

残差構造解析による Lee-Carter モデルの拡張と  
年金負債評価

井川 孝之

博士 (学術)

総合研究大学院大学  
複合科学研究科  
統計科学専攻

平成 25 年度  
(2013)



# 序

年金制度は、少子高齢化や資産運用のリスク増大等の問題に直面している。社会経済が成熟する中、年金制度を持続して行くことは重要な課題であり、特に人口構造の変化については、世代間扶養を前提とする公的年金において対応が必要となっている。1人の女性が一生に産む子供の平均数を表す合計特殊出生率は、1970年代前半の2.14人をピークに減少傾向を辿り、1989年の1.57人(ひのえうまの1.58人を下回ったため「1.57ショック」と呼ばれる)からさらに減少し、直近2012年には1.41人となっている。平均寿命は、終戦後の1947年では男50.06歳、女53.96歳であったのが、直近では、男79.94歳、女86.41歳と著しく上昇し、世界最高水準となっている。我が国は世界的にも著しい速さで少子高齢化が進んでおり、年金財政へ大きな影響を及ぼしている。また、積立方式を前提とする企業年金においては、資産運用の影響も大きい。高度経済成長期においては、高金利の確定利付債へ投資することによって、高い運用利回りを得ることが可能であったが、経済成長の鈍化に伴い、運用収益の水準が低下しリスクが増大した。

年金制度におけるリスクが増大し不確実性が高まった状況においては、リスクを明確化し定量的に把握し、制度設計の基礎となる財政推計や負債評価へ反映させることが従来以上に求められよう。このようなことを通じて、年金制度に関わる関係者へリスク負担について説明し合意を得ることができ、また、リスク管理を高度化することも可能となる。様々なリスクシェアリングを実現するための制度を構築することも可能となろう。

本論文では、このような背景を踏まえ、主に死亡・長寿リスクに焦点を当てる。年金制度の財政推計や負債評価に国際的に使用されている死亡率モデルは、Lee-Carter (LC) モデルである。LCモデルは、死亡率の水準を死亡指数  $\kappa_t$  の系列により表現でき、取り扱い易く、死亡率水準の長期的な傾向を捉えるのに優れている。しかしながら、LCモデルを我が国の死亡データへ適用し最尤推定したパラメータによる中央死亡率の年齢と時代を軸に取った残差局面にはうねりのようなものが観察され、残差系列には時系列相関が認められる。Willets (2004) は日本の女の高齢死亡率に生年コーホート効果が観察されるとしているが、コーホート効果を考慮した既存の拡張LCモデルを我が国の死亡率へ適用すると、依然として残差局面にはうねりが残り、これらのモデルでは捉えきれない効果が存在する可能性がある。本論文では、LCモデルの残差構造を解析することにより、概ね10歳代後半から90歳くらいまでの年齢の残差には生年コーホート別の効果(効果1)と補足的な年齢・期間別の効果(効果2)の2つがあるとする仮説を策定し、その仮説に沿って新たなLee-Carter Vector Autoregressive (LC-VAR) モデルを構築した。LC-VARモデルを我が国の1971-2009年・14-90歳の死亡データへ適用し、LCモデルや既存の拡張LC

モデルと比較すると、男女とも良好な適合度を持つ。LC-VAR モデルは、コーホート効果が観察される英国等では適合度が余り良好でないが、米国等では、既存の拡張 LC モデルより良好な適合度を持つ。

死亡率モデルは、将来人口推計や年金制度の財政推計に利用されている。また、年金や保険の負債評価へ応用することが可能である。新たに構築した LC-VAR モデルは、LC モデルと比較し、中短期的な将来死亡率予測が改善する。また、将来死亡率におけるコーホート効果の収束期間を検討したり、中短期的な年金や保険契約の負債をより適切に評価することが可能となる。負債評価については、LC-VAR モデルを死亡データへ適用した場合の超過分散 (overdispersion) の可能性を踏まえ、超過分散へ対応した LC-VAR モデルによる将来死亡率の不確実性評価も試みる。これらのリスクに関する分析や提案を踏まえ、年金の負債評価や財政運営の方向性について考察する。

社会経済が成熟して行く中、本論文で示す各種分析や提案する LC-VAR モデル等により、年金制度に内包される死亡・長寿リスクへの理解が深まり、より適切な将来死亡率推計とリスク評価が可能となり、そのことを通じて、年金制度が持続して運営されて行くことを切望する。

# 目次

序	i
目次	iii
<b>第 1 章</b> はじめに	1
1.1 我が国の年金制度の概要	1
1.2 年金財政の仕組み	3
1.3 運用収益の低下とリスクの増大	4
1.4 平均寿命の伸長	5
1.5 本論文の概要と構成	6
<b>第 2 章</b> 既存の手法と先行研究	9
2.1 負債評価の手法	9
2.2 死亡率モデル	10
<b>第 3 章</b> 死亡データ	15
3.1 我が国の死亡統計と死亡率	15
3.2 Human Mortality Database (HMD)	16
<b>第 4 章</b> Lee-Carter モデルの残差構造解析とモデリング	19
4.1 Lee-Carter (LC) モデルの概要	19
4.2 LC モデルの我が国死亡データへの適用	20
4.3 既存の拡張 LC モデル	23
4.4 Cairns, Blake and Dowd (CBD) モデル	27
4.5 LC モデルの残差構造解析 (日本の死亡データの場合)	28
4.6 Lee-Carter Vector Autoregressive (LC-VAR) モデルの策定	34
4.7 LC-VAR モデルのパラメータの最尤推定	35
4.8 LC-VAR モデルと各モデルの適合度の比較	41
4.9 考察	49

第 5 章	LC-VAR モデルの海外死亡データへの適用	53
5.1	英国の死亡データへの適用 . . . . .	53
5.2	米国の死亡データへの適用 . . . . .	54
5.3	フランスの死亡データへの適用 . . . . .	59
5.4	各国の結果を踏まえた考察 . . . . .	59
第 6 章	LC-VAR モデルによる死亡率予測とリスク評価	65
6.1	死亡率予測のためのモデル . . . . .	65
6.2	死亡指数 $k_t$ 系列の単位根検定 . . . . .	66
6.3	将来死亡率の点予測と信頼区間評価 . . . . .	66
6.4	年金負債及び一時払純保険料の評価への応用 . . . . .	70
第 7 章	超過分散へ対応した LC-VAR モデル	73
7.1	超過分散の可能性 . . . . .	73
7.2	超過分散へ対応した LC モデル . . . . .	74
7.3	超過分散へ対応した LC-VAR モデル . . . . .	76
7.4	将来死亡率の信頼区間の評価 . . . . .	81
第 8 章	結び	85
8.1	死亡率の変動要因分析と将来推計・リスク評価 . . . . .	85
8.2	年金負債の評価 . . . . .	86
8.3	展望 . . . . .	86
参考文献		99

# 表目次

2.1	代表的な死亡法則 . . . . .	11
3.1	我が国の生命表とその概要 . . . . .	16
4.1	LC モデルのパラメータ推定値 ( $\lambda, \sigma_\eta$ )(対象データ: 0-98 歳, 1971-2009 年) . . . . .	21
4.2	LC, LC-VAR モデルのパラメータ推定結果 ( $\lambda, \sigma_\eta$ )(対象データ: 14-90 歳) . . . . .	41
4.3	AIC・BIC と死亡数の標準化誤差の分散 (男) . . . . .	47
4.4	AIC・BIC と死亡数の標準化誤差の分散 (女) . . . . .	47
4.5	尤度比検定の結果 (男) . . . . .	48
4.6	尤度比検定の結果 (女) . . . . .	48
5.1	AIC・BIC と死亡数の標準化誤差の分散 (英国) . . . . .	58
5.2	AIC・BIC と死亡数の標準化誤差の分散 (米国) . . . . .	58
5.3	AIC・BIC と死亡数の標準化誤差の分散 (フランス) . . . . .	63
6.1	DF 検定の結果 . . . . .	66
7.1	$\chi^2$ 乗検定の結果 . . . . .	73
7.2	回帰式による検定 (Cameron and Trivedi,1990) の結果 . . . . .	74
7.3	超過分散へ対応した LC モデルの適合度 . . . . .	76
7.4	超過分散へ対応した LC-VAR(1) モデルの適合度 . . . . .	76
7.5	超過分散へ対応した LC-VAR(2) モデルの適合度 . . . . .	79



# 目次

1.1	我が国の年金制度 . . . . .	2
1.2	企業年金の運用利回りの推移 . . . . .	5
1.3	平均寿命の推移 . . . . .	6
3.1	レキシスの図表 . . . . .	17
4.1	LC モデルのパラメータ推定値 (男, 0-98 歳, 1971-2009 年) . . . . .	21
4.2	LC モデルのパラメータ推定値 (女, 0-98 歳, 1971-2009 年) . . . . .	22
4.3	LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差 $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$ (男) . . . . .	23
4.4	LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差 $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$ (女) . . . . .	24
4.5	LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差の系列相関 (男) . . . . .	25
4.6	LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差の系列相関 (女) . . . . .	26
4.7	LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差の相関 (男, 1971-2009 年, 1 期 前の 1 歳下の年齢 (同生年コーホートの 1 年前) の残差と当年の残差の相関) . . . . .	30
4.8	LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差の相関 (男, 1971-2009 年, 1 期 前の同年齢の残差と当年の残差の相関) . . . . .	31
4.9	LC モデルのパラメータ推定値による生年コーホート別の対数死亡率の残差系列 (男, 1881-1931 年生) . . . . .	32
4.10	LC モデルのパラメータ推定値による生年コーホート別の対数死亡率の残差系列 (男, 1941-1991 年生) . . . . .	33
4.11	LC-VAR(1) モデルのパラメータ推定結果 (男, 14-90 歳, 1971-2009 年) . . . . .	37
4.12	LC-VAR(2) モデルのパラメータ推定結果 (男, 14-90 歳, 1971-2009 年) . . . . .	38
4.13	LC-VAR(1) モデルのパラメータ推定結果 (男, 14-90 歳, 1951-2009 年) . . . . .	39
4.14	LC-VAR(2) モデルのパラメータ推定結果 (男, 14-90 歳, 1951-2009 年) . . . . .	40
4.15	LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差 $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$ (男, 対象デー タ: 14-90 歳・1971-2009 年) . . . . .	42

4.16	RH モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差 $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$ (男, 対象データ: 14-90 歳・1971-2009 年) . . . . .	42
4.17	LC-VAR(1) モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差 $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$ (男, 対象データ: 14-90 歳・1971-2009 年) . . . . .	43
4.18	LC-VAR(1) モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差の系列相関 (男, 対象データ: 14-90 歳・1971-2009 年) . . . . .	43
4.19	LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差 $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$ (女, 対象データ: 14-90 歳・1971-2009 年) . . . . .	44
4.20	RH モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差 $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$ (女, 対象データ: 14-90 歳・1971-2009 年) . . . . .	44
4.21	LC-VAR(1) モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差 $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$ (女, 対象データ: 14-90 歳・1971-2009 年) . . . . .	45
4.22	LC-VAR(1) モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差の系列相関 (女, 対象データ: 14-90 歳・1971-2009 年) . . . . .	45
4.23	経済指標の変動と相関の可能性のある死因別死亡率の占める割合 (男: 1970 年, 1980 年, 1990 年, 2000 年, 2008 年) . . . . .	51
4.24	経済指標の変動と相関の可能性のある死因別死亡率の占める割合 (女: 1970 年, 1980 年, 1990 年, 2000 年, 2008 年) . . . . .	52
5.1	LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差 $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$ (英国, 男, 対象データ: 14-90 歳・1951-2009 年) . . . . .	55
5.2	RH モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差 $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$ (英国, 男, 対象データ: 14-90 歳・1951-2009 年) . . . . .	55
5.3	LC-VAR(1) モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差 $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$ (英国, 男, 対象データ: 14-90 歳・1951-2009 年) . . . . .	56
5.4	LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差 $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$ (米国, 男, 対象データ: 14-90 歳・1951-2009 年) . . . . .	56
5.5	RH モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差 $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$ (米国, 男, 対象データ: 14-90 歳・1951-2009 年) . . . . .	57
5.6	LC-VAR(1) モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差 $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$ (米国, 男, 対象データ: 14-90 歳・1951-2009 年) . . . . .	57
5.7	LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差 $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$ (フランス, 男, 対象データ: 14-90 歳・1951-2009 年) . . . . .	60
5.8	RH モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差 $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$ (フランス, 男, 対象データ: 14-90 歳・1951-2009 年) . . . . .	60

5.9	LC-VAR(1) モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差 $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$ (フランス, 男, 対象データ: 14-90 歳・1951-2009 年) . . . . .	61
5.10	LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差 $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$ (フランス, 女, 対象データ: 14-90 歳・1951-2009 年) . . . . .	61
5.11	RH モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差 $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$ (フランス, 女, 対象データ: 14-90 歳・1951-2009 年) . . . . .	62
5.12	LC-VAR(1) モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差 $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$ (フランス, 女, 対象データ: 14-90 歳・1951-2009 年) . . . . .	62
6.1	2001-2009 年の死亡率予測 (男 45 歳, 対象データ: 14-90 歳・1971-2000 年) . . . . .	67
6.2	2001-2009 年の死亡率予測 (男 65 歳, 対象データ: 14-90 歳・1971-2000 年) . . . . .	67
6.3	2001-2009 年の死亡率予測 (男 80 歳, 対象データ: 14-90 歳・1971-2000 年) . . . . .	68
6.4	2001-2009 年の死亡率予測の信頼区間 (男 45 歳, 対象データ: 14-90 歳・1971-2000 年)	68
6.5	2001-2009 年の死亡率予測の信頼区間 (男 65 歳, 対象データ: 14-90 歳・1971-2000 年)	69
6.6	2001-2009 年の死亡率予測の信頼区間 (男 85 歳, 対象データ: 14-90 歳・1971-2000 年)	69
6.7	年金現価率の分布 (男 63 歳: 65 歳迄) . . . . .	71
6.8	年金現価率の分布 (男 63 歳: 75 歳迄) . . . . .	71
6.9	一時払純保険料の分布 . . . . .	72
7.1	超過分散へ対応した LC モデルのパラメータ推定結果 (対象データ: 男, 14-90 歳, 1971-2009 年) . . . . .	77
7.2	超過分散へ対応した LC-VAR(1) モデルのパラメータ推定結果 (対象データ: 男, 14-90 歳, 1971-2009 年) . . . . .	78
7.3	超過分散へ対応した LC-VAR(2) モデルのパラメータ推定結果 (対象データ: 男, 14-90 歳, 1971-2009 年) . . . . .	80
7.4	将来死亡率の信頼区間の評価 (男・65 歳: 超過分散対応 LC モデル) . . . . .	82
7.5	将来死亡率の信頼区間の評価 (男・65 歳: 超過分散対応 LC-VAR(1) モデル) . . . . .	83



# 第 1 章

## はじめに

我が国の年金制度は、少子高齢化や資産運用のリスク増大等の問題\*<sup>1</sup>により財政状況が悪化し、持続可能性が問われている。人口構造の変化は、世代間扶養を前提とする公的年金において特に影響が大きく、公的年金がカバー可能な給付の範囲が縮小している。このような状況においては、年金制度に内在するリスクを明確化し、制度設計の基礎となる財政推計や負債評価へ反映させることが重要であり、また、リスク管理を高度化し様々なリスクシェアリングを可能とする仕組みを構築することも有用と考えられる。新たな年金制度を設計して行く上では、公的年金、企業年金、個人年金、その他の社会保障制度等の画一的な区分を前提とするのではなく、各年層の被保険者や年金受給権者の抱えるリスクを分析した上で、対処すべき方策を策定し、各制度を設計して行く柔軟な姿勢も求められよう。

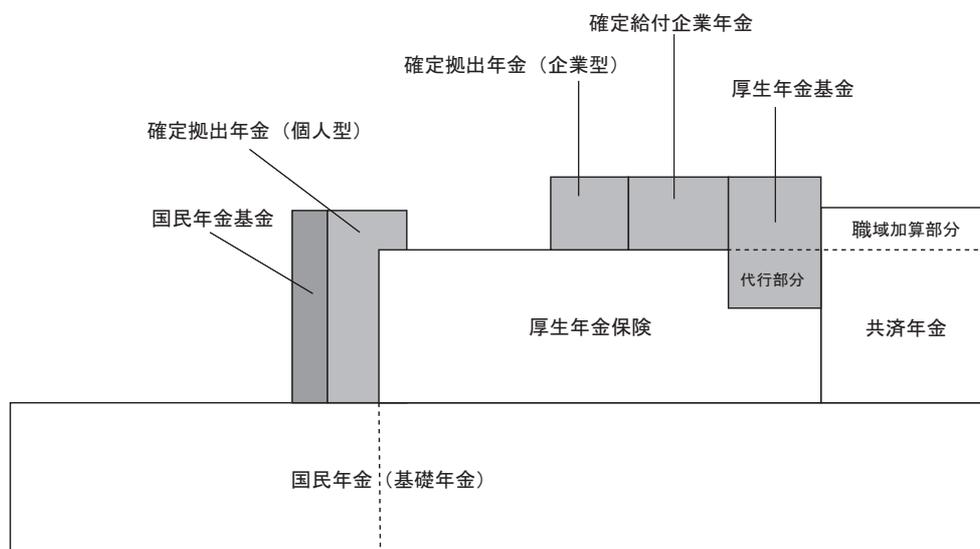
本章では、導入のため、研究の背景に関わる我が国の年金制度の概要、年金財政の仕組み、運用収益の低下とリスクの増大、平均寿命の伸長について説明する。その上で、本論文の概要と構成について述べる。

### 1.1 我が国の年金制度の概要

我が国の年金制度は、公的年金、企業年金、個人年金の3階層により構成されている。公的年金は、古くは軍人等への恩給制度として始まり、1942年(昭和17年)には労働者年金保険法が施行され現在の厚生年金の前身となった。1961年(昭和36年)には自営業者等を対象とする旧国民年金制度が発足したが、全国民を対象とする制度ではなかったため、1985年(昭和60年)改正により、全国民共通に給付される1階部分である基礎年金が創設されるとともに、厚生年金等の被用者年金は基礎年金給付の上乗せの2階部分として報酬比例年金を給付する制度へと再編成された。2012年(平成24年)改正により、公務員や私立学校教職員も厚生年金へ加入することとなり、2階部分の年金は厚生年金に統一された。

---

\*<sup>1</sup> これらは、多くの海外諸国に共通の問題である。



厚生労働省資料より加工して作成

図 1.1 我が国の年金制度

3 階部分の年金として、企業年金<sup>\*2</sup> や個人年金がある。企業年金は、古くは鐘淵紡績<sup>\*3</sup> の経営者である武藤山治がドイツ鉄鋼メーカーの従業員向け福利厚生を研究し、1905 年（明治 38 年）に始めたものが最初と言われる。その後、三井物産等の企業も導入し、普及した。1962 年（昭和 37 年）には、法人税法を根拠とする税制適格年金<sup>\*4</sup> が導入され、1966 年（昭和 41 年）には、厚生年金保険の一部を代行する企業年金である厚生年金基金制度<sup>\*5</sup> が導入された。その後、これらの年金制度は、少子高齢化や産業・就業構造の変化に伴う加入者数の減少や年金受給権者数の増加による年金制度の成熟化、運用収益の低下やリスクの増大に伴い再編され、現在は、確定給付企業年金と確定拠出年金の 2 種類となっている。

3 階部分の年金としては、保険会社が提供する個人年金商品もある。変額年金は、死亡保険金に最低保証を付けつつ解約返戻金や満期保険金が運用に応じて変動する主力の年金商品であったが、2008 年のリーマンショックを契機として、多くの保険会社が変額年金商品の新規募集を停止等している。

<sup>\*2</sup> 企業年金の 1 種である厚生年金基金は、厚生年金の報酬比例部分（2 階部分）の一部を代行する制度であるが、2013 年（平成 25 年）6 月成立した年金法により新設が認められなくなった。

<sup>\*3</sup> カネボウ化粧品などの源流となる後年カネボウとして知られた紡績会社。

<sup>\*4</sup> 税制適格年金は、年金受給権の保護が不十分なこと等から、2012 年（平成 24 年）に全廃され、中小企業退職金共済、確定給付企業年金、確定拠出年金等の他の年金制度へ移行等されている。

<sup>\*5</sup> 前述の通り、厚生年金基金制度は新設が認められなくなったが、この背景には、産業構造の変化に伴う著しい加入員数の減少や運用収益の低下等があった。代表的な事例として、1994 年（平成 6 年）の日本紡績業厚生年金基金の破綻がある。

## 1.2 年金財政の仕組み

本節では、年金財政の仕組みの概要を説明する。年金財政は、次に述べる「収支相等の原則」に基づき予め財政計画が立てられ、定期的な財政検証と財政再計算を実施し、保険料(掛金)と要積立額が定期的にチェックされ調整される。財政計画の基礎となる将来の給付と収入の見込みは、各基礎率に基づき推計される。年金の財政方式は、保有する積立金の水準により分類される。

### 1.2.1 収支相等の原則

年金財政は、将来の給付と収入の見込みがバランスするよう「収支相等の原則」に基づき運営される<sup>\*6</sup>。年金基金等の制度提供者の損失の現価を確率変数  $L$ 、将来の給付の見込みを  $S$ 、将来の収入見込みを  $PG$ 、積立金を  $F$  とすると、

$$L = S - PG - F$$

ここで、 $P$  は保険料(掛金)を表し、 $G$  は保険料(掛金)の基礎となる基準給与等の現価を表す。上式において、制度提供者の損失の期待値  $E[L]$  をゼロとすることが「収支相等の原則」であり、このことを基礎として保険料(掛金)が決定される<sup>\*7</sup>。将来の給付と収入の見込みの各期待値は、次に述べる計算の基礎(基礎率)及び制度を構成する加入者や年金受給権者の集団に基づき、計算される。

### 1.2.2 計算の基礎(基礎率)

将来の給付と収入の見込みを計算するため、計算の基礎(基礎率)が置かれる。企業年金の場合、基礎率には、以下のものがある。

1. 予定利率
2. 予定死亡率
3. 予定脱退率
4. 予定昇給率
5. 予定一時金選択率

<sup>\*6</sup> 実際には、事務費等の運営費が別途掛かるが、ここでは年金財政の基本的な仕組みを確認することが目的のため、考慮しない。

<sup>\*7</sup> 実務では、年金受給権の保護を目的として、保守的な基礎率を設定することにより、損失の期待値がマイナス(剰余)となる保険料(掛金)設定等が行われる。

これらの基礎率は、特定の値（一部の基礎率は年齢別の値）として設定される。保険料（掛金）の算出においては、年金受給権の保護の観点から、保守的な設定が行われることがある。

国際会計基準等の企業会計における年金債務の評価の前提である基礎率は、最善の見積り（Best Estimate）に基づくとされ、基本的には期待値が前提として設定される。企業会計における年金債務の評価においては、上記の予定利率は割引率、予定死亡率は死亡率、予定脱退率は退職率、予定昇給率は予想昇給率、予定一時金選択率は一時金選択率と他の名称で呼ばれている。

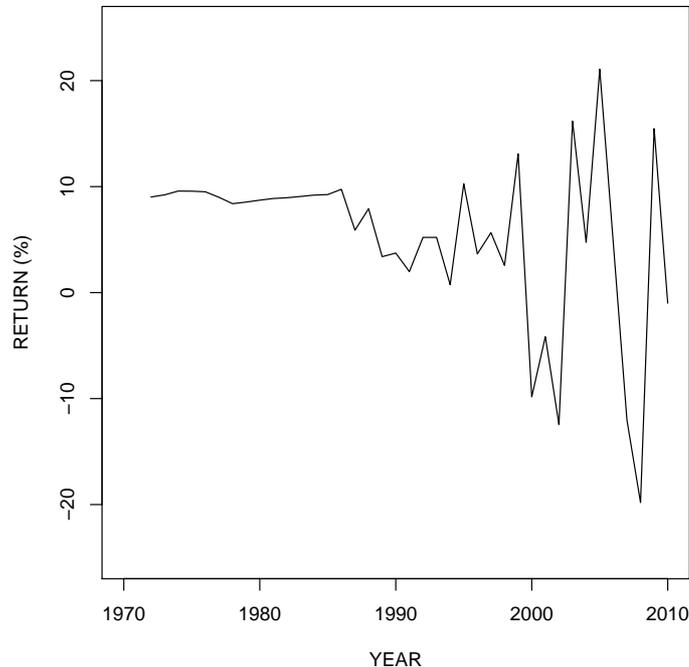
### 1.2.3 財政方式と負債評価

年金の財政方式は、大きくは、賦課方式と積立方式に分類される。賦課方式とは、当年の給付に必要な原資を当年の保険料（掛金）で賄う仕組みであり、我が国の公的年金制度も基本的には賦課方式の考え方で運営されている。公的年金は、世代間扶養の考え方がベースとしてあること、物価上昇もカバーする給付が必要となること等から、賦課方式が基本とされている。一方、企業年金は、積立方式の考え方で運営され、要積立額が年金の負債として評価され、財政検証や財政再計算に用いられている。保険会社等が提供する個人年金商品も、保険料積立金を確保しながら給付する仕組みであるが、保険会社が提供する商品においては、保険料の変更が前提とされていないことが企業年金との大きな相違点である\*8。このような年金や保険の負債は、「責任準備金」等の名称で呼ばれている。年金の財政方式の種類や各方式の具体的な内容については、付録 A を参照されたい。また、年金と保険の負債評価の概要については、第 2 章及び付録 B を参照されたい。なお、付録 B に記載の通り、現行の年金数理の実務に対しては、Bader and Gold (2003) 等が金融経済学的手法を取り入れた新たな手法へ進化させるべきことを指摘している。

## 1.3 運用収益の低下とリスクの増大

経済成長が高い時代においては、企業年金では、確定利付債券を中心とした運用を前提として予定利率は 5.5% と固定されていた。このような状況においては、ほぼ確実に高水準の運用利回りを上げ剰余を得ることが可能であった。しかし、バブル経済の崩壊や経済成長の鈍化により、運用収益は低下した（図 1.2）。金融市場の規制緩和もあり企業年金の運用規制は緩和され、リスク資産への配分規制は撤廃されたが、運用収益の期待水準が低下したことに加え、特に 2000 年代に入ってからリスク（運用収益の変動）が増大し、年金財政が悪化した。多くの年金基金が、給付減額等を伴う制度変更、年金資産の圧縮を伴う代行返上や確定拠出年金への移行を実施した。

\*8 英米の企業年金等は、我が国の企業年金と同様、保険料（掛金）の見直しが前提とされている信託型の仕組みが採用されているが、欧州の企業年金等では、保険会社と同様、保険料（掛金）の変更が前提とされていない保険型の仕組みが採用されている場合もある。



出所：企業年金連合会資産運用実態調査

図 1.2 企業年金の運用利回りの推移

## 1.4 平均寿命の伸長

我が国の平均寿命は、図 1.3 の通り、第 2 次世界大戦後伸長し続け、直近では男が 79.94 歳、女が 86.41 歳（平成 24 年簡易生命表（2013））と世界トップクラスの水準となっている。人口構造の変化は社会経済へ様々な影響を及ぼすが、公的年金、企業年金制度についても同様であり、特に経済成長が鈍化した局面においては年金財政は長寿化から大きな影響を受けて来た。公的年金については、支給開始年齢が段階的に 65 歳迄引き上がることが決定しており\*<sup>9</sup>、企業年金については、財政負担や会計制度の影響等により年金の終身部分を圧縮する制度変更が多く行われ、平均寿命より長生きした場合、年金が支給されない場合が多いのが現状である。公的年金の支給開始年齢の引上げとともに、高齢者雇用も法制と併せ再整備されてきているが、長寿化が進む中、総体として年金の給付水準は引き下がる方向であり、更なる対策を検討して行く必要がある。

\*<sup>9</sup> 更なる支給開始年齢の引上げも、厚生労働省の社会保障審議会等において検討されている。

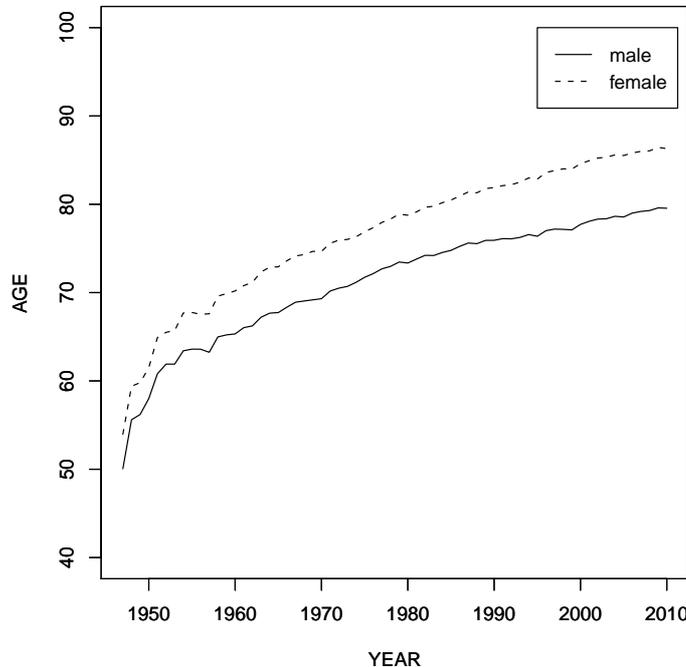


図 1.3 平均寿命の推移

## 1.5 本論文の概要と構成

前述の背景を踏まえ、本論文では、年金制度に内在するリスクのうち主に死亡・長寿リスクに着目し、これらのリスクがどのような要因によって定量化され得るのか解析し新たなモデルを提案する。本論文の解析結果や提案モデルを通じて、より適切な年金制度の財政推計や負債評価を実施することが可能となろうし、より適切なリスク分担やリスク管理の高度化も可能となろう。これらのリスクに関する分析や提案を踏まえ、年金の負債評価や財政運営の方向性についても展望する。

本論文の構成は以下の通りである。第2章では、年金負債評価方法、死亡率モデルに関する既存の手法や先行研究について整理し説明する。第3章では、使用する死亡データ及び変数等の記法について説明する。第4章では、Lee-Carter (LC) モデルの概要及び我が国の死亡データへ適合した場合の対数死亡率の残差構造について述べる。当該残差構造の解析結果を踏まえ、新たに LC-VAR (Lee-Carter Vector Autoregressive) モデルを策定し提案する。第5章では、LC-VAR モデルを海外死亡率へ適用した結果を示し、海外諸国の死亡データの構造について考察する。第6章では、LC-VAR モデルを将来死亡率の予測へ用いた場合と年金負債評価や一時払純保険料の評価へ応用した場合を例示する。第7章では、超過分散へ対応した LC-VAR モデルとその推定、並びに、当該モデルによる将来死亡率の信頼区間の評価について述べる。第8章では、本論文の総括と年金負債評価や財政運営の方向性について述べ、結語する。

本論文は、以下の文献をもとに構成されている。

Igawa, T. (2013). Analysis of the Residual Structure of the Lee-Carter Model: The Case of Japanese Mortality, *Asia Pacific Journal of Risk and Insurance*, **7(2)**. 53-80.

井川孝之 (2013). LC-VAR モデルと死亡率予測・リスク評価, 応用経済時系列研究会報告集, **30**, 75-90.

また、本論文の関連文献として、以下のものがある。

井川孝之 (2011). 一時金選択率の推定と会計上のリスク評価, *リスクと保険*, **7**, 25-42.



## 第 2 章

# 既存の手法と先行研究

本章では、本論文の研究に関わる既存の手法と先行研究について説明する。まず、年金や保険の負債評価や保険料 (掛金) の価格付けに関し実務で導入が検討されている手法や先行研究について整理し、次に、死亡・長寿リスクに関し、死亡率モデルの先行研究について整理する。

### 2.1 負債評価の手法

#### 2.1.1 年金負債・保険負債評価の手法

年金や保険の負債は、前章で述べた通り、計算の基礎 (基礎率) を前提とした収支見込みに基づき評価される。各基礎率は特定の値により設定され、負債評価の目的に応じ、最善の見積り (Best Estimate) としたり、保守的な見積りとしたりする。保険会社の場合、保険料 (掛金) の変更が前提とされていないため、リスクバッファーとしての各種準備金を積み立てるルールとなっており、企業年金の場合、明示的な準備金の積立と言う形ではなく、保守的な基礎率の設定により平準的な保険料 (掛金) が引き上がらないよう予め配慮されるが保険料 (掛金) の再設定も可能である。保険会社の場合、リスクバッファーは資本規制において要請され、会計上の各種準備金等と関連がある。現在、保険の国際会計基準である IFRS4 「保険契約」 (International Financial Reporting Standards 4, “Insurance Contract”) の改訂作業が進められており、また、国際的な資本規制であるソルベンシー II も策定作業が進められている。年金の国際会計基準である IAS19 「従業員給付」 (International Accounting Standards 19, “Employee Benefits”) においても、2008 年に公表された Discussion Paper (DP) では、最低保証がある年金制度の負債の測定属性として公正価値が取り上げられるなど、負債評価の手法について検討されている。これらの詳細については、付録 B を参照されたい。

### 2.1.2 保険料 (掛金) の価格付け

保険料は、年金や保険の負債評価を基礎として価格付けされる。保険料 (掛金) は変更されない前提で保険料 (掛金) を価格付けする場合、予めリスクについて価格付けし算出することとなり、現行の実務では、リスクバッファーを織り込んだ基礎率により算出されている。木島, 田中 (2007) は、保険料算出の代表的な原理として、以下のものを挙げている。

1. 分散原理
2. 標準偏差原理
3. 指数原理
4. エッシャー原理
5. ワン変換

現行の実務においても、リスクバッファーを評価する際、標準偏差等が考慮されており、上記の原理が応用されていると考えることができる。

### 2.1.3 基礎率に関する研究

年金や保険の負債は、各種基礎率を前提として評価される。このため、これらの負債評価と各種基礎率の設定については、最終的には一体的な検討が必要となるが、先行研究は、概ね上述のような負債評価のものへ着目したものと各種基礎率へ焦点を当てたものへ分類することができよう。次節にて述べる死亡率のほか、前章で述べた予定利率 (割引率) や予定脱退率 (退職率)、一時金選択率等の基礎率に関する先行研究も存在する。

## 2.2 死亡率モデル

死亡率は、性別や年齢に応じ表示されることが一般的であり、生命表へも組み入れられ表示される。本節では、古くから用いられている死亡率の策定方法について簡単に説明した上で、将来死亡率の推計方法及びそれに係る死亡率モデル等の先行研究について述べる。

### 2.2.1 モデルの種類

死亡率は、古くは1725年のDe Moivreの法則に始まり、年齢 ( $x$ ) や生命表上の最終年齢 ( $\omega$ ) による関数を適合させる方法で表現されてきている (表 2.1)。現在も、我が国や先進諸国等の生命表の死亡率は、

表 2.1 代表的な死亡法則

死亡法則	モデル
De Moivre (1725)	$\mu_x = \frac{1}{\omega-x}$
Gompertz (1825)	$\mu_x = Bc^x$
Makeham (1860)	$\mu_x = A + Bc^x$
Perks (1932)	$\mu_x = \frac{A+Bc^x}{Kc^{-x}+1+Dc^x}$
Helligman Pollard (1980)	$\frac{q_x}{p_x} = A^{(x+B)^C} + D \exp[-E(\log x - \log F)^2] + GH^x$

年齢等による関数を適合させることにより表現されている。生命表の用語や諸関数の定義については、付録 C を参照されたい。

### 2.2.2 将来死亡率の推計方法

将来死亡率の推計方法として、石井 (2008) は、以下の方式を挙げている。

1. モデル生命表を用いる方式
2. 最良生命表方式
3. 年齢別死亡率補外方式
4. 年齢別死因別死亡率補外方式
5. 標準化死因別死亡率補外方式
6. リレーショナルモデル方式

我が国の将来人口推計に用いられてきた方法としては、年齢別死亡率補外方式、標準化死因別死亡率補外方式がある。1981 年の将来人口推計で採用された年齢別死亡率補外方式を精緻化したものとして年齢別死因別死亡率補外方式があるが、死因や年齢による区分が相当多数となるため、1986 年、1992 年及び 1997 年の将来人口推計では、標準化死因別死亡率補外方式が採用された。しかし、死因の分類の変更や死亡診断書に記載される死因が医師の考え方や社会通念の影響により偏りがある可能性が指摘されていること等から、2002 年の将来人口推計では、リレーショナルモデルの 1 つである Lee-Carter (LC) モデルが用いられた。2006 年及び 2012 年の将来人口推計でも、LC モデルの拡張モデルが用いられている (石井, 2008; Ishii, 2011)。

リレーショナルモデル方式とは、経験的な死亡率の年齢パターンと少数のパラメータを用いて任意の死亡パターンを表現する方法であり、Brass (1971), 金子 (1987), Lee and Carter (1992) 等がある。LC モデルは、現在、国際的に広く将来人口推計等に用いられている。

我が国の将来人口推計は、公的年金の財政見通しの基礎としても利用されており、公的年金財政におい

て死亡・長寿リスクを把握する上で基礎となっている。

### 2.2.3 死亡率モデルの先行研究

リレーショナルモデルのうち、LCモデルは、対数死亡率を目的変数とするモデルである。LCモデルの詳細は第4章で述べるが、LCモデルは年齢効果と期間効果により死亡率の変動を説明するモデルである。LCモデルを拡張し、生年別のコーホート効果も組み入れたモデルが Renshaw and Haberman (2006) が提案するモデル (RHモデル) である。また、RHモデルの特殊ケースとしても整理可能な Age-Period-Cohort (APC) モデルがある。RHモデル、APCモデルの詳細についても、第4章で説明する。

LCモデルのパラメータの推定方法としては、Lee and Carter (1992) が提案する特異値分解による方法があるほか、Wilmoth (1993) や Brohns et al. (2002) が提案する最尤推定による方法がある。

LCモデルによる将来死亡率の推計は、死亡指数である  $\kappa_t$  の時系列予測により行い、 $\kappa_t$  の時系列モデルが将来死亡率の推計へ大きく影響する。このため、 $\kappa_t$  の時系列モデルや複数の年齢の死亡率系列への時系列モデルの適用等に関する先行研究が多く存在する。Li and Chan (2007) では、 $\kappa_t$  系列の外れ値へ外生的なモデルを加え対応する方法を提案している。Giroso and King (2007) は、Lee and Carter (1992) の特異値分解を用いた推定方法では第2主成分以降の情報の喪失の問題があることを指摘しており、また、死亡指数  $\kappa_t$  にドリフト付きランダムウォーク (RWD) を適用することに関し考察している。Renshaw and Haberman (2003) では、第2主成分も用いたLCモデルの推定と死亡率予測について提案している\*1。千木良, 山本 (2013) は、Giroso and King (2007) の指摘等を踏まえながら、VEC (Vector Error Correction) 予測, MTV (Multivariate Time Series Variance Component) 予測, 修正 MTV 予測, LC 予測, LC 全主成分予測, 単系列 ARIMA 予測を比較し、日本の男の死亡率へ適用した場合、MTV 予測, 修正 MTV 予測, LC 全主成分予測が実績に近いことを示している。Booth et al. (2006) は、長期の死亡データが利用可能なオーストラリア, カナダ, 欧州8ヶ国について、LCモデルとその拡張モデルの計5種類のモデルを死亡率予測へ利用した場合の正確性をバックテストにより検証し議論している。

LCモデルのパラメータを最尤推定した場合、超過分散 (overdispersion) の問題が発生する可能性がある。Li et al. (2009), Delwarde et al. (2007) では、同じ年齢と暦年に属する死亡について異質性があるものと考え、観察される死亡数が負の2項分布に従う拡張モデルを提案し、海外の死亡データを用いて検証している。

我が国の死亡率へLCモデルを適用した先行研究やLCモデルの拡張に関する研究は多数ある。小松 (2002) は、超長期の推計に鑑み、パラメータ  $\beta_x$  を平滑化し  $\kappa_t$  系列に関数を当てはめ改良したLCモデルを我が国の死亡データへ適用し将来生命表を作成している。小暮, 長谷川 (2005) は、主成分分析の第2因子以降も考慮した双線形回帰モデルとしてLCモデルを捉え直している。及川 (2006) は、LCモデル

\*1 小暮, 長谷川 (2005) においても検討されている。

を我が国の死亡データへ適用した場合のパラメータ  $\beta_x$  の推定値と年齢別, 期間別, 生年別の死亡率改善率に着目し, LC モデルを生年と期間の要素に分解したモデルへ変形し, 将来死亡率の予測を試みている. 石井 (2008) は, 年齢シフト構造を考慮した LC モデルを我が国の死亡データへ適用することを提案している. Ishii (2011) は, 石井 (2008) の年齢シフト構造を考慮した LC モデルを踏まえながら, 対数死亡率曲面におけるタンジェントベクトルを用いた死亡率モデルと将来推計を提案している.

LC モデルと異なり, 死亡率の改善率を目的変数とするモデルも存在する. CMIB (2009a, 2009b) では, 死亡率の改善率を年齢別と生年コーホート別のパラメータで説明するモデル (CMI モデル) を策定している. 法元 (2009) は, 我が国の死亡率の改善率へ APC モデルを適用し独自の識別条件により推定を試みており, また, 赤松 (2010) は, CMI モデルを我が国の死亡率へ適用し検証している. CMIB (2009b) においては, 死亡率改善率の初期コーホート要素は P-spline により平滑化された経年の死亡率を APC モデルにより分解し算定する方法が例示されており, 経年のコーホート効果の変化の可能性は前提とされていない.

超高齢死亡率の低下や生命表上の最終年齢がどのように伸長するかについて, 数理的に解析しモデル化した先行研究もある. Thatcher et al. (1999) は, 6 つのモデルを 11 ヶ国の超高齢死亡率へ適用し, ロジスティックモデルが最も適合するとの結論を導いている. 本論文で使用し次章で詳細説明する Human Mortality Database (HMD) も当該研究成果を踏まえ超高齢死亡率をロジスティック関数を用いて補正する対象としている.

上述の統計モデルや金融工学で用いられる信用リスクモデル等をベースとして, 死亡リスクや長寿リスクの証券化商品への対応を可能とした確率モデル (Cairns et al., 2006 が提案している CBD モデル等) も存在する. このようなモデルの中には, インフルエンザパンデミック等によるカタストロフィ的な死亡率の増減を定量化することを可能とするものもある.

本論文では, 第 4 章以降詳細説明する通り, 我が国の将来推計人口の基礎ともなっている LC モデル及びその拡張モデルへ焦点を当てる.

#### 2.2.4 社会・経済状況と死亡率変動の関係に関する先行研究

年金負債のリスクを定量的に把握するためには, 基礎率間の相関関係を把握し負債評価へ反映することが望ましい. しかし, 現行実務の年金負債の評価は, 基礎率間の相関関係を仮定するものではなく, また, 基礎率間の相関関係に関する先行研究も乏しい.

年金財政においては, 金利や経済成長等を考慮しながら予定利率が設定されるが, 経済指標と死亡率変動の関係を扱った先行研究がいくつか存在する. Granados (2008) では, 我が国の戦後の死亡率を用い, 実質 GDP 成長率と完全失業率の 2 つの経済指標と死亡率変動との相関について分析しており, 経済成長と連動する死因別死亡率と反連動する死因別死亡率へ分類している.

Hanewald (2009) は, 各国の年齢別・期間別死亡率に対し, LC モデルを適用し, 死亡指数  $\kappa_t$  と経済

---

指標の相関について分析している。

## 第3章

# 死亡データ

本章では、我が国の死亡データ及び本論文で使用する Human Mortality Database (HMD) の死亡データについて説明する。

### 3.1 我が国の死亡統計と死亡率

我が国の死亡率としては、厚生労働省が毎年発表している簡易生命表と、5年に1度発表している完全生命表がある。直近の平成24年簡易生命表(2013)は、人口動態統計(概数)及び10月1日現在推計人口を用いて作成されており、また、直近の第21回完全生命表(2012)は、国勢調査による日本人人口(確定数)と人口動態統計の死亡数等の確定数を基礎としている。いずれも、粗死亡率をグレビル(Greville)の補整及び高齢部分についてはゴムパーツ・メーカム(Gompertz and Makeham)の法則に則り補整している。

国立社会保障・人口問題研究所は、国勢調査の結果を踏まえ、5年毎に日本の将来推計人口を作成し発表している。直近公表された将来推計人口(2012)においては、1970年から2010年までの死亡データを基礎とし、2060年まで(参考として2105年まで)死亡中位・低位・高位について推計が行われている。

この他、我が国には、保険会社の標準責任準備金の基礎となる標準死亡率と企業年金の負債評価・掛金率算定の基礎となる厚生労働大臣が告示した死亡率等がある。

標準死亡率は、日本アクチュアリー会が保険契約の種類別に算定したものを内閣総理大臣から委任を受けた金融庁が精査し告示されているもので、直近では2007年の標準死亡率がある。死亡保険用、年金開始後用、第三分野用の3種類があり、死亡保険用については死亡率が上昇するリスク、年金開始後用・第三分野用については死亡率が改善するリスクを織り込んで算定されている。

企業年金の死亡率は、以前は所謂国民生命表がベースとなっていたが、1995年の年金改正より厚生年金の被保険者をベースとし厚生労働省から告示された死亡率が用いられるようになった。1997年度から厚生年金基金制度の新たな財政運営基準が導入され、非継続基準が適用されることとなったが、最低積立基準額の算出の基礎となる死亡率は、告示された死亡率に一定の割合を乗じたものが用いられることとなっ

表 3.1 我が国の生命表とその概要

生命表の種類	概要
簡易生命表	人口動態統計 (概数) 及び 10 月 1 日現在推計人口を用いて毎年作成.
完全生命表	国勢調査による日本人人口 (確定数) と人口動態統計の死亡数等の確定数を基礎として 5 年毎に作成.
将来生命表	国立社会保障・人口問題研究所が国勢調査等とあわせ 5 年毎に作成.
標準生命表	保険会社の標準責任準備金の基礎となる予定死亡率で, 日本アクチュアリー会が作成し, 金融庁長官が検証したもの. 死亡保険用, 年金開始後用, 第三分野の 3 種類がある.
確定給付企業年金	企業年金の負債評価・掛金率算定の基礎となる死亡率で, 厚生労働大臣が告示したもの.

た. 2002 年度から発足した確定給付企業年金においても, 最低積立基準額の算出の基礎となる死亡率は告示された死亡率に一定の割合を乗じたものとなっている. (我が国の生命表については, 表 3.1 も参照.)

## 3.2 Human Mortality Database (HMD)

本節では, 後章で述べる各モデルのパラメータ推定や適合度の検証の前提とした Human Mortality Database (HMD) について説明する.

### 3.2.1 HMD の概要

HMD は, カリフォルニア大学バークレー校 (UCB) とマックスプランク人口研究所 (MPIDR) の研究チームが共同で立ち上げたプロジェクトであり, 2013 年 8 月現在, 37 ヶ国が対象となっている. 石井 (2010) でも述べられている通り, HMD は, 比較可能性 (comparability), 柔軟性 (flexibility), アクセスのしやすさ (accessibility), 再現性 (reproducibility) の 4 原則に従うこととし, 全ての国・地域に関し, 生命表を作成する方法を方法手順書 (Method Protocol) の形として纏めている. この手順書は, HMD のウェブサイトにて公開されている.

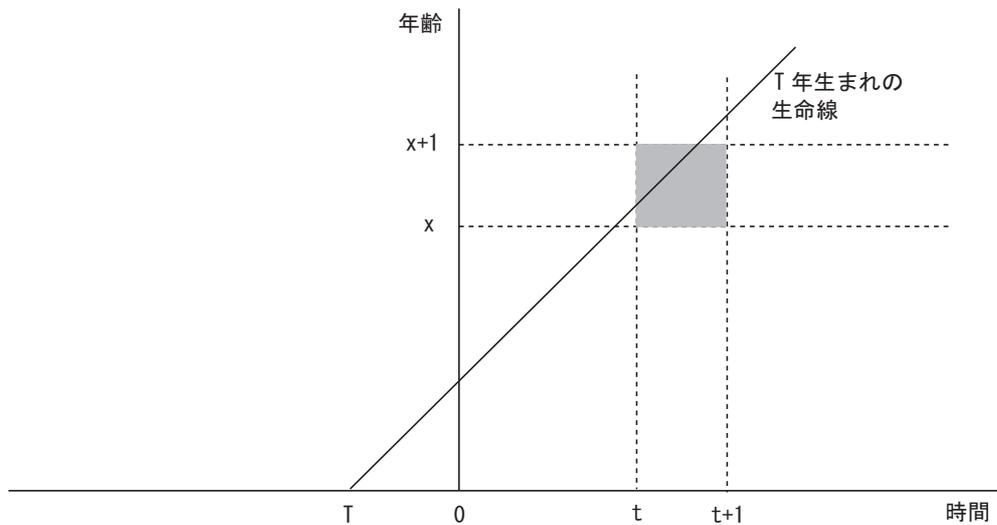


図 3.1 レキシスの図表

### 3.2.2 HMD のデータ

上述の方法手順書に基づき、以下の 6 種類のデータを収集・作成し、生命表を作成する工程とされている。

#### 1. 出生数

可能な限り長期間の性別年間出生数を収集する。

#### 2. 死亡数

可能な限り詳細なレベルの死亡数を収集し、生データがまとめられている場合、統一的な手法によって死亡数を推定する。

#### 3. 人口規模

各年 1 月 1 日現在推計人口を、統計データから得るか、またはセンサスと出生・死亡数に基づいて推計する。

#### 4. リスク対象生存延べ年数 (Exposure-to-risk)

ある年齢×時間区間において、死亡リスクに晒される生存延べ年数を推計する。

#### 5. 死亡率

死亡率は、ある年齢×時間区間に属する死亡数の、対応する区間の生存延べ年数に対する比として計算する。

#### 6. 生命表

死亡確率を死亡率から計算し、生命表を作成する。

上記は、レキシスの図表 (Lexis Diagram) を用いるとより理解がし易い。図 3.1 は、横軸が時間 (年)、縦軸が年齢を表し、例として T 年生れの生命線が描かれている。上述のリスク対象生存延べ年数 (Exposure-to-risk) や死亡数は、この生命線に応じ集計され、ある年齢×時間区分の中の死亡率は一様であるとの仮定である。なお、生命表の用語や諸関数の定義については、付録 C を参照されたい。

## (参考) Japan Mortality Database (JMD)

国立社会保障・人口問題研究所が 2011～2013 年度実施している人口問題プロジェクト研究「わが国の長寿化の要因と社会・経済に与える影響に関する人口学的研究」の中で、「日本版死亡データベース (Japanese Mortality Database: JMD) が構築されつつある。本プロジェクト研究の趣旨は、世界にも類を見ないわが国の長寿化のメカニズムと背景やこれらが日本社会に与える影響を的確に捉えるため、死亡データベースの構築とそれに基づく多角的かつ学際的なアプローチに基づく総合的な分析を行い、長寿化が社会・経済に与える影響についても考察を行うこととされている。HMD 等の先進的な死亡データベースの事例を情報収集し、我が国の生命表を人口分析の目的から総合的に再編成したものが「日本版死亡データベース (JMD)」である。「日本版死亡データベース (JMD)」は、国立社会保障・人口問題研究所のウェブサイトからアクセスすることができる (<http://www.ipss.go.jp/p-toukei/JMD/index.html>)。

## 第4章

# Lee-Carter モデルの残差構造解析とモデリング

第1章で、長寿化が年金財政へ少なからぬ影響を与えてきたことを述べたが、このような状況において、死亡リスクや寿命リスクを管理し、年金財政を運営して行くことは一層重要となって来ている。本章では、まず、将来死亡率の推計に国際的に利用されている Lee-Carter (LC) モデルの概要と我が国死亡率へ適用した場合の残差の状況について述べる。次に、先行研究を参照しながら、LC モデルでは捉えきれていないコーホート効果の可能性とコーホート効果を織り込んだ既存の拡張 LC モデルについて説明する。その上で、LC モデルの残差構造について仮説を構築し、当該仮説に基づき策定した新たな Lee-Carter Vector Autoregressive (LC-VAR) モデルを提案する。LC-VAR モデルとコーホート効果を考慮した既存の拡張 LC モデルの適合度を比較し、LC-VAR モデルの方がより経験データへ適合することを確認する。

### 4.1 Lee-Carter (LC) モデルの概要

LC モデルは、第2章で述べた通り、リレーショナルモデルの一種であり、年齢  $x$  についての平均的な対数死亡率を表すパラメータ  $\alpha_x$ 、年  $t$  についての死亡の一般的な水準を表すパラメータ (死亡指数)  $\kappa_t$ 、 $\kappa_t$  に係る年齢別パラメータ  $\beta_x$  により、残差項を  $\varepsilon_{x,t}$  として、中央死亡率  $m_{x,t}$  の対数値を次式の通り記述するものである。

$$\log m_{x,t} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_{x,t} \quad (4.1)$$

パラメータの推定には識別問題が生ずるため、以下の識別条件が置かれる。

$$\sum_x \beta_x = 1 \quad ; \quad \sum_t \kappa_t = 0 \quad (4.2)$$

Lee and Carter (1992) は、対象となる期間を  $T$  として  $\hat{\alpha}_x = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \log m_{x,t}$  とし、最小二乗解を与えるよう  $\log m_{x,t} - \hat{\alpha}_x$  を  $(x, t)$  成分 (但し,  $x = 0, \dots, \omega; t = 1, \dots, T$ ) とする  $(\omega + 1) \times T$  行列  $A$  を特異値分解し、第1特異ベクトルによりパラメータ推定する方法を提案している。すなわち、 $A$  の階数を  $r$ 、特異値を  $s_i (1 \leq i \leq r)$ 、対応する左特異ベクトルを  $u_{ix}$ 、右特異ベクトルを  $v_{it}$  とすると、 $A = \sum_{i=1}^r s_i u'_{ix} v_{it}$  と特異値分解され、式 (4.2) の識別条件の下、 $\hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t = u'_{1x} v_{1t}$  によりパラメータ  $\hat{\beta}_x$  と  $\hat{\kappa}_t$  が推定される。この方法により得られた  $\hat{\alpha}_x$  と  $\hat{\beta}_x$  により、年  $t$  の年齢  $x$  歳の死亡数を  $D_{x,t}$ 、対応するリスクに晒される対象を  $E_{x,t}$  とし、次式を満たすよう  $\hat{\kappa}_t$  が再調整される方法も提案されている (Lee and Carter, 1992; Lee, 2000; Brouhns et al., 2000)。

$$\sum_x D_{x,t} = \sum_x E_{x,t} \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t) \quad (4.3)$$

Lee and Carter (1992) の方法では対数死亡率  $\log m_{x,t}$  の分散が年齢  $x$  や暦年  $t$  によらず一定であることが前提となっているが、実際は年齢等により異なると考えられる。Brouhns et al. (2002) は、 $\mu_{x,t} = \exp[\alpha_x + \beta_x \kappa_t]$  とし、 $D_{x,t} = E_{x,t} \mu_{x,t}$  が平均  $E_{x,t} \mu_{x,t}$  のポアソン分布に従うとしてパラメータ推定する方法を提案しており、Cairns et al. (2009)、Renshaw and Haberman (2003, 2006)\*<sup>1</sup>、小暮、長谷川 (2005) においても同様の方法が用いられて来ている。

なお、パラメータ  $\kappa_t$  には、ARIMA モデル等が適用され、死亡率予測に用いられる。Lee and Carter (1992) は、 $\kappa_t$  系列に、次のドリフト付きランダムウォークモデルを適用している。

$$\kappa_t = \lambda + \kappa_{t-1} + \eta_t \quad ; \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2) \quad (4.4)$$

## 4.2 LC モデルの我が国死亡データへの適用

年齢 0-98 歳、期間 1971-2009 年の日本の死亡データ\*<sup>2</sup>へ LC モデルを適用し、上述の Brouhns et al. (2002) の方法でパラメータを最尤推定すると、図 4.1、図 4.2、表 4.1 の通りとなる。LC モデルの目的変数は対数死亡率  $\log m_{x,t}$  であり、死亡率の将来推計に関心があることから、パラメータ推定値による対数死亡率の推定値を  $\log \hat{m}_{x,t}$  とした場合の  $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t} = \log(D_{x,t}/E_{x,t}) - \log \hat{m}_{x,t}$  を LC モデルの残差\*<sup>3</sup>として年齢と時代を軸にとった残差局面を図示すると、図 4.3、図 4.4 の通りとなり、男女ともうねりのようなものが観察される。

\*<sup>1</sup> Renshaw and Haberman (2006) は、LC モデルの残差項に正規分布を仮定した最尤推定法も取り上げているが、この方法では、対数死亡率の分散はが年齢や暦年によらず一定と仮定される。

\*<sup>2</sup> 第3章で説明した HMD のデータを利用した。以後、HMD のデータを各モデルのパラメータ推定や適合度の検証の前提とする。

\*<sup>3</sup> 死亡数がポアソン分布に従うとした場合、スケール調整された死亡数の残差の対数値と見ることができる。本論文で取り上げる他のモデルについても同様の捉え方とする。

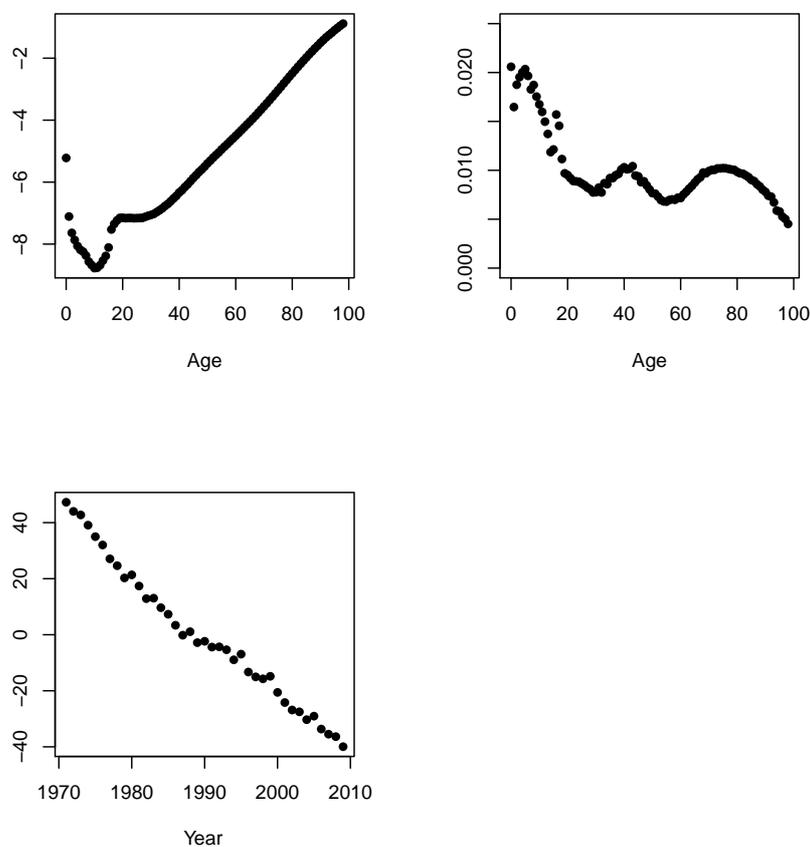


図 4.1 LC モデルのパラメータ推定値 (男, 0-98 歳, 1971-2009 年)

表 4.1 LC モデルのパラメータ推定値 ( $\lambda, \sigma_\eta$ )(対象データ: 0-98 歳, 1971-2009 年)

	$\lambda$	$\sigma_\eta$
男	-2.30	2.13
女	-2.65	2.11

LC モデルの定式化が真の構造を捉えているとするならばこの残差系列には相関がないと考えられるが、図 4.3, 図 4.4 の残差系列に対し対象年数を 10 年とした場合の Ljung-Box Q 統計量を計算すると、図 4.5, 図 4.6 の通りとなり、概ね 10 歳代後半から 80 歳代後半にかけては有意水準上側 5% で系列相関が無いとする帰無仮説は棄却される。

Willets (2004) は、我が国の女の高齢死亡率についても、死亡率が他の世代より低いコーホート効果が認められるとしている。Willets (2004) は、死亡率の 9 年移動平均をプロットし、考察している。一方、

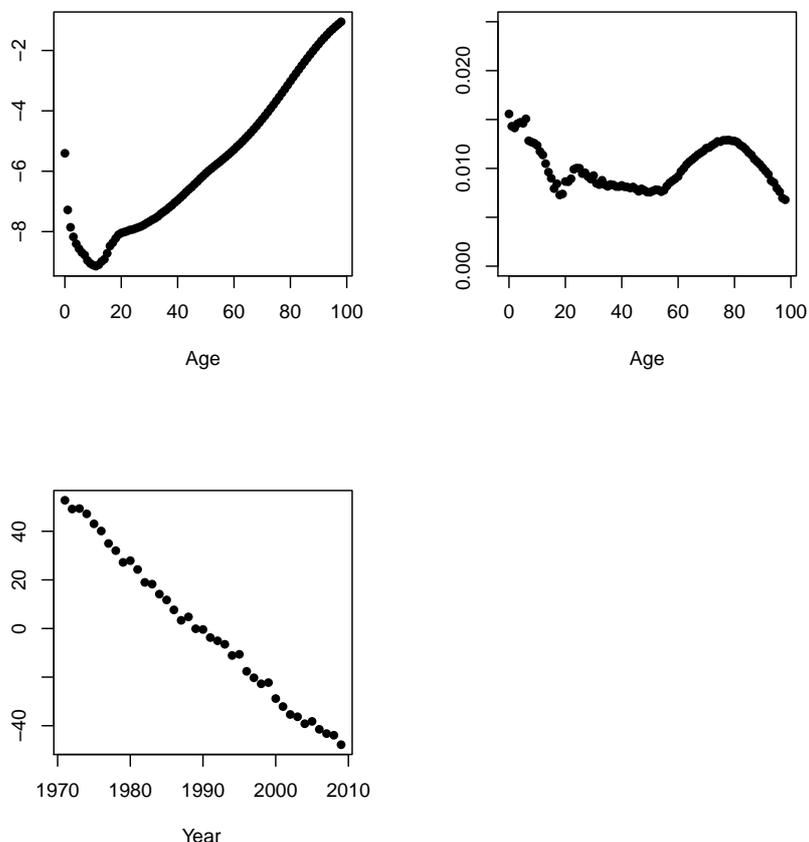


図 4.2 LC モデルのパラメータ推定値 (女, 0-98 歳, 1971-2009 年)

石井 (2008) は, 死亡が遅延する効果があるとし, 年齢シフト構造を仮定したモデルを提案している. すなわち,  $x$  を死亡率の元々の年齢座標,  $y$  を年齢シフト後の座標として,  $x = f(y)$  を式 (4.5) により定義している. 式 (4.5) では, 基準時点  $t_0 = 2005$  年からの年齢シフト量を  $S_t - S_{t_0}$  とし, 各年次の勾配  $\beta_t$  の基準時点との比を傾きとする線形変換を考え, 中央死亡率  $m_{x,t}$  に年齢シフトを行っている. 基準時点で 25(=  $B_1$ ) 歳未満の層には年齢シフトを行わず, 50(=  $B_2$ ) 歳以上の層には完全な年齢シフトを行い, その間の層には補間により年齢シフトを行っている.

$$f(y) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} y & y \leq B_1 \\ \left[ \frac{\beta_{t_0}}{\beta_t} (B_2 - S_{t_0}) + S_t - B_1 \right] \frac{y - B_1}{B_2 - B_1} + B_1 & B_1 \leq y \leq B_2 \\ \frac{\beta_{t_0}}{\beta_t} (y - S_{t_0}) + S_t & B_2 \leq y \leq S_{t_0} \\ y - S_{t_0} + S_t & S_{t_0} \leq y \end{cases} \quad (4.5)$$

ここで年齢シフト量を決めるパラメータ  $S_t$  と曲線の勾配を表すパラメータ  $\beta_t$  は, 生命表の 25 歳以上の死力に対し 3 パラメータロジスティック曲線をあてはめ推定している. 年齢シフト後の中央死亡率の対数

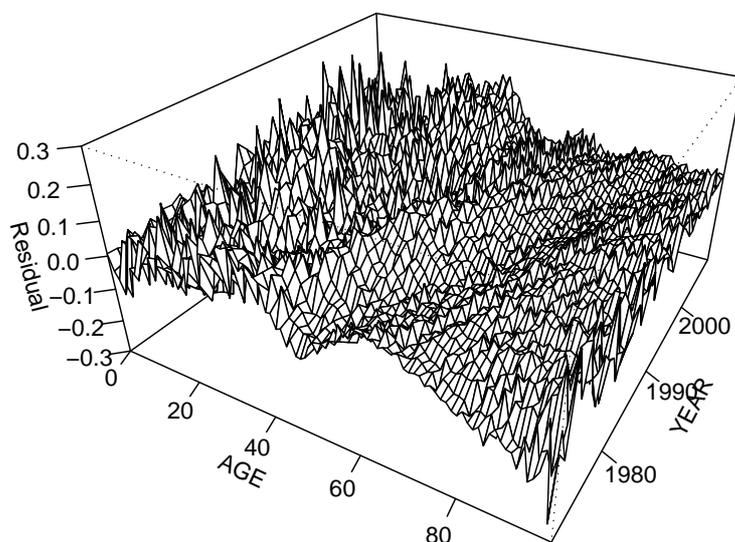


図 4.3 LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差  $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$  (男)

値に対し LC モデルを適用し，特異値分解を用いた最小二乗推定により LC モデルの各パラメータを推定している。

### 4.3 既存の拡張 LC モデル

LC モデルでは捉えきれていない効果に着目し，様々な拡張 LC モデルが提案されている。Renshaw and Haberman (2003) では，特異値分解を用いた LC モデルの推定を前提として，第 2 特異ベクトルまで考慮したモデルを提案している。Girosi and King (2006) や千木良, 山本 (2013) も，Lee and Carter (1992) が提案した第 1 特異ベクトルを用いた LC モデルの推定方法では，情報の喪失が大きく，長期的なトレンドは捉え易いものの短期的な死亡率予測が大きく外れることを指摘している。以下，コーホート効果を織り込んだ拡張 LC モデルについて述べる。

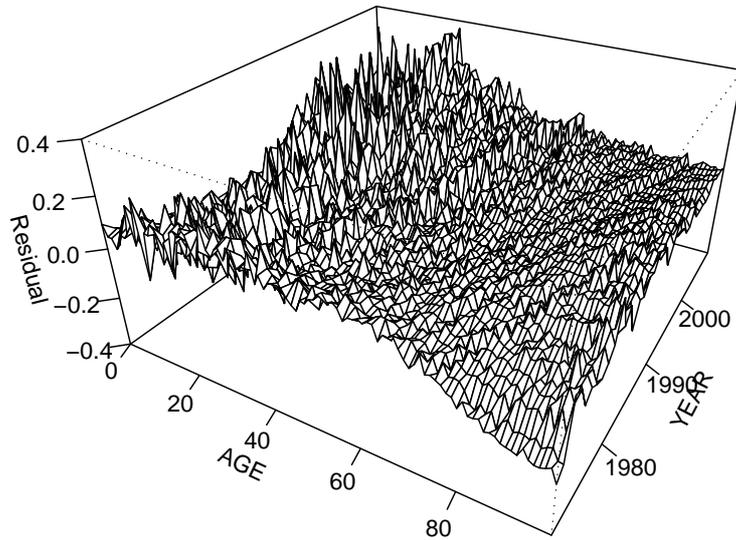


図 4.4 LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差  $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$  (女)

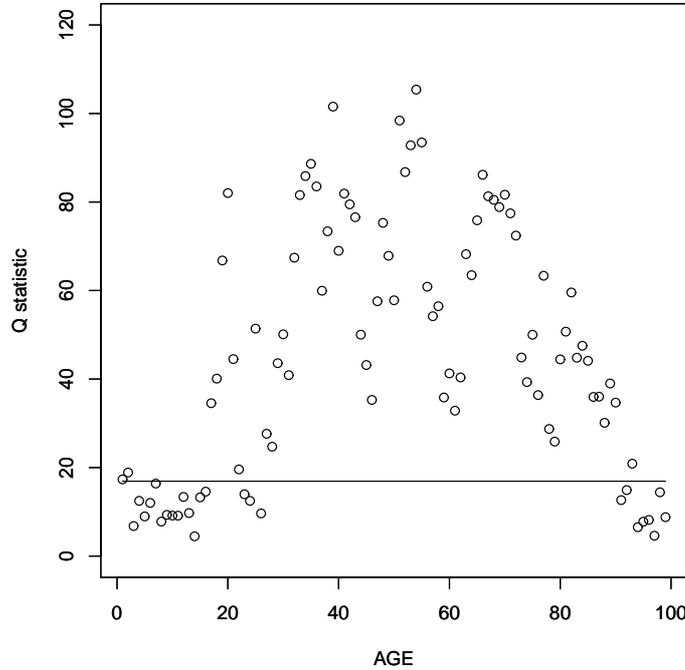
### 4.3.1 Renshaw-Haberman (RH) モデル

LC モデルを拡張しコーホート効果を織り込んだモデルとして, Renshaw and Haberman (2006) が提案する以下の RH モデルがある. RH モデルは, 期間効果とコーホート効果のそれぞれに年齢別の係数を乗ずる形となっているが, 特にこれらの年齢別の係数を 1 とした場合は, Age-Period-Cohort (APC) モデルとなる.

$$\log m_{x,t} = \alpha_x + \beta_x^{(1)} \kappa_t + \beta_x^{(2)} \iota_c + \varepsilon_{x,t} \quad (4.6)$$

パラメータの推定には識別問題が生ずるため, Renshaw and Haberman (2006) では,  $\alpha_x$  の推定値を

$$\hat{\alpha}_x = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \log m_{x,t}. \quad (4.7)$$



ラインは  $\chi^2(9)$  の上側 5% 点を表す。

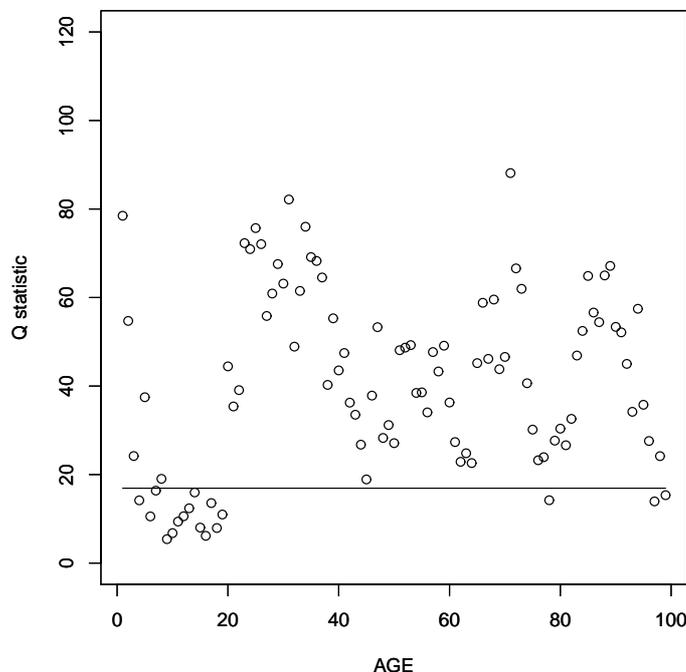
図 4.5 LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差の系列相関 (男)

より得て、以下の識別条件を置いている。

$$\sum_x \beta_x^{(1)} = 1 \quad ; \quad \sum_x \beta_x^{(2)} = 1 \quad ; \quad \sum_t \kappa_t = 0 \quad ; \quad \sum_c l_c = 0. \quad (4.8)$$

式 (4.7) において、 $T$  は対象となる期間を表す。また、生年コーホート  $c$  は、 $t - x$  により表される。Cairns et al. (2009) は、過剰適合の問題から標本数が 5 未満のコーホートのデータを除き、式 (4.8) の条件の下、 $\mu_{x,t} = \exp[\alpha_x + \beta_x^{(1)} \kappa_t + \beta_x^{(2)} l_c]$  とし、 $D_{x,t} = E_{x,t} m_{x,t}$  が平均  $E_{x,t} \mu_{x,t}$  のポアソン分布に従うとして、英国死亡率及び米国死亡率について各パラメータを推定している\*4。Cairns et al. (2009) は、LC, RH モデル等の 8 つのモデルを比較し、米国死亡率について RH モデルが最良な適合結果であったとしているが、RH モデルにおいてパラメータの頑健性の問題があることも指摘している。また、Dowd

\*4  $\alpha_x$  の推定値は、式 (4.7) によらず、最尤推定値を得るための繰り返し計算の中に入れられ算出されている。Cairns et al. (2009) では、依然として識別問題が残るが、最尤推定値へゆっくりと収束して行くことが述べられている。後述の我が国の死亡データを前提とした RH モデルのパラメータ推定では、Cairns et al. (2009) による方法の方が Renshaw and Haberman (2006) による方法よりも頑健でないが良好な適合度の結果が得られる。



ラインは  $\chi^2(9)$  の上側 5% 点を表す。

図 4.6 LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差の系列相関 (女)

et al. (2010) は、ある年より以前の期間のデータを用いて作成したある年の死亡率予測値が一貫しているか、また、予測開始年がその年へ近付くに従って実現値へ連続的に収斂して行くかを 6 つの死亡率モデルについてテスト (Contracting Horizon Backtests) し、RH モデルのパラメータ推定値による予測が不安定であることを示している。

本論文では、RH モデルのパラメータ推定を上記の Cairns et al. (2009) と同様の方法により実施する\*<sup>5</sup>。

### 4.3.2 Age-Period-Cohort (APC) モデル

APC モデルは LC モデルより前に開発され、医療統計や社会調査等において利用されてきた。APC モデルは、総平均を年齢の主効果に組み入れ、以下の通り記述することができる。

\*<sup>5</sup> 過剰適合の問題へは、標本数が 5 以下となる生年コーホートのパラメータを考慮しないこと (ゼロ) で対処することとした。

$$\log m_{x,t} = \alpha_x + \kappa_t + \iota_c + \varepsilon_{x,t} \quad (4.9)$$

Currie (2006) は、APC モデルを英国の死亡率へ適用した場合、LC モデルより良好な適合度が得られることを示している。APC モデルの推定方法としては、中村 (2005) が述べている通り、何らかの制約条件を課し年齢、期間、コーホートの 3 効果のパラメータを推定する方法と 3 効果のパラメータそのものの推定は不可能とし統計学的に推定可能な非線形成分の推定に議論を限るものがある。Cairns et al. (2009) では、 $\mu_{x,t} = \exp[\alpha_x + \kappa_t + \iota_c]$  とし、 $D_{x,t} = E_{x,t}m_{x,t}$  が平均  $E_{x,t}\mu_{x,t}$  のポアソン分布に従うとして、後者の非線形成分を推定する以下の方法を用いている\*6。まず、次のパラメータの制約条件を置く。

$$\sum_t \kappa_t = 0 \quad ; \quad \sum_c \iota_c = 0 \quad (4.10)$$

次に、線形成分の傾きを  $S_\alpha$  とし、後述の最尤推定における繰返しにおいて、式 (4.11) を最小とする  $S_\alpha$  を算出し、式 (4.12)-(4.14) により更新する。

$$D(S_\alpha) = \sum_x (\alpha_x + S_\alpha(x - \bar{x}) - \bar{\alpha}_x)^2 \quad (4.11)$$

$$\tilde{\alpha}_x = \alpha_x + S_\alpha(x - \bar{x}) \quad (4.12)$$

$$\tilde{\kappa}_t = \kappa_t - S_\alpha(t - \bar{t}) \quad (4.13)$$

$$\tilde{\iota}_c = \iota_c - S_\alpha((t - \bar{t}) - (x - \bar{x})) \quad (4.14)$$

本論文では、APC モデルのパラメータ推定を上記の Cairns et al. (2009) と同様の方法により実施する\*7。

## 4.4 Cairns, Blake and Dowd (CBD) モデル

Cairns et al. (2006) は、長寿リスクの評価のための死亡率  $q_{x,t}$  に関する次の 2 ファクターモデル (CBD モデル) を導入している。

$$\log \frac{q_{x,t}}{1 - q_{x,t}} = \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)} + \varepsilon_{x,t} \quad (4.15)$$

\*6 Cairns et al. (2009) では、RH モデルと同様、過剰適合の問題から標本数が 5 未満のコーホートのデータを除外している。

\*7 本論文では、RH モデルと同様、過剰適合の問題へは、標本数が 5 以下となる生年コーホートのパラメータを考慮しないこと (ゼロ) で対処することとした。

Cairns et al. (2009) では、比較対象として上記の CBD モデルも取り上げており、 $\beta_x^{(1)}$  と  $\beta_x^{(2)}$  を次の通り想定している。

$$\beta_x^{(1)} = 1 \quad ; \quad \beta_x^{(2)} = (x - \bar{x}) \quad (4.16)$$

CBD モデルの  $\kappa_t^{(1)}$  系列と  $\kappa_t^{(2)}$  系列には、2 変量のドリフト付きランダムウォークモデル等の時系列モデルが適用される。Cairns et al. (2006) は、CBD モデルが英国 (イングランドとウェールズの合算) の高齢死亡率のデータへ良く適合することを示している。一方、Fujisawa and Li (2010) は、CBD モデルが我が国の若年から中年層の死亡データへの適合が良くないことを指摘しているが、長寿リスクを評価する上ではこれらの年層の死亡データへの適合は余り重要でないことも述べている。

本論文では、LC モデルとその拡張モデルとの比較のため、CBD モデルも比較対象として取り上げる。CBD モデルのパラメータ推定は、Cairns et al. (2009) と同様、式 (4.16) の前提の下、死亡率と中央死亡率は  $m_{x,t} = -\log[1 - q_{x,t}]$  の関係があるとし、 $\mu_{x,t} = \log[1 + \exp(\kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x})\kappa_t^{(2)})]$  とし、 $D_{x,t} = E_{x,t}m_{x,t}$  が平均  $E_{x,t}\mu_{x,t}$  のポアソン分布に従うと仮定し行う。

## 4.5 LC モデルの残差構造解析 (日本の死亡データの場合)

図 4.7 及び図 4.8 は、日本の男の 0-98 歳、1971-2009 年の死亡データを前提として最尤推定された LC モデルのパラメータによる対数死亡率の残差  $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$  (30-80 歳の 10 歳毎) の相関を示している。図 4.7 から、同生年コーホートの当年と前年の残差の間に強い相関があること、図 4.8 から、同年齢の当年と前年の残差の間にある程度強い相関があることが分かる。女の同年齢、同期間の対数死亡率の残差についても、同様のことが言え、また、対象となる期間を 1951-2009 年とした場合 (男・女) についても、同様の構造が観察される。2 期前の残差との相関は、1 期前のものと比較し弱くなり、3 期以上前の残差との相関は、1 期前のものと比較するとかなり弱くなる。

図 4.9、図 4.10 は、生年コーホート別の対数死亡率の残差 (1881-1991 年生の 10 年毎) の時系列推移を示している。1931 年生の男の残差系列が高位で推移してきているが、これは、いくつかの先行研究 (Tango and Kurashina, 1987 等) が 1926-1935 年生れの男 (「昭和ヒトケタ世代」と呼ばれる) については、これまで死亡率の低下が他の生年コーホートと比較し進まず推移してきたとしていることと一致している。1921 年生れの男の残差系列は継続して低位であるが、これらを除くその他の生年コーホートについては、幼年・若年期と超高齢期以外の概ね 20-90 歳くらいについて時代とともに高位又は低位の傾向が変化してきている。日本の生保標準生命表 2007(年金開始後用) の作成においても、コーホート効果の影響が観察される 1928-1935 年生れの男性については、その影響を除去して生命表が作成されており、この年層の特異性が認識されている。なお、女の同年齢、同期間の死亡率の LC モデルの残差については、1926-1935 年生れの男のように継続して高位又は低位であった生年コーホートは見られない。このことは、小田切、内田 (2003) が APC モデルを用いて日本人中高年の損失寿命に関する分析を行い女性はコー

ホート効果の影響が小さいとしていることも整合的である。

上記のことを踏まえ、LC モデルの残差について以下の仮説を策定した。

仮説 (1) 1 期前の 1 歳下の年齢 (同生年コーホートの 1 年前) の残差と当年の残差の間に相関が観察されることから、同生年の死亡率の LC モデルのパラメータで表される平均的な死亡率水準 (以下「LC 水準」と言う) からの乖離は、LC 水準を基準とした場合の同生年世代の生命力の強さを表すものと考えることができ、その場合、諸要因の影響下において前年の生命力の強さを承継する。この承継のことを「効果 1 : 生年コーホート別の効果」と呼ぶ<sup>\*8</sup>。

仮説 (2) 1 期前の同年齢 (1 つ上の生年コーホートの 1 年前) の残差と当年の残差に相関が観察されることから、同年齢の死亡率の LC 水準からの乖離は、その時代の諸要因が当該年齢の死亡率へ与える影響によると考えることができ、その場合、同年齢の死亡率に与える諸要因の影響は前年の影響を承継する。この承継のことを「効果 2 : 補足的な年齢・期間効果」と呼ぶ。

2 期前の 2 歳下の年齢 (同生年コーホートの 2 年前) の残差と当年の残差との相関も観察されることから、死亡率が低下して行く過程で振り子のように振れながら 1 年置きに低下する要素が含まれる可能性がある。この効果は、隔年で観察されるものではあるが、効果 1 と同様の理由によるものと考えられるため、ここでは効果 1 の 1 年置き要素として整理する。

---

<sup>\*8</sup> 「コーホート効果」という用語は、世代間の相違を表すものでありその世代の効果が一定又は急激に変化するものではないとする考え方等に基づき使用されて来っており、これと区別するため、「生年コーホート別の効果」とした。

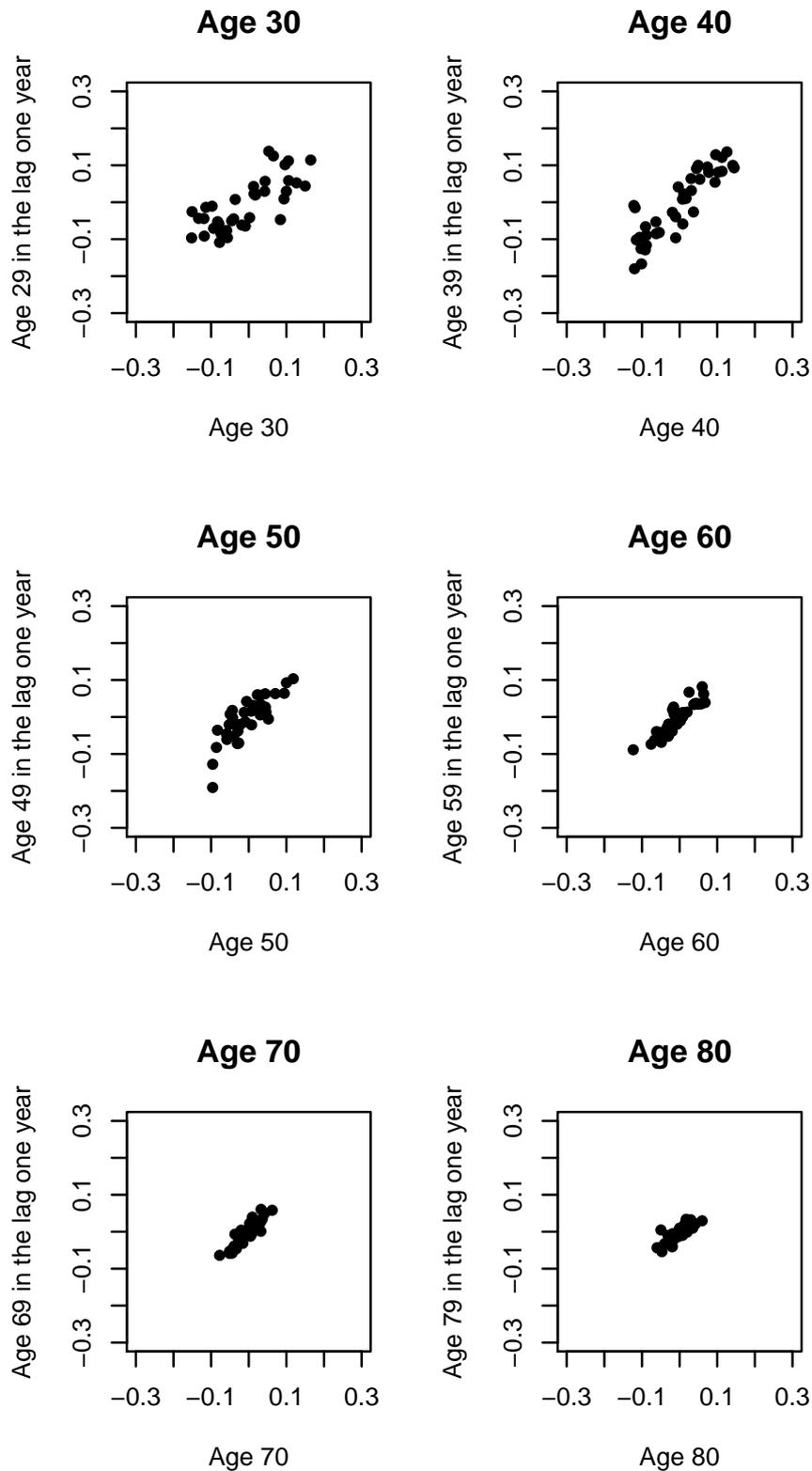


図 4.7 LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差の相関 (男, 1971-2009 年, 1 期前の 1 歳下の年齢 (同生年コーホートの 1 年前) の残差と当年の残差の相関)

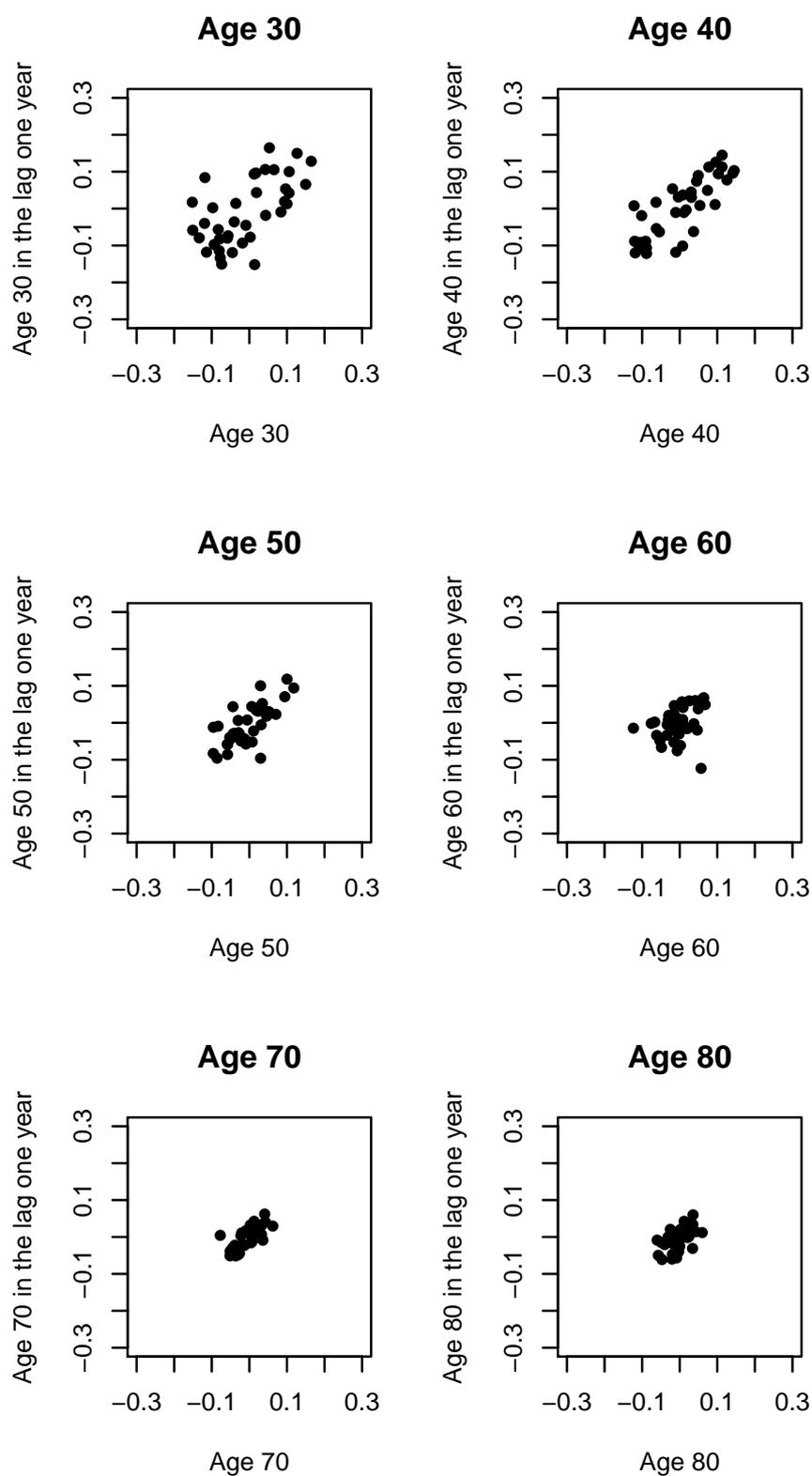


図 4.8 LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差の相関 (男, 1971-2009 年, 1 期前の同年齢の残差と当年の残差の相関)

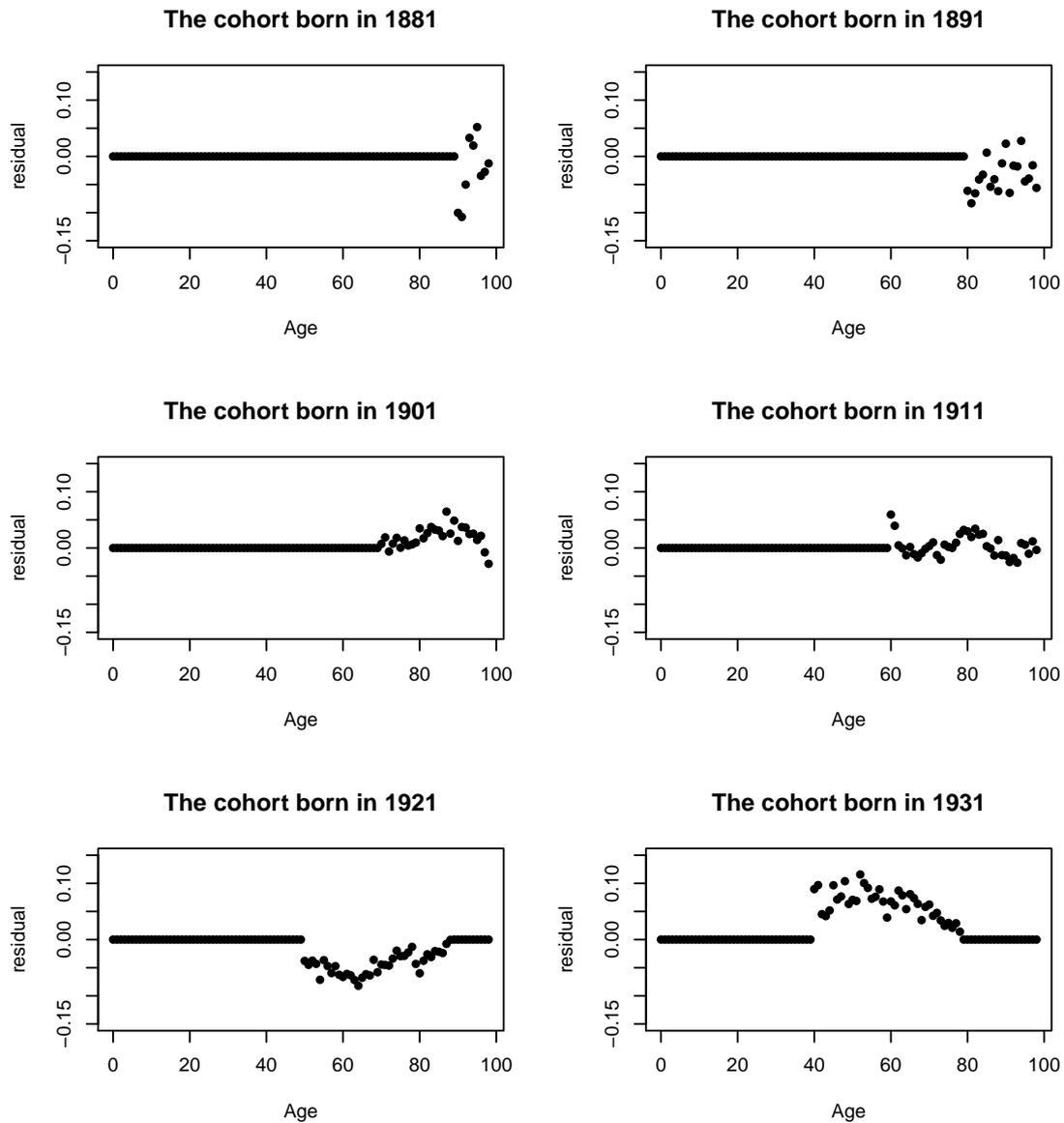


図 4.9 LC モデルのパラメータ推定値による生年コーホート別の対数死亡率の残差系列 (男, 1881-1931 年生)

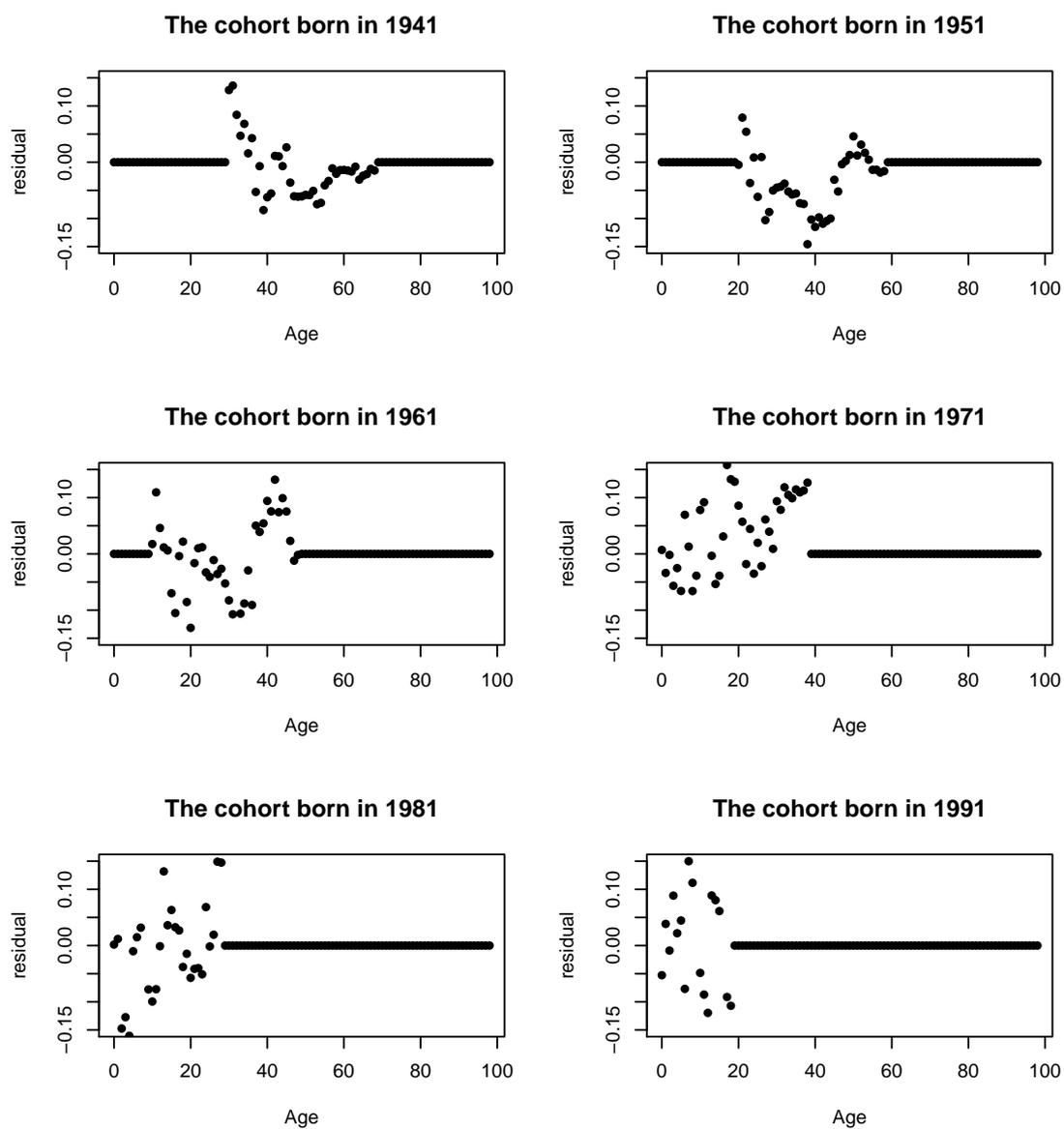


図 4.10 LCモデルのパラメータ推定値による生年コーホート別の対数死亡率の残差系列 (男, 1941-1991 年生)

## 4.6 Lee-Carter Vector Autoregressive (LC-VAR) モデルの策定

前節で策定した仮説に基づき，LC モデルの残差に VAR(Vector Autoregressive) モデルを適用した LC-VAR モデルを策定した．LC-VAR モデルは，対象となる期間を  $t(1 \leq t \leq T)$  として，下記の通り定式化される．

$$\mathbf{M}_t = \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \kappa_t + \mathbf{Z}_t \quad (4.17)$$

$$\mathbf{M}_t = \begin{bmatrix} \log m_{0t} \\ \log m_{1t} \\ \vdots \\ \log m_{\omega t} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_\omega \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_\omega \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

式 (4.17) について推定された  $\kappa_t$  系列については，式 (4.19) のドリフト付きランダムウォークモデルを想定する．式 (4.19) と式 (4.20) において  $1 \leq t \leq T$  である．

$$\kappa_t = \lambda + \kappa_{t-1} + \eta_t \quad ; \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2) \quad (4.19)$$

$$\mathbf{Z}_t = \sum_{L=1}^q \mathbf{C}_L \mathbf{Z}_{t-L} + \mathbf{W}_t \quad (4.20)$$

$$\mathbf{C}_L = \begin{bmatrix} C_{(0,0)}^L & \cdots & C_{(0,\omega)}^L \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{(\omega,0)}^L & \cdots & C_{(\omega,\omega)}^L \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{Z}_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{0t} \\ \varepsilon_{1t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{\omega t} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{W}_t = \begin{bmatrix} w_{0t} \\ w_{1t} \\ \vdots \\ w_{\omega t} \end{bmatrix} ; \quad w_{xt} \sim N(0, \sigma_x^2) \quad ; \quad \text{cov}(w_{jt}, w_{kt}) = 0 \quad (4.22)$$

LC モデルの残差の系列相関は，概ね 15-20 歳以上について観察され，また，超高齢となると相関はほとんど観察されなくなる．また，強い相関が見られるのは，前述の通り，1-2 期前の残差との相関である．これらのことを踏まえ，LC-VAR モデルの VAR 部分の次数を 1 次とし，係数行列は 16-90 歳について

設定することとした。式 (4.21) の具体的な係数は以下の通りとなる (以下、このモデルを「LC-VAR(1)」と言う)。

$$\begin{aligned} C_{(i,j)}^1 &= C_{j1}^1 & j = i - 1 & \quad 16 \leq j \leq 90 \\ C_{(i,j)}^1 &= C_{j2}^1 & j = i & \quad 16 \leq j \leq 52 \\ C_{(i,j)}^1 &= 0 & \text{otherwise} & \end{aligned} \quad (4.23)$$

また、前述の通り、2 期前の 2 歳下の年齢 (同生年コーホートの 2 年前) の残差と当年の残差との相関も観察され、効果 1 の 1 年置き of 要素として整理したが、この要素を考慮すると、LC-VAR モデルの VAR 部分の次数は 2 次となる。この場合の式 (4.21) の具体的な係数は、1 次 of 項については式 (4.23) と同じ、2 次 of 項については以下の通りとなる (以下、このモデルを「LC-VAR(2)」と言う)。

$$\begin{aligned} C_{(i,j)}^2 &= C_{j1}^2 & j = i - 1 & \quad 16 \leq j \leq 90 \\ C_{(i,j)}^2 &= 0 & \text{otherwise} & \end{aligned} \quad (4.24)$$

なお、次節で述べる LC-VAR モデルのパラメータを最尤推定するに当たり、VAR 部分のパラメータの特徴を事前に把握するため、LC モデルの各年齢の残差系列について最小二乗推定による線形回帰を実施した結果、VAR 部分の効果 2 に係るパラメータは高年齢でゼロに近い値となったため、前述の通り、16-52 歳について係数を設定することとした。

## 4.7 LC-VAR モデルのパラメータの最尤推定

実際の年齢別死亡率の分散は不均一であると考えられることから、前述の LC, RH, APC, CBD の各モデルと同様、LC-VAR モデルについても、 $\mu_{x,t}$  が次式に基づくものとし、 $D_{x,t} = E_{x,t}m_{x,t}$  が平均  $E_{x,t}\mu_{x,t}$  のポアソン分布に従うとして最尤法によりパラメータを推定する。

$$\mu_t = \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \kappa_t + \sum_{L=1}^q \mathbf{C}_L \mathbf{Z}_{t-L} \quad (4.25)$$

$$\mu_t = \begin{bmatrix} \log \mu_{0t} \\ \log \mu_{1t} \\ \vdots \\ \log \mu_{\omega t} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

尤度関数は、パラメータベクトルを

$$\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k)' = (\alpha_0, \dots, \alpha_\omega, \beta_0, \dots, \beta_\omega, \kappa_1, \dots, \kappa_T, C_{(0,0)}^1, \dots, C_{(\omega,\omega)}^1, \dots, C_{(0,0)}^q, \dots, C_{(\omega,\omega)}^q)'$$

として、次式で与えられる。

$$L(\Phi | D, E) = \prod_{x,t} \frac{\exp[-E_{x,t}\mu_{x,t}][E_{x,t}\mu_{x,t}]^{D_{x,t}}}{D_{x,t}!} \quad (4.27)$$

対数尤度は、

$$l(\Phi | D, E) = \sum_{x,t} [D_{x,t} \log(E_{x,t}\mu_{x,t}) - E_{x,t}\mu_{x,t} - \log(D_{x,t}!)] \quad (4.28)$$

最尤推定値は、以下の Newton-Raphson 法に基づく繰返し計算により求める\*<sup>9</sup>。

$$\Phi^{(n+1)} = \Phi^{(n)} - \left[ \frac{\partial^2 l^{(n)}}{\partial \Phi \partial \Phi'} \right]^{-1} \frac{\partial l^{(n)}}{\partial \Phi} \quad (4.29)$$

ここで、 $l^{(n)} = l^{(n)}(\Phi^{(n)})$  であり、また、

$$\frac{\partial l^{(n)}}{\partial \Phi} = \left[ \frac{\partial l^{(n)}(\Phi^{(n)})}{\partial \phi_1}, \dots, \frac{\partial l^{(n)}(\Phi^{(n)})}{\partial \phi_k} \right]' \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial^2 l^{(n)}}{\partial \Phi \partial \Phi'} = \left[ \frac{\partial^2 l^{(n)}(\Phi^{(n)})}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right]_{i,j=1}^k \quad (4.31)$$

なお、VAR 部分のパラメータについては、定常の要件を満たすよう制約条件を設けた。具体的には、LC-VAR(2) の場合、以下の条件を設定した。

$$0 < C_{j1}^1 < 1 \quad ; \quad 0 < C_{j2}^1 < 1 \quad ; \quad 0 < C_{j1}^2 < 1 \quad ; \quad 0 < C_{j1}^1 + C_{j1}^2 < 1 \quad (4.32)$$

上記の方法に基づき、男の 14-90 歳、1971-2009 年と 1951-2009 年の死亡データについて、LC-VAR(1)、LC-VAR(2) の各モデルのパラメータを推定した結果は、図 4.11~図 4.14、表 4.2 の通りである。LC-VAR(1) の効果 1 のパラメータ ( $C_{j1}^1$ ) は、16 歳から 60 歳くらいにかけ徐々に 0.2 程度から 1.0 近くまで増加し、60 歳くらいから徐々に減少するが、90 歳近くなると急激に減少する。LC-VAR(1) の効果 2 のパラメータ ( $C_{j2}^1$ ) は、16 歳近辺では 0.6 程度であるが徐々に減少し、50 歳すぎにはゼロにかなり近い値となる。LC-VAR(2) の効果 1 の 1 期前のパラメータ ( $C_{j1}^2$ ) は、16 歳から 60 歳くらいにかけ概ね 0.2 程度から徐々に 0.6 程度まで増加し、その後 90 歳くらいまで徐々に減少して行く。効果 1 の 2 期前のパラメータ ( $C_{j1}^2$ ) は、16 歳近辺では概ねゼロであるのが年齢の上昇とともに 0.4 程度まで増加して行く。

\*<sup>9</sup> 対数尤度関数の変化が十分小さい  $10^{-6}$  未満となったとき、繰返し計算を停止している。本論文の他の最尤推定についても同様としている。

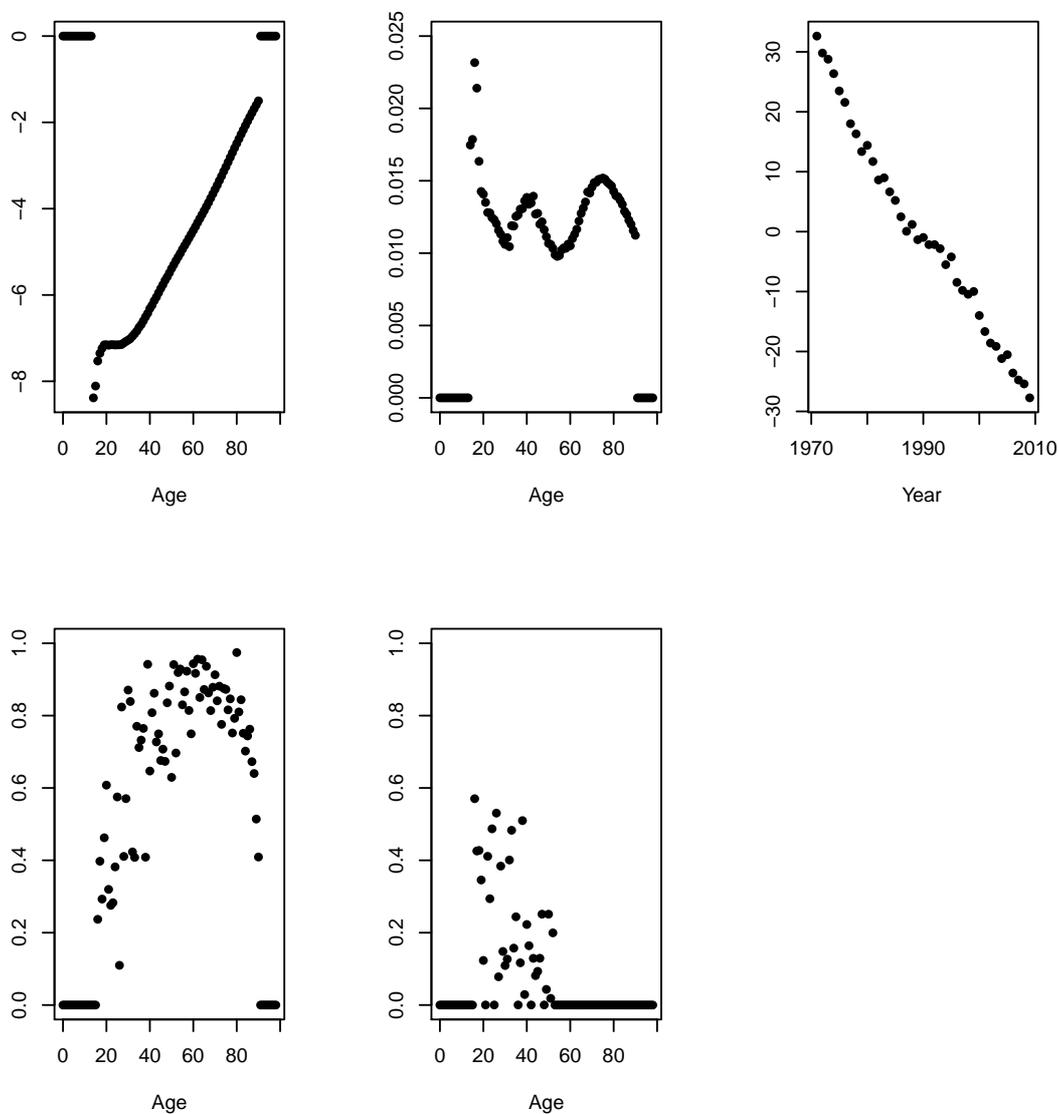


図 4.11 LC-VAR(1) モデルのパラメータ推定結果 (男, 14-90 歳, 1971-2009 年)

(上段左より  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$ ,  $\kappa_t$ , 下段左より  $C_{j1}^1$ ,  $C_{j2}^1$ )

LC-VAR(2) の効果 2 のパラメータ ( $C_{j2}^1$ ) は, LC-VAR(1) の場合と同様, 16 歳近辺では 0.6 程度であるが徐々に減少し, 50 歳すぎにはゼロにかなり近い値となる. LC-VAR(1) と比較し LC-VAR(2) のパラメータはばらつきが大きく見え, また, 対象となる期間が短い方がパラメータのばらつきが大きく見えるが, パラメータ値は前述のような特徴を持つことは共通の結果となっている. なお, LC, LC-VAR(1), LC-VAR(2) の死亡指数  $\kappa_t$  系列に係るパラメータ  $\lambda$  と  $\sigma_\eta$  の推定値については, それ程大きな差が無い結果となった.

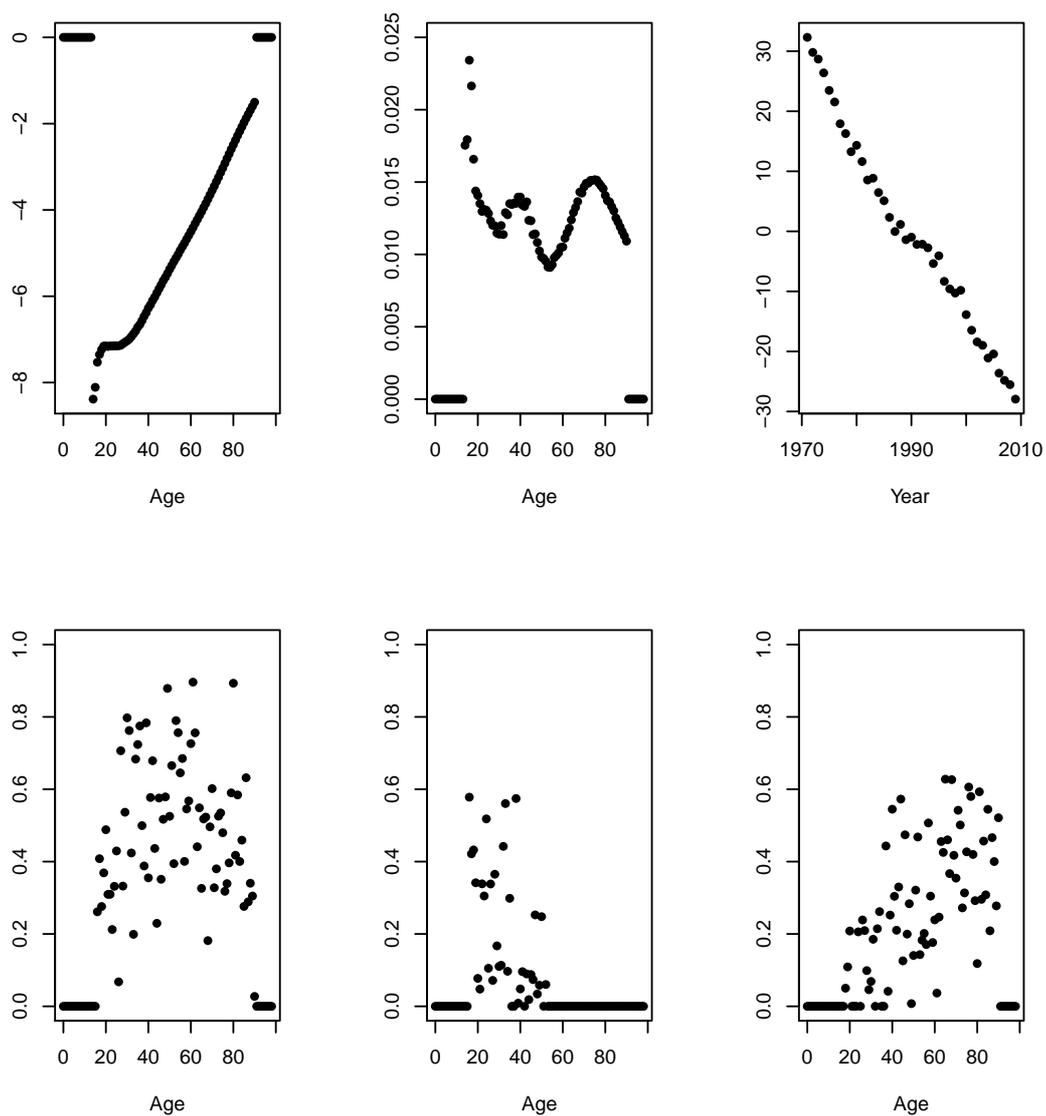


図 4.12 LC-VAR(2) モデルのパラメータ推定結果 (男, 14-90 歳, 1971-2009 年)

(上段左より  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$ ,  $\kappa_t$ , 下段左より  $C_{j1}^1$ ,  $C_{j2}^1$ ,  $C_{j1}^2$ )

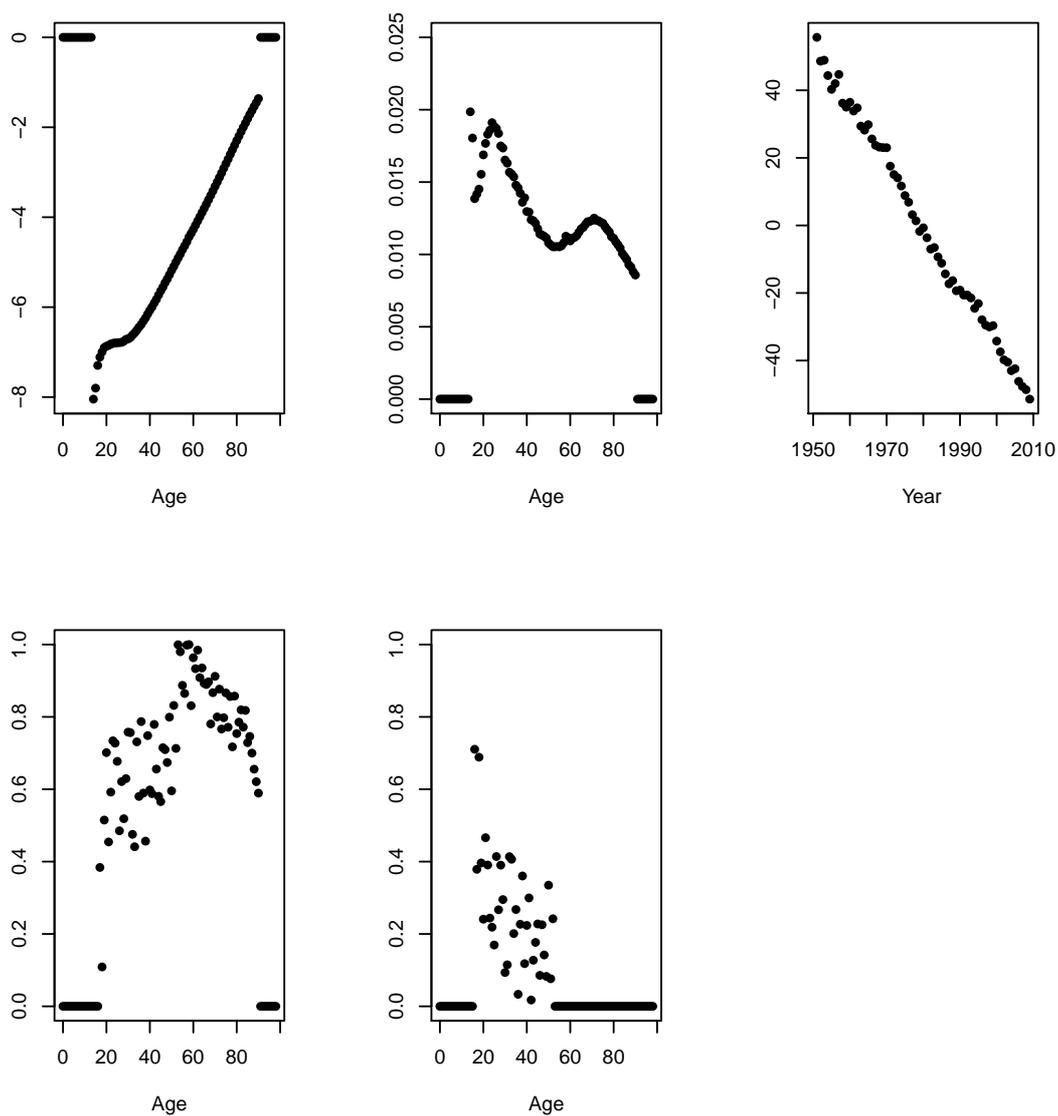


図 4.13 LC-VAR(1) モデルのパラメータ推定結果 (男, 14-90 歳, 1951-2009 年)

(上段左より  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$ ,  $\kappa_t$ , 下段左より  $C_{j1}^1$ ,  $C_{j2}^1$ )

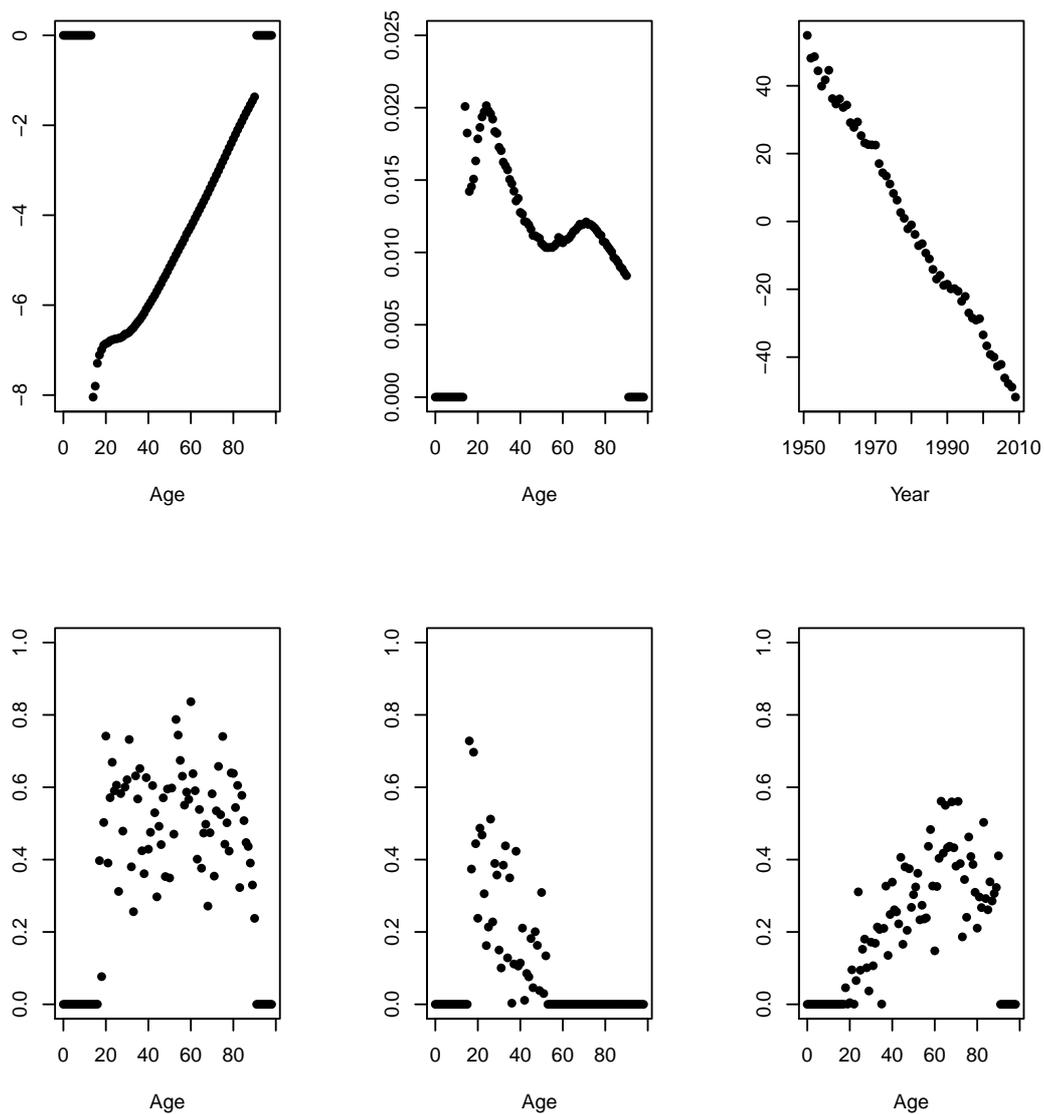


図 4.14 LC-VAR(2) モデルのパラメータ推定結果 (男, 14-90 歳, 1951-2009 年)

(上段左より  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$ ,  $\kappa_t$ , 下段左より  $C_{j1}^1$ ,  $C_{j2}^1$ ,  $C_{j1}^2$ )

表 4.2 LC, LC-VAR モデルのパラメータ推定結果 ( $\lambda, \sigma_\eta$ )(対象データ: 14-90 歳)

		$\lambda$	$\sigma_\eta$
1971-2009・男	LC	-1.61	1.53
	LC-VAR(1)	-1.59	1.48
	LC-VAR(2)	-1.59	1.49
1951-2009・男	LC	-1.86	2.28
	LC-VAR(1)	-1.85	2.25
	LC-VAR(2)	-1.84	2.26
1971-2009・女	LC	-1.97	1.52
	LC-VAR(1)	-1.91	1.47
	LC-VAR(2)	-1.93	1.48
1951-2009・女	LC	-2.73	2.63
	LC-VAR(1)	-2.63	2.59
	LC-VAR(2)	-2.53	2.65

## 4.8 LC-VAR モデルと各モデルの適合度の比較

本節では、年齢 14-90 歳、期間 1971-2009 年と 1951-2009 年、男女のデータに対し、LC, APC, RH の各モデルを適用し推定し、LC-VAR(1), LC-VAR(2) の各モデルと比較する。

図 4.15～図 4.17 は、それぞれ、男・14-90 歳・1971-2009 年のデータに基づき推定した LC モデル、RH モデル、LC-VAR(1) モデル (初期値が適用される期間を除く) のパラメータ推定値による対数死亡率の推定値  $\log \hat{m}_{x,t}$  の観測値に対する残差  $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t} = \log(D_{x,t}/E_{x,t}) - \log \hat{m}_{x,t}$  を年齢と時代を軸にとった局面を表している。図 4.15 で観察される LC モデルの残差の“うねり”は、図 4.16 の RH モデルにおいては残ってしまっているが、図 4.17 の LC-VAR(1) モデルにおいては消滅し均されていることが分かる。図 4.17 に表示された LC-VAR(1) モデルの残差系列について対象年数を 10 年とした Ljung-Box Q 統計量を計算すると、図 4.18 の通りとなり、ほぼ系列相関が消滅していることが分かる。

図 4.19～図 4.21 は、それぞれ、女・14-90 歳・1971-2009 年のデータに基づき推定した LC モデル、RH モデル、LC-VAR(1) モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の推定値  $\log \hat{m}_{x,t}$  の観測値に対する残差  $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t} = \log(D_{x,t}/E_{x,t}) - \log \hat{m}_{x,t}$  を年齢と時代を軸にとった局面を表している。男の場合と同様、図 4.19 で観察される LC モデルの残差の“うねり”は、図 4.20 の RH モデルにおいては残ってしまっているが、図 4.21 の LC-VAR(1) モデルにおいては消滅し均されていることが分かる。図 4.21 に表示された LC-VAR(1) モデルの残差系列について対象年数を 10 年とした Ljung-Box Q 統計量を計算すると、図 4.22 の通りとなり、男の場合と同様、ほぼ系列相関が消滅していることが分かる。

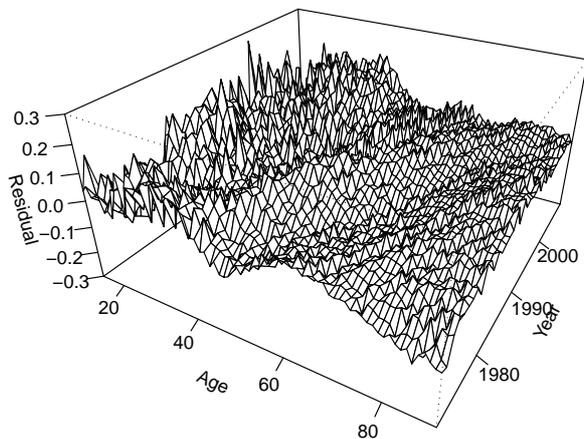


図 4.15 LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差  $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$  (男, 対象データ: 14-90 歳・1971-2009 年)

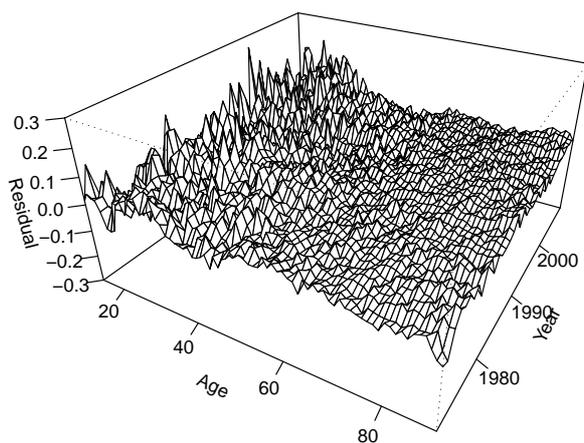


図 4.16 RH モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差  $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$  (男, 対象データ: 14-90 歳・1971-2009 年)

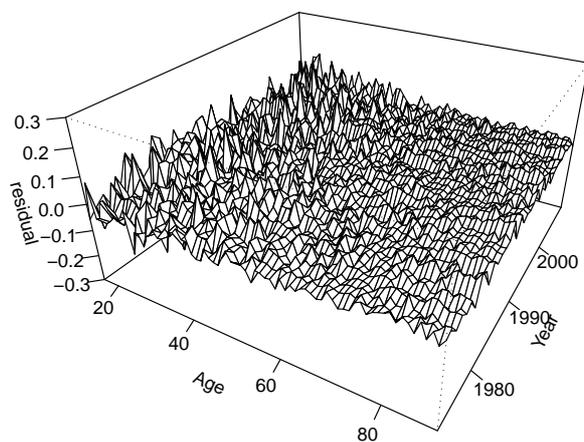
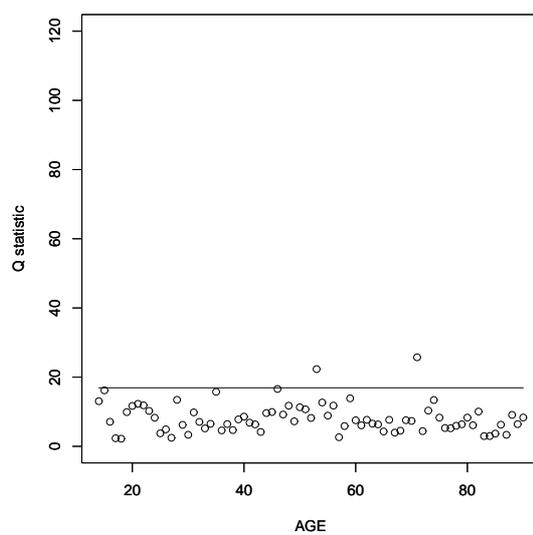


図 4.17 LC-VAR(1) モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差  $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$  (男, 対象データ: 14-90 歳・1971-2009 年)



ラインは  $\chi^2(9)$  の上側 5% 点を表す.

図 4.18 LC-VAR(1) モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差の系列相関 (男, 対象データ: 14-90 歳・1971-2009 年)

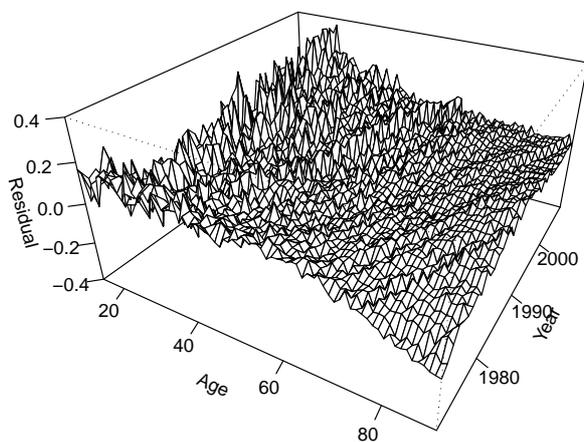


図 4.19 LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差  $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$  (女, 対象データ: 14-90 歳・1971-2009 年)

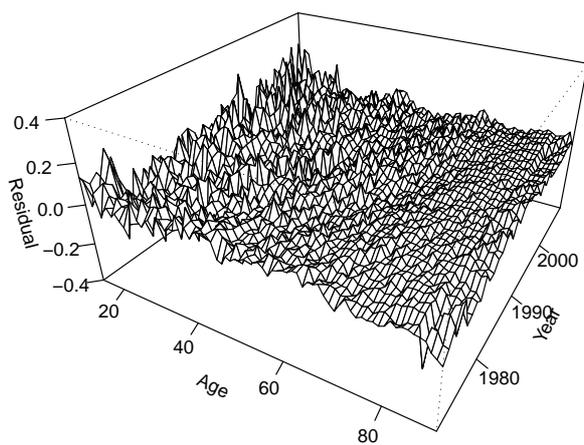


図 4.20 RH モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差  $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$  (女, 対象データ: 14-90 歳・1971-2009 年)

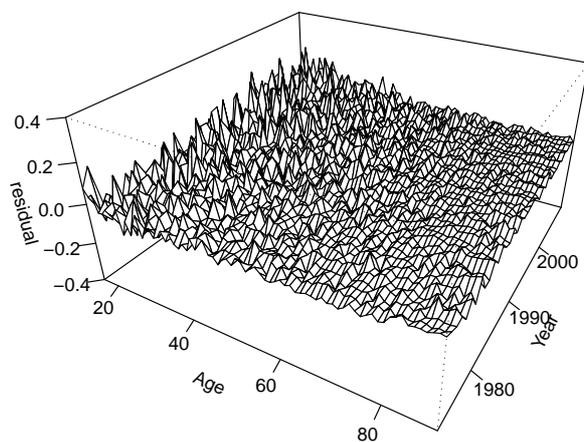
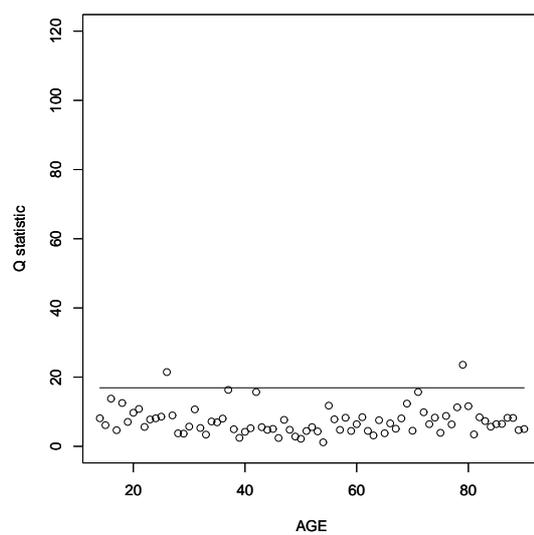


図 4.21 LC-VAR(1) モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差  $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$  (女, 対象データ: 14-90 歳・1971-2009 年)



ラインは  $\chi^2(9)$  の上側 5% 点を表す。

図 4.22 LC-VAR(1) モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差の系列相関 (女, 対象データ: 14-90 歳・1971-2009 年)

次に、各モデルの適合度を比較するため、 $N$  を観察されるデータ数、 $\nu$  を自由パラメータ数、パラメータ推定値による対数死亡率の推定値を  $\log \hat{m}_{x,t}$  として、式 (4.33) により定義される AIC(赤池情報量規準) と式 (4.34) により定義される BIC \*<sup>10</sup> 及び式 (4.35) により定義される死亡数の標準化誤差の分散\*<sup>11</sup> を計算した。結果は、表 4.3, 表 4.4 の通りである。

$$AIC = -2l + 2\nu \quad (4.33)$$

$$BIC = -2l + \nu \log N \quad (4.34)$$

$$u_{x,t} = \frac{D_{x,t} - E_{x,t} \hat{m}_{x,t}}{\sqrt{E_{x,t} \hat{m}_{x,t}}} \quad (4.35)$$

LC-VAR モデルとそれ以外のモデルを比較すると、女の 1951-2009 年の場合以外は全て LC-VAR モデルが AIC, BIC, 標準化誤差の分散とも最も良好な結果となっている。LC-VAR(1) と LC-VAR(2) を比較すると、男の 1971-2009 年の場合は LC-VAR(2) モデルの方が良好であるが、それ以外は全て LC-VAR(1) モデルの方が良好である。しかし、これら 2 つのモデルの差はそれ程大きくない。

LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差系列に相関がみられる 16 歳以上 90 歳以下について 1 次及び 2 次の VAR モデルを想定しパラメータを同時最尤推定した結果、RH モデルよりさらに良好な AIC, BIC が得られ、残差も均されうねりが消滅することが分かった。RH モデルの年齢と時代を軸にとった残差局面には、依然としてうねりのようなものが残り、残差系列が RH モデルで記述されるようなコーホート効果の構造となっていない可能性が考えられる。

なお、CBD モデルについては、Fujisawa and Li (2010) が述べている通り若年や中年層へのあてはまりが悪く、他のモデルと比較し AIC, BIC, 標準化誤差の分散とも相当悪い結果となった。

次に、対象としている 6 つのモデルにおいては、いくつかのモデルの組が入れ子の関係にあるため、これらを抽出し、尤度比検定によって入れ子モデルが真である帰無仮説を検定した。尤度比検定統計量  $2(l_2 - l_1)$  は、およそ自由度  $\nu_2 - \nu_1$  の  $\chi^2$  乗分布に従う。有意水準を 1% とすると、表 4.5, 表 4.6 の通り、男の 1951-2009 年、女の 1951-2009 年と 1971-2009 年の各データについて一般的なモデル LC-VAR(2) に対し制約された LC-VAR(1) が真であることを棄却できないことを除いて、帰無仮説は棄却され、より一般的なモデルが好ましい結果となる。

\*<sup>10</sup> LC-VAR モデルの AIC と BIC は開始前 2 年の死亡データに基づく初期値を補って計算している。

\*<sup>11</sup> Cairns et al. (2009) も BIC と死亡数の標準化誤差の分散を利用している。

表 4.3 AIC・BIC と死亡数の標準化誤差の分散 (男)

		自由パラメータ数	AIC	BIC	標準化誤差の分散
1971-2009・男	LC	191	55,549	56,697	9.09
	APC	229	49,127	50,503	6.86
	RH	381	37,234	39,523	2.62
	CBD	78	360,705	361,173	132.95
	LC-VAR(1)	303	37,230	39,051	2.58
	LC-VAR(2)	378	36,320	38,591	2.26
1951-2009・男	LC	211	124,743	126,098	18.40
	APC	269	121,391	123,119	18.22
	RH	421	62,970	65,673	4.17
	CBD	118	639,048	639,806	153.23
	LC-VAR(1)	323	62,010	64,085	3.89
	LC-VAR(2)	398	62,055	64,610	3.96

表 4.4 AIC・BIC と死亡数の標準化誤差の分散 (女)

		自由パラメータ数	AIC	BIC	標準化誤差の分散
1971-2009・女	LC	191	49,064	50,212	7.33
	APC	229	39,232	40,607	3.85
	RH	381	38,505	40,794	3.64
	CBD	78	513,917	514,386	172.90
	LC-VAR(1)	303	34,628	36,448	2.18
	LC-VAR(2)	378	34,782	37,053	2.25
1951-2009・女	LC	211	185,770	187,125	33.44
	APC	269	167,136	168,863	29.40
	RH	421	54,423	57,127	2.53
	CBD	118	818,561	819,319	184.53
	LC-VAR(1)	323	59,676	61,750	3.78
	LC-VAR(2)	398	59,792	62,348	3.85

表 4.5 尤度比検定の結果 (男)

	制約されたモデル	一般的なモデル	尤度比検定統計量	自由度	p 値
1971-2009・男	LC	RH	18,696	190	<0.01
	APC	RH	12,198	152	<0.01
	LC	LC-VAR(1)	18,544	112	<0.01
	LC	LC-VAR(2)	19,604	187	<0.01
	LC-VAR(1)	LC-VAR(2)	1,060	75	<0.01
1951-2009・男	LC	RH	62,194	210	<0.01
	APC	RH	58,726	152	<0.01
	LC	LC-VAR(1)	62,958	112	<0.01
	LC	LC-VAR(2)	63,064	187	<0.01
	LC-VAR(1)	LC-VAR(2)	106	75	>0.01

表 4.6 尤度比検定の結果 (女)

	制約されたモデル	一般的なモデル	尤度比検定統計量	自由度	p 値
1971-2009・女	LC	RH	10,938	190	<0.01
	APC	RH	1,030	152	<0.01
	LC	LC-VAR(1)	14,660	112	<0.01
	LC	LC-VAR(2)	14,656	187	<0.01
	LC-VAR(1)	LC-VAR(2)	-4.76 <sup>(注)</sup>	75	>0.01
1951-2009・女	LC	RH	131,766	210	<0.01
	APC	RH	113,016	152	<0.01
	LC	LC-VAR(1)	126,318	112	<0.01
	LC	LC-VAR(2)	126,352	187	<0.01
	LC-VAR(1)	LC-VAR(2)	34	75	>0.01

(注) LC-VAR モデルの尤度は初期値を補って計算されているため、負の尤度比検定統計量が生じている。

## 4.9 考察

前節でモデル比較の対象とした 14-90 歳において、LC-VAR モデルの適合度が他のモデルと比較し良好であったことは、日本の死亡率の変動が既存のコーホート効果を考慮した拡張 LC モデルの構造と異なる部分がある可能性を示している。APC モデルにおいては、コーホート効果は生涯を通じて一定であることが仮定されている。また、RH モデルにおいては、コーホート別のパラメータに年齢別のパラメータを乗ずる形でコーホート効果が組み入れられているが、コーホート別のパラメータは一定であることが仮定されており、同一年齢でみたコーホート効果は一定であるとされる。

しかし、図 4.9、図 4.10 でみた通り、男の LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の生年コーホート別残差系列は、1926-1935 年生れ(所謂「昭和ヒトケタ世代」)に属する生年コーホートを除き<sup>\*12</sup>、生年コーホート毎にパターンが異なる特徴のある変動が観察された。このことを踏まえ策定した LC-VAR モデルでは、生年コーホート別の効果や補足的な年齢別の期間効果は一定程度承継されると仮定される。LC-VAR モデルが既存の APC モデルや LC モデルの拡張である RH モデルと比較し良好な適合度となることは、少なくとも日本の死亡率においては<sup>\*13</sup>、一部の生年コーホートを除き、生年コーホート毎に異なる経時的な変動がある性格のものであると考えられる。確かに、第 2 次大戦中に成育期であった「昭和ヒトケタ世代」の男については、一定のコーホート効果が観察されるが、その他の生年コーホートについては死亡率の水準へ大きな影響を及ぼすイベントが無かった。その他の生年コーホートについては、ほぼ成長を終えた時点での死亡率水準に係る生年コーホート別の効果が承継され、また、後述の通り、その時代の社会経済状況等が特に成人の現役層の死亡率へ影響し、これらが組み合わさって経時的に変動して行くと考えられる。

LC-VAR モデルの効果 1 のパラメータ ( $C_{j1}^1$ ,  $C_{j1}^2$ ) は、上述の生年コーホート別の効果が経時的にどのように承継されて行くかを表している。LC-VAR(1) においては、現役世代と呼ばれる 16-60 歳くらいまでは、効果 1 のパラメータ ( $C_{j1}^1$ ) は徐々に増加して行き、60 歳近辺では 1 に近くなる。このパラメータが 1 に近い場合は、ほぼ一定のコーホート効果が承継されて行く状態となっていると考えられる。LC-VAR(2) においては、効果 1 の 1 次のパラメータ ( $C_{j1}^1$ ) がゼロから徐々に 0.6 程度まで増加し、効果 1 の 2 次のパラメータ ( $C_{j1}^2$ ) がゼロから 0.4 程度まで増加する。2 次のパラメータ ( $C_{j1}^2$ ) が高齢の死亡率ほど大きくなっていることは、高齢死亡率が低下して行く過程で、振り子のように振れながら低下して行く要素があることを意味している。男の 1971-2009 年のデータについては LC-VAR(2) が LC-VAR(1) より良好な結果となったが、これは、1951-1970 年と比較し 1971-2009 年の方が高齢死亡率が振り子のように振れながら低下して行く要素が強いことが理由の 1 つと考えられる。

LC-VAR モデルの効果 2 のパラメータ ( $C_{j2}^1$ ) は、上述の時代が変化して行く中で社会経済等の要

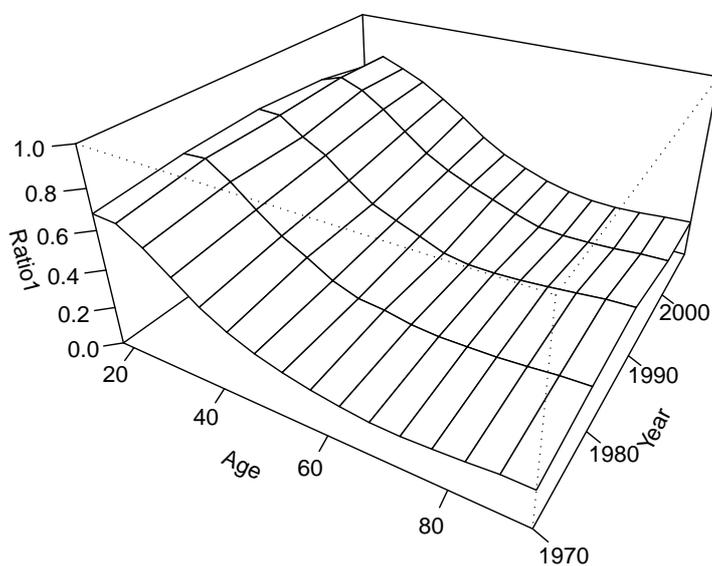
<sup>\*12</sup> 生命保険会社の標準責任準備金(年金開始後)の基礎率とされている標準死亡率は、コーホート効果の影響が見られる 1925~1932 年生れの男の死亡率の影響を除去して算出されている。

<sup>\*13</sup> 海外の死亡率についての検証は次章で述べる。

因が同年齢の死亡率へ及ぼす影響が経時的にどのように承継されて行くかを表すものと考えられる。Granados (2008) は、日本の死因別死亡率の変動と経済指標の変動の相関について検証し、心疾患、肺炎、不慮の事故、肝疾患、老衰については順循環 (procyclical)、自殺、糖尿病、高血圧については反循環 (countercyclical)、悪性新生物については反循環 (countercyclical) の可能性があるとし唆した結論を導いた。Granados (2008) が経済指標の変動と正又は負の相関があるとした死因別死亡率に着目すると、それらの全死因死亡率に占める割合は、図 4.23 及び図 4.24 の通り、現役世代の 20-60 歳においては 30-70 %程度であり (若いほどその割合は大きい)、その時代の社会経済の影響を受ける程度が大きいと考えられる。このことは、上記の効果 2 のパラメータ ( $C_{j2}^1$ ) が 16 歳から漸減し 50 歳を超えるとほぼゼロとなって行くことと整合的である。

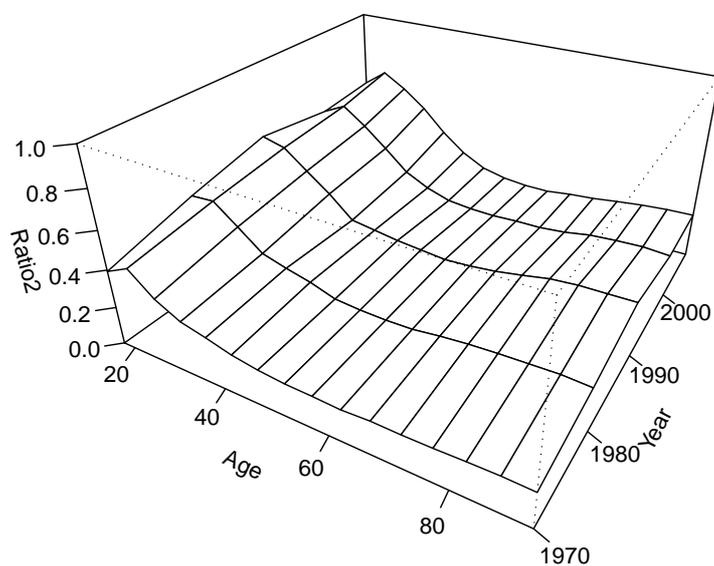
LC-VAR モデルの適合度については、女の 1951-2009 年の死亡データを前提とした場合、LC-VAR モデルが RH モデルと比較し必ずしも良好な結果とはならなかった。一方、女の 1971-2009 年のデータを前提とした場合、LC-VAR モデルが他のモデルと比較し、良好な結果となった。これは、1951-1970 年のデータに含まれる高齢の死亡数が、対象期間において一貫して低くコーホート効果が見られること、また、1951-1970 年と比べ、1971-2009 年の方が死亡率の低下傾向が鈍化していること等が理由として考えられる。

LC-VAR モデルのパラメータ推定値は、対象期間が 1971-2009 年と 1951-2009 年の場合において、傾向は変わらず、大きくは異ならないため、比較的頑健であると言える。Cairns et al. (2009) では、英国と米国の死亡率へ RH モデルを適用した場合のパラメータ推定値に頑健性が無いことを指摘しており、また、日本の死亡データを前提としたパラメータ推定値についても頑健性の無さが観察される。後述する将来死亡率の推計においてはパラメータ推定値が頑健であることが望ましく、このような観点からも RH モデルより LC-VAR モデルの方が好ましいと言えよう。



(注) 人口動態統計の全死因死亡数のうち、Granados (2008) が経済指標の変動と相関の可能性があった心疾患・不慮の事故・自殺による死亡数の占める割合を計算。

図 4.23 経済指標の変動と相関の可能性のある死因別死亡率の占める割合 (男: 1970 年, 1980 年, 1990 年, 2000 年, 2008 年)



(注) 人口動態統計の全死因死亡数のうち，Granados (2008) が経済指標の変動と相関の可能性があるとした心疾患・不慮の事故・自殺による死亡数の占める割合を計算．

図 4.24 経済指標の変動と相関の可能性がある死因別死亡率の占める割合 (女: 1970 年, 1980 年, 1990 年, 2000 年, 2008 年)

## 第5章

# LC-VAR モデルの海外死亡データへの適用

前章では、我が国の死亡データへ LC モデルを適用した場合の残差構造を解析し策定した LC-VAR モデルを提案した。LC-VAR モデルは、前章で述べた仮説に基づき策定されており、仮説の内容が海外諸国においてもあてはまる共通なものか、関心があるところである。本章では、LC-VAR モデルを英国・米国・フランスの3ヶ国の死亡データへ適用し、LC モデルや既存の拡張 LC モデルと比較する。その結果を踏まえ、各国の死亡率の特徴について考察し、モデルの構造について再考する。

海外の死亡データは、海外諸国が政府のホームページ等を通じて公開しているものもあるが、HMDにも世界37ヶ国の死亡データが収録されている。本論文では、我が国の死亡データと同様、海外諸国の死亡データについても HMD を利用することとする。また、HMD の中で長期の死亡データを利用できる国は一部であること、LC モデルやコーホート効果に関する先行研究の対象国等も踏まえ、前述の英国・米国・フランスの3ヶ国を対象としている。

### 5.1 英国の死亡データへの適用

英国の死亡率については、Willets (2004) がコーホート効果が観察されるとしているほか、Renshaw and Haberman (2006) が RH モデルを提案し、Currie (2006) が APC モデルを適用した場合について分析している等、コーホート効果を織り込んだモデルがより適合すること等が先行研究において述べられている。このため、比較の対象として英国の死亡データを取り上げ、我が国の場合と同様、LC, APC, RH, CBD, LC-VAR(1), LC-VAR(2) の各モデルを適用し、比較した。対象となる死亡データは、男女それぞれの年齢14-90歳、1951-2009年のデータである。各モデルのパラメータの推定方法は、前章と同様の最尤推定によるものとした。

各モデルの AIC, BIC 及び死亡数の標準化誤差の分散は、表 5.1 の通りである。男女とも RH モデルが最も良好な適合度を示し、次いで男は LC-VAR(1) モデル、女は LC-VAR(2) モデルの順となっている。LC モデル, RH モデル, LC-VAR(1) モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の年齢と時代を軸とした残差局面(男)は、図 5.1~図 5.3 の通りである。英国の死亡データについては、RH モデルのコー

ホート効果に係る年齢別係数が概ね 20 歳以上では一定範囲内の水準であり、LC-VAR モデルで仮定されている経時的に変動して行く形とは異なっていることが分かる。

Willets (2004) は、英国死亡率のコーホート効果は、異なる複数の要因の組合せにより生じてきているように見えるとしており、具体的な要因として、第 2 次世界大戦、福祉の状況と言った社会状況、ダイエット、喫煙行動と言った生活行動、出生率の変化<sup>\*1</sup>を示している。

## 5.2 米国の死亡データへの適用

米国の死亡データについては、先行研究において、英国のような長期に亘り継続して観察されるコーホート効果ではなく、その時代における社会経済状況が死亡水準へ及ぼす影響を踏まえ、LC モデルを拡張したモデル等が提案されてきている。Li and Chan (2007) は、米国、カナダの死亡データを前提とした LC モデルのパラメータ  $\kappa_t$  系列の推定値に対し、基礎とする ARIMA モデルに死亡水準のシフトや一時的な変化等を表す外生的な outlier model を加えることにより、推定された  $\kappa_t$  系列に対する適合度が良好となることを述べている。具体的には、1916-1921 年の第一次世界大戦、1918 年のスペイン風邪、1920 年代後半から 1930 年代前半の不安定な経済状況における死亡の増加、1950-1953 年の朝鮮戦争、1975 年以降の栄養状態の改善や社会状況の改善等が死亡水準へ及ぼした影響を考察し、適合度が改善することを確認している。LC モデルを拡張したモデルが取り上げられる背景には、LC モデルが米国で開発されたことや、米国が多く の国々から移民を受け入れて来ていることもあろう。

実際、LC, APC, RH, CBD, LC-VAR(1), LC-VAR(2) モデルを米国の死亡データへ適用すると、APC, RH の各モデルは適合度が余り良好でなく、男は LC-VAR(1) モデル、女は LC-VAR(2) モデルが最も良好な適合度となる。LC-VAR モデルのあてはまりの良さは、年齢と時代を軸とした推定パラメータによる対数死亡率の残差局面を表す図 5.4~図 5.6 を見れば一層明らかとなろう。米国の死亡の変動が LC-VAR モデルの仮説で仮定している内容と合致していると考えることができる。

なお、LC-VAR モデルの効果 2 については、我が国の場合と同様、16-52 歳の係数を仮定しているが、パラメータ推定値の傾向を踏まえると、米国の死亡データに対しては、53 歳以上の年齢についても係数を仮定した方が適合度がより良くなる可能性があると思われた。このため、米国公的年金の支給開始年齢より前の 16-66 歳の係数を仮定し LC-VAR(1) モデルを適用した結果、男は AIC=76,649, BIC=78,813, 標準化誤差の分散=6.29, 女は AIC=65,457, BIC=67,621, 標準化誤差の分散=4.11 と、双方ともさらに良好な結果が得られた。

<sup>\*1</sup> Willets (2004) は、特に 1900-1970 年に 3 回観察されるベビーブーム時の間に生まれた世代に高い死亡率改善が見られると述べている。

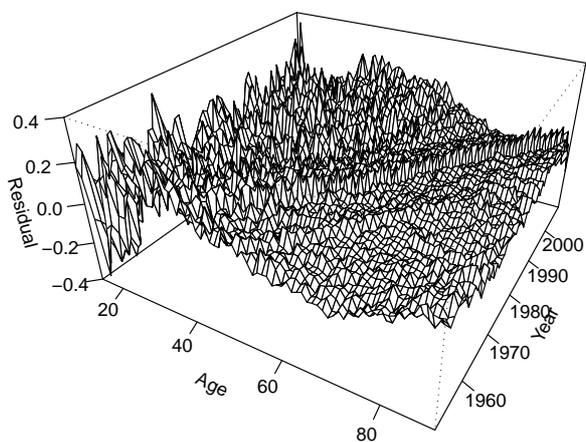


図 5.1 LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差  $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$  (英国, 男, 対象データ: 14-90 歳・1951-2009 年)

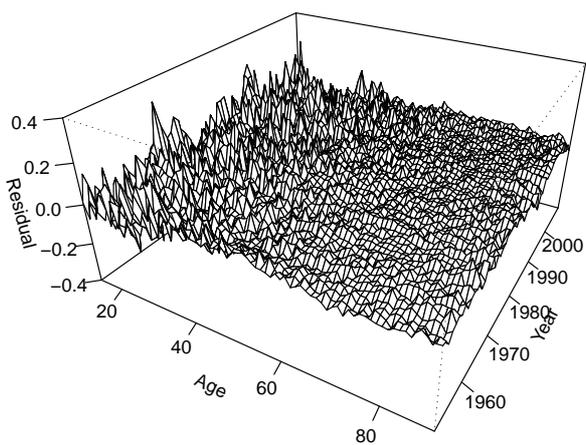


図 5.2 RH モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差  $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$  (英国, 男, 対象データ: 14-90 歳・1951-2009 年)

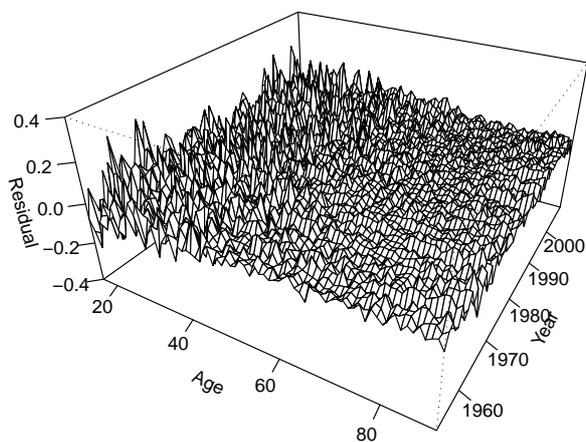


図 5.3 LC-VAR(1) モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差  $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$  (英国, 男, 対象データ: 14-90 歳・1951-2009 年)

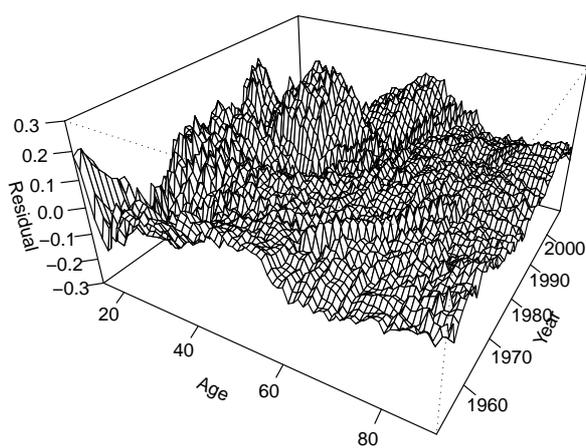


図 5.4 LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差  $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$  (米国, 男, 対象データ: 14-90 歳・1951-2009 年)

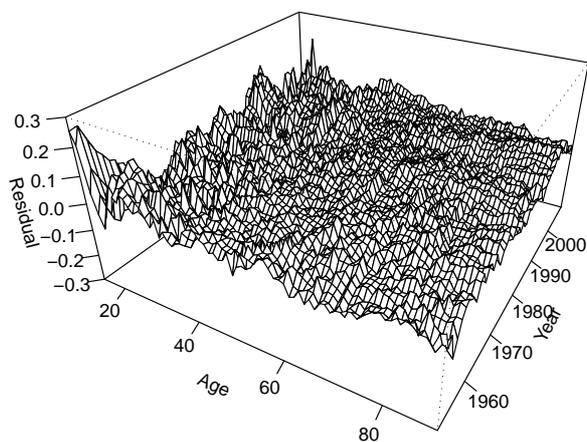


図 5.5 RH モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差  $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$  (米国, 男, 対象データ: 14-90 歳・1951-2009 年)

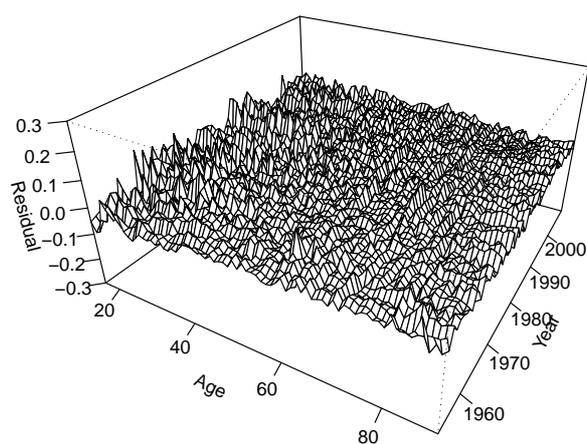


図 5.6 LC-VAR(1) モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差  $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$  (米国, 男, 対象データ: 14-90 歳・1951-2009 年)

表 5.1 AIC・BIC と死亡数の標準化誤差の分散 (英国)

		自由パラメータ数	AIC	BIC	標準化誤差の分散
1951-2009・男	LC	211	71,306	72,661	6.70
	APC	269	60,934	62,661	4.33
	RH	421	51,615	54,319	2.14
	CBD	118	246,366	247,123	55.93
	LC-VAR(1)	323	54,686	56,760	2.87
	LC-VAR(2)	398	57,468	60,023	3.60
1951-2009・女	LC	211	63,929	65,284	5.39
	APC	269	59,363	61,090	4.32
	RH	421	48,296	51,000	1.71
	CBD	118	155,495	156,253	27.17
	LC-VAR(1)	323	50,951	53,026	2.34
	LC-VAR(2)	398	49,978	52,534	2.12

表 5.2 AIC・BIC と死亡数の標準化誤差の分散 (米国)

		自由パラメータ数	AIC	BIC	標準化誤差の分散
1951-2009・男	LC	211	156,885	158,240	24.80
	APC	269	149,029	150,756	23.14
	RH	421	90,189	92,892	9.66
	CBD	118	1,232,244	1,233,002	307.60
	LC-VAR(1)	323	78,603	80,677	6.75
	LC-VAR(2)	398	81,924	84,480	7.64
1951-2009・女	LC	211	104,224	105,579	12.98
	APC	269	95,349	97,077	11.03
	RH	421	71,884	74,588	5.72
	CBD	118	678,301	679,059	149.82
	LC-VAR(1)	323	66,154	68,228	4.27
	LC-VAR(2)	398	63,951	66,507	3.78

## 5.3 フランスの死亡データへの適用

分析に先立ち、フランスの社会経済状況を手短に確認しておこう。フランスの寿命は過去1世紀に亘り延び続けており\*<sup>2</sup>、2009年の平均寿命は、男は77.8歳、女は84.5歳であった。2009年1月1日時点のフランスの男女別人口は、男3,110万人、女3,320万人である\*<sup>3</sup>。フランスの在留外国人は2006年時点で360万人で人口の5.8%程度である。

1980年以降、労働市場における男女の格差が縮まってきているが、女は男より学歴が高い一方で労働市場への女の参加は男より少ない。また、女は男と比較し、不完全雇用が多く、期限付きの臨時雇用契約が多い。女の失業率は、依然として男より高水準にある。女はパートタイムで働くことが多く、子供が多いほど、あるいは子供の年齢が低いほど仕事を減らす傾向にある。

男女の時給賃金には依然として格差がある。政治分野においては男女均等が進んでいるものの、特に進展が見られるのは人口3,500人以上の市や町の選挙、EUの選挙等、法によって男女の割合が規定されている分野である。人口3,500人未満の市町村においては、10年ほど前から男女均等への進展が見られるとはいえ、真の男女均等には程遠い状況である\*<sup>4</sup>。

このような人口、社会経済状況のフランスの死亡データに対し、LC、APC、RH、CBD、LC-VAR(1)、LC-VAR(2)モデルを適用した結果は、表5.3の通りである。男は、LC-VAR(1)モデルが最も良く適合し、女は、RHモデルが最も良く適合する。この結果から、男の死亡は、社会経済の影響等を受けLC-VARモデルにおける生年コーホート別の効果(効果1)や補足的な年齢・期間別効果(効果2)が経時的に変動する構造となっているが、女の死亡は、コーホート効果が観察される構造となっていると考えられる。

## 5.4 各国の結果を踏まえた考察

英国、米国、フランスの死亡データによる各モデルの推定結果は、対照的なものとなった。このことは、国により社会経済状況等が異なり、その状況等に応じて、死亡の変動が変わることを示唆している。

Willets (2004) は、医学者等が10-15歳くらいの時期が最も環境の影響を受けその後の年齢における健康を決定付けると述べていることを紹介しているが、英国における社会階級の考え方や状況等も影響し、コーホート効果が観察されるのかも知れない。米国では、戦争等の大きなイベントも死亡水準へ影響しているであろうが、移民の流入等による人口構成の変化や、社会経済状況が死亡水準へ及ぼす影響が経時的に変化している可能性がうかがえる。フランスでは、男女で異なるモデルの適合度の結果となったが、前述の通り、女性の社会進出が進展しておらず、女性の死亡水準が社会経済状況から影響を受け変動して行く構造となっていない可能性が考えられる。

\*<sup>2</sup> ロシアや中東欧諸国においては、社会経済状況の悪化もあってか、平均寿命が短くなった時期もある。

\*<sup>3</sup> 25年前には男性人口が女性を上回っていた。但し、75歳以上については女が63%を占めていた

\*<sup>4</sup> 在日フランス大使館ホームページ <http://www.ambafrance-jp.org/>より引用。

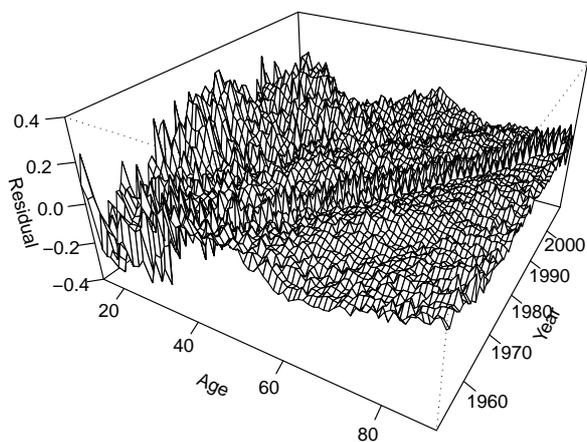


図 5.7 LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差  $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$  (フランス, 男, 対象データ: 14-90 歳・1951-2009 年)

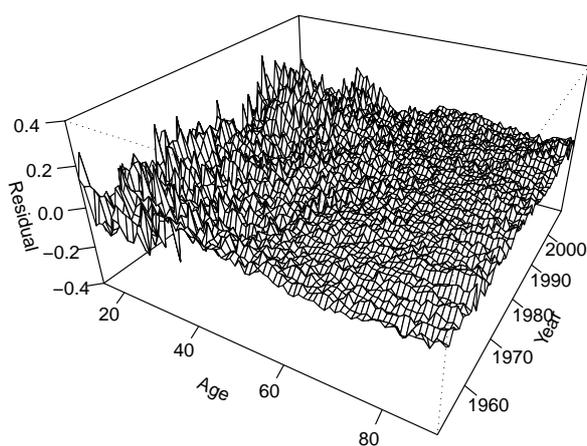


図 5.8 RH モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差  $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$  (フランス, 男, 対象データ: 14-90 歳・1951-2009 年)

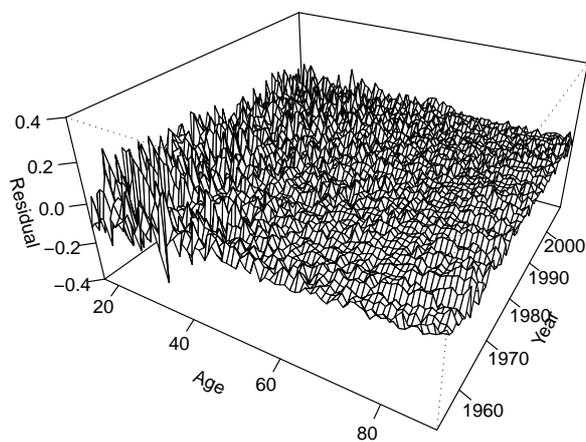


図 5.9 LC-VAR(1) モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差  $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$  (フランス, 男, 対象データ: 14-90 歳・1951-2009 年)

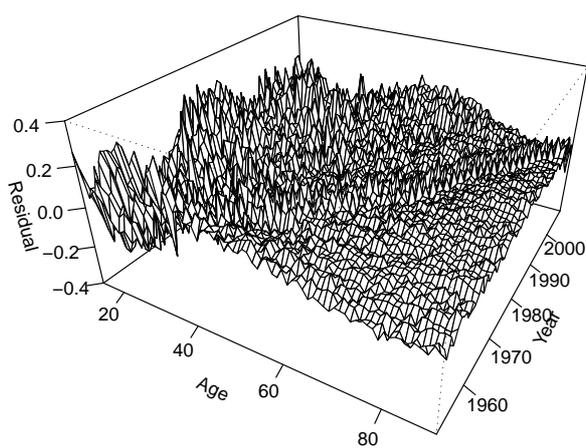


図 5.10 LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差  $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$  (フランス, 女, 対象データ: 14-90 歳・1951-2009 年)

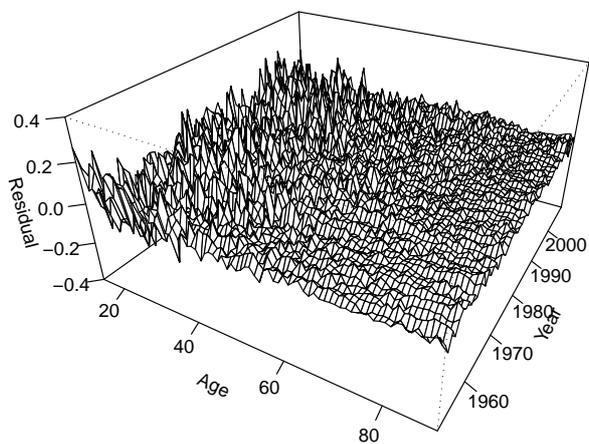


図 5.11 RH モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差  $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$  (フランス, 女, 対象データ: 14-90 歳・1951-2009 年)

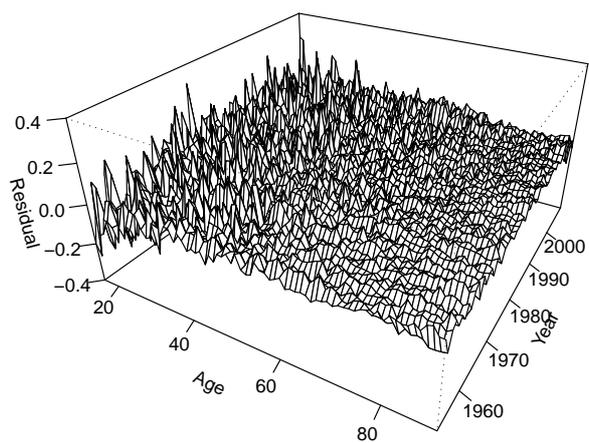


図 5.12 LC-VAR(1) モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差  $\log m_{x,t} - \log \hat{m}_{x,t}$  (フランス, 女, 対象データ: 14-90 歳・1951-2009 年)

表 5.3 AIC・BIC と死亡数の標準化誤差の分散 (フランス)

		自由パラメータ数	AIC	BIC	標準化誤差の分散
1951-2009・男	LC	211	76,958	78,313	7.77
	APC	269	72,544	74,271	6.82
	RH	421	56,264	58,967	3.05
	CBD	118	308,554	309,312	66.55
	LC-VAR(1)	323	55,163	57,237	2.75
	LC-VAR(2)	398	57,021	59,577	3.23
1951-2009・女	LC	211	62,964	64,319	5.09
	APC	269	67,926	69,653	6.25
	RH	421	48,972	51,675	1.84
	CBD	118	546,966	547,724	121.30
	LC-VAR(1)	323	51,175	53,249	2.35
	LC-VAR(2)	398	50,704	53,260	2.26

年齢と時代を軸としたパラメータ推定値による対数死亡率の残差局面は、このような考察をする上でとても有用である。図 5.1 では、英国の男の LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差が比較的若い年齢から斜め方向に一定の高さで推移している部分があることが観察され、コーホート効果があることが分かる。図 5.4 では、米国の男の LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差が大きくうねっており、英国の男のように一貫して斜め方向に一定の高さで推移している部分は観察されず、生年コーホート別の効果や補足的な年齢・期間別の効果変動するような状況であることが推察される。図 5.7 のフランスの男の LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差については、斜め方向に推移している部分があるものの、英国の男と比較すると中年層からであり、かつ、必ずしも一定の高さで推移している訳ではない。図 5.10 のフランスの女の LC モデルのパラメータ推定値による対数死亡率の残差については、英国の男と同じような比較的若い年齢からほぼ斜め方向に一定の高さで推移している部分があることが観察される。これらのことは、モデルの適合度の解釈やモデル選択にも役立つものであろう。

いずれにしても、死亡率モデルは、各国の人口や死亡、経済状況、雇用状況、社会状況、また、これらに関する男女差等と、各モデルの特徴を踏まえながら、モデルの適合度も確認し目的と照らし合わせ、選択して行くことが望ましいと言えよう。



## 第6章

# LC-VAR モデルによる死亡率予測とリスク評価

死亡率モデルは、実データへの適合度等も踏まえながら、将来死亡率の推計や不確実性評価等に用いられる。本章では、LC-VAR モデルによる将来死亡率の点予測と信頼区間評価の例を示し、他のモデルと比較する。また、LC-VAR モデルの年金の負債評価や一時払純保険料の評価への応用例を示し、LC モデルとの比較を通じ、結果について考察する。

### 6.1 死亡率予測のためのモデル

Dowd et al. (2010) は、LC, APC, RH の各モデルを含む6つの死亡率モデルを死亡率の予測の観点から比較している。比較の上で、実績値へ収束して行く過程や信頼区間のテスト等、6種類の比較を行っている。この中で、RH モデルは、死亡率の予測に関し、かなり不安定な部分が見られることが指摘されている。RH モデルは、パラメータ推定値の頑健性が乏しいことや、長期の予測にあたっては実データの無い将来のコーホート効果を予測せねばならぬこと等も踏まえると、長期の死亡率予測には不適當な部分があることは否めない。コーホート効果の予測については、APC モデルも共通の課題がある。

これに対し、LC-VAR モデルについては、生年コーホート別の効果や補足的な年齢別の期間効果の一部を承継しながら経時的に変動して行く構造がモデルへ織り込まれており、当初の生年コーホート別の効果等が徐々に薄れて行く様子や変動して行く様子を表現することが可能である。

本章では、死亡率予測のためのモデルとして LC モデルと LC-VAR モデルを取り上げ、比較し考察する。

## 6.2 死亡指数 $\kappa_t$ 系列の単位根検定

LC モデル, LC-VAR モデルによる死亡率予測において, 死亡指数  $\kappa_t$  系列にどのようなモデルを適合させるかは重要な課題である. Lee and Carter (1992) は, ドリフト付きランダムウォークモデルを提案し, 多くの文献等においてこのモデルが用いられている一方で, Li and Chan (2007) のようにトレンドの変化等へも対応できる形の時系列モデルを提案しているものもある.

我が国の死亡データ (14-90 歳, 1971-2009 年) へ LC モデル, LC-VAR モデルを適用した場合の死亡指数  $\kappa_t$  系列の単位根検定 (DF 検定: ディッキーフラー検定) の結果は, 表 6.1 の通りである. 両モデル, 男女とも, 単位根を持つと言う帰無仮説は棄却されない. このため, 本章では, 死亡指数  $\kappa_t$  系列に, ドリフト付きランダムウォークモデルを適用し, 死亡率を予測することとする.

表 6.1 DF 検定の結果

	モデル名	p 値
1971-2009・男	LC	0.2715
	LC-VAR(1)	0.1999
	LC-VAR(2)	0.2451
1971-2009・女	LC	0.2888
	LC-VAR(1)	0.2739
	LC-VAR(2)	0.1419

## 6.3 将来死亡率の点予測と信頼区間評価

LC モデルと LC-VAR モデルについて, 14-90 歳, 1971-2000 年の死亡データにより推定したパラメータに基づき 2001-2009 年の男 45, 65, 80 歳の死亡率を予測し, 実績値と比較した. 結果は, 図 6.1~図 6.3 の通りである. LC モデルは, 長期的なトレンドラインは捉えているものの, 短期的な死亡率変動に追随できていない. これに対し, LC-VAR モデルでは, 長期的なトレンドラインも捉えつつ短期的な死亡率変動にも追随していることが分かる. なお, 65, 80 歳の死亡率については, LC-VAR モデルの VAR 部分は効果 1 の生年コーホート別の効果のみ考慮する係数の設定となっており, 45 歳の死亡率については, VAR 部分の効果 2 の補足的な年齢・期間効果も考慮する係数の設定となっている.

上述の男の 45, 65, 80 歳の死亡率予測において, 死亡指数  $\kappa_t$  の不確実性を考慮し, 死亡率予測の  $\pm 2$  標準偏差の信頼区間を表示すると, 図 6.4~図 6.6 の通りとなる. 信頼区間についても, LC モデルと比較し LC-VAR モデルの方が死亡率の実績値を良く捉えていることが分かる.

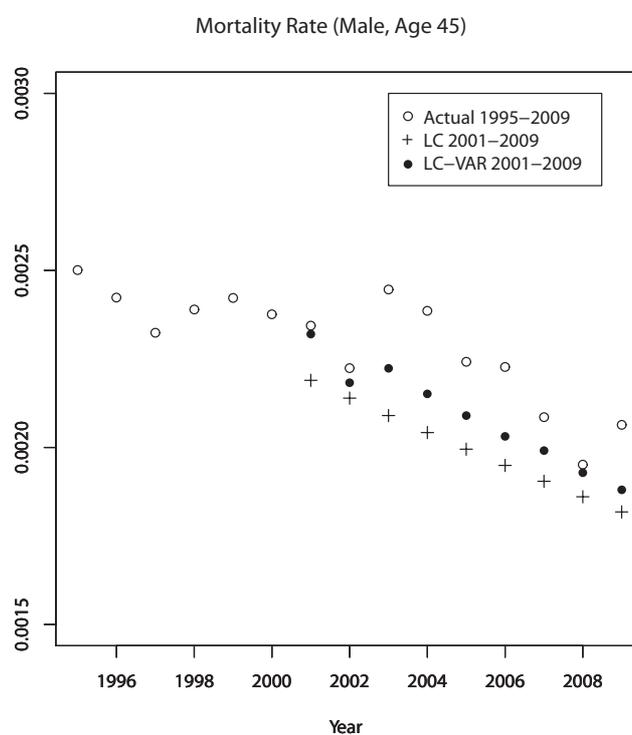


図 6.1 2001-2009 年の死亡率予測 (男 45 歳, 対象データ: 14-90 歳・1971-2000 年)

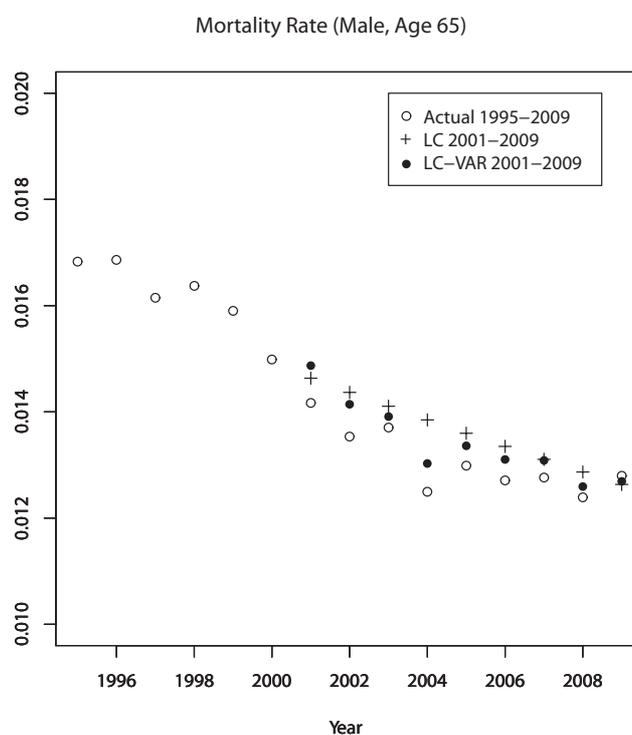


図 6.2 2001-2009 年の死亡率予測 (男 65 歳, 対象データ: 14-90 歳・1971-2000 年)

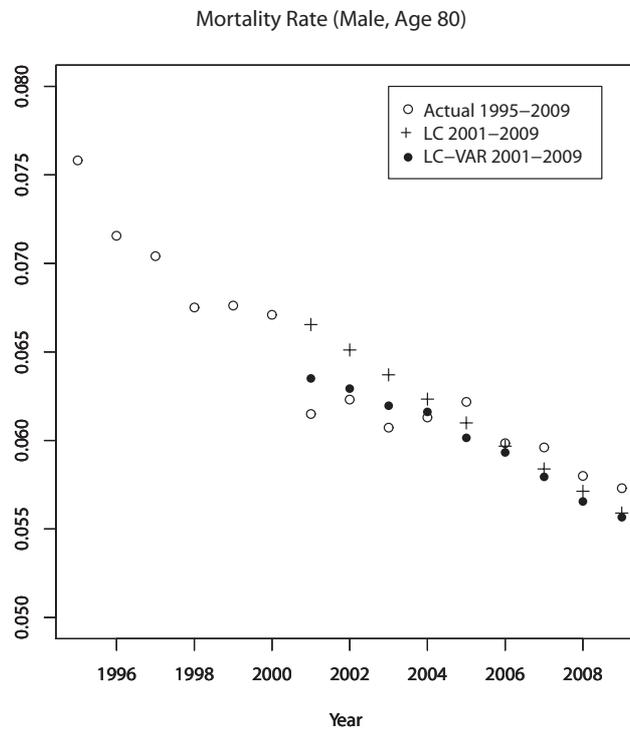


図 6.3 2001-2009 年の死亡率予測 (男 80 歳, 対象データ: 14-90 歳・1971-2000 年)

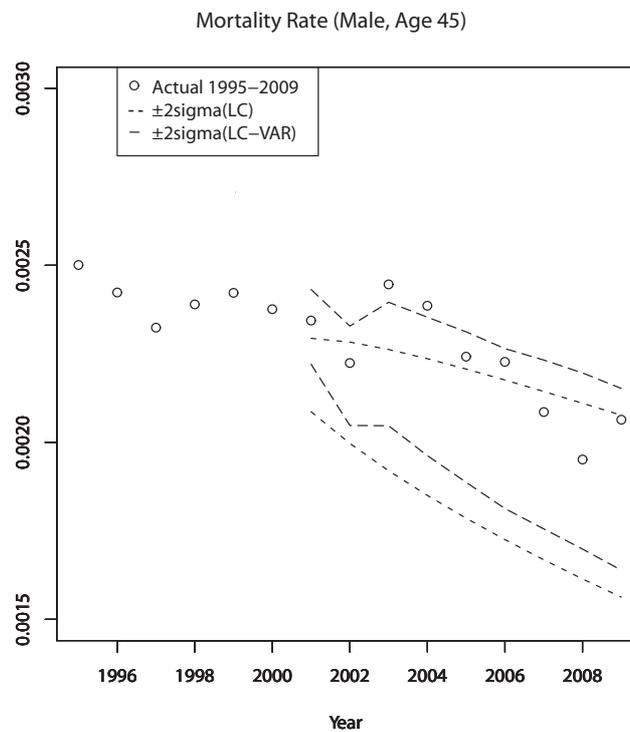


図 6.4 2001-2009 年の死亡率予測の信頼区間 (男 45 歳, 対象データ: 14-90 歳・1971-2000 年)

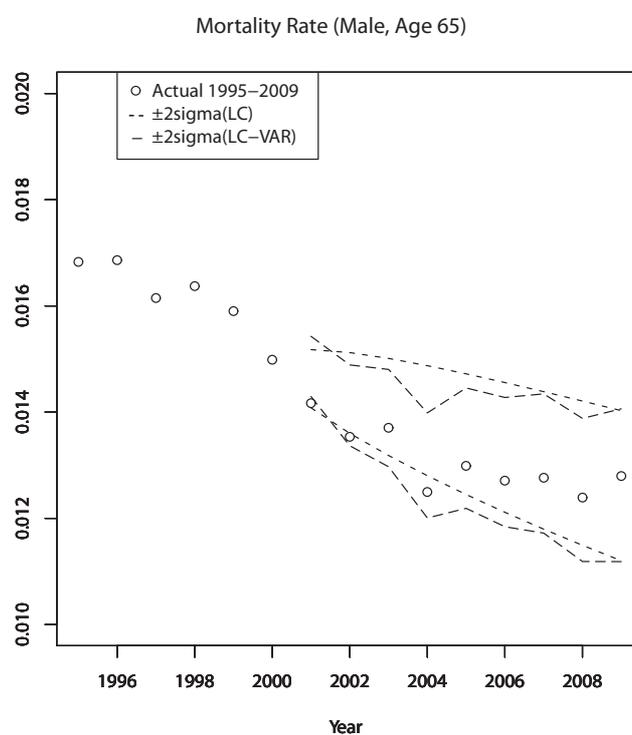


図 6.5 2001-2009 年の死亡率予測の信頼区間 (男 65 歳, 対象データ : 14-90 歳・1971-2000 年)

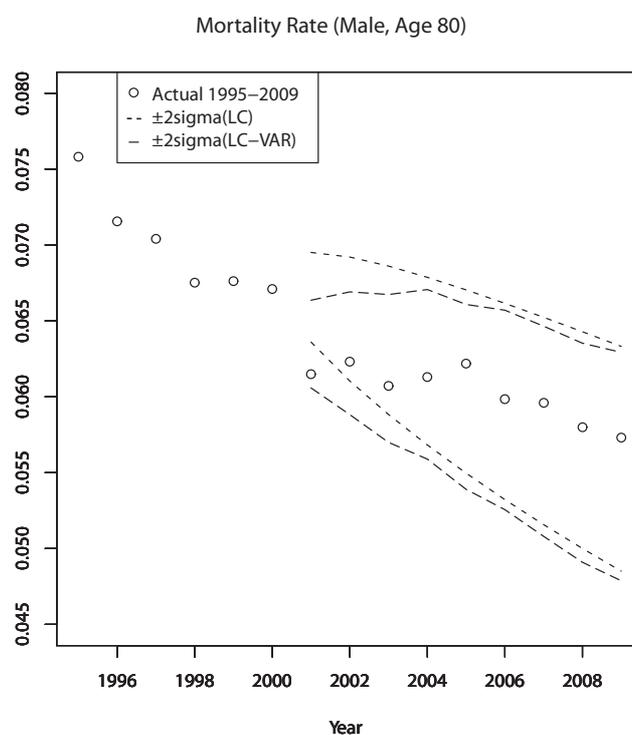


図 6.6 2001-2009 年の死亡率予測の信頼区間 (男 85 歳, 対象データ : 14-90 歳・1971-2000 年)

## 6.4 年金負債及び一時払純保険料の評価への応用

本節では、LCモデルとLC-VARモデルを年金負債(年金現価率)の評価と一時払純保険料の評価へ応用した場合を例示し考察する。評価にあたっては、死亡指数 $\kappa_t$ 系列の不確実性に加え、頻度論解釈によるパラメータ誤差の評価も考慮することとした\*1。

年額1円の年金を支払うための現在価値を年金現価率と呼び、ここでは、2011年に63歳の男が65歳迄受給する有期年金と75歳迄受給する有期年金の2種類を考える\*2。現在価値を評価するための割引率は、簡単のため、年1.5%とし、試行回数50,000回のモンテカルロシミュレーションにより評価した。結果は、図6.7、図6.8の通りであり、受給期間が短い場合、年金現価の分布の相違が大きくなることが分かる。逆に15年弱経過すると分布の差が小さくなり、LC-VARモデルのVAR部分の効果1(生年コーホート別の効果)の影響が小さくなることが分かる。米国の年金用の将来死亡率作成において、コーホート効果の収束期間(Cohort Convergence Period)は10年程度\*3とされているが、我が国の死亡率予測においてコーホート効果の収束期間を検討する上でも参考とすることができよう。

次に、2011年に40歳の男の期間5年、死亡保険金額10百万円の定期保険を想定し、一時払純保険料の分布を算出した。結果は、図6.9の通りであり、LCモデルと比較しLC-VARモデルによる純保険料の分布は高い金額で分布することが分かる。2モデル間に大きな差が生ずる理由として、対象としている定期保険の期間が中短期であり、死亡保険金が多いことが考えられる。実務では異なる方法により保険料算出が行われているが、ここで示した死亡率モデルによる純保険料の分布の算出のフレームワークはリスク評価等においても有用であろう\*4。

\*1 LCモデルのパラメータ誤差の評価は、Lee and Carter (1992)と同様の方法、VAR部分のパラメータの誤差の評価は、LCモデルの残差系列に対し最小二乗推定した場合のパラメータ誤差によった。

\*2 各期の将来死亡率の年金現価率への影響が割引前で均等となるよう、受給中の死亡について一定の遺族給付を支給する有期年金を仮定している。

\*3 詳細はSOA (2012)を参照。英国では40年程度と設定されている。

\*4 国際財務報告基準IFRS4保険契約の2010年の公開草案で示されているVAR(Value at Risk), CVaR(Conditional Value at Risk), CTE(Conditional Tale Expectaion)によるリスク評価は、確率モデルをベースとした将来の負債の分布等を前提とする。このような目的で将来の負債の分布を算出する上でも、死亡率モデルは必要不可欠なものと言えよう。

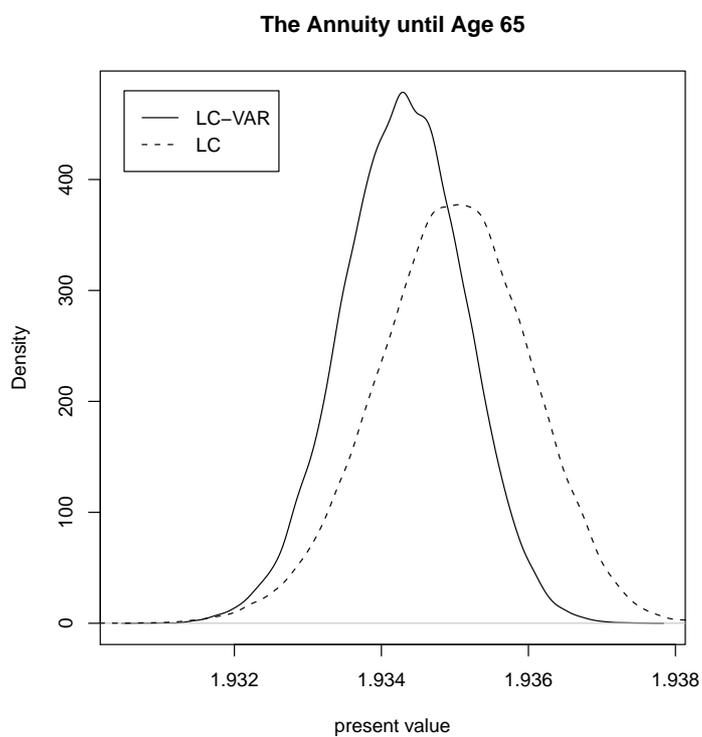


図 6.7 年金現価率の分布 (男 63 歳 : 65 歳迄)

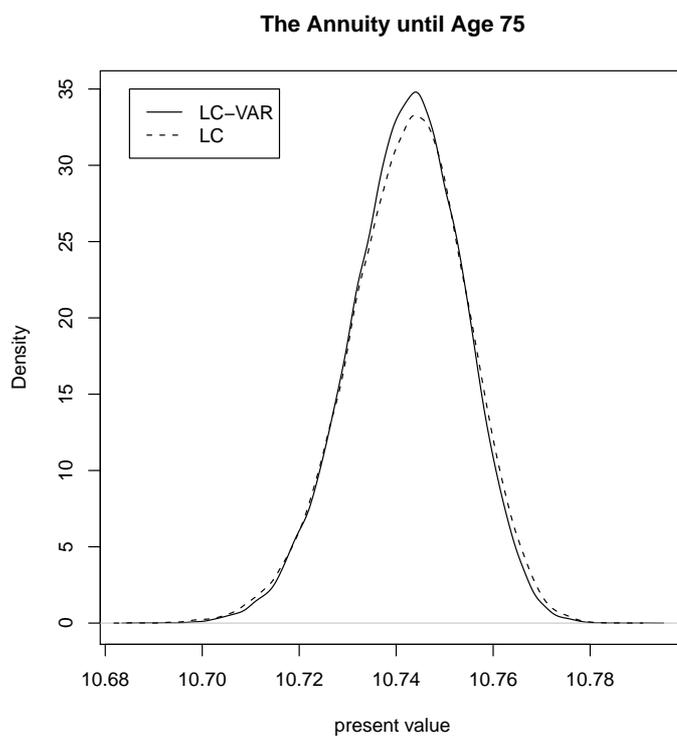


図 6.8 年金現価率の分布 (男 63 歳 : 75 歳迄)

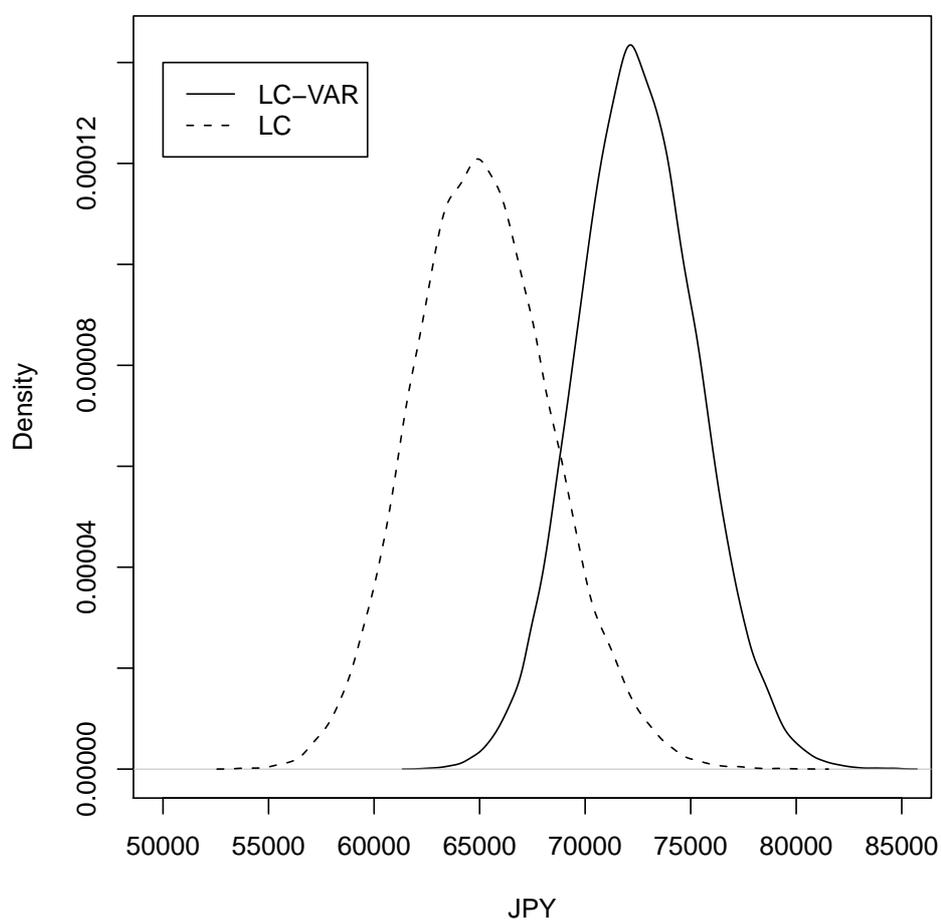


図 6.9 一時払純保険料の分布

## 第7章

# 超過分散へ対応した LC-VAR モデル

確率変数がポアソン分布に従う場合、平均と分散が同一でなければならないはずだが、しばしば分散が平均と比べ過大となる状態 (超過分散) が発生する。前章まで取り上げた各モデルのパラメータ推定は、死亡数にポアソン分布を仮定し、最尤推定する方法によっていた。本章では、各モデルのパラメータ推定において超過分散の可能性があるか否かを確認し、先行研究の1つである Li et al. (2009) による方法と比較しながら、超過分散へ対応した LC-VAR モデルを策定し検証する。

### 7.1 超過分散の可能性

第4章で取り上げた各モデルのパラメータの最尤推定においては、死亡数がポアソン分布に従うことを仮定しており、式 (4.35) による死亡数の標準化誤差の分散は1であることが前提とされている。ところが、各モデルの推定結果である表 4.3, 表 4.4 によれば、死亡数の標準化誤差の分散は、LC モデルについては全ケース7を超える水準であり、RH, LC-VAR モデルについては全ケース2~4.2 の水準であった。このことは、本章の冒頭で述べた超過分散の状態である可能性を示している。

表 7.1 は、1971-2009 年、14-90 歳の日本の男の死亡データを対象とした場合の死亡数の標準化誤差がポアソン分布に適合するか否かについて、ピアソンの  $\chi^2$  乗検定を実施した結果である。有意水準上側 5% で、LC モデルについては帰無仮説は棄却されるが、LC-VAR(1) モデルについては棄却されない。

表 7.1  $\chi^2$  乗検定の結果

対象データ	モデル	データ数	パラメータ数	検定統計量	p 値
1971-2009・男	LC	3,003	193	25,536	0.05
	LC-VAR(1)	3,003	305	158	0.05

次に、Cameron and Trivedi (1990) の方法により、同一対象データについて超過分散の検定を実施した。Cameron and Trivedi (1990) の方法は、次の回帰式の係数  $\delta=0$  を帰無仮説とする検定である。

$$\frac{(D_{x,t} - \hat{D}_{x,t})^2 - D_{x,t}}{\hat{D}_{x,t}} = \delta \frac{g(\hat{D}_{x,t})}{\hat{D}_{x,t}} + u_t \quad (7.1)$$

ここで、関数  $g()$  は、下記の通り、2 次の多項式と仮定する。

$$g(\hat{D}_{x,t}) = \hat{D}_{x,t}^2 \quad (7.2)$$

超過分散の上記の回帰式による検定結果は表 7.2 の通りであり、LC モデル、LC-VAR(1) モデルとも帰無仮説は棄却される。このことは超過分散となっている可能性を示しているが、LC モデルについてはそもそも 1 ファクターモデルで説明力に限界があり定式化が不十分となっている可能性もある。しかしながら、LC-VAR(1) モデルについても帰無仮説は棄却されるため、後節では、LC モデル、LC-VAR モデルにおける超過分散の対応について検討する。

表 7.2 回帰式による検定 (Cameron and Trivedi,1990) の結果

対象データ	モデル	t 値	p 値
1971-2009・男	LC	5.696	<0.001
	LC-VAR(1)	4.028	<0.001

## 7.2 超過分散へ対応した LC モデル

超過分散への対処については、Renshaw and Haberman (2006) が  $\text{Var}(D_{x,t})=\phi E_{x,t}$  による超過分散のパラメータ  $\phi$  を導入しているほか、Li et al. (2009) が年齢毎の死亡数の異質性を表すパラメータ  $\theta_x$  を導入し負の 2 項分布による LC モデルの拡張を提案している\*1。本節では、後述の超過分散へ対応した LC-VAR モデルの導入の準備として、Li et al. (2009) の方法を取り上げ、我が国の死亡率へ適用し検証する。

Li et al. (2009) の方法の概要を述べる。LC モデルでは、同じ年齢・期間において死亡率の同一性を仮定しているが、Li et al. (2009) は、実際には教育、職業、結婚状態等が死亡へ影響を及ぼし同じ年齢・期間においても異質性があると考えられるとし、同じ年齢・期間のセルを同サイズのより小さな  $N_x$  個の

\*1 Delwarde et al. (2007) は、異質性を表す単一のパラメータを導入した負の 2 項分布による LC モデルの拡張を提案している。

セルへ分割することを想定している。

$$D_{x,t} = \sum_{i=1}^{N_x} D_{x,t}(i) \quad (7.3)$$

任意の  $i \neq j$  について、 $D_{x,t}(i)$  と  $D_{x,t}(j)$  は独立であり、次式によるポアソン分布に従うものとする。

$$D_{x,t}(i) \mid z_x(i) \sim \text{Poisson} \left( z_x(i) \frac{\lambda_{x,t}}{N_x} \right) \quad (7.4)$$

ここで  $z_x(i)$  は年齢別の異質性を表すパラメータであり、平均 1、分散  $\iota_x$  のガンマ分布に従うと仮定している。さらに  $\theta_x = \frac{\iota_x}{N_x}$  とし、 $D_{x,t}$  は次の負の 2 項分布に従うことが示される。

$$\Pr [D_{x,t} = y] = \frac{\Gamma(y + \theta_x^{-1})}{y! \Gamma(\theta_x^{-1})} \left( \frac{\lambda_{x,t}}{\lambda_{x,t} + \theta_x^{-1}} \right)^y \left( \frac{\theta_x^{-1}}{\lambda_{x,t} + \theta_x^{-1}} \right)^{\theta_x^{-1}} \quad (7.5)$$

$$E(D_{x,t}) = \lambda_{x,t} = E_{x,t} \exp[\alpha_x + \beta_x \kappa_t] \quad (7.6)$$

$$\text{Var}(D_{x,t}) = E(D_{x,t}) + \theta_x [E(D_{x,t})]^2 \quad (7.7)$$

対数尤度関数は次式の通りとなり、Newton-Raphson 法により最尤推定することができる。

$$\ell = \sum_{x,t} \left[ \left[ \sum_{i=0}^{D_{x,t}-1} \log \left( \frac{1 + \theta_x i}{\theta_x} \right) \right] + D_{x,t} \log(\theta_x \lambda_{x,t}) - (D_{x,t} + \theta_x^{-1}) \log(1 + \theta_x \lambda_{x,t}) \right] - \log(D_{x,t}!) \quad (7.8)$$

前節と同じ我が国の男の 1971-2009 年、14-90 歳の死亡データに対し、Li et al. (2009) の超過分散対応 LC モデルを適用した結果は、表 7.3, 図 7.1 の通りである。AIC, BIC は LC モデルと比較し良好となる\*2。パラメータ  $\theta_x$  は、40 歳未満において値が大きくなりバラツキも大きい。このことから、比較的若い年齢において、分散の値が大きくなっていることが考えられる。

\*2 適合度は良好となるが、図 4.5, 図 4.6 に示した LC モデルの残差の系列相関については考慮されていない。

表 7.3 超過分散へ対応した LC モデルの適合度

		自由パラメータ数	AIC	BIC
1971-2009・男	LC	191	55,549	56,697
	超過分散対応 LC	268	39,145	40,755

### 7.3 超過分散へ対応した LC-VAR モデル

前節で述べた負の 2 項分布による方法を LC-VAR モデルへ適用することが可能である。超過分散対応 LC モデルにおける式 (7.6) は、超過分散対応 LC-VAR(1) モデルでは次式の形となる。

$$E(D_{x,t}) = \lambda_{x,t} = E_{x,t} \exp[\alpha_x + \beta_x \kappa_t + C_{j1}^1 \varepsilon_{x-1,t-1} + C_{j2}^1 \varepsilon_{x,t-1}] \quad (7.9)$$

上式に従い、超過分散対応 LC モデルと同様、最尤推定することができる。我が国の男の 1971-2009 年、14-90 歳の死亡データに対し、超過分散対応 LC-VAR(1) モデルを適用した結果は、表 7.4、図 7.2 の通りである。AIC, BIC は LC-VAR(1) モデルと比較し良好となる。VAR 部分のパラメータ推定値は、超過分散対応していない LC-VAR(1) モデルの場合と余り変わらない形となっている。パラメータ  $\theta_x$  は、超過分散対応 LC モデルと比較し水準が低い。このことから、超過分散対応 LC モデルにおいて異質性と仮定されている部分は、超過分散対応 LC-VAR(1) モデルにおいては VAR 部分において一定程度説明されており、異質性による部分は小さくなっていると考えられる。但し、異質性を考慮した超過分散対応 LC-VAR(1) モデルの方が考慮しない場合と比較し適合度が良好であることから、LC-VAR(1) モデルを適用した場合においても、年齢・期間別のセルにおいて死亡率に関し個人別の異質性が存在すると捉えることができるであろう。

表 7.4 超過分散へ対応した LC-VAR(1) モデルの適合度

		自由パラメータ数	AIC	BIC
1971-2009・男	LC-VAR(1)	303	37,230	39,051
	超過分散対応 LC-VAR(1)	380	36,474	38,294

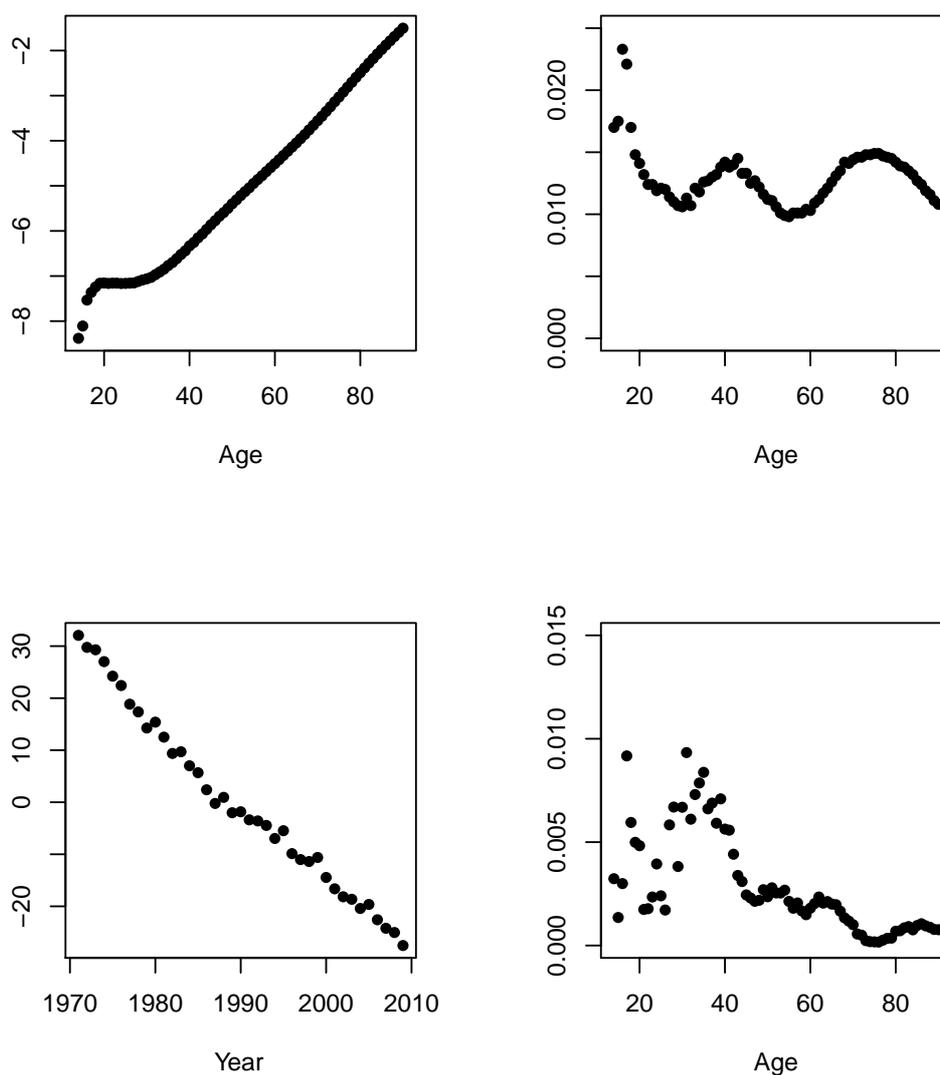


図 7.1 超過分散へ対応した LC モデルのパラメータ推定結果 (対象データ：男，14-90 歳，1971-2009 年)

(上段左より  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$ , 下段左より  $\kappa_t$ ,  $\theta_x$ )

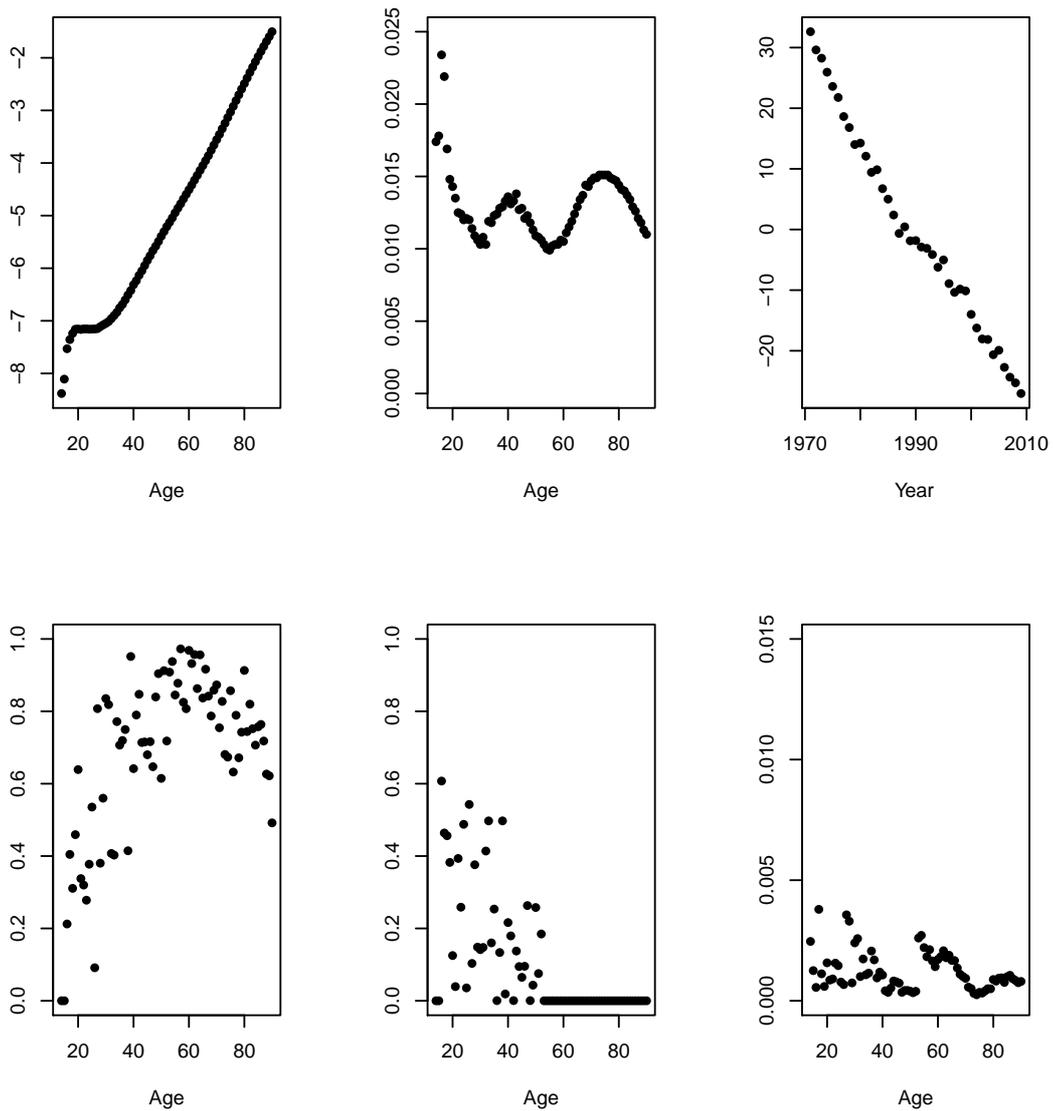


図 7.2 超過分散へ対応した LC-VAR(1) モデルのパラメータ推定結果 (対象データ：男，14-90 歳，1971-2009 年)

(上段左より  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$ ,  $\kappa_t$ , 下段左より  $C_{j1}^1$ ,  $C_{j2}^1$ ,  $\theta_x$ )

次に、超過分散対応 LC-VAR(2) モデルについて、同様の推定を行った。パラメータ数が超過分散対応 LC-VAR(1) モデルより更に多くなることもあり、パラメータ推定のための数値計算が不安定で、収束判定条件を対数尤度関数の変化  $10^{-4}$  未満としてはじめて推定値を得ることができた<sup>\*3</sup>。結果は、表 7.5、図 7.3 の通りである。AIC, BIC は超過分散へ対応していない LC-VAR(2) モデルと比較し若干良好となるが、VAR 部分のパラメータ推定値は、特に効果 2 のパラメータ  $C_{j2}^1$  と効果 1 の 2 次のパラメータ  $C_{j1}^2$  が超過分散へ対応していない LC-VAR(2) モデルの場合と異なる。パラメータ  $\theta_x$  の推定値も、超過分散対応 LC-VAR(1) モデルの場合と比べ、若年から中年層の値がやや大きな値となる。

表 7.5 超過分散へ対応した LC-VAR(2) モデルの適合度

		自由パラメータ数	AIC	BIC
1971-2009・男	LC-VAR(2)	378	36,320	38,591
	超過分散対応 LC-VAR(2)	455	36,256	38,527

<sup>\*3</sup> 他のモデルの最尤推定と同様、収束判定条件を対数尤度関数の変化  $10^{-6}$  とすると、収束せず推定値を得ることができなかった。

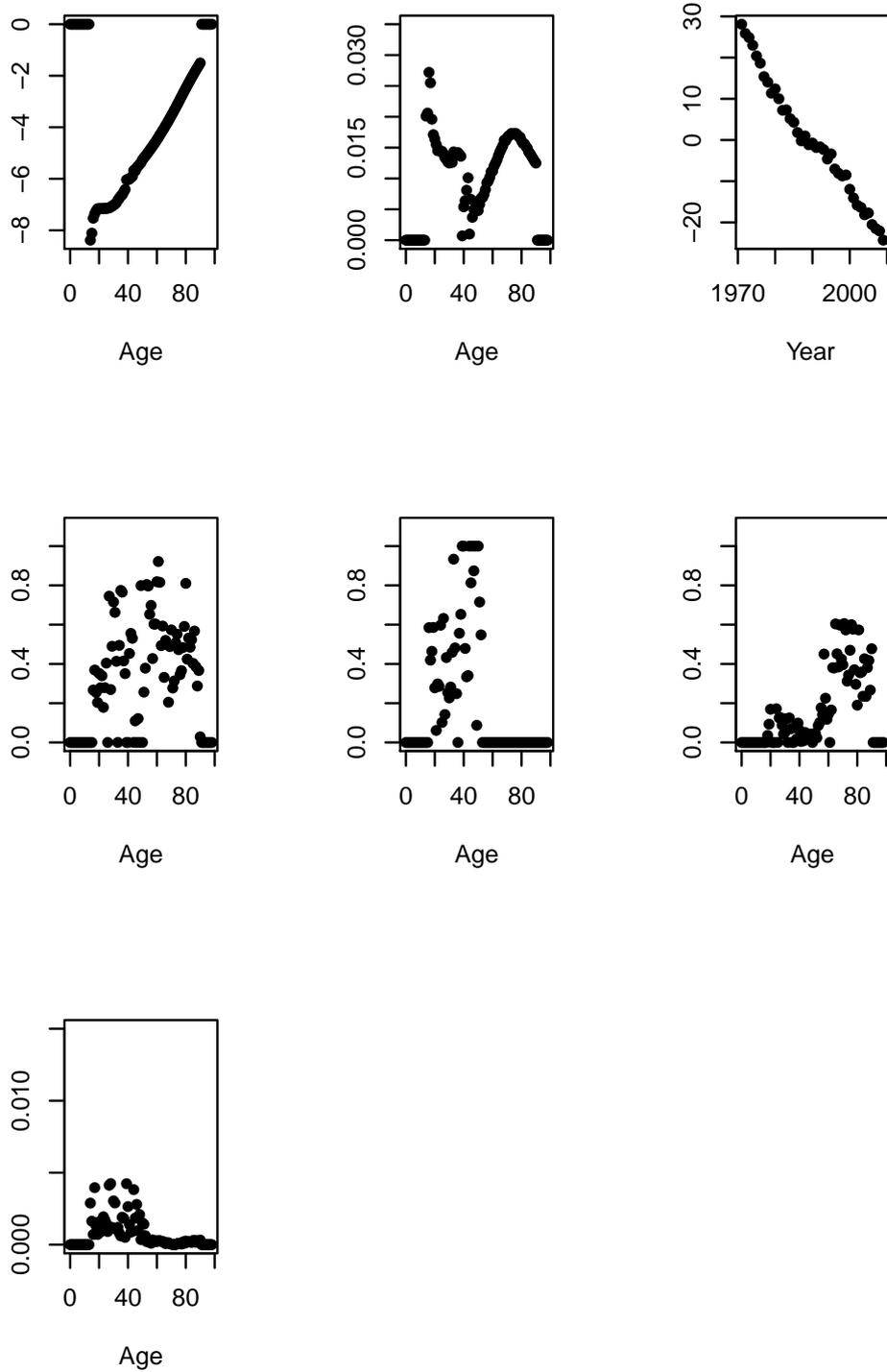


図 7.3 超過分散へ対応した LC-VAR(2) モデルのパラメータ推定結果 (対象データ：男，14-90 歳，1971-2009 年)

(上段左より  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$ ,  $\kappa_t$ , 中段左より  $C_{j1}^1$ ,  $C_{j2}^1$ ,  $C_{j1}^2$ , 下段  $\theta_x$ )

## 7.4 将来死亡率の信頼区間の評価

本節では、上述の超過分散対応 LC モデルと超過分散対応 LC-VAR(1) モデルによる将来死亡率の信頼区間を例示し比較する。信頼区間の算出は、Li et al. (2009) が引用しているの Brouhns et al. (2005) のパラメトリック・ブートストラップ法によった。超過分散対応 LC-VAR(1) モデルにおいては、具体的には次のステップによる。

1. 式 (7.5) の負の 2 項分布に従う  $N$  組の  $D_{x,t}$  の値を生成する。
2. 生成した  $N$  組の  $D_{x,t}$  の値について、次を実行する。
  - (a) 最尤法により、各組について、パラメータ  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$ ,  $\kappa_t$ ,  $C_{j1}^1$ ,  $C_{j2}^1$  を推定。
  - (b) 死亡指数  $\kappa_t$  ヘドリフト付きランダムウォークモデルを適用し推定。
  - (c) 推定した死亡指数  $\kappa_t$  のモデルにより、将来の死亡指数を予測。
  - (d) 推定したパラメータ  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$  と予測した  $\kappa_t$  により、将来死亡率を推計。
3. 上記ステップ 2 により推計した将来死亡率の 2.5 パーセンタイルと 97.5 パーセンタイルを 95% 信頼区間の上下限として算出。

前節までの各モデルのパラメータの推定結果により 1000 組の  $D_{x,t}$  を生成し、各モデルについて 65 歳の将来死亡率の信頼区間を算出した結果がそれぞれ図 7.4, 図 7.5 である。超過分散対応 LC モデルについては、個人の異質性を考慮した結果、LC モデルの場合と比較し、将来死亡率の不確実性が増加し信頼区間が広がっていることが分かる。一方、超過分散対応 LC-VAR(1) モデルについては、LC-VAR(1) モデルと比較し、VAR 部分の生年コーホートの効果を表すパラメータの推定値が異なり、中短期的な将来死亡率の信頼区間が異なる。超過分散対応 LC-VAR モデルは適合度は良好であるが、将来死亡率の信頼区間を評価する上では、超過分散を考慮しない場合の点推定の結果等も踏まえながら適否について検討する必要がある。

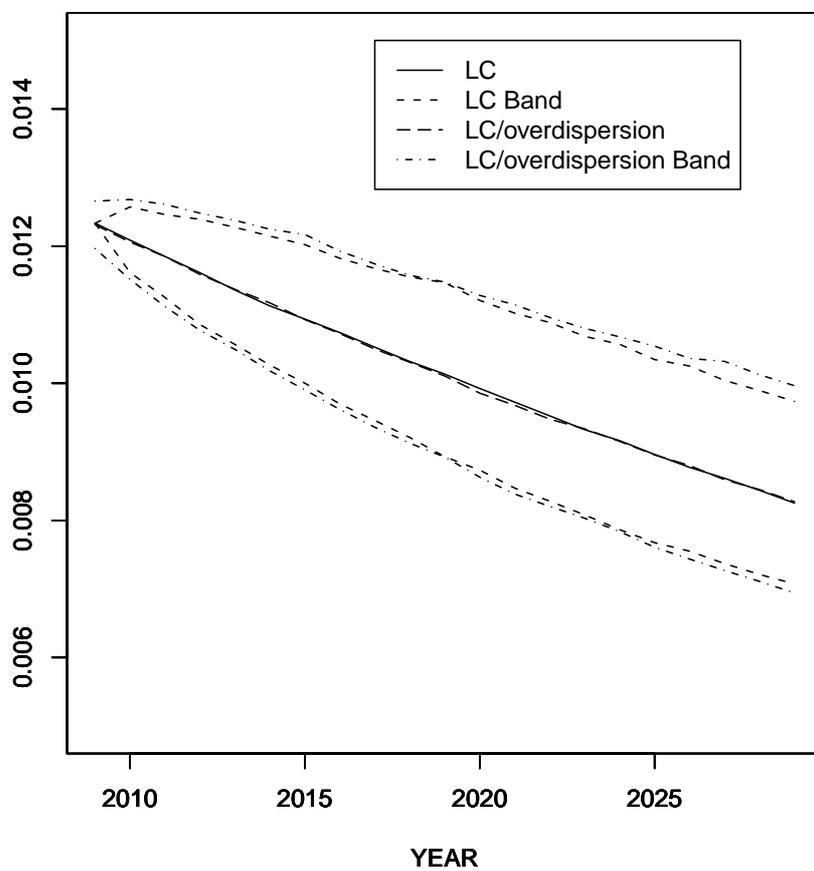


図 7.4 将来死亡率の信頼区間の評価 (男・65 歳：超過分散対応 LC モデル)

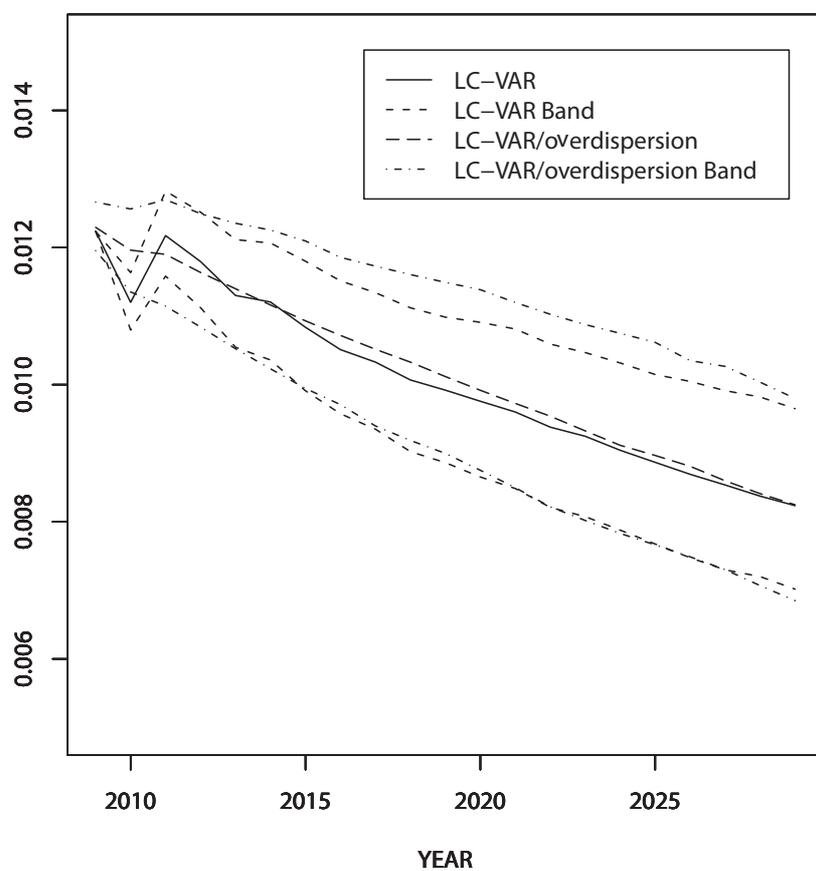


図 7.5 将来死亡率の信頼区間の評価 (男・65歳：超過分散対応 LC-VAR(1) モデル)



## 第 8 章

# 結び

本章では、本論文の内容を総括し、将来の課題や展望について述べ、結語とする。

### 8.1 死亡率の変動要因分析と将来推計・リスク評価

本論文では、冒頭で述べた通り、様々な課題を抱える現行の年金制度の状況も踏まえつつ、年金財政で重要な役割を果たす死亡率推計や年金制度が内包する寿命・死亡リスクに着目し、死亡率の統計モデリングについて検討した。人口推計等のための死亡率モデルとしては、国際的に LC モデルが利用されてきているが、日本の死亡データへ適用した場合、必ずしも適合度は良くない。本論文では LC モデルを日本の死亡データへ適用した場合のパラメータ推定値による対数死亡率の残差構造を解析し、生年コーホート別の効果と補足的な年齢・期間効果を仮定した VAR 構造を組み入れ、LC-VAR モデルを提案した。既存のコーホート効果を考慮した拡張 LC モデルである RH モデルは、LC モデルと比較し適合度は改善されるが、パラメータ推定値が頑健でなく、長期の死亡率推計においては将来世代のコーホート効果を予測しなければならない難点がある。提案した LC-VAR モデルは、既存の拡張 LC モデルより適合度が良好な上、中短期的な将来死亡率の予測が LC モデルと比較し改善する。2013 年 1 月 1 日より開始される事業年度より強制適用となる国際会計基準 IAS19「従業員給付」では、将来の改善を想定した死亡率の最善の見積りを前提とすることとされたが、既存の年金受給権者の債務を評価する上で、中短期的な将来死亡率の予測は一層重要なものとなり、LC-VAR モデルによる将来死亡率の予測は有用なものとなろう。

LC-VAR モデルでは、経時的に生年コーホート別の効果が変動し得る状況を想定しており、将来死亡率についてのコーホート効果の収束期間を考える上でも重要な判断材料を提供する。また、LC-VAR モデルで組み入れた補足的な年齢・期間効果のパラメータ推定値の特徴は、我が国の死亡率変動と経済指標の相関を分析した Granados (2008) の先行研究とも整合的であり、現役世代の死亡率変動が経済状況により影響を受けている可能性があると考えられる。新たに組み入れた VAR 部分のこれらの効果は、死亡率変動と社会・経済状況との関連を分析する上でも切口となる可能性があり、このような分析とモデルを発展させることで、死亡率変動をより適切に捉え、年金の財政推計やリスク評価をより適切に実施し、制

度運営を改善することが期待できるであろう。

## 8.2 年金負債の評価

現行の年金数理の手法は、本論文で引用した Bader and Gold (2003) 等の指摘通り、金融経済学の手法を取り入れる必要があるかも知れない。しかしながら、田中 (2005) が指摘する通り、年金制度は超長期の期間を前提としており、不確実性が加速度的に増大する。このため、年金数理の手法は、従来通り、単一の数値を基礎率として設定し、事後修正する現行方法がある程度踏襲して行く形となるかも知れない。いずれにしても、将来死亡率等をより適切に推計する、あるいは、将来死亡率の不確実性を計量的に扱うことを可能とするための各基礎率についてのモデリングが必要であろう。各基礎率のモデリングは、実データに適合した統計モデルの開発を出発点とし、将来推計や負債評価における取り扱い易さも組み入れた形で発展させて行く必要がある。また、各基礎率のモデリングは、年金数理の手法の見直しと相俟って、検討が進むものと期待される。

井川 (2011) では、年金負債の評価の基礎となる年金現価率の基礎率の一つである一時金選択率の推定方法とリスク評価について取り上げている。井川 (2011) におけるある会社の事例では、金利変動と一時金選択率の変動に相関が見られ、これらの基礎率間の相関を仮定した年金現価率の分布は、相関を仮定しないものと少なからず異なる場合があることが示されている。このことは、基礎率間の相関を年金負債の評価へ何らかの形で反映させるべき場合があることを示唆しており、そのためには、現行の単一の数値を基礎率として設定する年金数理の手法では不十分で、確率分布の形でリスク評価する手法が何らかの形で必要となろう。このような形式の評価は、保険会社の資本規制や会計基準で検討されている保険負債の評価とも関連し得るものであり、また、年金・保険に係る金融商品の公正価値評価の枠組みとも整合させ得るものである。但し、年金制度の場合は、その超長期性に鑑み、既存の金融経済学の手法をそのまま導入するのではなく何らかの修正等を施して導入する方が望ましい可能性があることにも注意が必要であろう。

## 8.3 展望

年金制度は、多くの関係者の合意に基づき成立し運営され、関係者の合意を得るには、理解が容易で納得できる将来推計が必要となる。制度に内包されるリスクは、将来推計の不確実性について定量化が可能な部分があり、予めこのようなリスクの一部又は全部を掛金 (保険料) へ反映する対応<sup>\*1</sup>や様々な金融商品を用いてリスク管理の対象とする対応が考えられる<sup>\*2</sup>。また、死亡実績 (寿命伸長) や運用実績が将来

<sup>\*1</sup> 現行の年金の掛金 (保険料) の算定については、第2章を参照。

<sup>\*2</sup> 年金 ALM (Asset Liability Management), LDI (Liability Driven Investments) がリスク管理手法として用いられてきているほか、近年、年金制度運営のための ERM (Enterprise Risk Management) も検討されている。

推計の前提と異なる場合、給付額を調整する対応も考えられる。公的年金で言えば、マクロ経済スライド<sup>\*3</sup>、企業年金で言えば、国債利回り等に応じて給付が改訂されるキャッシュバランスプラン等がこれに該当し、これらはリスクシェアリングの一形態である。

現在、年金制度は様々な課題を抱えている。本論文で述べた社会経済状況との関係を踏まえた死亡率モデリングや基礎率間の相関の考慮等は、年金負債評価のための新たな年金数理の枠組みやリスク管理手法を構築する上でも有用であろうし、寿命リスク・運用リスクのより洗練したシェアリングのみならず、就労や健康等も考慮した新たなリスクシェアリングのための年金制度を構築することも可能となろう。

我が国は、世界にも類を見ない超高齢社会を迎えつつあり、これらの課題へ取り組み年金制度運営を改善して行くことを通じて、我が国の年金制度を持続可能なものとすると同時に、海外諸国にとっての良き先行事例となることが求められよう。

---

<sup>\*3</sup> 新規裁定年金額に係る賃金スライド、受給開始後の年金額に係る物価スライドのほか、公的年金被保険者数の減少率(3年平均)と平均余命の伸びを勘案した一定率(0.997)による調整を含む。



## 付録 A 年金の財政方式

予め給付の算定方式が決まっている年金制度を「給付建(確定給付型)」の年金制度、掛金(保険料)を先に決めて運用した元利合計額を給付原資とする年金制度を「拠出建(確定拠出型)」の年金制度と言う。給付建の年金制度において、予め財政計画を立てる方法を「財政方式」と呼ぶ。

財政方式は、積立金を形成しない「賦課方式」と、給付に先立ち掛金を拠出し運用することによって積立金を形成する「事前積立方式」に大別される。賦課方式、事前積立方式は、さらに下記の各財政方式に分類される。

### 1. 賦課方式

給付が発生する都度、必要原資を掛金として拠出する方式。公的年金である厚生年金保険制度は、現在積立金を保有しているが、ベースとなる考え方は賦課方式であり、積立金は2105年迄の有限期間で財政が均衡するよう取り崩すことが計画されている。

### 2. 事前積立方式

前述の通り、給付に先行し掛金を拠出して積立金を形成する方式であり、制度加入から給付までのどのタイミングで給付原資を調達するかという観点から、下記の通り、事前積立方式が分類されている。

#### (a) 単位積増方式

退職時における給付原資を加入期間中の各年度に対応する単位に分割し、各年度に割り当てられた給付の当該年度における現価相当額を各年度の標準掛金として拠出する財政方式。

#### (b) 平準積立方式

加入期間中の全期間にわたり平準化された標準掛金を拠出することによって退職時に必要な給付原資を形成する財政方式。

##### i. 加入年齢方式

個々の加入者について、制度に加入した加入年齢以後の期間(加入期間)に対応する給付について、収支バランスが図れるよう、当該加入期間にわたり平準的な標準掛金を算定する財政方式。

##### ii. 総合保険料方式

掛金算定時の加入者全体を対象として収支バランスが図れるよう、当該加入者全員の将来加入期間にわたって平準的な標準掛金を算定する財政方式。

## iii. 開放基金方式

掛金算定時の加入者(現在加入者)に将来の新規加入者(将来加入者)を加えた加入者全体で将来加入期間にわたり平準的な標準掛金を拠出する財政方式。但し、現在加入者の過去勤務期間に対応する給付原資については一定期間内に積立が完了できるよう標準掛金とは別に特別掛金を拠出して積み立てる。

## iv. 個人平準保険料方式

個々の加入者毎に収支バランスが図れるよう、掛金算定時以降の加入期間にわたり平準的な標準掛金を算定する財政方式。

## v. 到達年齢方式

個々の加入者毎に掛金算定時以降の加入期間(将来期間)に係る給付について収支バランスが図れるよう平準的な標準掛金を算定する財政方式。掛金算定時までの期間(過去期間)に対応する給付原資については特別掛金を拠出して一定期間内に積み立てる。

積立金を保有する場合は、運用リスクを内包するが、死亡・長寿リスクについては、積立金を保有しない各財政方式についても内包される。

## 付録 B 年金と保険の負債評価

年金や保険の負債は、伝統的に、各基礎率について一定の前提を置き、評価されてきたが、負債額が会計上どのような金額を表すか、あるいは、それが経済価値とどのような関係にあるか等について議論されて来たのは比較的近年である。国際的な保険会社の監督規制において資産・負債の経済価値評価、保険の国際会計基準 IFRS4 において負債の測定属性に関する議論が行われる中で、保険の負債について議論が深められている。年金の負債については、田中 (2005) が紹介している通り、Bader and Gold (2003) が現行年金アクチュアリー実務を批判したこと等を契機として、公正価値評価等の金融経済学的な年金負債の評価手法が研究されるようになって来ている。また、企業年金の給付等に係る国際会計基準 IAS19「従業員給付」の 2008 年のディスカッションペーパー (DP) の中では、経済指標と給付が連動する制度や保証がある制度についての負債の測定属性として公正価値評価が挙げられている。本付録では、これまでの年金の負債評価の議論の概要について述べ、保険の負債評価の直近の検討状況についても簡単に説明する。

### 1. 年金の負債評価

#### 1.1 Bader and Gold (2003) の批判と動向

Bader and Gold (2003) は、1974 年に制定された米国 ERISA (Employee Retirement Income Security Act)\*<sup>4</sup> に基づく年金アクチュアリー実務の手法が金融経済学の原則と矛盾しており、金融経済学の最新の成果を取り入れた新たな手法へ進化させるべきであることを強く主張している。年金財政では、予定利率は運用資産のリスクプレミアムを反映したものとなっており、また、リスクのある分布を平滑化や償却によってリスクの市場価格を反映しない形としており、このことが不適切な財政状況の評価や裁定取引の機会を生む可能性があり、制度関係者へ損害を引き起こす恐れがあるとするものである。

これに対し、年金制度は長期間に亘り継続して運営されて行くものであり、単純な負債ではない等と反論するものがある。これらの論争は、現時点では決着がつかないが、金融経済学的な手法を取り入れた年金の負債評価に関するさまざまな研究が行われるようになって来ている。

---

\*<sup>4</sup> 米国の企業年金法。年金受給権の保全を確立した法律。

## 1.2 国際会計基準 IAS19 における検討

上記とは別に、年金の国際会計基準に関する議論が行われてきている。2006年11月より、国際会計基準審議会 (IASB) において、退職後給付プロジェクト (Post Retirement Benefit Project) の第1フェーズが開始され、2008年DPが公表された。DPに対するコメントを踏まえ再審議した上で、2010年4月に公開草案が公開され、2011年6月に第1フェーズの基準改正が行われた。第2フェーズの基準改正については、2015年以降審議が再開される予定である。

第1フェーズの公開草案や基準改正の中では取り上げられなかったが、2008年のDPの中で、新たに拠出ベース約定 (Contribution-Based-Promise) という給付約定が定義され、これらを公正価値により負債評価することが提案された。公正価値は、「取引の知識がある自発的な当事者の間で、独立第三者間取引条件により資産が交換され、又は負債が決済される価額」として定義される測定属性とされている。また、拠出ベース約定の負債は、将来の昇給による過去期間に係る給付の増加をもたらす給与リスクに晒されておらず、主に次のリスクを有するとされている。

1. 資産ベース・リスク
2. 人口統計上のリスク (長寿リスク等)
3. 信用リスク
4. 給付約定の条件が変更となるリスク

DPの中では、拠出ベース約定と確定給付約定のいずれか高い給付について、そのオプション性に着目した負債の公正価値評価に関する整理も試みられている。DP公表前のIASBの会議では、負債の評価方法として、保険契約のプロジェクトで示されたビルディング・ブロック方式も取り上げられたが、DPでは前述の拠出ベース約定の公正価値評価と主なリスク等の記述に留まり、具体的な会計上のリスク評価については特段述べられなかった。なお、拠出又は概念上の拠出に関し保証利回りのある給付制度の負債測定等の会計について、国際財務報告基準解釈指針委員会 (IFRIC) にて審議が再開される予定であるが、解決策を見つけるのは困難であるとも示されている。

## 2. 保険の負債評価

### 2.1 ソルベンシー規制の動向

日本の金融庁もメンバーである保険監督者国際機構 (IAIS) では、保険コアプリンシプル (ICP) をベースとして、監督基準や指針 (ガイダンス) を定めており、ソルベンシー基準においても基本原則を定めている。ICPでは、ソルベンシー目的の資産・負債の評価基準として、経済価値ベースを求めている。指針 (ガイダンス) においては、経済価値評価は、市場整合的評価と償却原価の両方を含んだ概念としている。

IAISは2013年10月9日、各国の主要保険会社を対象<sup>\*5</sup>とした新しい資本規制を発表した。2016年までに新規制を最終決定し、試験運用を行った後、2019年に導入する見通しとされている<sup>\*6</sup>。

このような動向を踏まえ、欧州では、ソルベンシー II への移行が検討されている。ソルベンシー II においては、経済価値ベースの資産・負債評価が志向されており、この場合の経済価値とは、市場整合的な取引価格と定義されている。ソルベンシー II の枠組みは、国際アクチュアリー会 (IAA) のワーキンググループで策定された「保険者ソルベンシー評価のための国際的枠組み」に大きく影響を受けていると言われている。ソルベンシー II については、実施の延期に加え、緩和策の検討が行われている。

米国では、各州が規制の設定主体であるが州監督官の組織である NAIC が RBC(Risk Based Capital) 規制<sup>\*7</sup>を提示しており、枠組みは統一されているが、上述の動向も踏まえ、2008年から SMI(Solvency Modernization Initiative) と言うソルベンシー基準見直しのプロジェクトが発足している。SMIは、市場整合的の評価に対し、慎重に捉える方向性が示されている。

我が国においても、国際的な動向を踏まえ、金融庁が経済価値ベースのソルベンシー基準の検討を進める方向性を示している。経済価値評価については、2007年のソルベンシー・マージン比率の算出基準等に関する検討チーム報告書や2011年の保険会社向けの総合的な監督指針等において、一定の幅がある表現がなされており、いずれにしても、継続して検討されて行く見通しである。

## 2.2 保険の国際会計基準 IFRS4 の改正動向

国際会計基準審議会 (IASB) の保険契約 (Insurance Contract) に係る会計プロジェクトの第1フェーズについては、2004年3月に IFRS4(国際財務報告基準4号) が公表されたが、本質的な改正は第2フェーズに委ねられている。IFRS4では、組込デリバティブは、一定の要件を満たし主契約と明確に区分できる場合、金融商品会計に基づき公正価値を算出することとされている。

第2フェーズは2004年7月から開始され、2007年5月に DP が公表された。その後、2010年に公開草案、2013年に改訂公開草案が公表されている。2007年の DP の中で、負債評価は第三者に譲渡する場合の対価 (現在出口価格) によるべきとされたが、保険契約の性格にも鑑み、2010年の公開草案においては、履行価値に基づくものとされた。2013年の改訂公開草案において、保険負債は、履行キャッシュフローの見積り及び現在価値への割引、リスク調整、契約上のサービス・マージンの3要素によるビルディングブロック・アプローチにより測定する必要があるとされている。ビルディングブロック・アプローチは次の3つにより構成されるとみることができる。

1. 履行キャッシュフローの現在価値
2. リスク調整

<sup>\*5</sup> 世界約140ヶ国の約50の保険会社が対象とされている。

<sup>\*6</sup> 世界の主要保険会社で構成されるジュネーブ協会は、規制導入のスケジュールが厳し過ぎると指摘している。

<sup>\*7</sup> 我が国のソルベンシーマージン基準策定の際に参考とされたものであり、概ね我が国と同様の枠組みである。

### 3. 契約上のサービス・マージン

上記の履行キャッシュフローの割引価値の将来キャッシュフロー及び割引率は每期見直すとされている。割引率変動による履行キャッシュフローの現在価値の変動は、その他包括利益 (OCI: Other Comprehensive Income) の中で認識し、その他の基礎率の変動による保険負債の変動及び解約・失効等による変動については、一定のルールに基づき、契約上のサービスマージンを調整とされている。上記のリスク調整は、保険契約に固有のリスクと不確実性に対応したマージンを表しており、利用可能な技法は限定されていない\*<sup>8</sup>。上記の契約上のサービス・マージンは、契約の当初測定において初日利得が生じる場合、これと相殺するための負債とされる。

いずれにしても、保険の国際会計基準 IFRS4 は、現在、改正の途上にある。

---

\*<sup>8</sup> 2010 年の公開草案においては、VaR, CTE, 資本コスト法の 3 手法に限定されていたが、2013 年の改訂公開草案では削除された。

## 付録 C 生命表の諸関数の定義

付録 C では、生命表において使用される各記号や諸関数について説明する。生命表は、一定期間におけるある人口集団についての死亡状況を、死亡率、平均余命等の生命関数を用いて表現したものである。本付録の内容は、我が国の簡易生命表 (2013) の説明によっている。

### 1. 生存数 $l_x$

生命表上で一定の出生者  $l_0$  (通常 100,000 人) が、 $x$  歳に達するまで生きると期待される者の数を  $x$  歳における生存数と言い、これを  $l_x$  で表す。

### 2. 死亡数 ${}_n d_x$

$x$  歳における生存数  $l_x$  人のうち  $x+n$  歳に達しないで死亡すると期待される者の数を年齢階級  $[x, x+n)$  における死亡数を言い、これを  ${}_n d_x$  で表す。特に  ${}_1 d_x$  を  $x$  歳における死亡数といい、これを  $d_x$  で表す。

### 3. 生存率 ${}_n p_x$

ちょうど  $x$  歳に達した者が  $x+n$  歳に達するまで生存する確率を年齢階級  $[x, x+n)$  における生存率と言い、これを  ${}_n p_x$  で表す。特に  ${}_1 p_x$  を  $x$  歳の生存率と言い、これを  $p_x$  で表す。

### 4. 死亡率 ${}_n q_x$

ちょうど  $x$  歳に達した者が  $x+n$  歳に達しないで死亡する確率を年齢階級  $[x, x+n)$  における死亡率といい、これを  ${}_n q_x$  で表す。特に  ${}_1 q_x$  を  $x$  歳の死亡率と言い、これを  $q_x$  で表す。

### 5. 死力 $\mu_x$

$x$  歳における瞬間の死亡率を死力と呼び、これを  $\mu_x$  で表す。

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x} \frac{dl_x}{dx} = -\frac{d \log l_x}{dx}.$$

死力  $\mu_x$  と死亡率  $q_x$ 、生存率  ${}_n p_x$  との関係は、以下の通りである。

$$q_x = \int_0^1 \mu_{x+t} {}_t p_x dt.$$

$${}_n p_x = \exp \left[ - \int_0^n \mu(x+t) dt \right].$$

## 6. 定常人口 ${}_n L_x$ 及び $T_x$

$x$  歳における生存数  $l_x$  人について、これらの各々が  $x$  歳から  $x+n$  歳に達するまでの間に生存する年数の和を年齢階級  $[x, x+n)$  における定常人口と言い、これを  ${}_n L_x$  で表す。すなわち常に一定の出生 ( $l_0=100,000$  人) があって、これらの者が上記の死亡率に従って死亡すると仮定すると、その人口集団は一定の型の人口集団へ収束して行くが、その集団の  $x$  歳以上  $x+n$  歳未満の人口に相当する。特に  ${}_1 L_x$  を  $x$  歳における定常人口と言い、これを  $L_x$  で表す。さらに  $x$  歳における生存数  $l_x$  人について、これらの各々が  $x$  歳以後死亡に至るまでの間に生存する年数の和を  $x$  歳以上の定常人口と言い、これを  $T_x$  で表す。すなわち、上記の人口集団の  $x$  歳以上の人口に相当する。 ${}_n L_x$ ,  $T_x$  は、次式により与えられる。

$${}_n L_x = \int_x^{x+n} \ell_t dt.$$

$$T_x = \int_x^{\infty} \ell_t dt.$$

## 7. 中央死亡率 $m_x$

$x$  歳の年間死亡数をその年の期央の人口 (中央人口) で除した値を中央死亡率と言い、生命表における中央死亡率  $m_x$  は、次式により与えられる。

$$m_x = \frac{d_x}{L_x} \simeq \frac{d_x}{\ell_x - \frac{1}{2}d_x}.$$

粗死亡率  $q'_x$  との関係は、以下の通りである。

$$q'_x \simeq \frac{m_x}{1 + \frac{1}{2}m_x}.$$

簡易生命表、完全生命表等では、上記により算出した粗死亡率  $q'_x$  を補整し、死亡率  $q_x$  を算出している。

## 8. 平均余命

$x$  歳における生存数  $l_x$  人について、これらの者が  $x$  歳以降に生存する年数の平均を  $x$  歳における平均余命と言い、これを  $e_x^\circ$  で表す。 $x$  歳の平均余命は次式により与えられる。

$$e_x^\circ = \frac{T_x}{\ell_x}.$$

## 9. 平均寿命

0歳における平均余命を平均寿命  $e_0^o$  という.

## 10. 寿命中位数

生命表上で、出生者のうちちょうど半数が生存し、半数が死亡すると期待される年数を寿命中位数と言  
い、次式を満たす  $\alpha$  として与えられる.

$$l_\alpha = \frac{l_0}{2}.$$



## 参考文献

- [1] Bader, L.N. and J. Gold. (2003). Reinventing Pension Actuarial Science, *The Pension Forum*, **14-2**, 1-13.
- [2] Booth, H., R.J.Hyndman, L. Tickle, and P.Jong (2006). Lee-Carter Mortality Forecasting: A Multi-Country, Comparison of Variants and Extensions, *Demographic Research*, **15**, 289-310.
- [3] Brass, W. (1971). On the Scale of Mortality, *Biological Aspects of Demography*, Taylor and Francis Ltd., 69-110.
- [4] Brouhns, N., M. Denuit, and J.K. Vermunt (2002). A Poisson Log-Bilinear Regression Approach to the Construction of Projected Lifetables, *Insurance: Mathematics and Economics*, **31**, 373-393.
- [5] Brouhns, N., M. Denuit, and I.V. Keilegom (2005). Bootstrapping the Poisson Log-Bilinear Model for Mortality Forecasting, *Scandinavian Actuarial Journal*, **31**, 212-224.
- [6] Brown, R.L., J. McDaid (2003). Factors Affecting Retirement Mortality, *North American Actuarial Journal*, **2**, 24-43.
- [7] Cairns, A.J.G., D. Blake, and K. Dowd (2006). A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty: Theory and Calibration, *Journal of Risk and Insurance*, **73**. 687-718.
- [8] Cairns, A.J.G., D. Blake, K. Dowd, G.D. Coughlan, D. Epstein, A. Ong, and I. Balevich (2009). A Quantitative Comparison of Stochastic Mortality Models Using Data from England and Wales and the United States, *North American Actuarial Journal*, **13(1)**. 1-35.

- [9] Cameron A.C., and P.K. Trivedi (1990). Regression-Based Tests for Overdispersion in the Poisson Model, *Journal of Econometrics*, **46**, 347-364.
- [10] Continuous Mortality Investigation Bureau (CMIB) (2009a). A Prototype Mortality Projection Model: Part 1 - An Outline of the Proposed Approach, *Working Paper 38*.
- [11] Continuous Mortality Investigation Bureau (CMIB) (2009b). A Prototype Mortality Projection Model: Part 2 - A Detailed Analysis, *Working Paper 39*.
- [12] Czado, C., A. Delwarde, and M. Denuit (2005). Bayesian Poisson Log-Bilinear Mortality Projections, *Insurance: Mathematics and Economics*, **36**, 260-284.
- [13] Currie, I.D. (2006). Smoothing and Forecasting Mortality Rates with P-Splines, *Paper presented at the Institute of Actuaries*, June 2006. Available at <http://www.ma.hw.ac.uk/~iain/research/talks.html>.
- [14] Delwarde, A., M. Denuit, and C. Partrat (2007). Negative Binomial Version of the Lee-Carter Model for Mortality Forecasting, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **23**, 385-401.
- [15] Dowd, K., A.J.G. Cairns, D. Blake, G.D. Coughlan, D. Epstein, and M. Khalaf-Allah (2010). Backtesting Stochastic Mortality Models: An Ex-Post Evaluation of Multi-Period-Ahead Density Forecasts, *North American Actuarial Journal*, **14(3)**, 281-298.
- [16] Fujisawa, Y., and J.S.H. Li (2010). IFRS Convergence: The Role of Stochastic Mortality Models in the Disclosure of Longevity Risk for Defined Benefit Plans, *Asia Pacific Journal of Risk and Insurance*, **5(1)**. Article 2.
- [17] Giroso, F., and G. King (2007). Understanding the Lee-Carter Mortality Forecasting Method, Unpublished Manuscript.
- [18] Granados, J.T. (2008). Macroeconomic Fluctuations and Mortality in Postwar Japan, *Demography*, **45-2**, 323-343.
- [19] Hanewald, K. (2009). Mortality Modeling: Lee-Carter and the Macroeconomy, *Discussion*

---

*Paper.*

- [20] Human Mortality Database. 2012. University of California, Berkeley (USA), and Max Planck Institute for Demographic Research (Germany). Available at <http://www.mortality.org> or <http://www.humanmortality.de> (accessed in November 2012).
- [21] Igawa, T. (2013). Analysis of the Residual Structure of the Lee-Carter Model: The Case of Japanese Mortality, *Asia Pacific Journal of Risk and Insurance*, **7(2)**. 53-80.
- [22] Ishii, F. (2011). Application of Tangent Vector Fields on the Log Mortality Surface to Mortality Projection for Japan, *PAJ 2011 Annual Meeting*, Kyoto University.
- [23] Kogure, A., K. Kitsukawa, and Y. Kurachi (2009). A Bayesian Comparison of Models for Changing Mortalities toward Evaluating Longevity Risk in Japan, *Asia Pacific Journal of Risk and Insurance*, **3(2)**. 1-21.
- [24] Lee, R.D., and L. Carter (1992). Modelling and Forecasting the Time Series US Mortality, *Journal of the American Statistical Association*, **87**, 659-671.
- [25] Lee, R. (2000). The Lee-Carter Method for Forecasting Mortality, with Various Extensions and Applications, *North American Actuarial Journal*, **4(1)**, 81-93.
- [26] Lee, R., and T. Miller (2001). Evaluating the Performance of the Lee-Carter Method for Forecasting Mortality, *Demography*, **38(4)**, 537-549.
- [27] Li, S.H., and W.S.Chan. (2007). The Lee-Carter Model for Forecasting Mortality, Revisited, *North American Actuarial Journal*, **11(1)**. 68-89.
- [28] Li, J.S.H., M.R. Hardy, and K.S.Tan. (2009). Uncertainty in Mortality Forecasting: An Extension to the Classical Lee-Cater Approach, *ASTIN Bulletin*, **39(1)**. 137-164.
- [29] Pedroza, C. (2006). A Bayesian Forecasting Model: Predicting U.S. Male Mortality, *Biostatistics*, **7**. 530-550.
- [30] Renshaw, A.E., and S. Haberman (2003). Lee-Carter Mortality Forecasting with Age-Specific

- Enhancement, *Insurance: Mathematics and Economics*, **33**, 255-272.
- [31] Renshaw, A.E., and S. Haberman (2006). A Cohort-Based Extension to the Lee-Carter Model for Mortality Reduction Factors, *Insurance: Mathematics and Economics*, **38**, 556-570.
- [32] Tango, T., and S. Kurashina. (1987). Age, Period and Cohort Analysis of Trends in Mortality from Major Diseases in Japan, 1955 to 1979: Peculiarity of the Cohort Born in the Early Showa Era, *Statistics in Medicine*, **6**, 709-726.
- [33] Thatcher, A.R., V. Kannisto, and J.W. Vaupel (1998). *The Force of Mortality at Ages 80 to 120*, Odense University Press.
- [34] The Society of Actuaries (SOA) (2012). Mortality Improvement Scale BB Report.
- [35] Tuljapurkar, S., N. Li, and C. Boe (2000). A Universal Pattern of Mortality Decline in the G7 Countries, *Nature*, **405**, 789-792.
- [36] Willets, R.C. (2004). The Cohort Effect: Insights and Explanations, *British Actuarial Journal*, **10**, 833-877.
- [37] Wilmoth, J.R. (1993). Computational Methods for Fitting and Extrapolating the Lee-Carter Model of Mortality Change, Technical Report, Department of Demography, University of California, Berkeley.
- [38] 赤松賢 (2010). 死亡率に関する一考察～Prototype CMI Mortality Projections Model を使った死亡率予測について～, 日本アクチュアリー会会報, **63(1)**, 67-107.
- [39] 井川孝之 (2011). 一時金選択率の推定と会計上のリスク評価, リスクと保険, **7**, 25-42.
- [40] 井川孝之, 川崎能典 (2012). Lee-Carter モデルの残差構造の解析とモデリング, 2012年度 統計関連学会連合大会 講演報告集, 128
- [41] 井川孝之 (2012). Lee-Carter モデルの残差構造のモデリングと死亡率予測, 2012年度日本保険・年金リスク学会研究発表大会予稿

- 
- [42] 井川孝之 (2013). LC-VAR モデルと死亡率予測・リスク評価, 応用経済時系列研究会報告集, **30**, 75-90.
- [43] 石井太 (2008). 近年のわが国の死亡動向に適合した将来生命表推計モデルの研究一年齢シフトモデルの開発一, 人口問題研究, **64(3)**, 28-44.
- [44] 石井太 (2010). 寿命研究と Human Mortality Database, 人口問題研究, **66(3)**, 80-87.
- [45] 及川桂 (2006). 将来死亡率推定に関する一考察, 日本アクチュアリー会会報, **59-2**, 1-28.
- [46] 小田切陽一, 内田博之 (2003). Age-Period-Cohort モデルによる日本人中高年の損失寿命に関する分析, 厚生指標, **50-11**, 7-13.
- [47] 金子隆一 (1987). 死亡率の年齢パターンに関するリレーショナル・モデルの開発, 人口問題研究, **183**, 1-22.
- [48] 木島正明, 田中敬一 (2007). 資産の価格付けと測度変換, 朝倉書店
- [49] 平成 24 年簡易生命表 (2013). 厚生労働省
- [50] 第 21 回完全生命表 (2013). 厚生労働省
- [51] 小暮厚之, 長谷川知弘 (2005). 将来生命表の統計モデリング: Lee-Carter 法とその拡張, 総合政策学ワーキングペーパーシリーズ, **71**.
- [52] 小松隆一 (2002). リレーショナルモデルによる日本の将来生命表作成の試み, 人口問題研究, **58(3)**, 3-14.
- [53] 田中周二 (2005). 大論争 現行アクチュアリー実務は間違っているのか, 総合政策学ワーキングペーパーシリーズ, **64**.
- [54] 千木良弘朗, 山本拓 (2013). Lee-Carter 予測に関する時系列分析の理論的な長所と短所の解明と代替的予測法の提案, 経済統計・政府統計の数理的基礎と応用-II (国友直人, 山本拓 共編), 172-217, 東京大学大学院経済学研究科附属 日本経済国際共同研究センター, <http://www.cirje.e.u-tokyo.ac.jp/research/reports/R12ab.html>.

- [55] 中村隆 (2005). コウホート分析における交互作用効果モデル再考, 統計数理, **53(1)**, 103-132.
- [56] 社団法人日本アクチュアリー会 (2006). 標準生命表 2007 の作成過程, 日本アクチュアリー会会報別冊, **228**.
- [57] 法元隆 (2009). コーホート効果を考慮に入れた死亡率予測のモデル, 日本アクチュアリー会会報, **62(1)**, 183-233.

## 謝辞

本研究の実施にあたっては、総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻博士課程の主任指導を賜りました川崎能典准教授から研究内容に関わることはもちろん、統計学全般にわたり多大なるご指導を頂きましたこと厚く御礼申し上げます。副主任指導の田村義保教授からは、要所所所的確なコメントを頂戴し、研究の方向やスケジュール等に関し、貴重なアドバイスを頂戴しましたこと、併せて御礼申し上げます。また、研究を進める中で、統計数理研究所の椿広計教授、中村隆教授、前田忠彦准教授から特に有用なコメントを頂戴しましたこと、深く感謝申し上げます。加えて、国立社会保障・人口問題研究所の石井太人口動向研究部長、年金や保険の実務において関わりのある公益社団法人日本アクチュアリー会、公益社団法人日本年金数理人会のアクチュアリー諸氏からも、様々なコメントを頂戴しましたこと御礼申し上げます。これらの方々から、様々なご指導、コメント、アドバイスを頂戴し、初めて本研究は成立したものと考えております。本研究を出発点として、更なるテーマへ取り組んで参りたく思います。