

以下に結果をまとめる。

- 拡散係数の数値実験を非線形パラメータ  $A$  が 1 より小さい領域で行った結果、多重周期加速モードの寄与による異常拡散領域を詳細に観測した。
- 拡散係数の数値実験結果に見られる鋭いピーク値に対応する多重周期加速モード (2 周期、3 周期、5 周期) の存在値を理論的に定め、それら存在領域をピーク値に対応していることを確認した。

*Chapter 2* では、*Chapter 1* において見出された 3 周期加速モードの相空間構造を示し、そのモードが安定に存在する領域を接線写像 (線形安定性) による剰余 (Residue) の計算によって定めた。その結果、この 3 周期加速モードでは剰余値が単調増加する通常のモードとは違い、ある値を上限に放物

Table 7.1 : The various periodic motion and the stable region in each of the Chapters.

| <i>Parameter A</i> | <i>Period</i>          | <i>Mode identification</i> | <i>Chapter</i>         |
|--------------------|------------------------|----------------------------|------------------------|
| $A \approx 0.55$   | <i>Period-3 Step-1</i> | <i>Accelerator Mode</i>    | <i>Chapter 1,2,3</i>   |
| $\approx 0.65$     | <i>Period-3 Step-1</i> | <i>Accelerator Mode</i>    | <i>Chapter 1,2,3</i>   |
| $\approx 0.75$     | <i>Period-3 Step-1</i> | <i>Accelerator Mode</i>    | <i>Chapter 1,2,3,4</i> |
| $\approx 0.81$     | <i>Period-3 Step-2</i> | <i>Accelerator Mode</i>    | <i>Chapter 1,2,3</i>   |
| $\approx 0.88$     | <i>Period-3 Step-2</i> | <i>Accelerator Mode</i>    | <i>Chapter 1,2,3</i>   |
| $\approx 0.65$     | <i>Period-2 Step-1</i> | <i>Accelerator Mode</i>    | <i>Chapter 1,3</i>     |
| $\approx 0.42$     | <i>Period-5 Step-1</i> | <i>Accelerator Mode</i>    | <i>Chapter 1</i>       |
| $\approx 0.60$     | <i>Period-5 Step-2</i> | <i>Accelerator Mode</i>    | <i>Chapter 1</i>       |
| $\approx 0.49$     | <i>Period-4</i>        | <i>Periodic Orbit</i>      | <i>Chapter 3</i>       |
| $\approx 0.67$     | <i>Period-4</i>        | <i>Periodic Orbit</i>      | <i>Chapter 4</i>       |

線的に減少するといった興味深い現象を得た。この剰余値  $R$  が  $0 \rightarrow 1$  の様に不安定化を起こす場合には、 $R \approx 1$  付近では、倍周期分岐がおり、 $R$  が  $1 \rightarrow 0$  の様に不安定化を起こす場合には、無反射双曲型分岐 (同周期分岐) が起こる。そこで倍周期と同周期分岐の構造を明確に示し、それぞれの分岐種の特徴を対称線解析を用いて定めた。

以下にこの章での分岐現象に纏わる解析をまとめる。

- 3 周期加速モードの具体的な島構造の安定性解析によって 2 つの双曲型の不安定点をもった分岐現象に関する相空間構造を明確に示した。
- 無反射双曲型分岐 (同周期分岐) によって新たに生まれる島構造には、従来の運動量反転に対する対称線ではその周期性が判別できないといった特徴があることが分かった。

Chapter 3 では、4 周期固定モードと 2 周期加速モードに対して、安定点をとり囲む軌道の周期性や倍周期あるいは同周期分岐による周辺島の周期性の変化を高次対称線により解析した。その結果を以下にまとめる。

- 4 周期固定モードの位相構造において、カオスとの境界付近 (安定中心点から最外殻の周期軌道) の 8 つの島は、単純に 3 2 周期ではなく、4 つの軌道 (1 6 周期) がペアになって構成されている形態であることが高次対称線の解析によって明らかになった。このことから、位相図から直接的に周期性を判別することは十分ではないことを示した。
- 4 周期固定モードと 2 周期加速モードのそれぞれの分岐現象を高次対称線により分析した結果、安定点が不安定化し倍周期分岐が始まる分岐過程の初期の段階では、中心島を覆う周りの周期軌道は、分岐による周期倍化の影響は受けないことが分かった。
- 倍周期分岐が完全に終り、島がそれぞれ分離独立した場合には、その分離島安定点を取り囲む周辺の島の周期性は分岐前の倍になっていることが確認された。
- 4 周期固定モードにおいては、無反射双曲型の分岐現象 (同周期分岐) が観測された。分岐の分岐前後の安定島周辺の周期性を高次対称線により解析した結果、分岐前後では、中心島あるいはその周辺の周期性には変化が見られないことを確認した。

Chapter 4では、本解析において Chapter 3とは違い新たに見出した4周期軌道 ( $A = 0.6700$ ) と3周期加速モードには無反射双曲型の分岐が起こることを観測した。そこで、それらに対して高次対称線の解析を用い、結果を比較検討し、共通する普遍的な特徴を見出した。その結果を以下にまとめる。

- 無反射双曲型分岐により新しく生まれた島構造には、それらを満足に示す対称線が存在しない。
- 4周期固定モードおよび3周期加速モードの分岐に対する高次対称線は、セパトリックスに漸近することが明らかになった。

本解析によって標準写像の位相空間におけるカオス軌道の性質を拡散係数の数値実験により定めることができた。相空間の周期軌道に対しては、軌道がカオスに遷移する際の重要な分岐現象あるいは特異的な周期軌道の特徴を対称線による解析によって説明することができた。

## 7.2 保存系の今後の課題

保存系では、標準写像の位相空間に存在する、カオス軌道と周期軌道が複雑に絡み合ったそれぞれの軌道に対する解析を具体的に行って来た。位相空間にカオスと周期軌道が共存する系の拡散過程を理論統計的に記述し、それらを満足する相似則を見出すことが今後の重要な課題である。

### 7.3 散逸系のカオスの問題

Chapter 5 および Chapter 6 において、ダブルプラズマ実験で観測された倍周期分岐ルートのカオス及び準周期ルートのカオス現象について、それぞれ散逸系の微分方程式および粒子シミュレーションにより解析を行った。それらの結果を以下にまとめる。

Chapter 5 では、ダブルプラズマ実験で観測された装置を流れる電流波形スペクトルの倍周期分岐ルートのカオス現象に対して、その発生要因が、シースポテンシャル内に捕捉された粒子のカオス的な運動に起因していると考え、現実的な Child-Langmuir 則に従ったポテンシャルモデルを用いた散逸微分方程式モデルで記述し解析を行った。その結果を以下にまとめる。

- 実験で観測された倍周期分岐による遷移過程 (周期倍化  $\rightarrow$  カオス  $\rightarrow$  3 周期分岐  $\rightarrow$  再びカオス) と同じ遷移過程をモデル方程式で観測した。
- この遷移過程には、シンプルな散逸系のモデル写像解析で得られる散逸系の普遍的な性質 (Feigenbaum constant) が成立した。
- モデル方程式の減衰項を変化させることで、2 倍周期化の遷移現象以外にも多様な遷移シナリオが観測された。

Chapter 6 では、ダブルプラズマ実験において観測されたイオンシース中の不安定波の発生要因およびその波に対して外部から振動電場を印加することで観測された準周期ルートのカオス現象の励起機構を明らかにするため、実験をモデル化した粒子シミュレーションを行った。その結果を以下にまとめる。

- ダブルプラズマイオンシース中の不安定性は、その周期が捕捉イオン粒子軌道の周期、及び捕捉粒子がシースエッジにもたらず密度の時間変化の周期と同程度であるシースエッジの自動振動であることを明らかにした。
- この不安定波に外部振動を印加することで、捕捉イオン粒子の準周期運動を観測し、外部振動電場の振幅を増加させることで実験と同様に位相ロッキングを経た後にカオス現象を再現した。

### 7.4 散逸系の今後の課題

散逸系においては、粒子シミュレーションにより、実際の実験室で観測されたカオス現象を再現することができた。この結果によって、プラズマの様な多数自由度系のカオス現象でも、低自由度系のモデル式で説明できる場合があることが確認された。粒子シミュレーションによりダブルプラズマ実験で観測されている間欠性ルート及び倍周期分岐ルートのカオス発生機構を解明することが今後の課題である。

## 参考文献

- [1] J.D.Hanson and J.R.Cary, *Phy. Fluids* **27**,767 (1984).
- [2] M. N. Rosenbluth , R.Z.Sagdeev, J. B. Taylor, and G. M. Zaslavsky, *Nucl. Fusion* **6**, 297 (1966).
- [3] N. N. Filonenko, R. Z. Sagdeev, and G.M. Zaslavsky, *Nucl. Fusion* **7**,253 (1967).
- [4] A.Fukuyama, H.Momota, and R.Itatani, *Phy. Rev. Lett.* **38**,701 (1977).
- [5] C. F. F. Karney, *Phys. Fluids* **22**, 2188 (1979).
- [6] B.V. Chirikov, *Phy. Rep.* **52**, 263 (1979).
- [7] J. D. Meiss, J. R. Cary, C.Grebogi, J. D. Crawford, and H. D. I. Abarbanel *Physica.* **6D**, 375 (1983).
- [8] C. F. F. Karney, *Physica.* **8D**, 360 (1983).
- [9] J.D. Meiss, R.S. MacKay, and I.C. Percival, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 697 (1984).
- [10] Y. H. Ichikawa, T. Kamimura, and T. Hatori, *Physica.* **29D**, 247 (1987).
- [11] R. S. MacKay, J. D. Meiss, and I.C. Percival, *Physica.* **13D**,55 (1984).
- [12] Kei Hirose, S. Saitô, and Y. H. Ichikawa, *Plasma. Phy. Rep.* **22**, 842 (1996).
- [13] J. M. Greene, *J. Math. Phys.* **9** 760 (1968).
- [14] R.S.Mackay and J.D.Meiss, "*Hamiltonian Dynamical Systems, a reprint selection*" (Adam Hilger,London,1987).
- [15] J.M.Greene, R.S.MacKay, F.Vivaldi, and M.J.Feigenbaum, *Physica.* **3D** (1981) 468.
- [16] J.Hole and H.Kocak, "*Dynamics and Bifurcations*" (Springer-Verlag,New York,1991).
- [17] T.C.Bountis, *Physica.* **3D** (1981) 577.
- [18] J.E.Howard and R.S.Mackay, *J. Math. Phy.* **28** (1987) 5.
- [19] A.J.Lichtenberg and M.A.Liberman, "*Regular and Chaotic Dynamics*" (Springer-Verlag,New York,1991).
- [20] Y.H.Ichikawa, Y.Nomura, and T.Kamimura, *Prog. Theor. Phys. Suppl. No.99* (1989) 220.
- [21] L.E.Reichl, "*The Transition to Chaos in Conservative Classical Systems*" (Springer-Verlag,New York,1992).

- [22] V.I.Arnold, "*Mathematical Methods of Classical Mechanics*", (Springer-Verlag, New York, 1978).
- [23] W.Horton and Y.H.Ichikawa, "*Chaos and Structures in Nonlinear Plasmas*" (p.140), (World Scientific, Singapore, 1996).
- [24] "*R.de.Vogelaere Contributions of the Theory of Nonlinear Oscillations Vol.IV*", edited by S.Lefschetz (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1958).
- [25] Y.H.Ichikawa, T.Kamimura, T.Hatori, and S.Y.Kim, Prog. Theor. Phys. Suppl. No.98 (1989) 1.
- [26] Kei. Hirose, T.Kamimura, and Y.H.Ichikawa, J. Plasma and Fusion Reserch Vol.74 (4) (1998) 361.
- [27] J.E.Howard and J.Humpherys, Physica. D 80 (1995) 256.
- [28] S.Saitô, Y.Nomura, Kei. Hirose, and Y.H.Ichikawa, Chaos 7(2) (1997) 245.
- [29] J.D. Meiss, Rev. Mod. Phys. 64 (1992) 795
- [30] E.Pina and L.J Lara, Physica 26D (1987) 369
- [31] K. Tanikawa and Y. Yamaguchi, J. Math. Phys. 30 (1989) 608
- [32] S.Saitô, Kei. Hirose, and Y.H.Ichikawa, Chaos, Soliton and Fractals (1999), submitted for publication
- [33] C. Murakami, W.Murakami, S.Saitô, and Y.H. Ichikawa Prog. Theoret. Phys. (1999), submitted for publication
- [34] Y.Sakawa, C.Joshi, P.K.Kaw, V.K.Jain, T.W.Johnston, F.F.Chen, and J.M.Dawson, Phys.Rev.Lett. Vol.69, No1,6 (1992) 85.
- [35] T.Ueki and Y.Nishida, J. Plasma and Fusion Research Vol.73 (10) (1997) 1118.
- [36] N.Ohno, A.Komori, M.Tanaka, and Y.Kawai, Phys.Fluids B3 (1),(1991) 228.
- [37] N.Ohno, A.Komori, M.Kono, and Y.Kawai, Phys.Fluids B5 (3),(1993) 796.
- [38] M.Kono and A.Komori, Phys.Fluids B4 (11),(1992) 3569
- [39] M.Kono J. Plasma and Fusion Research Vol.73 (8) (1997) pp.820-826.
- [40] J.M.T. Thompson and H.B. Stewart, "Nonlinear Dynamics and Chaos" (1986) John Wiley & Sons.
- [41] M.Hénon and Y.Pomeau, "Two strange attractors with a simple structure. In Turbulence and Navier-Stokes Equation" (Springer Lecture Notes in Mathematics, vol.668) Springer-Verlag: New York.
- [42] E.Ott, "Chaos in Dynamical Systems" (1993) Cambridge Univ press.
- [43] M.J.Feigenbaum, J.Stat.Phys. 21 (1979) 669
- [44] M.Bier and C.Bountis, Phys. Lett 104A (1984) 239



- [45] K.Tomita, H.Hata, T.Horita, H.Mori, T.Morita, H.Okamoto, and H.Tominaga, Prog. Theor. Phys. 81 (1989) 1124
- [46] M.Kono, J. Plasma and Fusion Research. Vol.73 (8) (1997) 820
- [47] J.P.Verboncoeur, M.V.Alves, V.Vahedi and C.K.Birdsall, J. Comp. Phys. Vol.104, No.2, (1993) 321
- [48] A.Komori, N.Ohno, T.Yamaura and Y.Kawai, Phys. Lett A. 170 (1992) 439
  
- [49] L.A.Schwager and C.K. Birdsall. "*COLLECTOR AND SOURCE SHEATHS OF A FINITE ION TEMPERATURE PLASMA.*" Memorandum No.UCB/ERL M88/23 13 April 1988, University of California, Berkley.
- [50] L.A.Schwager. "*EFFECTS OF ION REFLECTION ON THE COLLECTOR AND SOURCE SHEATHS OF A FINITE ION TEMPERATURE PLASMA.*" Memorandum No.UCB/ERL M88/25 13 April 1988, University of California, Berkley.
- [51] Stephane Rousset. "*TIME-DEPENDENT CHILD-LANGMUIR DIODE SIMULATION.*" Memorandum No.UCB/ERL M83/39 11 July 1983, University of California, Berkley.