

価格変動に制限を課した商品先物市場における
リスクの考察

青木 義充

博士（学術）

総合研究大学院大学
複合科学研究科
統計科学専攻

平成25年度
(2013)

目次

第1章 序論	5
1.1 値幅制限制度とサーキットブレーカー制度	5
1.2 市場リスクと信用リスク	7
1.3 本論文の構成	8
第2章 値幅制限制度下での価格変動とリスクの定式化	10
2.1 値幅制限制度の概要	10
2.2 価格変動の定式化	12
2.2.1 価格の前日差と収益率	12
2.2.2 真の価格と観測価格	15
2.2.3 価格変動の平均構造	17
2.3 リスクの定式化	21
2.3.1 市場リスク	21
2.3.2 信用リスク	22
第3章 パラメタ推定とリスク計測	26
3.1 データ補間とパラメタ推定	26
3.1.1 データ補間	27
3.1.2 パラメタ推定	31
3.1.3 条件付事後分布の収束とサンプリングの効率性	40
3.2 リスク計測	41

第4章	値幅制限制度の影響：数値実験による確認	43
4.1	値幅制限制度下の商品先物価格の傾向	43
4.2	価格変動の構造への影響	48
4.3	市場リスクへの影響	62
4.4	信用リスクへの影響	76
第5章	サーキットブレーカー制度導入後の市場リスク	82
5.1	はじめに	82
5.2	サーキットブレーカー制度の概要と価格変動の特徴	84
5.3	価格変動とイノベーションのモデル	86
5.3.1	非対称性の考察	86
5.3.2	価格変動の平均構造	86
5.3.3	モデルの種類	87
5.4	パラメタ推定	88
5.4.1	対称モデル	89
5.4.2	非対称モデル	90
5.5	価格変動の構造分析と市場リスク計測	97
5.5.1	サーキットブレーカー制度導入後の商品先物価格の傾向	98
5.5.2	価格変動の構造	105
5.5.3	市場リスクの計測	116
第6章	結論	124

記号一覧

- P_t : t 時点の観測価格
- X_t : t 時点の真の価格
- ΔP_t : 観測価格の前日差 ($\Delta P_t := P_t - P_{t-1}$)
- ΔX_t : 真の価格の前日差 ($\Delta X_t := X_t - X_{t-1}$)
- L : 制限値段幅 (値幅制限制度における価格変動の上限幅)
- K : 取引本証拠金基準額
- η : 倍率 (取引所での取引単位に対する投資家の取引単位の倍率)
- M : MCMC による推定アルゴリズムの試行回数
- N : 初期値の影響を除くために棄てる試行回数
- $\Delta \mathbf{X}$: $t = 1$ から $t = n$ までの真の価格の前日差の集合, $\{\Delta X_t\}_{t=1}^n$
- D_1 : 下落局面 (イノベーションが負である時点 t の集合, $\{t \mid \varepsilon_t < 0\}$)
- D_2 : 上昇局面 (イノベーションが非負である時点 t の集合, $\{t \mid \varepsilon_t \geq 0\}$)
- $\Delta \mathbf{P}_1$: 下落局面に属する観測価格の前日差の集合, $\{\Delta P_t \mid t \in D_1\}$
- $\Delta \mathbf{P}_2$: 上昇局面に属する観測価格の前日差の集合, $\{\Delta P_t \mid t \in D_2\}$
- VaR : Value at Risk
- ES : Expected Shortfall
- $\overline{\text{VaR}}_{\alpha\%}^{(j)}$: 実現した価格データにもとづき, j 日間保有した場合の下側 $\alpha\%$ の VaR を計算した実績リスク値
- $\overline{\text{ES}}_{\alpha\%}^{(j)}$: 実現した価格データにもとづき, j 日間保有した場合の下側 $\alpha\%$ の ES を計算した実績リスク値
- $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha\%}^{(j)}$: パラメタ推定時に発生させたパスにもとづく j 日間保有した場合の下側 $\alpha\%$ の VaR の推定値
- $\widehat{\text{ES}}_{\alpha\%}^{(j)}$: パラメタ推定時に発生させたパスにもとづく j 日間保有した場合の下側 $\alpha\%$ の ES の推定値
- ζ_j : j 日間保有した場合における, 市場リスクの推定値と実績値の乖離度
- Z : 1, 5, 10, 20 日間それぞれ保有した場合の乖離度を足し合わせた総合的な乖離度 ($Z = \zeta_1 + \zeta_5 + \zeta_{10} + \zeta_{20}$)

第1章 序論

1.1 値幅制限制度とサーキットブレーカー制度

本論文では、東京商品取引所（東商取）に上場された商品先物への投資参加者が負っているリスクの定義と計測法について論じる。なお、2012年2月12日の商号変更以前は東京工業品取引所（東工取）という名称であったが、本論文では一貫して東京商品取引所（東商取）と呼ぶ。東商取では、1日の価格変動に対して上限を設ける制度として、2009年4月末までは値幅制限制度、それ以降はサーキットブレーカー制度を採用してきた。

値幅制限とは、不確定な事象によって相場が急激に変動することを防ぐため、1日の価格変動に上下限を設ける制度である（日本商品先物取引協会 (2007a, b)）。このような制度は東商取の商品先物に限定されたものではなく、資産は変わるが東京証券取引所（東証）、台湾証券取引所（台湾証取）でも採用されている。

値幅制限制度下での価格変動を分析する際には、打ち切られた価格をどのように扱うかが問題である。Brennan (1986) は、先物取引の値幅制限と証拠金の関係を表現するために、値幅制限の影響を受けない新たな価格系列として需給の均衡価格を想定し、一方で値幅制限制度下の取引所で扱われる価格を清算価格と定義した。その他の値幅制限下における価格変動を分析した先行研究でも、値幅制限がなければ実現したであろう価格を制度の影響を受けない価格（真の価格）として導入し、実際の取引所で取引されている価格を値幅制限のもとで観測される価格（観測価格）として、2つの価格系列を定義している（Chou (1997), Wei (2002), Wei and Chiang (2004), Hsieh and Yang (2009), Lin and Chou (2011), 青木他 (2012)）。

これらの先行研究では、真の価格は値幅制限の影響を受けないとする一方、観測価格の方が値幅制限の影響を受けるという定式化を採用している。その妥当性は真の価格が市況を反映しているか否かで判断できる。実際、商品先物市場には為替市場における通貨管理当局のような、価格を安定化させるための特別な介入機構はないため、商品の需給（や需給見通し）が逼迫し、頻繁に値幅制限に抵触する状況においては、真の価格は市況を直接的に反映していると解釈できる。したがって本論文でも、真の価格変動は値幅制限の影響を受けないと仮定する。

一方で、2009年5月より導入されたサーキットブレーカー制度では、1日の価格変動に上限を持たせる一方で、価格の大幅な変動時には取引を一時停止させた後に、上限値を段階的に拡張し取引を再開させる。そのため、先行研究では日中の取引に関するものが多い。サーキットブレーカー制度下の価格変動に関する先行研究では、価格変動の定式化に際して、価格に大きく影響を与える情報が発生した際に、その情報を得ることができた一部の取引参加者が過剰に反応した結果、価格が高騰・急落するという前提を置く。この一時的に過熱した状況を価格に反映させないために、サーキットブレーカー制度を導入することによって取引を一時的に停止させる。その後、情報が全ての取引参加者に行きわたれば、情報の不釣り合いによる価格の歪みがなくなり、価格は本来あるべき需給の均衡価格に落ち着くと考えている（Greenwald and Stein (1991), Lauterbach and Ben-Zion (1993), Kim and Park (2010)）。なお、値幅制限と異なり取引停止を一時的なものとした理由は、長期間にわたり取引を停止させ取引参加者たちの売買機会を奪うことにより、需給の均衡価格に戻る機会を逸してしまうおそれがあるためである。いずれの先行研究においてもサーキットブレーカー制度による一時的な取引停止措置が需給の均衡価格には影響を与えないことを前提条件に置いているため、本論文でもサーキットブレーカー制度が需給の均衡価格に影響を与えないと仮定する。

1.2 市場リスクと信用リスク

東商取の商品先物への投資参加者が負っているリスクのうち、本論文で取り扱うものは市場リスクと信用リスクである。市場リスクは商品先物市場で形成される価格の変動により保有資産が変動するリスクである。他方、信用リスクは一般的に取引先のデフォルトなどの理由により約定通りの返済が得られないリスクを指す (McNeil et al.(2008) の 1 章) が、本論文では、一般的な定義とは異なり、次に述べるように証拠金の不足により発生するリスクの総称として定義する。

商品先物へ投資を始める際には、定められた取引本証拠金を預託しなければならない。取引本証拠金は、取引所が設定する取引本証拠金基準額をもとに商品取引員 (仲介者) が設定したものである。投資開始後に価格が下落し、保有資産の累積損失額が取引本証拠金基準額の半額を上回った場合、投資家は「追証を入金し取引を継続する」または「追証を入金せずに取引を終了し、保有資産の清算をする」のいずれかを選択しなければならない。投資家が取引終了を選択した場合、商品取引員は翌日以降に当該投資家の保有資産を清算する。価格が下落し続けた結果、清算時に預託された取引本証拠金を上回る損失が起こった場合は、一時的に超過した金額を都合しなければならない。このように、清算時に預託された取引本証拠金を上回る損失が出た場合を「投資家のデフォルト」と呼ぶ。

以上に述べた通り、商品先物への投資参加者は、投資家が預託した取引本証拠金が不足したことに起因する 2 つのリスク「取引追証拠金 (追証) が発生するリスク」と「投資家のデフォルトリスク」を負っている。これら 2 つのリスクは、投資家の立場からは信用リスクとは呼べるものではない。また、商品取引員の立場からは、追証発生時に新たな損失が起きるわけではなく、投資家がデフォルトを起こしても取引本証拠金の不足分を一時的に都合するに過ぎないため、一般的な信用リスクの定義とは異なる。しかしながら本論文においては、冗長な名称のままでは今後の議論が煩雑になると判断し、加えて商品取引員の立場からは取引先相手である投資家が預託する取引本証拠金の不足により予期せぬ損失が生じる可

能性があると考えられるため信用リスクに類するものと捉え、便宜上、2つのリスクをまとめて信用リスクと呼ぶことにする。

商品先物のリスク評価に関する先行研究は、VaR(Value at Risk)などのリスク指標の計測をはじめとした市場リスクを対象としたものが多い。Giot and Laurent (2003) は、ロンドン金属取引所やニューヨーク商品取引所の商品先物について収益率にもとづく市場リスクを推計し、Chiu et al.(2006) は、収益率にもとづいた市場リスク指標をもとに台湾証取の商品先物の取引証拠金システムの評価を行っている。本論文でも、VaRをはじめとしたリスク指標を計測することにより、商品ごとの市場リスクの評価を行う。

一方で、信用リスクは取引制度の影響が大きく、取引所ごとの特殊性が反映されたものであるため、その評価法を論じたものは少なく、東商取の商品先物に関する信用リスクを対象とした先行研究は見当たらない。そのため、本論文では東商取における証拠金取引制度を定式化し、追証の発生と投資家のデフォルトリスクの計測法の定義をまとめ、信用リスク評価法の一つとして提案する。

1.3 本論文の構成

本論文における第2章から第4章までは、東商取が過去に採用していた取引制度の下でのリスク計測について分析したものである。第2章では、東商取での値幅制限制度について説明した後に、値幅制限制度下での価格変動の定式化と本論文で扱う商品先物市場でのリスクの定義を行う。第3章では本論文で提案する価格変動モデルの当てはめの際の未知パラメタの推定法について述べた後に、市場リスクと信用リスクの推定法について説明する。第4章では東商取に上場されている商品先物の価格データを用いて、値幅制限が市場リスクと信用リスクに与える影響について数値実験による確認を行う。第5章では、発展的な話題として新制度であるサーキットブレーカー制度のもとでの市場リスクに関する考察を行う。

サーキットブレーカー制度では値幅制限制度と比べて1日の価格変動幅が大きく設定されているため、総じて価格変動が大きくなる。特に価格の下落時に大きく変動するため損益分布が非対称な形状をしており、市場リスク計測では損益分布の非対称性を考慮する必要性が生じる。第6章は本論文の結びである。

また、これまでの研究業績と本論文の関係は以下の通りである。第2章から第4章の内容は、青木他(2012)と青木(2014)にもとづいてまとめている。また、第5章は現在執筆中の論文をまとめたものである。

第2章 値幅制限制度下での価格変動 とリスクの定式化

2.1 値幅制限制度の概要

東商取では2009年4月末まで値幅制限を採用していた(日本商品先物取引協会(2007a, b)). 値幅制限制度とは, 対象商品の需給事情の変化や急激な先行き見通しの修正などの不確定的な事象による相場の急激な変動から投資家を守るために, 1日の価格変動に上下限値を設定する制度である. 価格が大きく上昇し上限値に達した場合には, その時点で取引を停止させ, 当日中に取引は再開せずに上限値を当該日の価格として記録する(ストップ高). 一方で, 価格が大きく下落し下限値に達した場合にも, その時点で取引を停止し, 当該日の価格を下限値とする(ストップ安). 換言すれば, 値幅制限とは, あらかじめ設定した上下限値を超える価格での取引ができないように, 強制的に取引を停止させる制度であった. なお, 上下限値は, 制度によって予め定めた値幅(制限値段幅)を前日の終値に加減することで定義されていた. このような制度は東商取の商品先物に限定されたものではなく, 資産は変わるが東証, 台湾証取でも採用されている. しかしながら, 2つの取引所の値幅制限制度は, 東商取のものとは制限値段幅の定義が異なっている.

台湾証取では制限値段幅を前日の観測価格である終値の7%と定めており, 東証の株式では前日終値の価格帯によって制限値段幅を定めている. 東証の制限値段幅については表2.1に示した. 東証では, 株価水準に依存して制限値段幅の大きさを段階的に大きく定められており, 制限値段幅が前日の株価水準によって変化している. すなわち, 台湾証取と東証では, 前日の価格に依存して制限値段幅が

表 2.1: 東京証券取引所の制限値幅

基準値段	制限値幅	基準値段	制限値幅	基準値段	制限値幅
100 円未満	30 円	20,000 円未満	4,000 円	2,000,000 円未満	400,000 円
200 円未満	50 円	30,000 円未満	5,000 円	3,000,000 円未満	500,000 円
500 円未満	80 円	50,000 円未満	7,000 円	5,000,000 円未満	700,000 円
700 円未満	100 円	70,000 円未満	10,000 円	7,000,000 円未満	1,000,000 円
1,000 円未満	150 円	100,000 円未満	15,000 円	10,000,000 円未満	1,500,000 円
1,500 円未満	300 円	150,000 円未満	30,000 円	15,000,000 円未満	3,000,000 円
2,000 円未満	400 円	200,000 円未満	40,000 円	20,000,000 円未満	4,000,000 円
3,000 円未満	500 円	300,000 円未満	50,000 円	30,000,000 円未満	5,000,000 円
5,000 円未満	700 円	500,000 円未満	70,000 円	50,000,000 円未満	7,000,000 円
7,000 円未満	1,000 円	700,000 円未満	100,000 円	50,000,000 円以上	10,000,000 円
10,000 円未満	1,500 円	1,000,000 円未満	150,000 円		
15,000 円未満	3,000 円	1,500,000 円未満	300,000 円		

東京証券取引所による発表資料から抜粋

表 2.2: 2008 年 5 月から 2009 年 4 月までの制限値段幅の推移

	金	白金	ガソリン	原油
2008 年 5 月	150	300	2,700	2,700
2008 年 6 月	150	300	2,700	2,700
2008 年 7 月	150	300	2,700	2,700
2008 年 8 月	150	300	3,600	3,600
2008 年 9 月	150	300	3,600	3,600
2008 年 10 月	150	300	3,600	3,600
2008 年 11 月	150	300	3,600	3,600
2008 年 12 月	150	300	3,600	3,600
2009 年 1 月	150	300	3,600	3,600
2009 年 2 月	150	300	3,600	3,600
2009 年 3 月	150	300	3,600	3,600
2009 年 4 月	150	300	3,600	3,600

東京商品取引所による発表資料から抜粋

変化し、時点 t によって制限値段幅が変動するため、制限値段幅は t に依存して変動するように定式化する必要がある。

一方で、東商取では、毎月末に次の 1 ヶ月間の制限値段幅 L を公表していたため、少なくとも 1 ヶ月間は制限値段幅は固定されていた。表 2.2 に 2008 年 5 月から 2009 年 4 月までの 1 年間における、金、白金、ガソリン、原油の制限値段幅の推移を示す。金は 150 円、白金は 300 円に 1 年間固定されており、ガソリン、原油は、2008 年 5 月から 7 月までは 2,700 円であるが、それ以降は 3,600 円に固定されていた。このように、東商取での制限値段幅は時点 t に伴って確率的に変動するものではなく、一定期間の値を確定的なものとして事前に発表していたため、本論文では L を定数として扱う。

2.2 価格変動の定式化

2.2.1 価格の昨日差と収益率

本節では、従来からファイナンスの分野で中心的に扱われてきた収益率にもとづいたモデルと昨日差にもとづく価格変動モデルとの違いについて論じる。

商品先物を対象とした先行研究としては次のようなものが挙げられる。Giot and Laurent (2003) では、商品先物市場における市場リスク算出を目的とし、ロンドン金属取引所やニューヨーク商品取引所で扱っている商品先物の収益率データに ARCH 型モデルをあてはめ、モデルパラメタの推定量の漸近分布をもとにして VaR を計算している。Chiu et al.(2006) では、商品先物の収益率データに GARCH モデル (Bollerslev (1986)) を適用し、VaR にもとづく指標をもとにした台湾証取の取引証拠金システムの評価を行っている。渡部・大鋸 (1996) は、商品先物の出来高および取組高¹と価格のボラティリティとの相関を分析し、出来高の変動と価格のボラティリティの間には正の相関があり、取組高の変動との間には有意な相関は見いだされなかったことを報告している。羽森・羽森 (2000) は、GARCH モデルと GJR モデル (Glosten et al.(1993)) のあてはめを通して、収益率のボラティリティの変動について、日本とアメリカの商品先物市場の比較検討を行っている。渡部・大森 (2000) は、一日の取引回数が自己相関をもって変動している可能性を考慮に入れた動学的 2 変量分布混合モデルを取り上げ、このモデルが商品先物市場における価格や出来高の変動をうまくとらえることができるかをマルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC) 法を利用して実証分析している。Gorton et al.(2006) は、商品先物のリターンは日本株のリターンとほぼ無相関で、債券のリターンとは負の相関を持つことを示し、商品先物をポートフォリオに組み込むことの効用を論じている。高見 (2007) は、商品先物の月次、週次、日次の各データに対するニュー

¹出来高とは、市場で売りと買いが成立した数量を指し、一方で、取組高とは、市場で決済されずに残っている売りと買いの建玉の合計数を指す。

ラルネットモデルと線型モデルのあてはまり具合を比較検討し、特に月次データを対象としたときのニューラルネットモデルの有用性を示している。

上に挙げた先行研究ではいずれも、価格の前日差 $\Delta P_t := P_t - P_{t-1}$ ではなく、収益率 $R_t := \Delta P_t / P_{t-1}$ 、または、その近似値である対数収益率 $r_t := \log(P_t / P_{t-1})$ を用いて価格変動を議論している。しかし、東商取の値幅制限では L が固定されているため、価格の前日差 ΔP_t を用いたほうが議論が簡便になる。以下では、 ΔP_t 、 R_t のそれぞれの定義式にもとづき、 ΔP_t にもとづくモデル化の利点を述べる。

日々の価格前日差の最大変動幅は

$$|\Delta P_t| \leq L,$$

であり、定数で抑えられる。一方で、 R_t の上下限値は

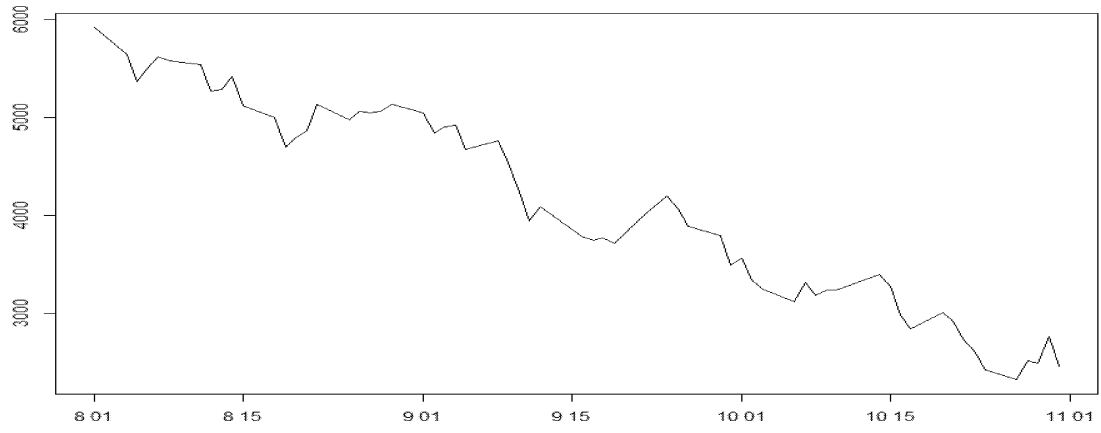
$$|R_t| \leq \frac{L}{P_{t-1}}$$

であり、定数 L を前日の価格 P_{t-1} で割るため、変動の上下限値が時点とともに変化する。

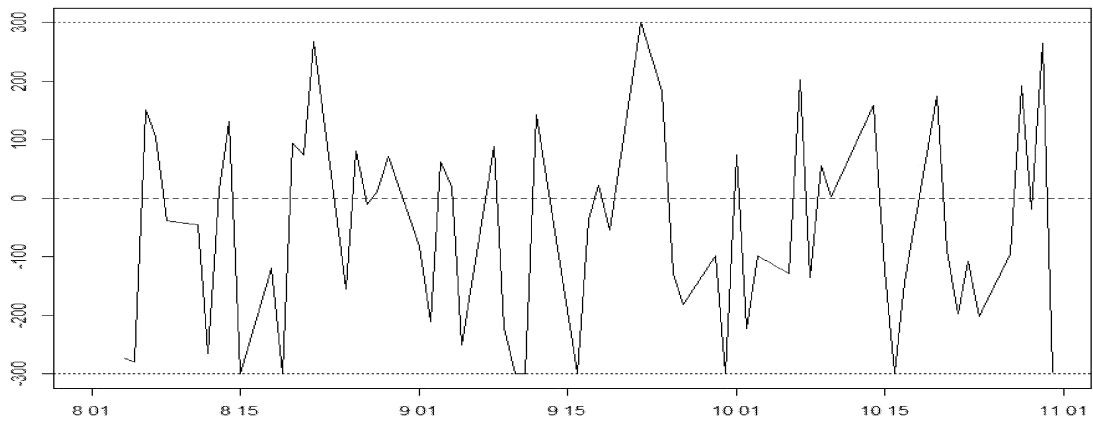
ここで、実際の商品先物価格を用いて、両者の挙動の違いを調べよう。図 2.1 は、2008 年 8 月 1 日から 2008 年 10 月 31 日までの白金の観測価格 P_t 、価格の前日差 ΔP_t 、収益率 R_t 、それぞれの時系列プロットである。図 2.1-(b)、(c) における上下の破線は t 時点での価格変動の上下限値である。

表 2.2 の通り、この期間の制限値段幅 L は 300 円で固定されていた。 ΔP_t の挙動は、図 2.1-(b) が示すように、一定の範囲内 $[-300, 300]$ で推移しているが、 R_t の変動の大きさは、図 2.1-(c) で示されるように、 P_t の下落に従って拡大していく。したがって、 R_t にもとづき価格変動をモデル化するには、値域が t に依存して変化していくモデルが必要となり、表現が複雑になる。そもそも東商取の値幅制限は、前日の観測価格 P_{t-1} に定数を加減することで当日の観測価格 P_t の上下限値を設定しているため、前日差にもとづいたモデル化が自然であり、前日差を P_{t-1} で割っている収益率にもとづいたモデル化は制度設計から考えても不合理である。

(a) 先物価格 P_t



(b) 先物価格の前日差 ΔP_t



(c) 先物価格の収益率 R_t

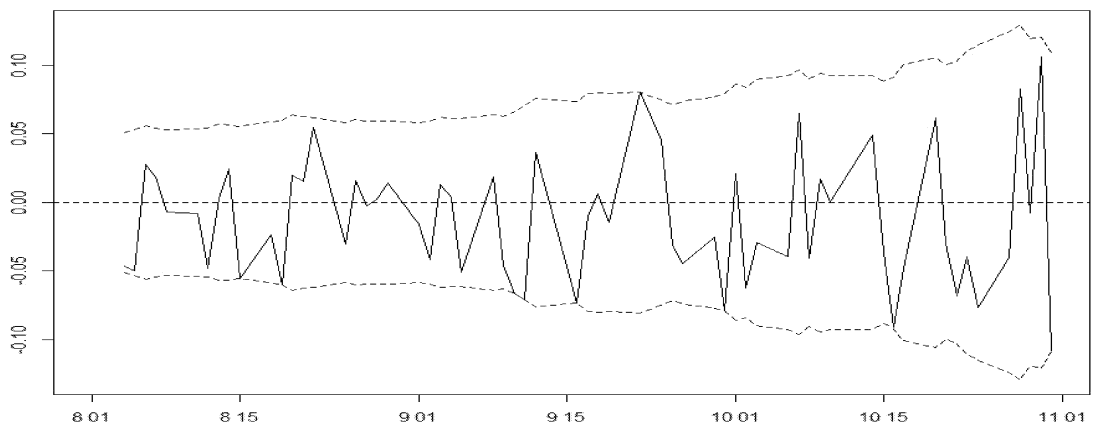


図 2.1: 白金先物価格 P_t と前日差 ΔP_t と収益率 R_t .

そのため、本論文では価格前日差にもとづいて価格変動をモデル化する²。

2.2.2 真の価格と観測価格

値幅制限のもとでの価格変動を分析する際には、打ち切られた価格をどのように定式化するかが問題である。本論文では、先行研究（Brennan (1986) など）によって示された、値幅制限がなければ実現したと考えられる価格系列（真の価格）と、実際の取引所で取引された価格（観測価格）の2つの価格系列にもとづき、東商取の商品先物価格を定式化する。

いま、時点 t における観測価格を P_t 、真の価格を X_t とすると、両者の関係は

$$P_t = \begin{cases} P_{t-1} + L & , X_t - P_{t-1} \geq L \\ X_t & , |X_t - P_{t-1}| < L \\ P_{t-1} - L & , X_t - P_{t-1} \leq -L \end{cases} \quad (2.1)$$

と表せる。ここで、 L は制限値段幅である。

つぎに、 L を定数とした下で、複数期間にわたる観測価格 P_t と真の価格 X_t の関係を考える。図 2.2 は、2つの価格系列の関係を具体的に例示したものである。

$t = 1 \rightarrow 2$ で価格が高騰した場合でも、値幅制限により観測価格は $P_2 = P_1 + L$ と抑えられ、真の価格 X_2 を観測することはできない。また、 $t = 2 \rightarrow 3$ のように真の価格の上昇が鈍化した場合であっても、観測価格は $t = 2$ で上昇し切れなかった影響が残る ($P_2 < X_2$) ために、 $t = 3$ でストップ高（価格変動の上限値に抵触）となる。すなわち、 $P_3 = P_2 + L$ であり、 X_3 を観測することはできない。さらに、 $t = 3 \rightarrow 4$ のように真の価格が下落 ($X_4 < X_3$) に転じた場合であっても、見かけ上、 $P_4 > P_3$ と観測価格は上昇する。

²東商取のように L が固定されている場合には価格前日差によるモデル化は自然である。一方、東証、台湾証取のように制限値段幅 L が時点 t に依存して動く状況であれば、収益率を用いることの欠点は少ない。特に、台湾証取の制限値段幅は前日終値の 7% であるため、収益率の上限が 7% に定まる。

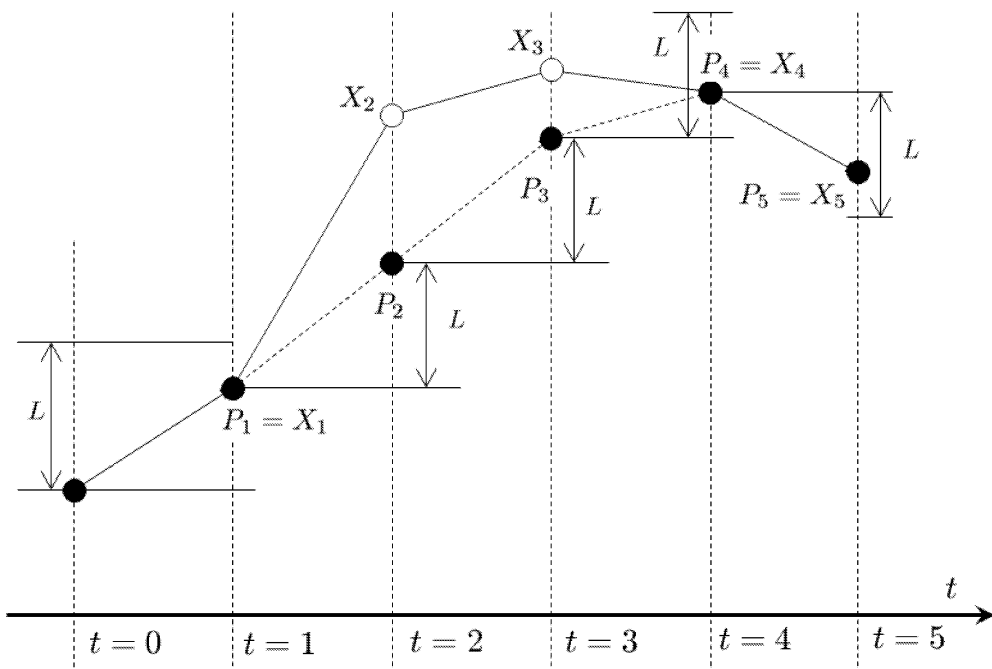


図 2.2: 真の価格 X_t と商品先物価格 P_t の関係

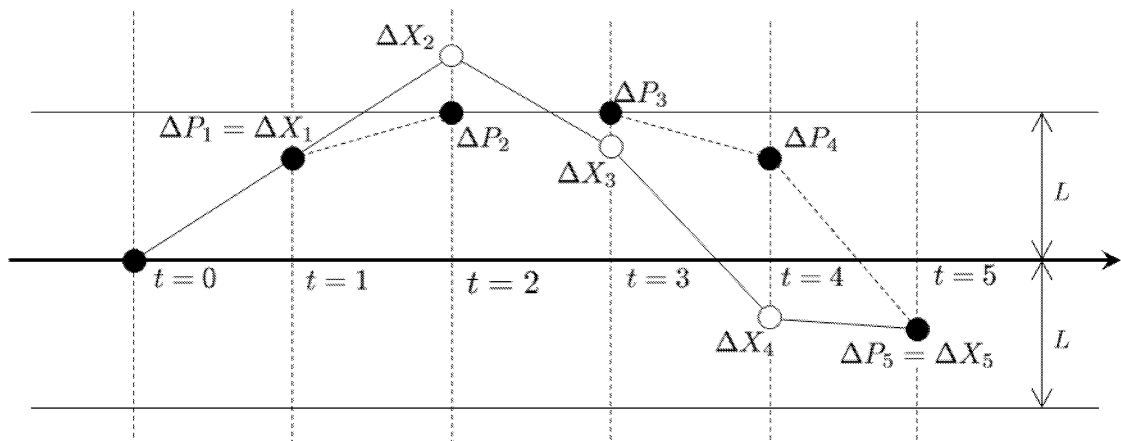


図 2.3: 真の価格の前日差 ΔX_t と商品先物価格の前日差 ΔP_t の関係

価格の変動と制限値段幅 L の関係を、より明確にするために前日差についても考える。図 2.3 は、図 2.2 に対応するそれぞれの前日差、

$$\Delta P_t := P_t - P_{t-1}, \quad \Delta X_t := X_t - X_{t-1}$$

の推移を示したものである。

観測価格は $t = 2, 3$ でストップ高を起こしたため $\Delta P_2 = \Delta P_3 = L$ であるが、一方の真の価格は値幅制限の影響を受けないため、 $t = 2$ で局所的にピークに達し $t = 3$ では上昇の度合いが弱まり、 $\Delta X_2 > \Delta X_3$ となる。続いて $t = 4$ では、値幅制限に抵触していないため観測価格と真の価格は一致し $P_4 = X_4$ であるが、前日差では $\Delta P_4 > 0 > \Delta X_4$ となり、両者の値は一致せずに符号も異なるので注意を要する。

以上の例で示した通り、固定された L のもとでは、前日差を用いることで価格変動と L の関係が読み取りやすくなる。また、価格変動を観察する場合には、値幅制限によって制限された価格変動が次の時点以降の変動に影響を及ぼすことに注意が必要である。

2.2.3 価格変動の平均構造

本節では、商品先物の価格変動の平均構造について、自己回帰モデルにより定式化することを議論する。

はじめに自己回帰モデルによる定式化の議論に先立ち、それぞれの商品の価格前日差に対して単位根検定を行う。単位根の存在が認められる場合には、対象系列が非定常であることが認められ、定常過程である自己回帰モデルによる定式化を行えない。なお、単位根検定については、Phillips-Perron 検定 (Perron(1988)) を用いた。検定に用いる仮説は以下の通りである。

- 帰無仮説： 対象系列が単位根を持つ

- 対立仮説： 対象系列は単位根を持たない

単位根検定の適用に際しては、今回は約3ヶ月間にあたる60営業日分のローリングウィンドウを用いている。ここで、 t 時点における60日間ローリングウィンドウとは、 t 時点を含めた60営業日分のデータ $\{t, t-1, t-2, \dots, t-59\}$ を用いた分析である。

有意水準を0.1に設定し価格前日差に対してPhillips-Peron検定を行ったところ、全ての商品において帰無仮説が棄却されたため、価格前日差には単位根がないとみなせる。

一例として、図2.4に2008年6月末から2009年4月末までの期間における白金の価格データに対し、60日間のローリングウィンドウでのPhillips-Perron検定を行った結果を示そう。縦軸には検定におけるP値をとり、有意水準0.1に水準線を引いた。この水準線を下回る場合に、帰無仮説が棄却されていると考えられる。横軸には、60日のウィンドウ内の最新日付をとった。つまり、2008年9月19日の値は、2008年6月26日から9月19日までの60営業日のデータに対して検定を行った結果を指している。

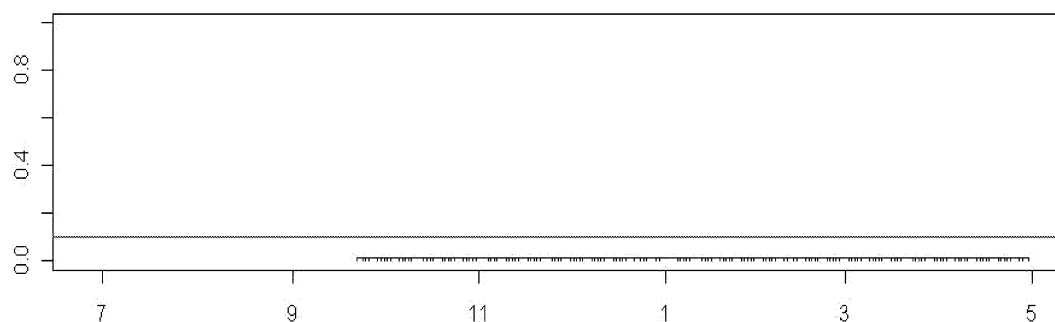


図 2.4: 2008年6月末から2009年4月末までにおける白金先物の ΔP_t の単位根の存在 (60日間のローリングウィンドウを用いて、Phillips-Perronの検定を行った。横線はP値 = 0.1の水準線)

図2.4に示されている通り、あらゆる区間で有意水準0.1を下回り帰無仮説が棄却されており、この分析期間では全ての時点で単位根の存在を否定できる。

他の商品でも同様に、 P_t では帰無仮説を棄却できる区間はほとんどみられず、

ΔP_t では全ての期間で帰無仮説が棄却される結果が得られた。したがって、 ΔP_t は定常過程であると判断する。

続いて、価格の前日差に対して自己回帰構造の有無を確認する。価格の前日差 ΔP_t に対して、60 営業日のローリングウィンドウを用いた Ljung-Box 検定を用いて確認をする (Ljung and Box(1978))。この検定における帰無仮説は「系列に自己相関が存在しない」である。

図 2.5 には、先程と同様の期間における白金先物価格の前日差に対して、60 日間ローリングウィンドウによる Ljung-Box 検定を行った場合の結果を示している。なお、本論文では Ljung-Box 検定におけるラグ数は 1 に固定する。図 2.4 と同様に、縦軸には検定における P 値をとり、有意水準 0.1 に水準線を引いた。また、横軸には、60 日のウィンドウ内の最新日付をとった。図 2.5 では、有意水準 0.1 の水

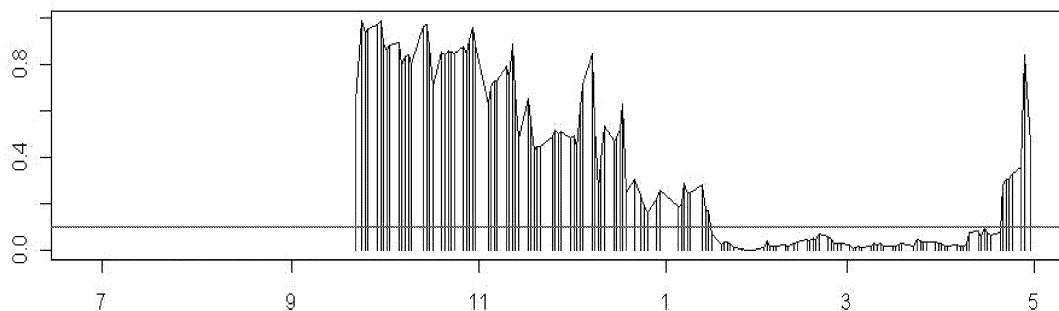


図 2.5: 2008 年 6 月末から 2009 年 4 月末までにおける白金先物価格の前日差の自己回帰構造の存在 (縦軸は 60 日間ローリングウィンドウによる Ljung-Box 検定の P 値。横軸は P 値 = 0.1 の水準線)

準線を下回る期間も多いため、帰無仮説が棄却される期間が多いことが示される。すなわち、自己回帰構造の存在を無視できない期間が多く存在している。他方、帰無仮説を受容する期間も多く存在することから、全期間にわたり 1 つの自己回帰モデルを当てはめることは不合理であることも示唆される。

ここで、本節で採用している 2 つの検定方法、Phillips-Perron 検定、Ljung-Box 検定は、いずれも価格の打ち切りによる影響を考慮したものではない。価格の打ち切りによる影響が価格系列の構造を変化させる可能性があるため、以上の検定結

果は価格系列の表面的な構造を示しているに過ぎないことに注意する必要がある。

これまでに示した2つの検定による結果より、商品先物価格変動は価格前日差でモデリングする場合には自己回帰構造に注意を払う必要があることが分かった。いま、観測価格の前日差 ΔP_t を直接モデル化しようと思うと、値幅制限によって値域に制限があるため、イノベーションに切断処理を含めなければならず、モデルが複雑になる。したがって、本論文では、値幅制限の影響を受けない真の価格の前日差 ΔX_t に時系列モデルを仮定する。具体的には、

$$P_t = X_t \times I_{\{|X_t - P_{t-1}| < L\}}(t) + (L + P_{t-1}) \times I_{\{X_t - P_{t-1} \geq L\}}(t) \\ + (-L + P_{t-1}) \times I_{\{X_t - P_{t-1} \leq -L\}}(t) \quad (2.2)$$

$$\Delta X_t = \mu_p + \sum_{k=1}^p \phi_k \Delta X_{t-k} + \varepsilon_{p,t}, \quad \varepsilon_{p,t} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma_p^2) \quad (2.3)$$

と定義する。ここで、 $I_A(t)$ は指示関数であり、

$$I_A(t) = \begin{cases} 1 & t \in A \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (2.4)$$

である。真の価格は値幅制限の影響を受けないため、(2.3)に示す通り、イノベーションに打ち切りの条件を含める必要がない。値幅制限による打ち切りは、あくまで観測方程式(2.2)での制約として定義し、 ΔX_t のモデルと切り離して考える。

収益率にせよ価格の前日差にせよ、金融時系列の変化分では平均構造に顕著な過去依存性が見られることは稀であり、仮に検出されても、それで説明できる変動の程度に限りがあることはしばしば経験的に指摘されている(Tsay (2002), 3.2節など)。本論文で高次の自己回帰まで含めることには、可能性として探索範囲を広くとる以上の意味合いはない。また、 μ_p は価格前日差の自己回帰モデルにおける切片であるため価格水準では線形トレンドに対応する。本論文のモデルが機能する局面は値幅制限に多く抵触するような期間であるが、ストップ高・ストップ安が数多く起こる期間は、実際の商品先物価格の観察からは価格の上昇・下落が

続きやすく、短期的に価格水準がトレンド構造を持つと考えられるため、 μ_p をモデルに導入したほうが良い。

モデル(2.3)における未知パラメタは ΔX_{t-k} に対する係数 ϕ_k , ($k = 1, 2, \dots, n$), 切片 μ_p , イノベーションの分散 σ_p^2 である。未知パラメタの推定は、真の価格に観測不能な時点が存在するため、観測できない時点の ΔX_t の補間と同時に行う必要がある。真の価格の変動モデルは一部観測可能な回帰モデルであるので、トービットモデル(打ち切りのある回帰モデル)の一種である(Amemiya(1984)参照)。トービットモデルのパラメタ推定問題は、マルコフ連鎖モンテカルロ(MCMC)法を利用するとうまく解決することができる(和合(2005), 照井(2010))。具体的な推定方法は第3章で説明する。

2.3 リスクの定式化

本節では、商品先物への投資参加者が負うべき市場リスクと信用リスクの定義を行う。はじめに、第2.3.1節で、市場リスクの計測のために広く利用されているリスク指標、VaR(Value at Risk)とES(Expected Shortfall)を導入する。続いて、第2.3.2節では、東商取の取引制度にもとづいた証拠金取引の定式化を通じて、取引追証拠金(追証)発生リスクとデフォルトリスクを定義する。なお、市場リスク、信用リスクの計測にあたっては、商品先物保有時の損益分布を推定する必要がある。モデルの未知パラメタ推定アルゴリズムに則した損益分布の推定法と、それぞれのリスク計測法については、第3.2節で説明する。

2.3.1 市場リスク

広く利用されているリスク指標である水準 α のVaRとは、損益分布関数において下側確率 α を下回ることのない区間での最大損失金額として定義される。統計学的には損益分布の下側 $100 \times \alpha$ %点に相当し、 $\text{VaR}_{\alpha \times 100\%}$ と記す(Alexander(2001)),

安藤(2004)). なお, $\text{VaR}_{\alpha \times 100\%}$ は, 定義より明らかに下側確率 α を下回る確率での損失の大きさに関する情報を与えないため, 損益分布の裾の形状が考慮されていないという欠点をもつ.

さらなる市場リスクを計測する指標として, $\text{ES}(\text{Artzner et al.}(1999))$ を計算する. $\text{ES}_{\alpha \times 100\%}$ は, $\text{VaR}_{\alpha \times 100\%}$ を上回る損失が出るという条件のもとでの条件付期待値として定義される. すなわち, 下落局面では,

$$\text{ES}_{\alpha \times 100\%} = E[\Delta X_t | \Delta X_t \leq \text{VaR}_{\alpha \times 100\%}]$$

と計算できる.

なお, VaR は整合的なリスク尺度ではないため, ES のほうが理論的には優れたリスク尺度と考えられている (McNeil et al.(2008) の 6 章). また, ES は定義上, 裾の形状を考慮した指標である. 値幅制限下の商品先物価格の損益分布は, 制限値段幅により切断された分布であり, その累積和である累積損益分布の裾の形状は単純なものではない可能性がある. したがって本論文では, 実務上広く利用されている VaR とあわせて, ES の計測も行う.

上に挙げた 2 つの市場リスク指標は, いずれも真の価格変動に関するものであり, 値幅制限の影響がない状況下のものである. しかしながら, 現実には特別な場合を除いて値幅制限が課されているため, 本来の推定対象は観測価格の変動に関する市場リスクである. 観測価格に関する市場リスクの推定方法については, 第 3.2 節で述べる.

2.3.2 信用リスク

本論文では, 信用リスクを「取引追証拠金が発生するリスク」と「投資家のデフォルトリスク」として定義した. 本節では, 取引追証拠金とデフォルトが発生する仕組みを定式化し, それぞれのリスクを測る指標を定義する.

東商取の商品先物へ投資するに当たっては、取引する商品ごとに定められた取引本証拠金を預託する必要がある。取引本証拠金は、東商取が定めた取引本証拠金基準額をもとに、商品取引員（仲介者）が個々に設定しており、東商取は毎月末に次の1ヶ月間の取引本証拠金基準額を公表していた。一般的に取引本証拠金は、取引本証拠金基準額に金額を上乗せする形で定められていたため、厳密には取引本証拠金は取次先である商品取引員によって金額が異なっている。しかしながら、追証の発生条件は、制度上、取引本証拠金基準額によって定められている点に加え、「投資家のデフォルトリスク」の評価においては商品取引員にとって好ましくない状況の下での考察を行うという観点から、本論文では取引本証拠金基準額と取引本証拠金の金額が等しいという前提をおく。さらに、投資家が潤沢に証拠金を積み増していくとは考えず、取引に必要最低限の証拠金のみを預託すると仮定する。

それでは、取引追証拠金とデフォルトの発生について考えよう。なお、以降では取引追証拠金を追証と略す。追証とデフォルトの発生を判定するためには、投資家の保有資産の累積損失額を計算する必要がある。取引所での価格 P_t は商品の受け渡し時に用いる単位「呼値」に対応したものであり、実際の投資家が用いる取引単位「枚」とは異なっている。例えば、白金の呼値は1gであるが1枚当たりの取引単位は500gであるため、白金の価格が1円変動した場合に投資家の資産は500円変動する。この呼値と1枚当たりの取引単位の間を倍率 η で表すと、取引所での価格変動が ΔP_t の場合、投資家の保有資産の変動は $\eta \Delta P_t$ と表せる。その他の商品では、金が呼値1gに対して1枚当たりの取引単位は1kgであり、 $\eta = 1000$ である。ガソリンと原油は、呼値1klに対して取引単位が50klであるので $\eta = 50$ である。なお、取引所における価格の最小変動幅を呼値単位と呼び、その値は商品ごとに異なっている。金、白金は1円刻みで価格が変動するが、ガソリン、原油の場合には10円刻みでの変動となる。

東商取では、1日の取引が終了するたびに清算処理を行っており、取引開始時点

からの累積損失額が取引本証拠金基準額 (K) の半額を上回った場合、投資家は追証を預託して取引を継続するか、預託せずに取引を終えるかの選択をする (日本商品先物取引協会 (2007a, b)). 本論文では、この事象を追証発生と呼ぶ. いま、 t_0 から取引を開始し l 期間 ($l \geq 1$) 保有した場合の累積損失額は

$$\eta (P_{t_0+l} - P_{t_0}) = \eta \sum_{j=1}^l \Delta P_{t_0+j}$$

で表されるので、追証発生条件は時点 l ごとに、次の不等式

$$\sum_{j=1}^l \Delta P_{t_0+j} < -\frac{K}{2\eta} \quad (2.5)$$

によって判定すればよい. 一方で、収益率にもとづいた場合には累積損失額を

$$\eta (P_{t_0+l} - P_{t_0}) = \eta P_{t_0} \left\{ \prod_{j=1}^l (1 + R_{t_0+j}) - 1 \right\}$$

と書き改めることができる. 同様に、追証発生条件は

$$\prod_{j=1}^l (1 + R_{t_0+j}) < -\frac{K}{2\eta P_{t_0}} + 1 \quad (2.6)$$

となるが、(2.5) と比べると、判定条件は複雑になる.

(2.5)、(2.6) のいずれにもとづく実装も可能であるが、表現が平易であること、制度に照らして自然であること、実際に価格の前日差にもとづくモデル化をしていることから、本論文では (2.5) の判定条件を採用する.

次に、商品取引員が考慮すべき「投資家のデフォルト」を定式化する. 追証が発生した場合、投資家には「追証を預託し取引を継続する」または「追証を入金せずに取引を終了とし、保有資産の清算を行う」の2つの選択肢が存在する. 投資家が取引終了を選択した場合には、商品取引員は翌日以降にその投資家の保有資産を清算する. 翌日の精算前に再び値幅制限に抵触すると、取引ができなくなるため、清算は翌日以降に持ち越されることもある.

追証発生後から、さらに価格が下落し続けると、清算時点での累積損失額がさらに大きくなり、取引本証拠金基準額を上回る場合があるが、その場合であって

も、商品取引員は投資家の資産を清算しなければならない。累積損失額は、清算後に投資家へ請求されるのだが、一時的にせよ、商品取引員は超過分の損失額を都合する必要がある。以上の制度的背景を考慮し、本論文では、清算時に投資家の保有資産の累積損失額が、予め預託した取引本証拠金基準額を超過する事象をデフォルトと定義する。

それでは、デフォルトの発生条件とデフォルト時の損失補填額を具体的に定義しよう。いま、 $t_0 + l$ 時点で追証が発生し、投資家が取引終了を選択したとする。商品取引員は、翌日以降で取引が可能となった時点で清算を行う。取引可能とは、商品先物価格が値幅制限に抵触せず $P_t = X_t$ となる場合である。ここで、追証発生から m 日後に取引可能となったと仮定したとき、すなわち $t_0 + l + m$ 時点での累積損失額は

$$\eta(P_{t_0+l+m} - P_{t_0}) = \eta \sum_{j=1}^{l+m} \Delta P_{t_0+j} \quad (2.7)$$

である。商品取引員が考えるべきデフォルト額とは、累積損失金額が (2.7) が予め預託された取引本証拠金基準額を上回る金額であるため、次のように定義できる。

$$\max \left\{ - \left(K + \eta \sum_{j=1}^{l+m} \Delta P_{t_0+j} \right), 0 \right\}. \quad (2.8)$$

ここで、(2.8) が 0 の場合にはデフォルトが起こらずに清算できたと考える。なお本論文では、デフォルトリスクを示す指標として、発生頻度だけでなくデフォルトによる損失の大きさを測るために、デフォルトが起こったという条件のもとの累積損失金額の平均値をデフォルト損失額と定義する。

ここまでに述べてきた追証、デフォルトの議論は値幅制限の下でのものである。仮に値幅制限が存在しない場合では、(2.5), (2.7), (2.8) の ΔP_t を ΔX_t に変更すればよく、常に取引可能であるため $m = 1$ に固定される。

第3章 パラメタ推定とリスク計測

3.1 データ補間とパラメタ推定

本論文では、真の価格 X_t に対してではなく、真の価格の前日差 ΔX_t に対して p 次の自己回帰モデルを適用している。以降では、(2.3)における k 次ラグの自己相関係数 ϕ_k を、「 p 次の自己回帰モデルをあてはめたときの k 次ラグの係数」という意味で ϕ_{pk} と明示的に記す。

本論文では、自己回帰係数の推定に際し MCMC 法を用いたベイズ推定を行うが、標準的な自己回帰係数の推定法 (Chib and Greenberg(1994), 伊庭他 (2005) の4章など) とは異なり, Marriott et al.(1996) が提唱した, Levinson-Durbin アルゴリズム (Brockwell and Davis (1991) の Chapter 5.2, 北川 (2005) の7章を参照) を利用してサンプリング対象を自己回帰係数から偏自己相関係数に変換する手法を採用する。偏自己相関係数は定常性を満たす領域が平易であるため, 自己回帰係数のサンプリングよりも簡便になるという利点がある。そのため, 本論文では Marriott et al.(1996) の推定アルゴリズムを採用するが, 本論文で提唱する定数項をもつ自己回帰モデルへ適用するため推定アルゴリズムを微修正している。

また, 渡部・大森 (2000) で述べられているように, 未知パラメタのサンプリングの効率性が悪い場合には, ブロック化 (blocking), 多重移動 (multi-move) によりサンプリングの効率性を改善させる必要がある。本論文で提案する推定アルゴリズムはギブスサンプラーを用いているが, Chib(2001) の非効率因子 (Inefficiency Factor, IF) の値がおおむね2前後であり, 大きなものでも高々2.73 であるため, サンプリングの効率性に問題はないと判断できる。

本論文で提案する推定アルゴリズムは、次の2段階より構成されている。

1. データ補間：値幅制限に抵触し真の価格が観測不能となった時点で、真の価格の昨日差を補間する。
2. 未知パラメタ推定：データ補間された真の価格の昨日差をもとに、未知パラメタを推定する。

なお、今回の分析は0から3次までの自己回帰モデルの当てはめを行い、モデル選択規準としてDIC (Deviance Information Criterion, Spiegelhalter et al.(2002))を用いて、自己回帰モデルの次数選択を行う。

3.1.1 データ補間

本節では、パラメタ推定に先立ち、真の価格の昨日差 ΔX_t の算出方法について述べる。値幅制限に抵触し商品先物価格が打ち切られた場合、真の価格を観測することはできないため、データ補間を行う必要がある。なお、値幅制限に抵触しているか否かは、 $|\Delta P_t| = L$ であるかを確かめればよく、 $\Delta P_t = L$ はストップ高、 $\Delta P_t = -L$ はストップ安である。

はじめに、値幅制限に抵触しなかった場合である $|\Delta P_t| < L$ のときについて考えよう。値幅制限に抵触しなかった場合であっても $\Delta P_t = \Delta X_t$ とは限らない (図2.3における $t = 4$ 時点を参照)。そのため、次の関係式

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = P_t - X_{t-1} = \sum_{k=1}^t \Delta P_k - \sum_{k=1}^{t-1} \Delta X_k$$

を用いて算出する。

続いて、値幅制限に抵触した場合のデータ補間法について述べる。

いま、ストップ高に抵触した場合の観測価格は $P_t = P_{t-1} + L$ であり、その昨日差は $\Delta P_t = L$ となる。このとき、真の価格 X_t は観測不能であったが、観測価格 P_t と真の価格 X_t の関係式 (2.1) より、その値は $X_t \geq P_{t-1} + L$ であったと考えられ

る。データ補間にあたっては X_t の従う分布からのサンプリングを利用したいが、本論文におけるモデル化の対象は X_t ではなく ΔX_t であり、本論文では ΔX_t の従う分布の利用が可能である。そのため、ストップ高に抵触した場合の X_t の値域ではなく、 ΔX_t の値域を求める必要がある。ここで、(2.1) より、

$$X_t - P_{t-1} = \sum_{k=1}^t \Delta X_k - \sum_{k=1}^{t-1} P_k = \Delta X_t + \sum_{k=1}^{t-1} (\Delta X_k - \Delta P_k)$$

が得られるため、ストップ高に抵触した時点での真の価格の前日差 ΔX_t の値域は、

$$\Delta X_t \geq L - \sum_{k=1}^{t-1} (\Delta X_k - \Delta P_k)$$

であったと考えられる。いま、AR(0) モデルを仮定すれば $1 \leq t \leq n$ において $\Delta X_t \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$ であるため、ストップ高に抵触した場合の ΔX_t の補間に際しては、

$$\Delta X_t \sim TN_{(L - \sum_{k=1}^{t-1} (\Delta X_k - \Delta P_k), +\infty)}(\mu_0, \sigma_0^2)$$

からのサンプリングを考えればよい。ここで、 $TN_A(\mu, \sigma^2)$ は、平均 μ 、分散 σ^2 、区間 A で切断される切断正規分布である。

一方で、ストップ安に抵触した場合の ΔX_t の値域は

$$\Delta X_t \leq -L - \sum_{k=1}^{t-1} (\Delta X_k - \Delta P_k)$$

であるため、 ΔX_t の補間に際しては、

$$\Delta X_t \sim TN_{(-\infty, -L - \sum_{k=1}^{t-1} (\Delta X_k - \Delta P_k))}(\mu_0, \sigma_0^2)$$

よりサンプリングすればよい。

これまでに述べた ΔX_t の値の算出法をまとめると、値幅制限に抵触していない場合には、

$$\Delta X_t = \sum_{k=1}^t \Delta P_k - \sum_{k=1}^{t-1} \Delta X_k \tag{3.1}$$

から算出すればよく、ストップ高に抵触した場合には、

$$\Delta X_t \sim TN_{(L - \sum_{k=1}^{t-1} (\Delta X_k - \Delta P_k), +\infty)}(u_{p,t}, v_{p,t}^2) \tag{3.2}$$

ストップ安に抵触した場合には,

$$\Delta X_t \sim TN_{(-\infty, -L - \sum_{k=1}^{t-1} (\Delta X_k - \Delta P_k))} (u_{p,t}, v_{p,t}^2) \quad (3.3)$$

より, それぞれ発生させればよい. 以上の (3.1) から (3.3) を $t = 1$ から n まで順々に適用していくことで, MCMC 法の各ステップにおける ΔX_t が得られる. ただし, 仮定するモデルに応じて ΔX_t が従う分布は異なり, (3.2) と (3.3) の $u_{p,t}$ と $v_{p,t}^2$ が変化していく. 以降では, 他の次数の AR モデルを仮定した場合の ΔX_t の従う分布について説明していく.

(i) $p = 1$ の場合

ΔX_t が AR(1) モデルに従うと仮定したとき, ΔX_0 が与えられた場合の条件付尤度は,

$$\prod_{k=1}^n (2\pi\sigma_1^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2} (\Delta X_k - \mu_1 - \phi_{11}\Delta X_{k-1})^2 \right\}$$

で与えられる. したがって, ΔX_t は t の値に伴って変化する平均と分散パラメータをもつ正規分布 $N(u_{1,t}, v_{1,t}^2)$ に従う. 具体的に $1 \leq t \leq n-1$ の場合は,

$$u_{1,t} = \frac{(1 - \phi_{11})\mu_1 + \phi_{11}(\Delta X_{t-1} + \Delta X_{t+1})}{1 + \phi_{11}^2}, \quad v_{1,t}^2 = \frac{\sigma_1^2}{1 + \phi_{11}^2}$$

であり, $t = n$ の場合は,

$$u_{1,t} = \mu_1 + \phi_{11}\Delta X_{t-1}, \quad v_{1,t}^2 = \sigma_1^2$$

である.

(ii) $p = 2$ の場合

ΔX_t が AR(2) モデルに従うとき, $\Delta X_{-1}, \Delta X_0$ が与えられた場合の条件付尤度は,

$$\prod_{k=1}^n (2\pi\sigma_2^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_2^2} (\Delta X_k - \mu - \phi_{21}\Delta X_{k-1} - \phi_{22}\Delta X_{k-2})^2 \right\}$$

で与えられる. ΔX_t は正規分布 $N(u_{2,t}, v_{2,t}^2)$ に従い, 平均 $u_{2,t}$ と分散 $v_{2,t}^2$ は t の値によって, 次の (a) から (c) のように変化する.

(a) $1 \leq t \leq n - 2$ のとき

$$u_{2,t} = \{(1 - \phi_{21} - \phi_{22})\mu_2 + \phi_{21}(\Delta X_{t-1} + \Delta X_{t+1}) + \phi_{22}(\Delta X_{t-2} + \Delta X_{t+2}) \\ - \phi_{21}\phi_{22}(\Delta X_{t-1} + \Delta X_{t+1})\} / (1 + \phi_{11}^2 + \phi_{22}^2),$$

$$v_t^2 = \frac{\sigma_2^2}{1 + \phi_{21}^2 + \phi_{22}^2}$$

(b) $t = n - 1$ のとき

$$u_{2,t} = \frac{(1 - \phi_{21})\mu_2 + \phi_{21}(\Delta X_{t-1} + \Delta X_{t+1})\phi_{22}\Delta X_{t-2} - \phi_{21}\phi_{22}\Delta X_{t-1}}{1 + \phi_{11}^2}, \quad v_{2,t}^2 = \frac{\sigma_2^2}{1 + \phi_{21}^2}$$

(c) $t = n$ のとき

$$u_{2,t} = \mu_2 + \phi_{21}\Delta X_{t-1} + \phi_{22}\Delta X_{t-2}, \quad v_{2,t}^2 = \sigma_2^2$$

(iii) $p = 3$ の場合

ΔX_t が AR(3) モデルに従うとき, $\Delta X_{-2}, \Delta X_{-1}, \Delta X_0$ が与えられた場合の条件付尤度は

$$\prod_{k=1}^n (2\pi\sigma_3^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_3^2} (\Delta X_k - \mu - \phi_{31}\Delta X_{k-1} - \phi_{32}\Delta X_{k-2} - \phi_{33}\Delta X_{k-3})^2 \right\}$$

である. ΔX_t は, 正規分布 $N(u_{3,t}, v_{3,t}^2)$ に従い, 平均 $u_{3,t}$, 分散 $v_{3,t}^2$ は t の値に応じて, 次の (a) から (d) のように変化する.

(a) $1 \leq t \leq n - 3$ の場合

$$u_{3,t} = \{(1 - \phi_{31} - \phi_{32} - \phi_{33})\mu_3 + (\phi_{31} - \phi_{31}\phi_{32} - \phi_{32}\phi_{33})(\Delta X_{t-1} + \Delta X_{t-1}) \\ + (\phi_{32} - \phi_{31}\phi_{33})(\Delta X_{t-2} + \Delta X_{t+2}) + \phi_{33}(\Delta X_{t-3} + \Delta X_{t+3})\} \\ / (1 + \phi_{31}^2 + \phi_{32}^2 + \phi_{33}^2),$$

$$v_{3,t}^2 = \frac{\sigma_3^2}{1 + \phi_{31}^2 + \phi_{32}^2 + \phi_{33}^2}.$$

(b) $t = n - 2$ の場合

$$u_{3,t} = \{(1 - \phi_{31} - \phi_{32})\mu_3 + \phi_{31}(1 - \phi_{32})(\Delta X_{t-1} + \Delta X_{t-1}) + \phi_{32}(\Delta X_{t-2} + \Delta X_{t+2}) \\ + \phi_{33}\Delta X_{t-3}\phi_{32}\phi_{33}\Delta X_{t-1} - \phi_{31}\phi_{33}\Delta X_{t-2}\} / (1 + \phi_{31}^2 + \phi_{32}^2),$$

$$v_{3,t}^2 = \frac{\sigma_3^2}{1 + \phi_{31}^2 + \phi_{32}^2}.$$

(c) $t = n - 1$ の場合

$$u_{3,t} = \{(1 - \phi_{31})\mu_3 + \phi_{31}(\Delta X_{t-1} + \Delta X_{t-1}) + \phi_{32}\Delta X_{t-2} + \phi_{33}\Delta X_{t-3} \\ - \phi_{31}\phi_{32}\Delta X_{t-1} - \phi_{31}\phi_{33}\Delta X_{t-2}\} / (1 + \phi_{31}^2 + \phi_{32}^2),$$

$$v_{3,t}^2 = \frac{\sigma_3^2}{1 + \phi_{31}^2}.$$

(d) $t = n$ の場合

$$u_{3,t} = \mu_3 + \phi_{31}\Delta X_{t-1} + \phi_{32}\Delta X_{t-2} + \phi_{33}\Delta X_{t-3}, \quad v_{3,t}^2 = \sigma_3^2.$$

3.1.2 パラメタ推定

本論文における未知パラメタの推定では、MCMC法を採用する。そのため、本節では未知パラメタのサンプリングに必要となる条件付事後分布の計算法に焦点を当てて説明する。ここで、それぞれのモデルを仮定した場合のパラメタ発生の手順は次の通りになっている。

1. 切片 μ のサンプリング
2. イノベーション分散 σ^2 のサンプリング
3. 自己回帰係数のサンプリング

また、データ補間のためのサンプリングとパラメタのサンプリングは、実際には交互に行われるが、以下の説明では少なくとも1度データ補間のサンプリングが行われており、その意味でMCMCの第*i*ステップでの真の価格の前日差 $\Delta X_t[i]$, $t = 1, 2, \dots, n$ が得られているものとする。以降、 $\Delta \mathbf{X} = \{\Delta X_t\}_{t=1}^n$ とする。

$p = 0$ の場合

ΔX_t の平均構造としては切片のみ、すなわち、 $\Delta X_t = \mu_0 + \varepsilon_t$ を仮定した場合の尤度は、

$$(2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{t=1}^n (\Delta X_t - \mu_0)^2\right\}$$

である。

いま、 μ_0 の事前分布として $\mu_0 \sim N(h_0, s_0^2)$ を仮定すると、条件付事後分布 $f(\mu_0|\sigma_0, \Delta \mathbf{X})$ は、

$$\begin{aligned} f(\mu_0|\sigma_0, \Delta \mathbf{X}) &\propto \exp\left\{-\frac{(\mu_0 - h_0)^2}{2s_0^2}\right\} \times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{t=1}^n (\Delta X_t - \mu_0)^2\right\} \\ &\propto \exp\left\{-\frac{\sigma_0^2 + ns_0^2}{2s_0^2\sigma_0^2} \left(\mu_0 - \frac{\sigma_0^2 h_0 + s_0^2 \sum_{t=1}^n \Delta X_t}{\sigma_0^2 + ns_0^2}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

となり、正規分布として得られる。

続いて、 σ_0^2 の事前分布を逆ガンマ分布、 $\sigma_0^2 \sim IG(\alpha_0, \beta_0)$ とおくと、条件付事後分布 $f(\sigma_0^2|\mu_0, \Delta \mathbf{X})$ は、

$$\begin{aligned} f(\sigma_0^2|\mu_0, \Delta \mathbf{X}) &\propto (\sigma_0^2)^{-(1+\alpha_0)} \exp\left(-\frac{\beta_0}{\sigma_0^2}\right) \times (\sigma_0^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{t=1}^n (\Delta X_t - \mu_0)^2\right\} \\ &\propto (\sigma_0^2)^{-(1+\alpha_0+\frac{n}{2})} \exp\left[-\frac{1}{\sigma_0^2} \left\{\beta_0 + \sum_{t=1}^n (\Delta X_t - \mu_0)^2\right\}\right] \end{aligned}$$

と逆ガンマ分布として得られる。

$p = 1$ の場合

ΔX_t の平均構造として1次の自己回帰モデル $\Delta X_t = \mu_1 + \phi_{11} \Delta X_{t-1} + \varepsilon_t$ を仮定した場合、 ΔX_0 が与えられたときの条件付尤度は、

$$(2\pi\sigma_1^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{t=1}^n (\Delta X_t - \mu_1 - \phi_{11} \Delta X_{t-1})^2 \right\}$$

である。

いま、 μ_1 の事前分布を正規分布、 $\mu_1 \sim N(h_1, s_1^2)$ とおくと、条件付事後分布 $f(\mu_1 | \sigma_1^2, \phi_{11}, \Delta \mathbf{X}, \Delta X_0)$ は、

$$\begin{aligned} f(\mu_1 | \sigma_1^2, \phi_{11}, \Delta \mathbf{X}, \Delta X_0) &\propto \exp \left\{ -\frac{(\mu_1 - h_1)^2}{2s_1^2} \right\} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{t=1}^n (\Delta X_t - \mu_1 - \phi_{11} \Delta X_{t-1})^2 \right\} \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\mu_1}^2} (\mu_1 - \mu_{\mu_1})^2 \right\} \end{aligned}$$

という正規分布として得られる。ただし、平均、分散パラメタはそれぞれ、

$$\mu_{\mu_1} = \frac{\sigma_1^2 h_1 + s_1^2 \sum_{t=1}^n (\Delta X_t - \phi_{11} \Delta X_{t-1})}{\sigma_1^2 + n s_1^2}, \quad \sigma_{\mu_1}^2 = \frac{\sigma_1^2 s_1^2}{\sigma_1^2 + n s_1^2}$$

である。

続いて、 σ_1^2 の事前分布を逆ガンマ分布、 $\sigma_1^2 \sim IG(\alpha_0, \beta_0)$ とした場合の条件付事後分布 $f(\sigma_1^2 | \mu_1, \phi_{11}, \Delta \mathbf{X}, \Delta X_0)$ は、

$$\begin{aligned} f(\sigma_1^2 | \mu_1, \phi_{11}, \Delta \mathbf{X}, \Delta X_0) &\propto (\sigma_1^2)^{-(1+\alpha_0)} \exp \left(-\frac{\beta_0}{\sigma_1^2} \right) \times (\sigma_1^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{t=1}^n (\Delta X_t - \mu_1 - \phi_{11} \Delta X_{t-1})^2 \right\} \\ &\propto (\sigma_1^2)^{-(1+\alpha_0+\frac{n}{2})} \exp \left[-\frac{1}{\sigma_1^2} \left\{ \beta_0 + \sum_{t=1}^n (\Delta X_t - \mu_1 - \phi_{11} \Delta X_{t-1})^2 \right\} \right] \end{aligned}$$

最後に、定常性を満たす範囲を考慮し ϕ_{11} の事前分布を区間 $(-1, 1)$ の一様分布とすれば、条件付事後分布 $f(\phi_{11} | \mu_1, \sigma_1^2, \Delta \mathbf{X}, \Delta X_0)$ は、

$$f(\phi_{11} | \mu_1, \sigma_1^2, \Delta \mathbf{X}, \Delta X_0)$$

$$\begin{aligned} &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{t=1}^n (\Delta X_t - \mu_1 - \phi_{11} \Delta X_{t-1})^2 \right\} \times I_{(-1,1)}(\phi_{11}) \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{\sum_{t=1}^n \Delta X_{t-1}^2}{2\sigma_1^2} \left(\phi_{11} - \frac{\sum_{t=1}^n \Delta X_{t-1} (\Delta X_t - \mu_1)}{\sum_{t=1}^n \Delta X_{t-1}^2} \right)^2 \right\} \times I_{(-1,1)}(\phi_{11}) \end{aligned}$$

の切断正規分布として得られる.

$p = 2$ の場合

2 次の自己回帰モデル $\Delta X_t = \mu_2 + \phi_{21} \Delta X_{t-1} + \phi_{22} \Delta X_{t-2} + \varepsilon_{2,t}$ を仮定した場合, $\Delta X_0, \Delta X_{-1}$ が与えられたときの条件付尤度は,

$$\left(2\pi\sigma_2^2 \right)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_{t=1}^n (\Delta X_t - \mu_2 - \phi_{21} \Delta X_{t-1} - \phi_{22} \Delta X_{t-2})^2 \right\}$$

である.

いま, μ_2 の事前分布を正規分布, $\mu_2 \sim N(h_2, s_2^2)$ とおくと, 条件付事後分布 $f(\mu_2 | \sigma_2^2, \phi_{21}, \phi_{22}, \Delta \mathbf{X}, \Delta X_0, \Delta X_{-1})$ は,

$$\begin{aligned} & f(\mu_2 | \sigma_2^2, \phi_{21}, \phi_{22}, \Delta \mathbf{X}, \Delta X_0, \Delta X_{-1}) \\ & \propto \exp \left\{ -\frac{(\mu_2 - h_2)^2}{2s_2^2} \right\} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_{t=1}^n (\Delta X_t - \mu_2 - \phi_{21} \Delta X_{t-1} - \phi_{22} \Delta X_{t-2})^2 \right\} \\ & \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\mu_2}^2} \sum_{t=1}^n (\mu_2 - \mu_{\mu_2})^2 \right\} \end{aligned}$$

という正規分布として得られる. ただし, μ_{μ_2} と $\sigma_{\mu_2}^2$ は次の通りである.

$$\mu_{\mu_2} = \frac{\sigma_2^2 h_2 + s_2^2 \sum_{t=1}^n (\Delta X_t - \phi_{21} \Delta X_{t-1} - \phi_{22} \Delta X_{t-2})^2}{\sigma_2^2 + n s_2^2}, \quad \sigma_{\mu_2}^2 = \frac{\sigma_2^2 s_2^2}{\sigma_2^2 + n s_2^2}$$

次に, σ_2^2 の事前分布を逆ガンマ分布, $\sigma_2^2 \sim IG(\alpha_0, \beta_0)$ とすると, 条件付事後分布 $f(\sigma_2^2 | \mu_2, \phi_{21}, \phi_{22}, \Delta \mathbf{X}, \Delta X_0, \Delta X_{-1})$ は,

$$\begin{aligned} & f(\sigma_2^2 | \mu_2, \phi_{21}, \phi_{22}, \Delta \mathbf{X}, \Delta X_0, \Delta X_{-1}) \\ & \propto (\sigma_2^2)^{-(1+\alpha_0)} \exp \left(-\frac{\beta_0}{\sigma_2^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times (\sigma_2^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_{t=1}^n (\Delta X_t - \mu_2 - \phi_{21}\Delta X_{t-1} - \phi_{22}\Delta X_{t-2})^2 \right\} \\ & \propto (\sigma_2^2)^{-(1+\alpha_0+\frac{n}{2})} \exp \left[-\frac{1}{\sigma_1^2} \left\{ \beta_0 + \sum_{t=1}^n (\Delta X_t - \mu_2 - \phi_{21}\Delta X_{t-1} - \phi_{22}\Delta X_{t-2})^2 \right\} \right] \end{aligned}$$

となり、逆ガンマ分布として得られる。

続いて、自己回帰係数 ϕ_{21} と ϕ_{22} の発生について述べる。定常性を満たす範囲からのサンプリングを行うために、Levinson-Durbin アルゴリズムの等式 $\phi_{21} = \phi_{11} - \phi_{11}\phi_{22}$ を用いて、モデル式を偏自己相関係数で表現しなおせば、

$$\Delta X_t = \mu_2 + (\phi_{11} - \phi_{11}\phi_{22}) \Delta X_{t-1} + \phi_{22}\Delta X_{t-2} + \varepsilon_{2,t}$$

が得られる。ここで、 $\Delta X_0, \Delta X_{-1}$ が与えられたときの条件付尤度は、

$$(2\pi\sigma_2^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_{t=1}^n \{ \Delta X_t - \mu_2 - \phi_{11}(1 - \phi_{22}) \Delta X_{t-1} - \phi_{22}\Delta X_{t-2} \}^2 \right]$$

と計算できる。いま、定常性を満たす範囲を考慮し、 ϕ_{11} の事前分布を区間 $(-1, 1)$ の一様分布とすれば、条件付事後分布 $f(\phi_{11} | \mu_2, \sigma_2^2, \phi_{22}, \Delta \mathbf{X}, \Delta X_0, \Delta X_{-1})$ は、

$$\begin{aligned} & f(\phi_{11} | \mu_2, \sigma_2^2, \phi_{22}, \Delta \mathbf{X}, \Delta X_0, \Delta X_{-1}) \\ & \propto \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_{t=1}^n \{ \Delta X_t - \mu_2 - \phi_{11}(1 - \phi_{22}) \Delta X_{t-1} - \phi_{22}\Delta X_{t-2} \}^2 \right] \times I_{(-1,1)}(\phi_{11}) \\ & \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{2,\phi_{11}}^2} (\phi_{11} - \mu_{2,\phi_{11}})^2 \right\} \times I_{(-1,1)}(\phi_{11}) \end{aligned}$$

であり、区間 $(-1, 1)$ の切断正規分布 $TN(\mu_{2,\phi_{11}}, \sigma_{2,\phi_{11}}^2)$ に従う。ただし、

$$\mu_{2,\phi_{11}} = \frac{\sum_{t=1}^n (\Delta X_t \Delta X_{t-1} - \mu_2 \Delta X_{t-1} - \phi_{22} \Delta X_{t-1} \Delta X_{t-2})}{(1 - \phi_{22})^2 \sum_{t=1}^n \Delta X_{t-1}^2},$$

$$\sigma_{2,\phi_{11}}^2 = \frac{2\sigma_2^2}{(1 - \phi_{22})^2 \sum_{t=1}^n \Delta X_{t-1}^2}$$

である。同様に定常性を満たす範囲を考慮して、 ϕ_{22} の事前分布を区間 $(-1, 1)$ の一様分布とすれば、条件付事後分布 $f(\phi_{22} | \mu_2, \sigma_2^2, \phi_{11}, \Delta \mathbf{X}, \Delta X_0, \Delta X_{-1})$ は、

$$f(\phi_{22} | \mu_2, \sigma_2^2, \phi_{11}, \Delta \mathbf{X}, \Delta X_0, \Delta X_{-1})$$

$$\propto \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_{t=1}^n \{ \Delta X_t - \mu_2 - \phi_{11} \Delta X_{t-1} - \phi_{22} (\Delta X_{t-2} - \phi_{11} \Delta X_{t-1}) \}^2 \right] \times I_{(-1,1)}(\phi_{22})$$

$$\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{2,\phi_{22}}^2} (\phi_{22} - \mu_{2,\phi_{22}})^2 \right\} \times I_{(-1,1)}(\phi_{22})$$

と計算でき、区間 $(-1, 1)$ の切断正規分布 $TN_{(-1,1)}(\mu_{2,\phi_{22}}, \sigma_{2,\phi_{22}}^2)$ に従う。ただし、

$$\mu_{2,\phi_{22}} = \frac{\sum_{t=1}^n (\Delta X_{t-2} - \phi_{11} \Delta X_{t-1}) (\Delta X_t - \mu_2 - \phi_{11} \Delta X_{t-1})}{\sum_{t=1}^n (\Delta X_{t-2} - \phi_{11} \Delta X_{t-1})^2},$$

$$\sigma_{2,\phi_{22}}^2 = \frac{\sigma_2^2}{\sum_{t=1}^n (\Delta X_{t-2} - \phi_{11} \Delta X_{t-1})^2}$$

である。

以上が、それぞれの偏自己相関係数の条件付事後分布である。なお、 i ステップ目の偏自己相関係数 $\phi_{11}[i]$ 、 $\phi_{22}[i]$ を発生させた後には、次のステップのデータ補間のため、 $\phi_{21}[i] = \phi_{11}[i] - \phi_{11}[i]\phi_{22}[i]$ を用いて、 $\phi_{21}[i]$ を更新する必要がある。

$p = 3$ の場合

3 次の自己回帰モデル $\Delta X_t = \mu_3 + \phi_{31} \Delta X_{t-1} + \phi_{32} \Delta X_{t-2} + \phi_{33} \Delta X_{t-3} + \varepsilon_{3,t}$ を仮定した場合、 $\Delta X_0, \Delta X_{-1}, \Delta X_{-2}$ が与えられたときの条件付尤度は、

$$(2\pi\sigma_3^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_3^2} \sum_{t=1}^n (\Delta X_t - \mu_3 - \phi_{31} \Delta X_{t-1} - \phi_{32} \Delta X_{t-2} - \phi_{33} \Delta X_{t-3})^2 \right\}$$

で与えられる。

いま、 μ_3 の事前分布を正規分布、 $\mu_3 \sim N(h_3, s_3^2)$ とおくと、条件付事後分布 $f(\mu_3 | \sigma_3^2, \phi_{31}, \phi_{32}, \phi_{33}, \Delta \mathbf{X}, \Delta X_0, \Delta X_{-1}, \Delta X_{-2})$ は、

$$\begin{aligned} & f(\mu_3 | \sigma_3^2, \phi_{31}, \phi_{32}, \phi_{33}, \Delta \mathbf{X}, \Delta X_0, \Delta X_{-1}, \Delta X_{-2}) \\ & \propto \exp \left\{ -\frac{(\mu_3 - h_3)^2}{2s_3^2} \right\} \\ & \quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_3^2} \sum_{t=1}^n (\Delta X_t - \mu_3 - \phi_{31} \Delta X_{t-1} - \phi_{32} \Delta X_{t-2} - \phi_{33} \Delta X_{t-3})^2 \right\} \\ & \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\mu_3}^2} (\mu_3 - \mu_{\mu_3})^2 \right\} \end{aligned}$$

となり、正規分布として得られる。ただし、 μ_{μ_3} と $\sigma_{\mu_3}^2$ は次の通りである。

$$\mu_{\mu_3} = \frac{\sigma_3^2 h_3 + \sum_{t=1}^n (\Delta X_t - \phi_{31} \Delta X_{t-1} - \phi_{32} \Delta X_{t-2} - \phi_{33} \Delta X_{t-3})}{\sigma_3^2 + n s_3^2},$$

$$\sigma_{\mu_3}^2 = \frac{\sigma_3^2 s_3^2}{\sigma_3^2 + n s_3^2}.$$

次に、 σ_3^2 の事前分布を逆ガンマ分布、すなわち $\sigma_3^2 \sim IG(\alpha_0, \beta_0)$ とおくと、条件付事後分布 $f(\sigma_3^2 | \mu_3, \phi_{31}, \phi_{32}, \phi_{33}, \Delta \mathbf{X}, \Delta X_0, \Delta X_{-1}, \Delta X_{-2})$ は、

$$f(\sigma_3^2 | \mu_3, \phi_{31}, \phi_{32}, \phi_{33}, \Delta \mathbf{X}, \Delta X_0, \Delta X_{-1}, \Delta X_{-2})$$

$$\propto (\sigma_3)^{-(1+\alpha_0)} \exp\left(-\frac{\beta_0}{\sigma_3^2}\right)$$

$$\times (\sigma_3)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_3^2} \sum_{t=1}^n (\Delta X_t - \mu_3 - \phi_{31} \Delta X_{t-1} - \phi_{32} \Delta X_{t-2} - \phi_{33} \Delta X_{t-3})^2\right\}$$

$$\propto (\sigma_3^2)^{-(1+\alpha_3)} \exp\left(-\frac{\beta_3}{\sigma_3^2}\right)$$

となり、逆ガンマ分布 $IG(\alpha_3, \beta_3)$ に従う。ただし、

$$\alpha_3 = \alpha_0 + \frac{n}{2},$$

$$\beta_3 = \beta_0 + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (\Delta X_t - \mu_3 - \phi_{31} \Delta X_{t-1} - \phi_{32} \Delta X_{t-2} - \phi_{33} \Delta X_{t-3})^2$$

である。

最後に自己回帰係数の発生について考えよう。いま、Levinson-Durbin アルゴリズムより得られる2つの等式、 $\phi_{31} = \phi_{11} - \phi_{11}\phi_{22} - \phi_{22}\phi_{33}$ と $\phi_{32} = \phi_{11} - \phi_{11}\phi_{22} - \phi_{11}\phi_{33} + \phi_{11}\phi_{22}\phi_{33}$ を用いれば、モデル式を偏自己相関係数のみで表現した等式

$$\Delta X_t = \mu_3 + (\phi_{11} - \phi_{11}\phi_{22} - \phi_{22}\phi_{33}) \Delta X_{t-1}$$

$$+ \phi_{11} (1 - \phi_{22} - \phi_{33} + \phi_{22}\phi_{33}) \Delta X_{t-2} + \phi_{33} \Delta X_{t-3} + \varepsilon_{3,t}$$

が得られる。ここで、 $\Delta X_0, \Delta X_{-1}, \Delta X_{-2}$ が与えられたときの条件付尤度は、

$$(2\pi\sigma_3^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_3^2} \sum_{t=1}^n \{\Delta X_t - \mu_3 - (\phi_{11} - \phi_{11}\phi_{22} - \phi_{22}\phi_{33}) \Delta X_{t-1}\right.$$

$$-\phi_{11} (1 - \phi_{22} - \phi_{33} + \phi_{22}\phi_{33}) \Delta X_{t-2} - \phi_{33}\Delta X_{t-3}\}^2]$$

と計算できる.

はじめに, ϕ_{11} の発生を考えよう. ϕ_{11} の事前分布を区間 $(-1, 1)$ の一様分布とすると, 条件付事後分布 $f(\phi_{11} | \mu_3, \sigma_3^2, \phi_{22}, \phi_{33}, \Delta \mathbf{X}, \Delta X_0, \Delta X_{-1}, \Delta X_{-2})$ は,

$$\begin{aligned} & f(\phi_{11} | \mu_3, \sigma_3^2, \phi_{22}, \phi_{33}, \Delta \mathbf{X}, \Delta X_0, \Delta X_{-1}, \Delta X_{-2}) \\ & \propto \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_3^2} \sum_{t=1}^n \{ \phi_{11} \{ (1 - \phi_{22}) \Delta X_{t-1} + (1 - \phi_{22} - \phi_{33} + \phi_{22}\phi_{33}) \Delta X_{t-2} \} \right. \\ & \quad \left. + \mu_3 + \phi_{22}\phi_{33}\Delta X_{t-1} + \phi_{33}\Delta X_{t-3} - \Delta X_t \}^2 \right] \times I_{(-1,1)}(\phi_{11}) \\ & \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{3,\phi_{11}}^2} (\phi_{11} - \mu_{3,\phi_{11}})^2 \right\} \times I_{(-1,1)}(\phi_{11}) \end{aligned}$$

となり, 区間 $(-1, 1)$ の切断正規分布 $TN_{(-1,1)}(\mu_{3,\phi_{11}}, \sigma_{3,\phi_{11}}^2)$ に従う. ここで,

$$\mu_{3,\phi_{11}} = \frac{\sum_{t=1}^n \{ \Delta X_t - \mu + \phi_{22}\phi_{33}\Delta X_{t-1} - \phi_{33}\Delta X_{t-3} \} C_{1,t}}{\sum_{t=1}^n C_{1,t}^2}, \quad \sigma_{3,\phi_{11}}^2 = \frac{\sigma_3^2}{\sum_{t=1}^n C_{1,t}^2}$$

であり,

$$C_{1,t} = (1 - \phi_{22}) \Delta X_{t-1} + (1 - \phi_{22} - \phi_{33} + \phi_{22}\phi_{33}) \Delta X_{t-2}$$

である.

次に, ϕ_{22} の発生について考える. ϕ_{22} の事前分布を区間 $(-1, 1)$ の一様分布とすれば, 条件付事後分布 $f(\phi_{22} | \mu_3, \sigma_3^2, \phi_{11}, \phi_{33}, \Delta \mathbf{X}, \Delta X_0, \Delta X_{-1}, \Delta X_{-2})$ は,

$$\begin{aligned} & f(\phi_{22} | \mu_3, \sigma_3^2, \phi_{11}, \phi_{33}, \Delta \mathbf{X}, \Delta X_0, \Delta X_{-1}, \Delta X_{-2}) \\ & \propto \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_3^2} \sum_{t=1}^n \{ \phi_{22} \{ (\phi_{11} + \phi_{33}) \Delta X_{t-1} + \phi_{11} (1 - \phi_{33}) \Delta X_{t-2} \} + \Delta X_t \right. \\ & \quad \left. - \mu_3 - \phi_{11}\Delta X_{11} - \phi_{11} (1 - \phi_{33}) \Delta X_{t-2} - \phi_{33}\Delta X_{t-3} \}^2 \right] \times I_{(-1,1)}(\phi_{22}) \\ & \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{3,\phi_{22}}^2} (\phi_{22} - \mu_{3,\phi_{22}})^2 \right\} \times I_{(-1,1)}(\phi_{22}) \end{aligned}$$

となり，切断正規分布 $TN_{(-1,1)}(\mu_{3,\phi_{22}}, \sigma_{3,\phi_{22}})$ に従う．ただし，

$$\mu_{3,\phi_{22}} = \frac{\sum_{t=1}^n \{-\Delta X_t + \mu_3 + \phi_{11}\Delta X_{t-1} + \phi_{11}(1 - \phi_{33})\Delta X_{t-2} + \phi_{33}\Delta X_{t-3}\} C_{2,t}}{\sum_{t=1}^n C_{2,t}^2},$$

$$\sigma_{3,\phi_{22}}^2 = \frac{\sigma_3^2}{\sum_{t=1}^n C_{2,t}^2}$$

であり，

$$C_{2,t} = (\phi_{11} + \phi_{33})\Delta X_{t-1} + \phi_{11}(1 - \phi_{33})\Delta X_{t-2}$$

である．

最後に ϕ_{33} の発生を考える． ϕ_{33} の事前分布も区間 $(-1, 1)$ の一様分布とすれば，条件付事後分布 $f(\phi_{33} | \mu_3, \sigma_3^2, \phi_{11}, \phi_{22}, \Delta \mathbf{X}, \Delta X_0, \Delta X_{-1}, \Delta X_{-2})$ は，

$$\begin{aligned} & f(\phi_{33} | \mu_3, \sigma_3^2, \phi_{11}, \phi_{22}, \Delta \mathbf{X}, \Delta X_0, \Delta X_{-1}, \Delta X_{-2}) \\ & \propto \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_3^2} \sum_{t=1}^n \{ \phi_{33} \{ \phi_{22}\Delta X_{t-1} + \phi_{11}(1 - \phi_{22})\Delta X_{t-2} - \Delta X_{t-3} \} \right. \\ & \quad \left. + \Delta X_t - \mu_3 - \phi_{11}(1 - \phi_{22})(\Delta X_{11} + \Delta X_{22}) \}^2 \right] \times I_{(-1,1)}(\phi_{33}) \\ & \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{3,\phi_{33}}^2} (\phi_{33} - \mu_{3,\phi_{33}})^2 \right\} \times I_{(-1,1)}(\phi_{33}) \end{aligned}$$

となり，切断正規分布 $TN_{(-1,1)}(\mu_{3,\phi_{33}}, \sigma_{3,\phi_{33}}^2)$ に従う．ただし，

$$\mu_{3,\phi_{33}} = \frac{\sum_{t=1}^n \{ \phi_{11}(1 - \phi_{22})(\Delta X_{11} + \Delta X_{22}) - \Delta X_t + \mu_3 \} C_{3,t}}{\sum_{t=1}^n C_{3,t}^2}, \quad \sigma_{3,\phi_{33}}^2 = \frac{\sigma_3^2}{\sum_{t=1}^n C_{3,t}^2}$$

であり，

$$C_{3,t} = \phi_{22}\Delta X_{t-1} + \phi_{11}(1 - \phi_{22})\Delta X_{t-2} - \Delta X_{t-3}$$

である．

なお， i ステップ目の偏自己相関係数， $\phi_{11}[i]$ ， $\phi_{22}[i]$ ， $\phi_{33}[i]$ を発生させた後は，次のステップのデータ補間のために，Levinson-Durbin アルゴリズムの等式を利用し，次のように $\phi_{31}[i]$ と $\phi_{32}[i]$ を更新しておく．

$$\phi_{31}[i] = \phi_{11}[i] - \phi_{11}[i]\phi_{22}[i] - \phi_{22}[i]\phi_{33}[i],$$

$$\phi_{32}[i] = \phi_{11}[i](1 - \phi_{22}[i] - \phi_{33}[i] + \phi_{22}[i]\phi_{33}[i]).$$

3.1.3 条件付事後分布の収束とサンプリングの効率性

条件付事後分布の収束については Geweke の収束判定法を用いる (Geweke (1992), 渡部・大森 (2000)) . Geweke の収束判定法とは, サンプル発生回数が M 回のときに, 初期値に依存していると思われる始めの N 回を捨てた残りの $M - N$ 個のサンプルを 2 つの集団に分け, それぞれの平均値が等しいかどうかを検定する方法である. 本論文では Geweke(1992) にならい, 始めから $0.1 \times (M - N)$ 個, 後ろから $0.5 \times (M - N)$ 個, 以上 2 つに分ける. ここで, 収束判定に用いる統計量は, 帰無仮説:「両者の平均が等しい」のもとでは標準正規分布に従う. そのため, 有意水準 10% で検定を行う場合には, 統計量の絶対値が 1.645 以内であることを確かめればよく, 帰無仮説を受容した場合には, 事後分布が収束していると判断する.

次に, サンプリングの効率性を調べるために Chib (2001) の非効率因子 (Inefficiency Factor, IF) を計算する. IF は, ランダム・サンプリングで得られた標本から計算する標本平均の分散と同じ分散となるためには何倍の標本数が必要であることを示す指標であり, $IF = 1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \hat{\rho}_l$ で算出する. ここで, $\hat{\rho}_l$ は l 次の標本自己相関係数である. ただし, 本論文では, 大塚 (2011), 各務他 (2011) にならい, 自己相関係数が有意でなくなる次数で切断し, それ以降の高次の自己相関係数を 0 とする.

本論文のパラメタ推定法では, サンプリング対象を自己回帰係数から偏自己相関係数に変換しているため, AR(2) モデルを仮定した場合には, サンプリング対象は ϕ_{11} と ϕ_{22} であり, ϕ_{21} の推定値は, 各ステップでの $\phi_{21}[i]$ の平均値は用いずに, ϕ_{11} , ϕ_{22} の推定値を求めた後に Levinson-Durbin アルゴリズムを利用して算出する. また, ϕ_{21} はサンプリング対象でなく条件付事後分布を計算していないため, Geweke の収束判定統計量, IF は計測しない.

3.2 リスク計測

リスク計測に際しては、未知パラメタ推定に用いた先物価格データの収録期間以降であっても、仮定したモデルの妥当性が失われないという前提を置き、先物価格データを用いた外挿によりデータ期間以降のリスクを推定する。しかしながら、モデルの未知パラメタ推定には不確実性を伴う。本論文では未知パラメタの不確実性を考慮したリスク計測を行うため、MCMC アルゴリズムの各ステップにおいて発生させたパラメタ値にもとづいて、推定したい期間までの真の価格の前日差の予測パスを生成する。

本論文では、真の価格は値幅制限の影響を受けない価格プロセスであり、値幅制限による制度上の制約が課せられた価格プロセスを観測価格として定義している。そのため、実験手順は、真の価格プロセスを発生させた後に、制限値段幅 L と関係式 (2.1) を用いて観測価格のプロセスを計算する²。

いま、価格の前日差データの収録期間が $t = 1, \dots, n$ であり、リスク推定のために必要な l 日間分の予測パス $\{\Delta X_{n+j}\}_{j=1}^l$ を生成することを考える。なお、 l の値は商品先物を保有する日数を指し、第 4 章の数値実験では最大 20 日間の保有を考える。本論文における MCMC 法によるパラメタ推定アルゴリズムでは、第 4 章で述べるようにサンプル発生を 12,000 回行った後に、初期値に依存する始めの 2,000 回を捨て、残りの 10,000 回の平均値をパラメタの推定値として採用するため、パラメタ推定アルゴリズムの終了時には $\{\Delta X_{n+j}\}_{j=1}^l$ が 10,000 本生成される。

市場リスク指標を計測するために、 l 日間保有した場合の累積損益分布を $\sum_{j=1}^l \Delta X_{t+j}$ によって構築する。構築した累積損益分布は真の価格変動にもとづいたものであるため、この累積損益分布から算出された市場リスク指標は、値幅制限の影響を受けない状況のもとで商品先物を保有した場合の市場リスクと考える。なお、 $\text{VaR}_{\alpha \times 100\%}$

²この定義は、値幅制限を真の価格に作用する観測機構上の問題としてとらえることにもとづいており、市場参加者が「値幅制限の制度がある」という共通認識のもとで期待するところでの変動性を真の価格が表現していると仮定している。従って「値幅制限が撤廃されている」という前提のもとで自由に取引された場合の価格プロセスの形成についてまでモデル化したものではない。

は、累積損益分布の下側 $\alpha \times 100\%$ 点を採用し、 $ES_{\alpha \times 100\%}$ は、推定した $VaR_{\alpha \times 100\%}$ を下回った $\sum_{j=1}^l \Delta X_{t+j}$ の平均値を採用する。

続いて、信用リスク計測のために、 $\{\Delta X_{t+j}\}_{j=1}^l$ と倍率 η の積の累積和 $\eta \sum_{j=1}^l \Delta X_{t+j}$ により、値幅制限の影響を受けない状況下で商品先物を l 日間保有したときの累積損失額を算出する。追証の発生は、保有日数 l までの各時点 $j (1 \leq j \leq l)$ で条件式 (2.5) を用いて判定する。また、デフォルト発生については、追証が発生した場合には、常に投資家が追証をおさめずに清算を選択すると仮定し、(2.8) を用いて判定を行う。追証発生後も引き続き損失が膨らみ、取引本証拠金基準額を使い果たすまで累積損失額が大きくなった場合にはじめてデフォルトが発生する。そのため、追証が発生したとしても必ずしもデフォルトが起こるとは限らないことに注意が必要である。ここで、発生した追証がデフォルトにつながる割合を確かめるため、デフォルトの条件付発生率をデフォルト発生頻度を追証発生頻度で割った値で定義する。なお、追証発生率、デフォルト発生率・条件付発生率については 10,000 本の予測パスの中で、それぞれが発生した頻度を用いて比率を計算し、デフォルト損失額は (2.8) が正である条件のもとでの平均値として計算する。

次に、値幅制限の下での市場リスクと信用リスクの計測を行う。生成された 10,000 本の $\{\Delta X_{t+j}\}_{j=1}^l$ に対し、それぞれに制限値段幅 L と (2.1) の関係を適用することによって、同時点の観測価格の前日差 $\{\Delta P_{t+j}\}_{j=1}^l$ を生成する。先程と同様に、 $\sum_{j=1}^l \Delta P_{t+j}$ より、値幅制限のもとで商品先物を l 日間保有した場合の累積損益分布を生成し、値幅制限の影響を受けた状況下での市場リスク指標を計測する。また、信用リスクの計測に際しては、 $\eta \sum_{j=1}^l \Delta P_{t+j}$ によって値幅制限を考慮した場合の累積損失額を算出した後に、保有日数 l までの各時点 $j (1 \leq j \leq l)$ で追証、デフォルトの発生判定を行い、デフォルトの条件付発生率とデフォルト損失額を計算する。ただし、値幅制限の影響により取引が不可能となる可能性があるため、価格パスの生成に際しては、計測に必要な保有日数よりも長い期間の予測パスを生成する必要がある。

第4章 値幅制限制度の影響：数値実験による確認

本章では、値幅制限制度下の商品先物価格データを用いて、値幅制限制度が、価格変動の平均構造、市場リスク、信用リスクに与える影響について分析する。分析対象は、金、白金、ガソリン、原油の4商品とし、分析期間として市場環境を考慮した3つの期間を設定した。また、値幅制限の影響を調査するために、価格変動に自己回帰モデルを当てはめる際には、データ補間と同時にパラメタ推定を行うことで真の価格変動 ΔX_t に対する自己回帰モデルの当てはめ結果と、データ補間を行わずにパラメタ推定を行う ΔP_t に対する当てはめ結果の2通りを計算する。リスク計測に際しては、真の価格変動に対するパラメタ推定時に発生させた予測パスを用いた値幅制限制度の影響を受けない（真の価格変動にもとづく）損益分布と、商品ごとの制限値段幅 L と関係式(2.1)を適用することで得られる値幅制限制度の影響下の（観測価格にもとづく）損益分布を利用することで、値幅制限制度がリスク計測に与える影響を分析する。

4.1 値幅制限制度下の商品先物価格の傾向

値幅制限制度が終了するまでの1年間は、金融危機を含んだ期間であり、市場環境が大きく変動した時期である。本論文では、1期間を3ヶ月間とし市場環境を考慮した次の3つの分析対象期間、

- 第1期間 2008年5月1日から2008年7月31日まで

- 第2期間 2008年8月1日から2008年10月31日まで
- 第3期間 2008年11月4日から2009年1月30日まで

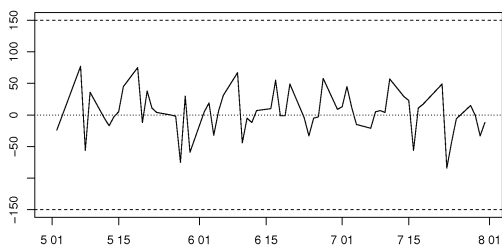
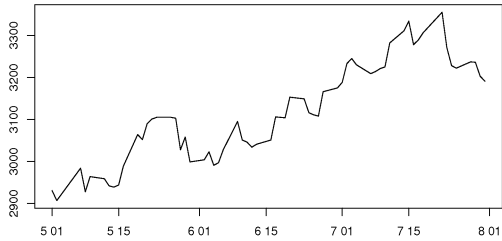
を設定した。本節では、それぞれの期間の特徴と同期間における商品先物価格の傾向について述べていく。

第1期間（2008/05/01 から 2008/07/31）における4商品の観測価格 P_t と価格前日差 ΔP_t の時系列プロットを図4.1に示した。この期間は金融危機前の時期に当たり、商品先物価格が上昇傾向を示している。特にガソリンと原油は価格が急騰し、数回のストップ高を記録している。また、金は上昇傾向を示しているものの、5月1日の2,900円近辺から最高でも3,300円程度の価格にとどまり、大きな値動きは示しておらず、ストップ高、ストップ安についても記録されていない。

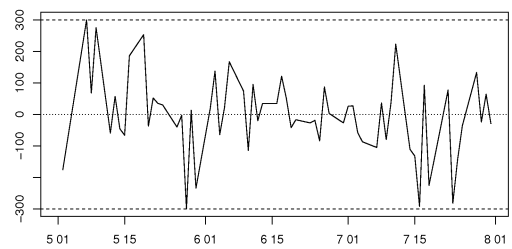
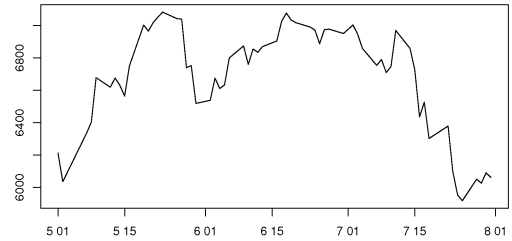
第2期間（2008/08/01 から 2008/10/31）の4商品の P_t と ΔP_t の時系列プロットを図4.2に示した。この期間は金融危機を含む時期であるため、図4.2が示すように全ての商品が急落している。価格前日差の図から分かるように、価格が下落傾向をとりながらも日々の価格変動は必ずしも負の値だけをとっているわけではなく、ストップ安だけでなく、ストップ高も記録されている。

第3期間（2008/11/01 から 2009/01/31）の P_t と ΔP_t の時系列プロットを図4.3に示した。この期間は金融危機によって引き起こされた価格の下落傾向に歯止めが利き始める時期に当たり、価格が持ち直していく様子が図4.3に示されている。価格前日差の図に示されている通り、全商品にわたって、値幅制限に抵触した日が少ない。そのため、全体として相場があまり荒れていない期間といえる。

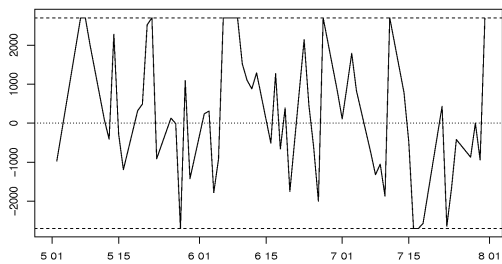
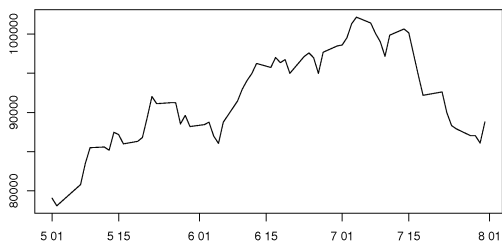
(a) 金



(b) 白金



(c) ガソリン



(d) 原油

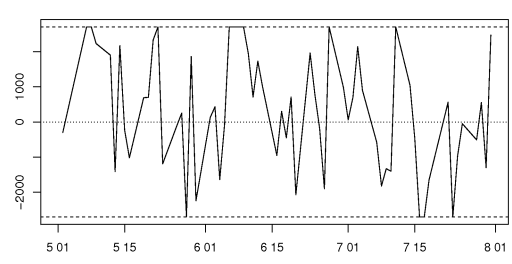
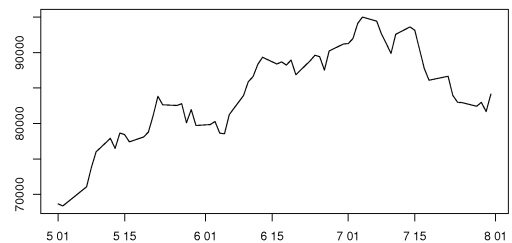
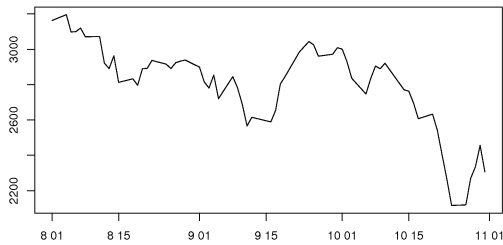
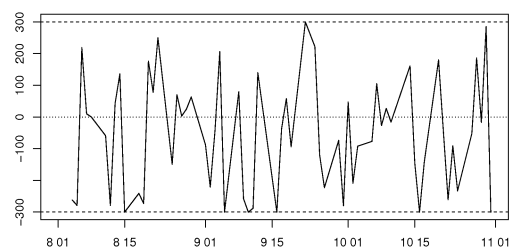
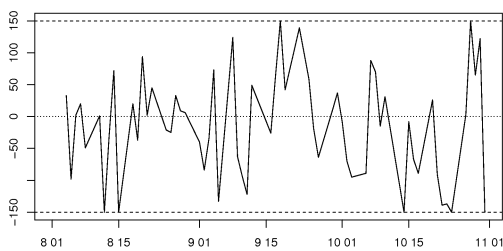
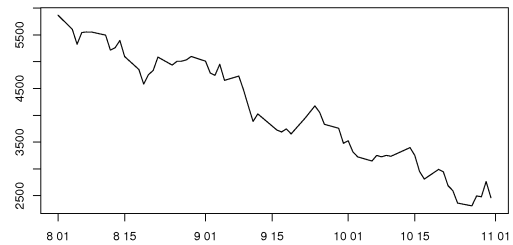


図 4.1: 第 1 期間 : 2008/05/01 から 2008/07/31 までの商品先物の市場価格 P_t (上段) と価格前日差 ΔP_t (下段) の推移. 価格前日差の図中にある上下の破線は, 値幅制限の上限と下限を示す

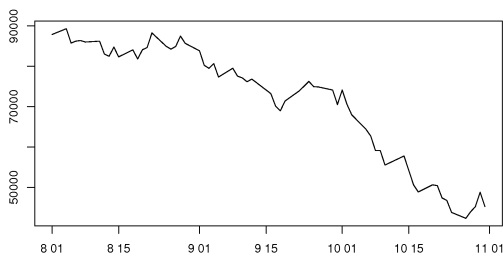
(a) 金



(b) 白金



(c) ガソリン



(d) 原油

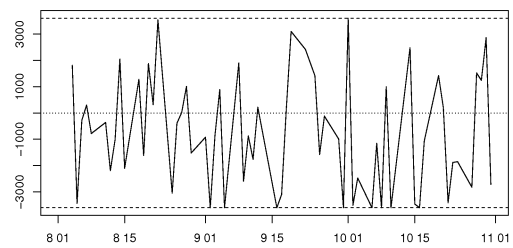
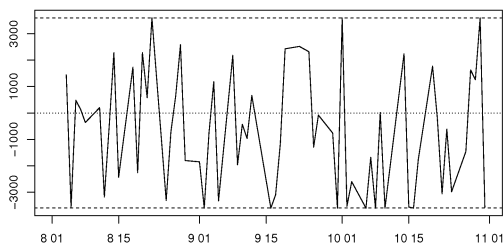
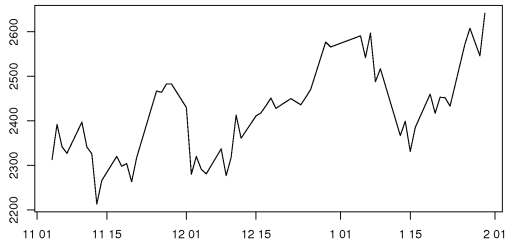
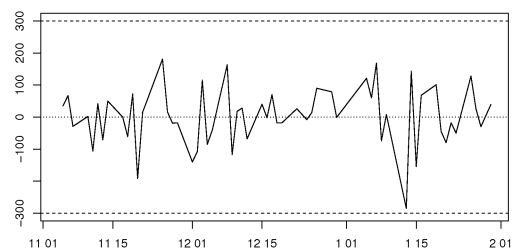
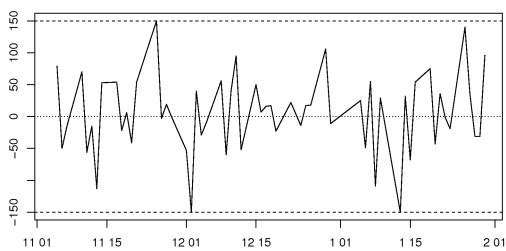
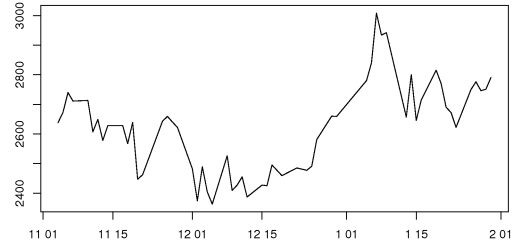


図 4.2: 第 2 期間 : 2008/8/1 から 2008/10/31 までの商品先物の市場価格 P_t (上段) と価格前日差 ΔP_t (下段) の推移. 価格前日差の図中にある上下の破線は, 値幅制限の上限と下限を示す

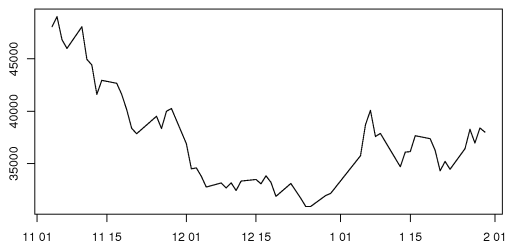
(a) 金



(b) 白金



(c) ガソリン



(d) 原油

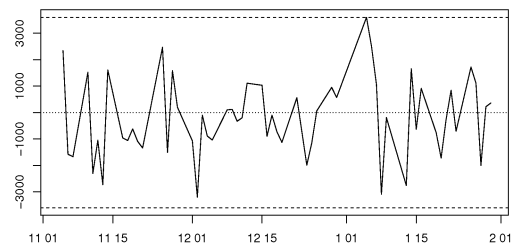
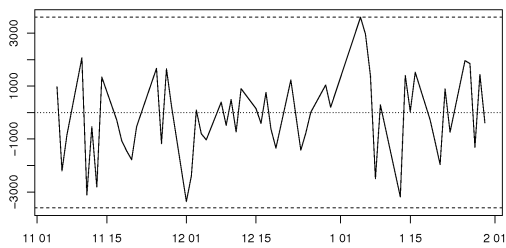
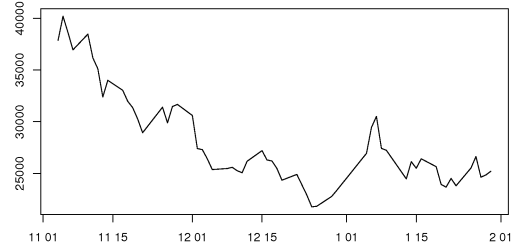


図 4.3: 第 3 期間 : 2008/11/01 から 2009/01/31 までの商品先物の市場価格 P_t (上段) と価格前日差 ΔP_t (下段) の推移. 価格前日差の図中にある上下の破線は, 値幅制限の上限と下限を示す

4.2 価格変動の構造への影響

本節では、値幅制限が価格変動の構造に与える影響について分析する。商品先物の価格変動構造の推定に際しては、0次から3次までの4種類のARモデルを当てはめる。また、値幅制限が価格変動に与える影響を調べるために、データ補間を行ってパラメタ推定をした場合とデータ補間を行わずにパラメタ推定をした場合の2種類の推定法を採用するので、結果として、1つの商品先物価格の系列に対して8通りの推定アルゴリズムを適用する。なお、それぞれの推定アルゴリズムでは、12,000回の試行を繰り返した後、最初の2,000回を捨て、残りの10,000回の平均値をパラメタの推定値として採用する。次数選択に際しては、DICを採用する。なお、それぞれの次数で初期条件として与えるデータは、分析期間以前の価格データを採用する。具体的には、AR(1)モデルであれば ΔX_0 、AR(2)モデルであれば ΔX_0 、 ΔX_{-1} 、AR(3)モデルであれば ΔX_0 、 ΔX_{-1} 、 ΔX_{-2} が該当する。

はじめに、今回の数値実験における条件付事後分布の収束状況について述べておくと、Gewekeの統計量の絶対値はすべて1.645以内に収まっていたため、有意水準10%ですべての事後分布は収束していると判断した。また、IFの値は、商品、期間などで目立った特徴はなく、2.00程度で推移しており、大きなものでも高々2.73であったため、本論文で用いたアルゴリズムはサンプリングの効率性については問題ないと判断して良いだろう。なお、イノベーションの独立性についてであるが、DICによって選択されたモデルを当てはめた際の誤差項についてLjung-Box検定をかけたところ、10,000回の試行回数のうち有意水準10%で帰無仮説が棄却された試行は多いものでも高々1割程度に過ぎなかった。誤差項に系列相関が残っていた系列の割合が設定した有意水準程度に過ぎないため、今回の分析では誤差項に系列相関が残っていないと判断した。

それぞれの期間における各商品へのモデルの当てはめ結果を表4.1にまとめた。表中には、それぞれの商品の制限値段幅 L と当該期間中に値幅制限に抵触した回数をストップ高とストップ安に分けて記している。また、データ補間を行なった

表 4.1: 各期間における AR モデルの次数

期間	商品名	制限値段幅 (L)[円]	値幅制限抵触回数		選択次数	
			ストップ高	ストップ安	補間あり	補間なし
第 1 期間	金	150	0	0	0	0
自:2008/05/01	白金	300	1	1	0	0
至:2008/07/31	ガソリン	2,700	7	3	0	1
	原油	2,700	7	3	0	1
第 2 期間	金	150	2	5	0	0
自:2008/08/01	白金	300	1	6	0	0
至:2008/10/31	ガソリン	3,600	3	7	1	0
	原油	3,600	1	8	1	0
第 3 期間	金	150	1	2	1	1
自:2008/11/04	白金	300	0	0	1	1
至:2009/01/30	ガソリン	3,600	1	0	0	0
	原油	3,600	1	0	0	0

注) 選択次数については 2 種類のものを記載している。補間なしとは、値幅制限に抵触した場合であってもデータ補間を行わずに AR モデルを当てはめた場合に選択される次数である。補間ありとは、データ補間と同時に AR モデルの推定を行った場合に選択される次数である。

場合と行わない場合のそれぞれについて、DIC で選択された自己回帰モデルの次数を記してある。第 1 期間のガソリンと原油、第 2 期間の白金、ガソリン、原油のように、値幅制限に多く抵触している場合に選択される AR モデルの次数がデータ補間の有無によって変化しているものがある。以下では、各期間の商品ごとにパラメタの詳しい推定結果をまとめ、値幅制限と価格変動の構造の関係について論じていく。

第 1 期間

はじめに、第 1 期間の商品ごとのパラメタ推定の詳細について、金を表 4.2、白金を表 4.3、ガソリンを表 4.4、原油を表 4.5 にそれぞれまとめた。

第 1 期間は、ガソリンと原油の値動きが大きいことが特徴である。値幅制限に抵触した回数は、ガソリンと原油では、ストップ高 7 回、ストップ安 3 回の計 10 回である。この期間の観測数は 62 日間であるので、観測不能となった割合は 16.13% にのぼる。

表 4.2: 第 1 期間の金における各パラメタの推定結果

(a) データ補間あり

モデル		μ	σ	ϕ_{11}	ϕ_{22}	ϕ_{33}
AR(0) 0	事後平均	4.22	34.72			
	事後標準偏差	3.11	15.02			
	90% 信用区間	(-0.84, 9.35)	(29.81, 40.24)			
AR(1) 1.20	事後平均	4.42	34.75	-0.11		
	事後標準偏差	3.14	14.92	0.13		
	90% 信用区間	(-0.70, 9.57)	(29.78, 40.16)	(-0.32, 0.10)		
AR(2) 3.29	事後平均	3.63	35.06	-0.11	0.05	
	事後標準偏差	3.22	15.16	0.14	0.13	
	90% 信用区間	(-1.98, 6.26)	(30.01, 40.57)	(-0.37, 0.00)	(-0.16, 0.15)	
AR(3) 8.14	事後平均	4.23	35.35	-0.04	-0.02	-0.19
	事後標準偏差	3.19	19.50	0.15	0.36	0.13
	90% 信用区間	(-1.03, 9.48)	(29.70, 41.78)	(-0.25, 0.12)	(-0.69, 0.68)	(-0.41, 0.02)

(b) データ補間なし

モデル		μ	σ	ϕ_{11}	ϕ_{22}	ϕ_{33}
AR(0) 0	事後平均	4.23	34.71			
	事後標準偏差	3.12	14.93			
	90% 信用区間	(-0.88, 9.48)	(29.85, 40.13)			
AR(1) 1.13	事後平均	4.50	34.77	-0.11		
	事後標準偏差	3.02	15.06	0.13		
	90% 信用区間	(-0.55, 9.43)	(29.78, 40.31)	(-0.32, 0.10)		
AR(2) 3.22	事後平均	3.57	35.05	-0.12	0.06	
	事後標準偏差	3.19	15.17	0.14	0.12	
	90% 信用区間	(-1.98, 6.13)	(30.03, 40.62)	(-0.37, 0.00)	(-0.16, 0.16)	
AR(3) 7.71	事後平均	4.26	35.27	-0.04	-0.02	-0.19
	事後標準偏差	3.25	19.04	0.14	0.36	0.13
	90% 信用区間	(-1.19, 9.52)	(29.65, 41.56)	(-0.25, 0.12)	(-0.69, 0.67)	(-0.40, 0.01)

注：モデル名の下にある数字は 4 つのモデルの中で最小となった DIC の値との差であり，0 が記入されているモデルが DIC の意味で最も当てはまりがよいモデルである。

データ補間の有無と選択される AR モデルの関係について検証しよう。ガソリン、原油ともに、データ補間を行った場合には AR モデルが選択されなかったため、値幅制限の制約が課されない真の価格変動は騰落に方向性がなく特定の構造を持たないものと考えられる。一方で、データ補間を行わない場合にはいずれの商品においても AR(1) が選択されており、ガソリンの係数の推定値は 0.23、事後標準偏差は 0.13、90% 信用区間は (0.02, 0.44) であり係数の推定値は正であると判断できる。また、原油の係数の推定値は 0.20、事後標準偏差は 0.13、90% 信用区間は (-0.02, 0.40) であり、推定値は正の傾向を持つと考えられる。したがって、値幅制限制度下のガソリンと原油の価格変動の構造は正の係数をもつ AR(1) と判断でき、前日の騰落と同じ方向に価格が変動する傾向があったと考えられる。デー

表 4.3: 第 1 期間の白金における各パラメタの推定結果

(a) データ補間あり

モデル		μ	σ	ϕ_{11}	ϕ_{22}	ϕ_{33}
AR(0) 0	事後平均	-2.49	130.40			
	事後標準偏差	11.38	56.59			
	90% 信用区間	(-21.13, 16.28)	(111.73, 151.14)			
AR(1) 1.41	事後平均	-2.52	131.19	-0.09		
	事後標準偏差	11.37	57.66	0.13		
	90% 信用区間	(-21.27, 16.39)	(112.30, 152.55)	(-0.32, 0.13)		
AR(2) 0.16	事後平均	-3.58	128.62	-0.14	0.27	
	事後標準偏差	11.36	56.43	0.19	0.13	
	90% 信用区間	(-23.35, 5.61)	(109.67, 149.41)	(-0.48, 0.01)	(0.04, 0.37)	
AR(3) 2.45	事後平均	-2.91	129.88	0.11	0.02	-0.22
	事後標準偏差	11.46	64.22	0.11	0.25	0.13
	90% 信用区間	(-22.03, 15.91)	(109.71, 152.50)	(-0.05, 0.26)	(-0.42, 0.44)	(-0.43, -0.01)

(b) データ補間なし

モデル		μ	σ	ϕ_{11}	ϕ_{22}	ϕ_{33}
AR(0) 0	事後平均	-2.39	126.88			
	事後標準偏差	11.40	54.92			
	90% 信用区間	(-21.12, 16.51)	(108.88, 147.07)			
AR(1) 1.87	事後平均	-2.58	127.67	-0.04		
	事後標準偏差	11.24	55.19	0.13		
	90% 信用区間	(-21.26, 15.73)	(109.46, 147.82)	(-0.25, 0.18)		
AR(2) 0.55	事後平均	-3.41	125.35	-0.05	0.25	
	事後標準偏差	11.27	54.10	0.18	0.13	
	90% 信用区間	(-23.45, 5.68)	(107.46, 144.56)	(-0.37, 0.09)	(0.03, 0.35)	
AR(3) 1.30	事後平均	-2.71	124.53	0.12	0.02	-0.22
	事後標準偏差	11.18	59.29	0.10	0.23	0.13
	90% 信用区間	(-21.01, 15.54)	(105.84, 144.529)	(-0.03, 0.27)	(-0.35, 0.42)	(-0.43, -0.02)

注：モデル名の下にある数字は 4 つのモデルの中で最小となった DIC の値との差であり，0 が記入されているモデルが DIC の意味で最も当てはまりがよいモデルである。

タ補間の有無によって，価格変動の構造に差が生じた原因は，値幅制限によって上昇（または下落）し尽くせなかった価格の影響が翌日以降に残された結果，同じ騰落の符号が続きやすくなり，制度による見かけ上の AR(1) を検知してしまったと考えられる。

次に，データ補間が価格変動の大きさに与える影響を検証するため，イノベーションの標準偏差の推定値の推移に注目しよう。データ補間なしの場合からデータ補間ありの場合の推定値について述べていくと，ガソリンでは 1584.24 から 2066.18，原油では 1624.97 から 2069.28 とそれぞれ増加している。値幅制限によって価格変動が抑制されているため，適切にデータ補間を行わないと価格変動を小さく推定してしまう。本来の価格変動の大きさよりも小さい推定値を採用することは，次

表 4.4: 第 1 期間のガソリンにおける各パラメタの推定結果

(a) データ補間あり

モデル		μ	σ	ϕ_{11}	ϕ_{22}	ϕ_{33}
AR(0) 0	事後平均	250.68	2066.18			
	事後標準偏差	162.21	1125.37			
	90% 信用区間	(-16.11, 516.36)	(1657.64, 2574.10)			
AR(1) 2.31	事後平均	232.73	2095.68	0.01		
	事後標準偏差	159.69	1154.48	0.14		
	90% 信用区間	(-30.62, 495.18)	(1671.60, 2619.85)	(-0.22, 0.25)		
AR(2) 4.01	事後平均	216.41	2122.53	0.01	-0.07	
	事後標準偏差	161.46	1175.02	0.14	0.15	
	90% 信用区間	(-60.37, 346.46)	(1691.90, 2652.94)	(-0.23, 0.12)	(-0.33, 0.05)	
AR(3) 3.77	事後平均	235.38	2105.83	-0.03	0.00	-0.06
	事後標準偏差	162.34	1169.01	0.11	0.12	0.13
	90% 信用区間	(-29.05, 501.84)	(1681.98, 2625.59)	(-0.21, 0.14)	(-0.08, 0.10)	(-0.28, 0.16)

(b) データ補間なし

モデル		μ	σ	ϕ_{11}	ϕ_{22}	ϕ_{33}
AR(0) 1.17	事後平均	152.69	1613.49			
	事後標準偏差	144.54	689.93			
	90% 信用区間	(-85.42, 389.37)	(1388.18, 1864.37)			
AR(1) 0	事後平均	130.61	1584.24	0.23		
	事後標準偏差	144.10	684.87	0.13		
	90% 信用区間	(-110.31, 367.43)	(1357.95, 1834.55)	(0.02, 0.44)		
AR(2) 2.13	事後平均	109.35	1597.91	0.24	0.03	
	事後標準偏差	143.40	697.06	0.14	0.13	
	90% 信用区間	(-139.21, 225.92)	(1368.22, 1855.73)	(0.00, 0.34)	(-0.20, 0.13)	
AR(3) 2.68	事後平均	124.42	1605.70	0.12	0.00	-0.09
	事後標準偏差	143.14	704.19	0.08	0.09	0.13
	90% 信用区間	(-113.01, 357.08)	(1370.70, 1856.72)	(-0.01, 0.24)	(-0.04, 0.05)	(-0.31, 0.12)

注：モデル名の下にある数字は 4 つのモデルの中で最小となった DIC の値との差であり，0 が記入されているモデルが DIC の意味で最も当てはまりがよいモデルである。

節以降で述べる，市場リスク，信用リスクを過小評価につながるおそれがあるために注意を要する。

表 4.5: 第 1 期間の原油における各パラメタの推定結果

(a) データ補間あり

モデル		μ	σ	ϕ_{11}	ϕ_{22}	ϕ_{33}
AR(0) 0	事後平均	250.58	2069.28			
	事後標準偏差	161.47	1146.59			
	90% 信用区間	(-11.88, 518.05)	(1655.35, 2582.35)			
AR(1) 1.87	事後平均	235.78	2089.98	0.01		
	事後標準偏差	161.84	1122.64	0.14		
	90% 信用区間	(-32.41, 500.17)	(1675.23, 2593.47)	(-0.22, 0.25)		
AR(2) 3.69	事後平均	217.63	2122.31	0.01	-0.07	
	事後標準偏差	163.38	1171.19	0.14	0.15	
	90% 信用区間	(-66.56, 349.99)	(1696.93, 2461.60)	(-0.23, 0.12)	(-0.32, 0.05)	
AR(3) 3.18	事後平均	237.29	2103.61	-0.03	0.00	-0.06
	事後標準偏差	163.45	1153.68	0.11	0.12	0.13
	90% 信用区間	(-30.06, 504.48)	(1686.32, 2622.08)	(-0.21, 0.14)	(-0.09, 0.09)	(-0.28, 0.15)

(b) データ補間なし

モデル		μ	σ	ϕ_{11}	ϕ_{22}	ϕ_{33}
AR(0) 0.23	事後平均	251.44	1639.71			
	事後標準偏差	147.49	702.47			
	90% 信用区間	(11.22, 494.11)	(1411.58, 1889.10)			
AR(1) 0	事後平均	222.14	1624.97	0.20		
	事後標準偏差	143.37	698.88	0.13		
	90% 信用区間	(-9.37, 458.05)	(1395.90, 1873.55)	(-0.02, 0.40)		
AR(2) 2.17	事後平均	195.32	1639.35	0.18	0.08	
	事後標準偏差	146.00	708.95	0.15	0.13	
	90% 信用区間	(-57.77, 313.80)	(1407.99, 1903.39)	(-0.06, 0.30)	(-0.16, 0.18)	
AR(3) 2.55	事後平均	216.39	1640.84	0.10	0.00	-0.04
	事後標準偏差	146.57	731.70	0.09	0.10	0.13
	90% 信用区間	(-22.34, 457.86)	(1403.35, 1896.77)	(-0.03, 0.25)	(-0.06, 0.06)	(-0.25, 0.17)

注：モデル名の下にある数字は 4 つのモデルの中で最小となった DIC の値との差であり，0 が記入されているモデルが DIC の意味で最も当てはまりがよいモデルである。

第2期間

第2期間は、すべての商品の価格が急落し、値幅制限に多く抵触した時期である。パラメタ推定の詳細については、金を表4.6、白金を表4.7、ガソリンを表4.8、原油を表4.9にそれぞれまとめた。

表 4.6: 第2期間の金における各パラメタの推定結果

(a) データ補間あり

モデル		μ	σ	ϕ_{11}	ϕ_{22}	ϕ_{33}
AR(0) 0	事後平均	-14.10	92.44			
	事後標準偏差	7.73	42.64			
	90% 信用区間	(-26.74, -1.43)	(77.97, 109.02)			
AR(1) 1.52	事後平均	-14.26	93.23	-0.03		
	事後標準偏差	7.71	43.00	0.14		
	90% 信用区間	(-26.93, -1.54)	(78.57, 109.80)	(-0.26, 0.21)		
AR(2) 2.75	事後平均	-13.60	93.29	-0.05	0.13	
	事後標準偏差	7.77	42.93	0.18	0.14	
	90% 信用区間	(-26.99, -7.38)	(78.34, 109.63)	(-0.36, 0.09)	(-0.11, 0.25)	
AR(3) 9.40	事後平均	-14.62	93.75	0.04	0.02	-0.09
	事後標準偏差	7.89	52.27	0.16	0.38	0.15
	90% 信用区間	(-27.62, -1.71)	(78.79, 115.74)	(-0.17, 0.26)	(-0.70, 0.74)	(-0.34, 0.14)

(b) データ補間なし

モデル		μ	σ	ϕ_{11}	ϕ_{22}	ϕ_{33}
AR(0) 0	事後平均	-13.84	82.19			
	事後標準偏差	7.36	35.32			
	90% 信用区間	(-26.09, -1.84)	(70.67, 94.88)			
AR(1) 1.44	事後平均	-13.49	82.49	0.10		
	事後標準偏差	7.35	35.69	0.13		
	90% 信用区間	(-25.49, -1.34)	(70.86, 95.71)	(-0.12, 0.31)		
AR(2) 2.52	事後平均	-12.41	82.54	0.10	0.15	
	事後標準偏差	7.31	35.95	0.16	0.14	
	90% 信用区間	(-25.07, -6.47)	(70.70, 95.56)	(-0.18, 0.22)	(-0.09, 0.26)	
AR(3) 6.07	事後平均	-13.44	83.06	0.11	-0.01	-0.11
	事後標準偏差	7.50	44.26	0.12	0.31	0.15
	90% 信用区間	(-25.67, -1.10)	(70.46, 96.63)	(-0.04, 0.28)	(-0.59, 0.55)	(-0.36, 0.12)

注：モデル名の下にある数字は4つのモデルの中で最小となったDICの値との差であり、0が記入されているモデルがDICの意味で最も当てはまりがよいモデルである。

第2期間は全ての商品で価格変動が大きな期間であった。金は、ストップ高2回、ストップ安5回の計7回、白金は、ストップ高1回、ストップ安6回の計7回、ガソリンは、ストップ高3回、ストップ安7回の計10回、原油は、ストップ高1回、ストップ安8回の計9回、それぞれ抵触している。この期間の観測数は62日間であるので、観測不能となった時点は11.29%から16.13%にのぼっている。

ここでも、データ補間の有無と選択されるARモデルの関係を検証する。ガソリン、原油は、データ補間を行うとAR(1)が選択される。ガソリンでは推定値が

表 4.7: 第 2 期間の白金における各パラメタの推定結果

(a) データ補間あり

モデル		μ	σ	ϕ_{11}	ϕ_{22}	ϕ_{33}
AR(0) 0	事後平均	-55.18	196.38			
	事後標準偏差	16.76	89.94			
	90% 信用区間	(-82.61, -27.97)	(165.27, 230.99)			
AR(1) 0.94	事後平均	-59.59	196.76	-0.11		
	事後標準偏差	16.90	89.51	0.14		
	90% 信用区間	(-87.28, -31.74)	(165.88, 230.60)	(-0.34, 0.05)		
AR(2) 2.93	事後平均	-59.57	198.92	-0.11	-0.03	
	事後標準偏差	17.20	90.34	0.14	0.14	
	90% 信用区間	(-89.33, -45.58)	(168.01, 233.63)	(-0.37, 0.01)	(-0.27, 0.08)	
AR(3) 4.06	事後平均	-62.18	198.09	-0.07	0.01	-0.14
	事後標準偏差	18.58	100.65	0.12	0.22	0.15
	90% 信用区間	(-92.69, -32.22)	(165.22, 235.50)	(-0.24, 0.09)	(-0.31, 0.37)	(-0.38, 0.10)

(b) データ補間なし

モデル		μ	σ	ϕ_{11}	ϕ_{22}	ϕ_{33}
AR(0) 0	事後平均	-55.19	177.71			
	事後標準偏差	15.92	75.84			
	90% 信用区間	(-81.59, -29.18)	(153.20, 204.94)			
AR(1) 1.97	事後平均	-56.48	179.10	-0.01		
	事後標準偏差	16.13	77.19	0.13		
	90% 信用区間	(-82.90, -29.27)	(153.53, 206.82)	(-0.23, 0.20)		
AR(2) 3.88	事後平均	-56.51	180.72	-0.01	-0.02	
	事後標準偏差	16.43	78.62	0.13	0.13	
	90% 信用区間	(-84.96, -43.20)	(154.70, 208.68)	(-0.24, 0.09)	(-0.25, 0.09)	
AR(3) 4.93	事後平均	-61.58	179.28	-0.02	0.01	-0.20
	事後標準偏差	17.98	89.19	0.11	0.23	0.14
	90% 信用区間	(-91.06, -32.83)	(152.90, 207.93)	(-0.18, 0.12)	(-0.35, 0.38)	(-0.43, 0.02)

注：モデル名の下にある数字は 4 つのモデルの中で最小となった DIC の値との差であり，0 が記入されているモデルが DIC の意味で最も当てはまりがよいモデルである。

-0.25, 事後標準偏差が 0.14, 90%信用区間が (-0.47, -0.02), 原油では推定値が -0.27, 事後標準偏差が 0.13, 90%信用区間が (-0.49, -0.06) であり, 両者ともに係数が負であると判断できる. 真の価格変動が負の係数の AR(1) モデルに従うとは, 値幅制限がなければ下落と回復を繰り返す振動の激しい挙動を示すと考えられる. その一方で, データ補間を行わない場合には AR モデルが選択されず価格変動には特定の構造がないと判断できる. 本来の価格変動がもつ, 負の係数の AR(1) の性質が値幅制限下では観測されなくなった原因としては, 次のことが考えられる. ガソリンと原油の価格は, 価格変動に制限がない状態であれば, 当日に価格が下落し尽くし翌日に回復する, 価格が振動するような挙動を示すはずである. しかしながら, 値幅制限により価格変動を抑制すると, 当日に価格が下がりきらなかつ

表 4.8: 第 2 期間のガソリンにおける各パラメタの推定結果

(a) データ補間あり

モデル		μ	σ	ϕ_{11}	ϕ_{22}	ϕ_{33}
AR(0) 3.72	事後平均	-687.16	2761.19			
	事後標準偏差	219.43	1364.96			
	90% 信用区間	(-1046.29, -327.03)	(2265.69, 3330.01)			
AR(1) 0	事後平均	-768.89	2670.90	-0.25		
	事後標準偏差	219.70	1280.75	0.14		
	90% 信用区間	(-1129.76, -406.26)	(2222.70, 3179.26)	(-0.47, -0.02)		
AR(2) 3.34	事後平均	-711.66	2725.96	-0.33	0.13	
	事後標準偏差	228.06	1332.60	0.19	0.15	
	90% 信用区間	(-1111.43, -528.55)	(2254.15, 3268.60)	(-0.69, -0.18)	(-0.13, 0.24)	
AR(3) 0.81	事後平均	-786.83	2664.94	-0.04	0.00	-0.27
	事後標準偏差	228.89	1315.08	0.10	0.06	0.14
	90% 信用区間	(-1158.85, -404.73)	(2194.51, 3204.74)	(-0.20, 0.11)	(-0.02, 0.02)	(-0.49, -0.04)

(b) データ補間なし

モデル		μ	σ	ϕ_{11}	ϕ_{22}	ϕ_{33}
AR(0) 0	事後平均	-685.57	2279.07			
	事後標準偏差	201.57	979.79			
	90% 信用区間	(-1016.95, -354.51)	(1957.88, 2573.37)			
AR(1) 0.71	事後平均	-750.36	2272.55	-0.14		
	事後標準偏差	209.67	979.05	0.13		
	90% 信用区間	(-1094.75, -402.67)	(1949.72, 2597.99)	(-0.35, 0.07)		
AR(2) 1.87	事後平均	-671.69	2274.97	-0.19	0.10	
	事後標準偏差	213.84	988.39	0.17	0.13	
	90% 信用区間	(-1040.73, -500.58)	(1944.21, 2599.97)	(-0.51, -0.06)	(-0.13, 0.21)	
AR(3) 0.16	事後平均	-752.03	2239.06	0.03	0.00	-0.25
	事後標準偏差	215.36	982.45	0.08	0.09	0.13
	90% 信用区間	(-1107.67, -394.02)	(1916.24, 2598.99)	(-0.11, 0.16)	(-0.06, 0.05)	(-0.46, -0.04)

注：モデル名の下にある数字は 4 つのモデルの中で最小となった DIC の値との差であり，0 が記入されているモデルが DIC の意味で最も当てはまりがよいモデルである。

た影響が翌日にも残り，価格の回復が鈍るないしは続落するようになった結果，価格が本来もつ下落と回復を繰り返すような状況ではなく，価格変動に特別な構造がないような見かけ上の状況を拾うようになったと考えられる。なお，金と白金はデータ補間の有無によらずに自己回帰構造がみられない。

引き続き，標準偏差の推定値に注目しながら，価格変動の大きさについて考える。推定された標準偏差の値は，白金，ガソリン，原油の 3 商品ではデータ補間を行うことで推定値が大きく増加する。白金では 177.71 から 196.38 に増加しており，同時期の制限値段幅 300 円と比較して高い水準であるため，値幅制限に抵触する可能性が高い。また，ガソリンは 2279.07 から 2670.90，原油は 2156.47 から 2466.42 にそれぞれ増加している。同時期の制限値段幅は双方ともに 3,600 円であ

表 4.9: 第 2 期間の原油における各パラメタの推定結果

(a) データ補間あり

モデル		μ	σ	ϕ_{11}	ϕ_{22}	ϕ_{33}
AR(0) 4.27	事後平均	-741.06	2557.24			
	事後標準偏差	206.89	1250.33			
	90% 信用区間	(-1076.67, -404.70)	(2111.28, 3073.34)			
AR(1) 0	事後平均	-841.73	2466.42	-0.27		
	事後標準偏差	205.52	1155.96	0.13		
	90% 信用区間	(-1176.05, -501.15)	(2065.20, 2930.28)	(-0.49, -0.06)		
AR(2) 3.53	事後平均	-775.23	2518.27	-0.36	0.15	
	事後標準偏差	214.24	1223.48	0.19	0.14	
	90% 信用区間	(-1147.63, -599.94)	(2083.18, 3022.23)	(-0.73, -0.21)	(-0.10, 0.26)	
AR(3) 2.50	事後平均	-835.76	2494.22	-0.03	0.00	-0.23
	事後標準偏差	217.04	1214.70	0.10	0.08	0.13
	90% 信用区間	(-1191.53, -478.08)	(2067.24, 2979.61)	(-0.20, 0.12)	(-0.04, 0.04)	(-0.44, 0.00)

(b) データ補間なし

モデル		μ	σ	ϕ_{11}	ϕ_{22}	ϕ_{33}
AR(0) 0	事後平均	-739.36	2156.47			
	事後標準偏差	193.72	923.63			
	90% 信用区間	(-1055.16, -417.88)	(1857.10, 2490.67)			
AR(1) 0.21	事後平均	-814.47	2141.17	-0.16		
	事後標準偏差	194.16	928.67	0.12		
	90% 信用区間	(-1131.70, -497.24)	(1837.65, 2480.12)	(-0.36, 0.05)		
AR(2) 1.09	事後平均	-722.17	2139.43	-0.23	0.19	
	事後標準偏差	203.49	932.63	0.18	0.13	
	90% 信用区間	(-1077.88, -555.71)	(1829.32, 2482.17)	(-0.56, -0.09)	(-0.03, 0.29)	
AR(3) 0.72	事後平均	-804.23	2128.67	0.03	0.00	-0.23
	事後標準偏差	210.04	946.99	0.09	0.10	0.13
	90% 信用区間	(-1144.60, -460.72)	(1825.43, 2471.05)	(-0.11, 0.17)	(-0.05, 0.06)	(-0.44, -0.03)

注：モデル名の下にある数字は 4 つのモデルの中で最小となった DIC の値との差であり，0 が記入されているモデルが DIC の意味で最も当てはまりがよいモデルである。

り，こちらも同様に値幅制限に抵触する可能性が高い．第 1 期間と同様に，値幅制限に抵触しやすい期間では適切にデータ補間を行うことの必要性が示されている．

第3期間

第3期間における各商品へのモデルの当てはめ結果については、金を表4.10、白金を表4.11、ガソリンを表4.12、原油を表4.13にまとめている。

この期間は、すべての商品の価格が落ち着きを取り戻した時期である。そのため、他の期間に比べて価格変動は小さく、値幅制限にはほとんど抵触しない。その回数は、金でストップ高1回、ストップ安2回の計3回のほか、ガソリン、原油でそれぞれストップ高を1回記録したにとどまる。そのため、データ補間の有無と選択された自己回帰モデルに差はみられず、パラメタの推定値も同様に差は観測されなかった。

表 4.10: 第3期間の金における各パラメタの推定結果

(a) データ補間あり						
モデル		μ	σ	ϕ_{11}	ϕ_{22}	ϕ_{33}
AR(0) 2.19	事後平均	5.71	66.63			
	事後標準偏差	5.98	30.65			
	90% 信用区間	(-4.23, 15.38)	(56.14, 78.24)			
AR(1) 0	事後平均	6.36	64.93	-0.25		
	事後標準偏差	5.89	29.17	0.14		
	90% 信用区間	(-3.31, 16.09)	(55.05, 75.95)	(-0.47, -0.02)		
AR(2) 2.34	事後平均	5.09	65.70	-0.25	0.00	
	事後標準偏差	6.06	30.08	0.15	0.14	
	90% 信用区間	(-5.35, 10.00)	(55.44, 77.45)	(-0.51, -0.13)	(-0.24, 0.10)	
AR(3) 8.18	事後平均	5.80	67.83	-0.13	0.01	0.03
	事後標準偏差	6.19	34.75	0.16	0.32	0.15
	90% 信用区間	(-4.38, 16.00)	(56.50, 80.98)	(-0.38, 0.08)	(-0.60, 0.63)	(-0.22, 0.27)
(b) データ補間なし						
モデル		μ	σ	ϕ_{11}	ϕ_{22}	ϕ_{33}
AR(0) 0.48	事後平均	5.79	62.45			
	事後標準偏差	5.80	27.38			
	90% 信用区間	(-3.83, 15.24)	(53.42, 72.71)			
AR(1) 0	事後平均	6.32	61.76	-0.21		
	事後標準偏差	5.70	27.35	0.13		
	90% 信用区間	(-3.08, 15.64)	(52.78, 71.86)	(-0.43, -0.01)		
AR(2) 2.30	事後平均	5.09	62.57	-0.21	0.00	
	事後標準偏差	5.97	27.67	0.14	0.14	
	90% 信用区間	(-5.26, 9.95)	(53.40, 72.88)	(-0.47, -0.10)	(-0.23, 0.11)	
AR(3) 9.06	事後平均	5.80	64.47	-0.10	0.02	0.02
	事後標準偏差	6.08	34.34	0.17	0.36	0.15
	90% 信用区間	(-4.09, 15.74)	(53.93, 76.73)	(-0.36, 0.12)	(-0.67, 0.70)	(-0.23, 0.26)

注：モデル名の下にある数字は4つのモデルの中で最小となったDICの値との差であり、0が記入されているモデルがDICの意味で最も当てはまりがよいモデルである。

表 4.11: 第 3 期間の白金における各パラメタの推定結果

(a) データ補間あり

モデル		μ	σ	ϕ_{11}	ϕ_{22}	ϕ_{33}
AR(0) 1.45	事後平均	2.57	90.28			
	事後標準偏差	8.37	39.74			
	90% 信用区間	(-11.14, 16.28)	(77.09, 105.30)			
AR(1) 0	事後平均	4.99	88.38	-0.24		
	事後標準偏差	8.36	39.37	0.13		
	90% 信用区間	(-8.57, 18.74)	(75.28, 103.06)	(-0.45, -0.03)		
AR(2) 2.12	事後平均	2.43	89.20	-0.24	0.02	
	事後標準偏差	8.75	39.65	0.14	0.12	
	90% 信用区間	(-12.55, 9.62)	(75.76, 104.03)	(-0.47, -0.13)	(-0.20, 0.12)	
AR(3) 7.15	事後平均	4.37	91.86	-0.10	-0.05	-0.04
	事後標準偏差	9.02	45.54	0.14	0.30	0.13
	90% 信用区間	(-10.54, 19.28)	(77.42, 107.99)	(-0.30, 0.08)	(-0.60, 0.53)	(-0.24, 0.17)

(b) データ補間なし

モデル		μ	σ	ϕ_{11}	ϕ_{22}	ϕ_{33}
AR(0) 1.50	事後平均	2.66	90.28			
	事後標準偏差	8.39	39.81			
	90% 信用区間	(-11.09, 16.47)	(76.86, 105.04)			
AR(1) 0	事後平均	4.83	88.26	-0.24		
	事後標準偏差	8.35	38.82	0.13		
	90% 信用区間	(-8.84, 18.65)	(75.34, 102.64)	(-0.45, -0.02)		
AR(2) 2.14	事後平均	2.39	89.09	-0.24	0.02	
	事後標準偏差	8.71	39.52	0.13	0.13	
	90% 信用区間	(-12.70, 9.42)	(75.83, 103.97)	(-0.48, -0.13)	(-0.19, 0.12)	
AR(3) 6.57	事後平均	4.12	91.61	-0.10	-0.05	-0.04
	事後標準偏差	9.11	44.48	0.14	0.29	0.12
	90% 信用区間	(-11.00, 19.15)	(77.43, 107.44)	(-0.30, 0.08)	(-0.59, 0.51)	(-0.24, 0.17)

注：モデル名の下にある数字は 4 つのモデルの中で最小となった DIC の値との差であり，0 が記入されているモデルが DIC の意味で最も当てはまりがよいモデルである。

表 4.12: 第 3 期間のガソリンにおける各パラメタの推定結果

(a) データ補間あり

モデル		μ	σ	ϕ_{11}	ϕ_{22}	ϕ_{33}
AR(0) 0	事後平均	-177.07	1561.04			
	事後標準偏差	145.19	690.80			
	90% 信用区間	(-415.73, 61.43)	(1333.93, 1821.16)			
AR(1) 1.83	事後平均	-181.86	1573.69	-0.04		
	事後標準偏差	144.99	695.37	0.14		
	90% 信用区間	(-418.75, 52.85)	(1339.14, 1831.05)	(-0.26, 0.19)		
AR(2) 3.56	事後平均	-198.73	1583.73	-0.05	0.10	
	事後標準偏差	147.80	697.91	0.16	0.13	
	90% 信用区間	(-455.42, -78.22)	(1351.14, 1843.11)	(-0.32, 0.08)	(-0.13, 0.21)	
AR(3) 4.69	事後平均	-170.05	1590.97	0.02	0.00	-0.04
	事後標準偏差	150.04	735.47	0.10	0.14	0.13
	90% 信用区間	(-418.27, 73.46)	(1354.73, 1857.25)	(-0.14, 0.18)	(-0.15, 0.13)	(-0.25, 0.17)

(b) データ補間なし

モデル		μ	σ	ϕ_{11}	ϕ_{22}	ϕ_{33}
AR(0) 0	事後平均	-174.95	1550.54			
	事後標準偏差	143.83	683.54			
	90% 信用区間	(-411.64, 60.28)	(1326.87, 1804.72)			
AR(1) 1.94	事後平均	-179.75	1560.39	-0.03		
	事後標準偏差	143.31	688.78	0.14		
	90% 信用区間	(-413.19, 56.31)	(1332.91, 1815.62)	(-0.25, 0.20)		
AR(2) 3.68	事後平均	-197.86	1575.08	-0.03	0.08	
	事後標準偏差	145.78	694.37	0.15	0.13	
	90% 信用区間	(-449.31, -79.92)	(1342.70, 1832.69)	(-0.30, 0.09)	(-0.14, 0.19)	
AR(3) 4.78	事後平均	-171.02	1582.53	0.02	0.00	-0.02
	事後標準偏差	148.68	724.49	0.10	0.14	0.13
	90% 信用区間	(-410.87, 71.12)	(1343.14, 1846.09)	(-0.14, 0.18)	(-0.15, 0.13)	(-0.23, 0.19)

注：モデル名の下にある数字は 4 つのモデルの中で最小となった DIC の値との差であり，0 が記入されているモデルが DIC の意味で最も当てはまりがよいモデルである。

表 4.13: 第 3 期間の原油における各パラメタの推定結果

(a) データ補間あり

モデル		μ	σ	ϕ_{11}	ϕ_{22}	ϕ_{33}
AR(0) 0	事後平均	-221.43	1499.84			
	事後標準偏差	138.35	660.59			
	90% 信用区間	(-448.47, 8.04)	(1279.12, 1746.99)			
AR(1) 1.78	事後平均	-226.49	1510.03	-0.05		
	事後標準偏差	137.91	668.93	0.14		
	90% 信用区間	(-453.63, -0.90)	(1287.97, 1756.95)	(-0.27, 0.18)		
AR(2) 3.93	事後平均	-247.53	1528.02	-0.06	0.04	
	事後標準偏差	142.70	680.39	0.15	0.13	
	90% 信用区間	(-495.02, -130.27)	(1298.77, 1788.55)	(-0.32, 0.06)	(-0.19, 0.15)	
AR(3) 5.33	事後平均	-220.45	1533.86	-0.01	-0.01	-0.01
	事後標準偏差	146.90	743.68	0.11	0.18	0.13
	90% 信用区間	(-459.48, 19.90)	(1294.64, 1798.23)	(-0.18, 0.15)	(-0.24, 0.20)	(-0.22, 0.20)

(b) データ補間なし

モデル		μ	σ	ϕ_{11}	ϕ_{22}	ϕ_{33}
AR(0) 0	事後平均	-220.35	1486.40			
	事後標準偏差	138.20	648.86			
	90% 信用区間	(-449.02, 7.76)	(1274.59, 1727.36)			
AR(1) 1.96	事後平均	-225.17	1501.59	-0.04		
	事後標準偏差	136.59	665.91	0.14		
	90% 信用区間	(-450.31, -v1.87)	(1275.88, 1747.22)	(-0.26, 0.18)		
AR(2) 4.03	事後平均	-248.08	1516.33	-0.05	0.03	
	事後標準偏差	143.23	674.72	0.14	0.13	
	90% 信用区間	(-496.96, -1322.80)	(1290.28, 1772.60)	(-0.29, 0.07)	(-0.20, 0.13)	
AR(3) 5.05	事後平均	-222.10	1523.37	-0.02	-0.01	0.00
	事後標準偏差	147.26	714.32	0.11	0.17	0.13
	90% 信用区間	(-461.29, 21.22)	(1290.25, 1778.57)	(-0.18, 0.15)	(-0.21, 0.20)	(-0.21, 0.21)

注：モデル名の下にある数字は 4 つのモデルの中で最小となった DIC の値との差であり，0 が記入されているモデルが DIC の意味で最も当てはまりがよいモデルである。

以上の3つの期間の分析結果から、価格変動が激しく値幅制限に抵触する回数が多い時期に適切なデータ補間を行わないと、値幅制限という制度によって生み出される見かけ上の価格変動の構造を検知してしまうおそれがあり、加えて、価格変動の大きさを小さく推定する可能性があると結論できる。価格変動の平均構造とイノベーションの標準偏差の大きさは、次節以降で述べるリスク計測に影響を与えるため、適切なデータ補間を行う必要がある。

4.3 市場リスクへの影響

本節では、商品先物を営業日ベースで1日間、5日間（1週間相当）、10日間（2週間相当）、20日間（1ヶ月間相当）保有したときの市場リスクに対して、値幅制限制度が与える影響を調べる。なお、市場リスクの計測に際しては、保有日数に応じたリスク指標 $\text{VaR}_{1\%}$ 、 $\text{ES}_{1\%}$ を、2種類の計測法：値幅制限の影響下での計測（観測価格の前日差 ΔP_t にもとづく評価）と値幅制限が撤廃された状況下での計測（真の価格の前日差 ΔX_t にもとづく評価）を適用する。値幅制限が撤廃された状況下での市場リスクを計測する目的は以下の通りである。投資家ではなく制度設計をする立場からは、値幅制限制度による制限を緩めることで市場リスクに与える影響を観察することが必要である。ここで、最大限緩和した場合は値幅制限を撤廃した状況に等しいため、本節では値幅制限が撤廃された状況下での市場リスクを計測し、値幅制限下の市場リスクと比較することで値幅制限制度が市場リスクに与える影響について分析する。

なお、これ以降、 j 日間保有した場合の市場リスク指標の推定値を $\widehat{\text{VaR}}_{1\%}^{(j)}$ 、 $\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(j)}$ と記す。

第1期間に続く1ヶ月間保有した場合

はじめに、第1期間に続く1ヶ月間である2008年8月に、金、白金、ガソリン、原油のそれぞれを保有した場合を考える。この期間のリスク計測にあたっては、第1期間のパラメタ推定時に生成した10,000本の価格プロセスにもとづいて作成した損益分布を利用する。保有期間に応じた市場リスクの計測結果を、商品別に表4.14にまとめた。また、それぞれの商品における保有期間に応じた累積損益分布について、金を図4.4、白金を図4.5、ガソリンを図4.6、原油を図4.7にそれぞれ示した。なお、それぞれの図中には、上段に値幅制限を課した場合のヒストグラム、下段に値幅制限が撤廃されたと仮定した場合のものを図示した。

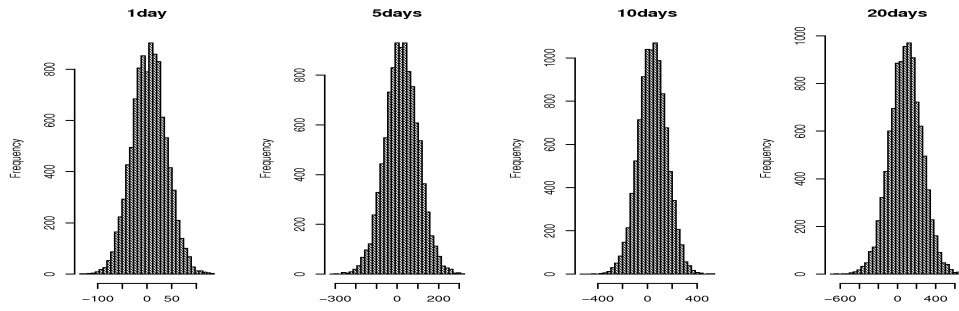
この期間における金の価格変動は、制限値段幅に比較して小さかったため、値幅制限の有無による影響は観測されなかった。一方で、この期間で価格変動が大きかった商品はガソリンと原油である。いずれの商品においても、保有期間が1日間の損益分布の形状には、値幅制限の影響が明確に示されている。保有期間が1日間の場合のリスク指標の値 $\widehat{\text{VaR}}_{1\%}^{(1)}$ 、 $\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(1)}$ は、値幅制限による下限値の-3,600円を記録している。しかし、保有期間を延ばしていくに従って、損益分布の形状は値幅制限による影響が薄れていき、5日間保有した時点では、値幅制限の有無による損益分布の形状の差はほとんどみられない。リスク指標の値を確認しても、保有期間が5日以上の場合には、 $\text{VaR}_{1\%}$ にせよ $\text{ES}_{1\%}$ にせよ、値幅制限の有無による値の差はほとんどみられない。制度の有無による比では、ガソリンと原油では1日間の保有時に $\widehat{\text{VaR}}_{1\%}^{(1)}$ では0.80以下であり、値幅制限による市場リスク低減効果は2割程度あると考えられ、一方、 $\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(1)}$ では制度の有無による比は、ガソリンで0.64、原油で0.67であるので、3割を超えるリスク低減効果があると考えられる。しかし、5日間保有した場合の制度の有無による比のうち最も小さいガソリンの $\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(5)}$ の比が0.96であり、全商品を通したリスク低減効果は高々4%に過ぎず、値幅制限制度によるリスク低減効果が薄れたと判断できる。

表 4.14: 2008 年 8 月の 1 ヶ月間における保有期間ごとの市場リスク

商品	リスク指標	値幅制限の有無	保有期間			
			1 日間	5 日間	10 日間	20 日間
金	$\widehat{\text{VaR}}_{1\%}^{(j)}$	あり	-76.00	-165.01	-222.00	-308.01
		なし	-76.00	-165.01	-222.00	-308.01
			1.00	1.00	1.00	1.00
	$\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(j)}$	あり	-88.28	-194.09	-264.19	-364.63
		なし	-88.28	-194.09	-264.19	-364.63
			1.00	1.00	1.00	1.00
白金	$\widehat{\text{VaR}}_{1\%}^{(j)}$	あり	-300.00	-675.01	-986.01	-1492.02
		なし	-310.00	-676.00	-989.02	-1492.02
			0.97	1.00	1.00	1.00
	$\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(j)}$	あり	-300.00	-788.67	-1139.64	-1726.25
		なし	-350.14	-791.94	-1142.39	-1729.62
			0.86	1.00	1.00	1.00
ガソリン	$\widehat{\text{VaR}}_{1\%}^{(j)}$	あり	-3600.00	-10050.30	-14950.40	-20401.20
		なし	-4660.10	-10310.10	-15040.00	-20521.00
			0.77	0.97	0.99	0.99
	$\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(j)}$	あり	-3600.00	-11667.00	-17656.60	-24303.30
		なし	-5623.70	-12136.90	-17920.80	-24588.10
			0.64	0.96	0.99	0.99
原油	$\widehat{\text{VaR}}_{1\%}^{(j)}$	あり	-3600.00	-9680.00	-13250.10	-18590.10
		なし	-4510.00	-9800.10	-13360.20	-18790.20
			0.80	0.99	0.99	0.99
	$\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(j)}$	あり	-3600.00	-11354.40	-15707.80	-22017.90
		なし	-5338.50	-11744.40	-15924.20	-22143.30
			0.67	0.97	0.99	0.99

各々のリスク指標には、1 行目に値幅制限制度の下での値、2 行目に値幅制限制度を撤廃した場合の値、3 行目には両者の比（「値幅制限制度の下での推定値」 / 「撤廃した場合の推定値」）を記している。

(a) 値幅制限を課した場合 ($L = 150$)



(b) 値幅制限を撤廃した場合

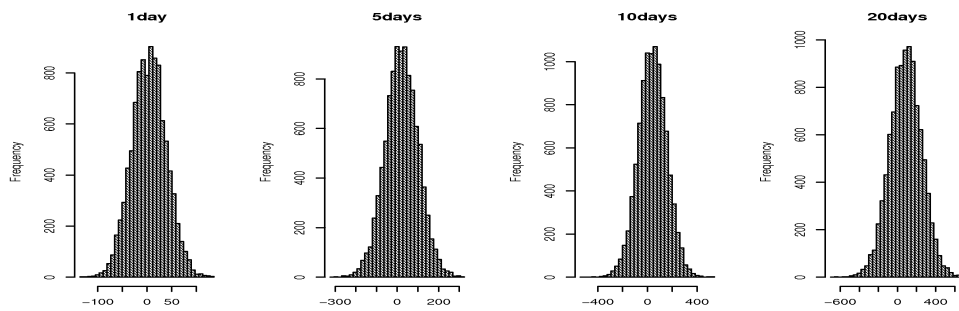
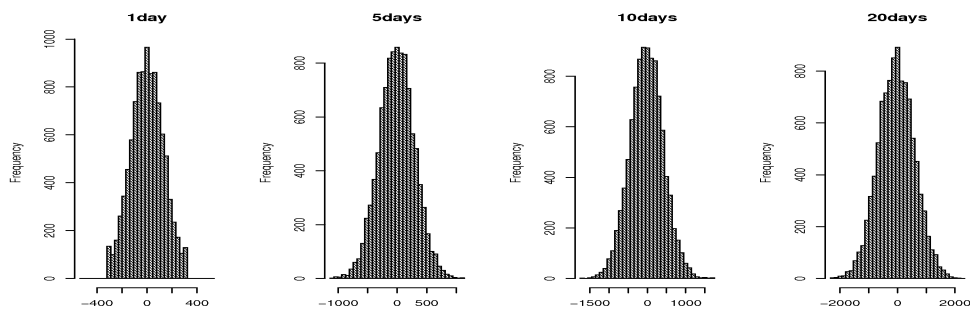


図 4.4: 2008 年 8 月の 1 ヶ月間に金を保有し続けた時の損益の分布

(a) 値幅制限を課した場合 ($L = 300$)



(b) 値幅制限を撤廃した場合

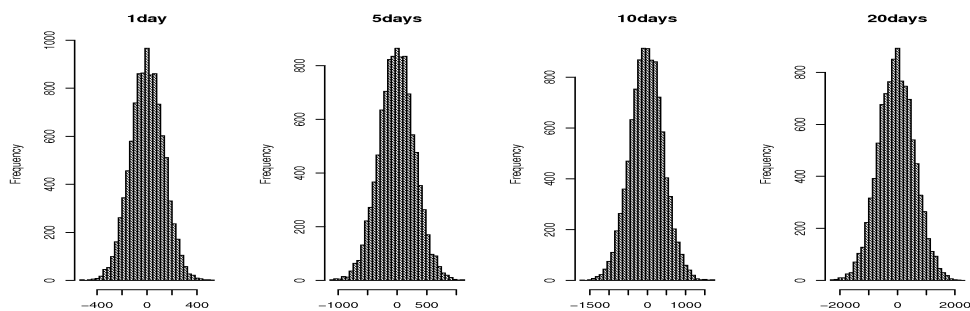
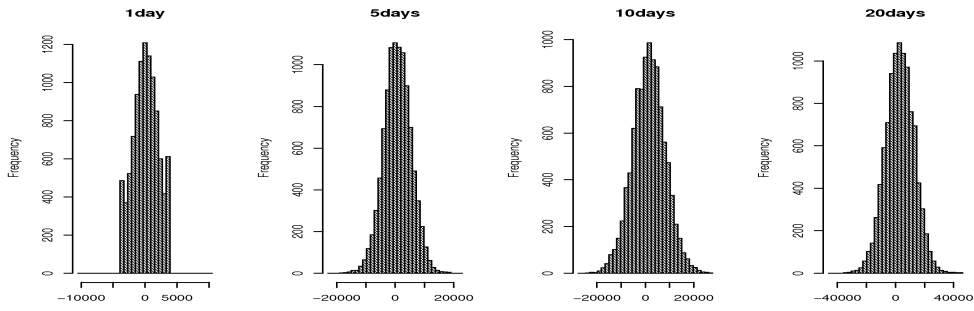


図 4.5: 2008 年 8 月の 1 ヶ月間に白金を保有し続けた時の損益の分布

(a) 値幅制限を課した場合 ($L = 3600$)



(b) 値幅制限を撤廃した場合

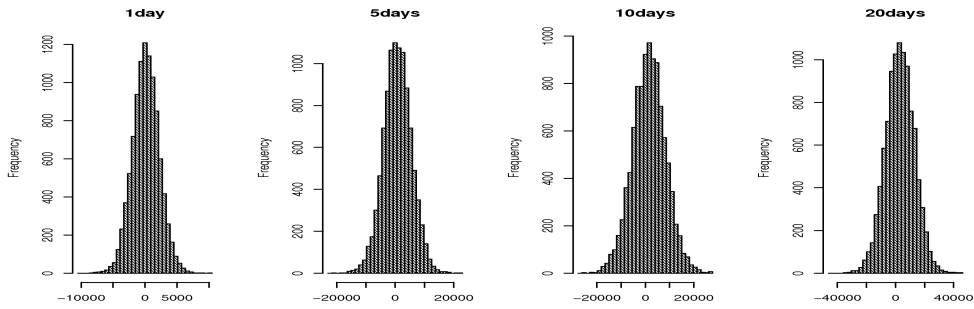
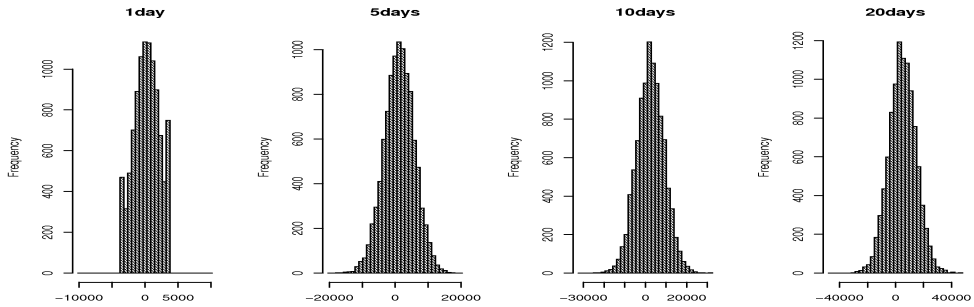


図 4.6: 2008 年 8 月の 1ヶ月間にガソリンを保有し続けた時の損益の分布.

(a) 値幅制限を課した場合 ($L = 3600$)



(b) 値幅制限を撤廃した場合

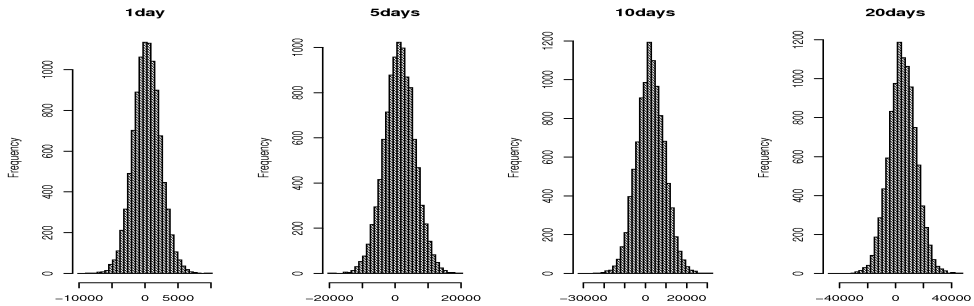
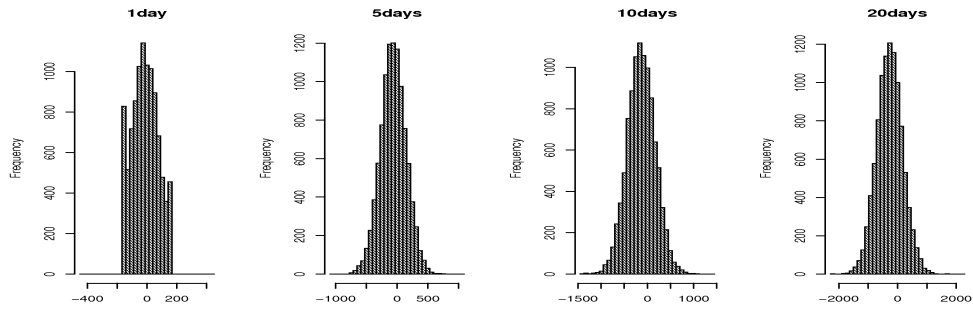


図 4.7: 2008 年 8 月の 1ヶ月間に原油を保有し続けた時の損益の分布

第2期間に続く1ヶ月間保有した場合

次に、第2期間に続く1ヶ月間である2008年11月に保有した場合を考える。市場リスク指標の計測結果を表4.15に、それぞれの商品を保有したときの累積損益分布を示し、金については図4.8、白金については図4.9、ガソリンについては図4.10、原油については図4.11に図示した。この期間は金融危機の影響を受け商品先物価格が暴落していた時期であるため、値幅制限の有無による損益分布の形状の差とリスク指標の値の差が顕著に表れている。保有期間が1日間の場合、すべての商品の $\widehat{\text{VaR}}_{1\%}^{(1)}$ 、 $\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(1)}$ で値幅制限の下限值が記録されている。特に、白金の $\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(1)}$ で大きな差がみられ、制度の有無による比は0.50であり、値幅制限によってリスクが半分に低減されている。第1期間と同様に、保有期間を延ばすにつれて値幅制限の影響が薄らいでいく様子が観察されるが、第1期間では保有期間が5日間になった時点で値幅制限の影響がほとんど観測できなくなったことに比べ、第2期間では依然として値幅制限による市場リスクの低減効果が残されていることが読み取れる。特に、白金、ガソリン、原油の3商品における $\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(5)}$ では1割程度の低減効果が残っている。ただし、さらに保有期間を延ばしていくことにより、値幅制限の有無による市場リスク指標の値の差は小さくなっていき、差が大きい白金、ガソリン、原油であっても、保有期間が10日間で高々4%程度、20日間では高々2%程度の低減にとどまる。

(a) 値幅制限を課した場合 ($L = 150$)



(b) 値幅制限を撤廃した場合

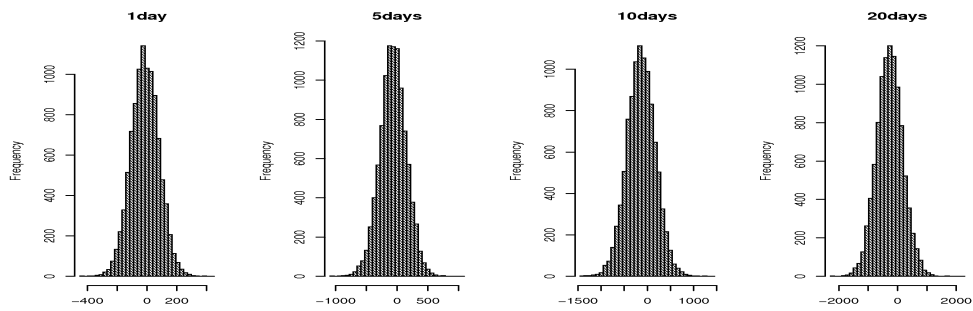
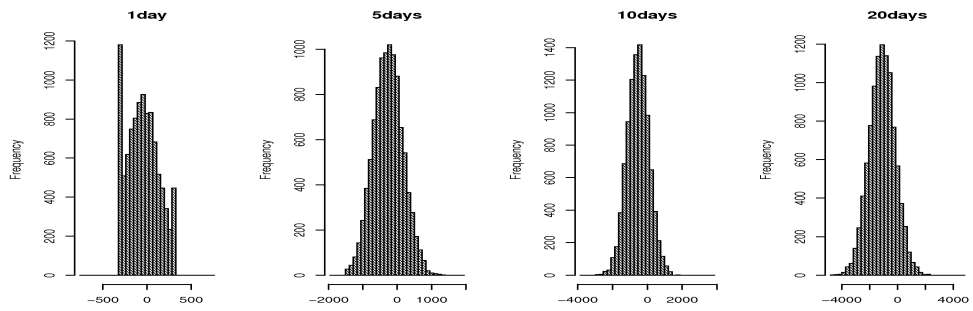


図 4.8: 2008 年 11 月の 1 ヶ月間に金を保有し続けた時の損益の分布。

(a) 値幅制限を課した場合 ($L = 300$)



(b) 値幅制限を撤廃した場合

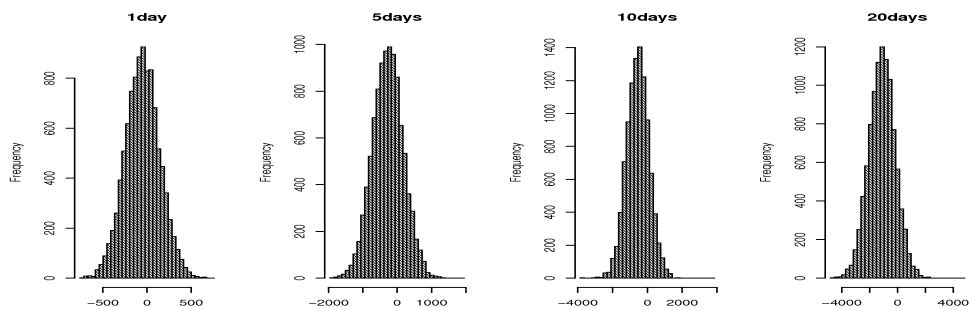
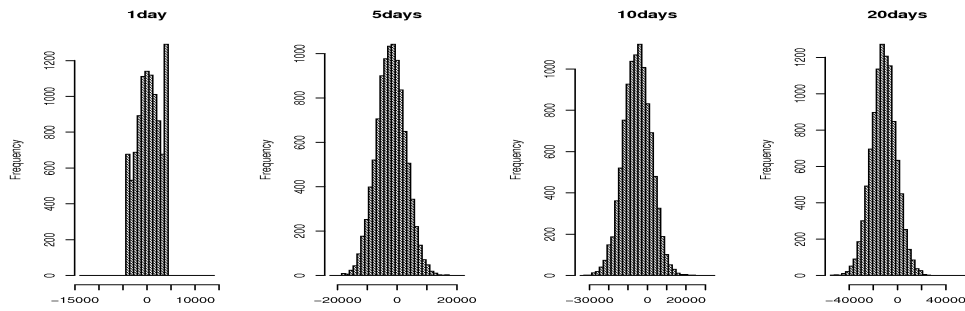


図 4.9: 2008 年 11 月の 1 ヶ月間に白金を保有し続けた時の損益の分布。

(a) 値幅制限を課した場合 ($L = 3600$)



(b) 値幅制限を撤廃した場合

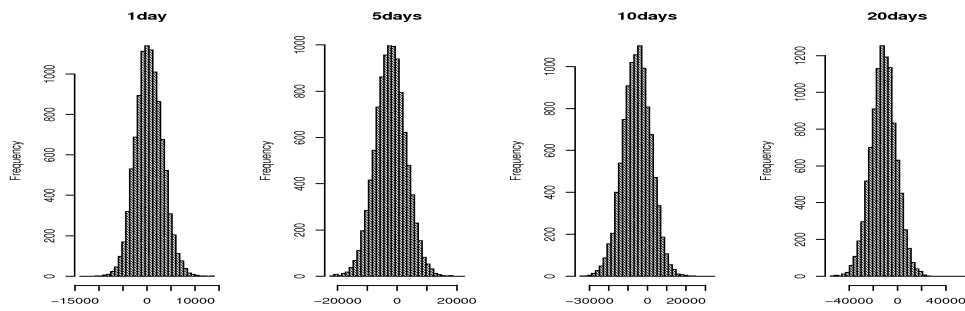
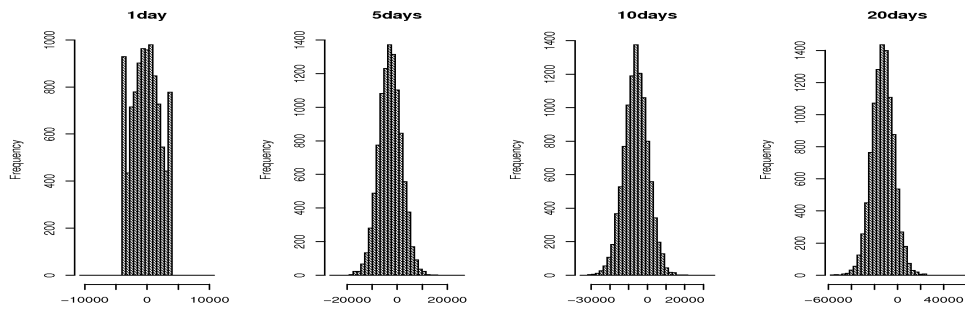


図 4.10: 2008 年 11 月の 1 ヶ月間にガソリンを保有し続けた時の損益の分布.

(a) 値幅制限を課した場合 ($L = 3600$)



(b) 値幅制限を撤廃した場合

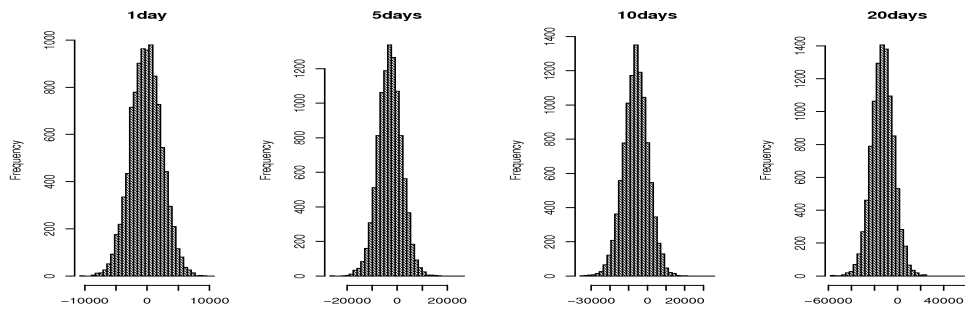


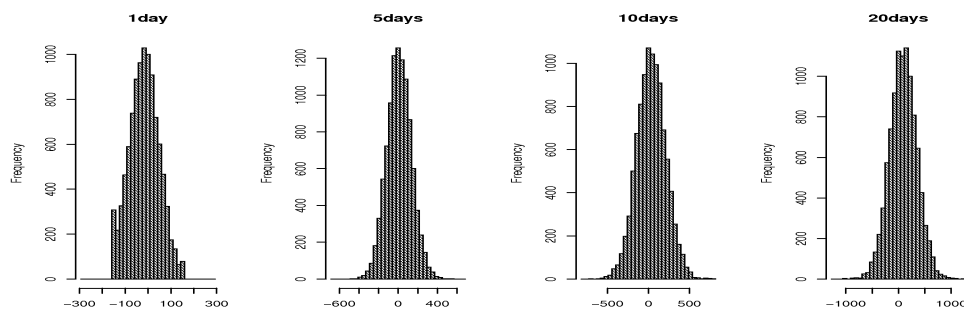
図 4.11: 2008 年 11 月の 1 ヶ月間に原油を保有し続けた時の損益の分布.

表 4.15: 2008 年 11 月の 1 ヶ月間における保有期間ごとの市場リスク

商品	リスク指標	値幅制限の有無	保有期間			
			1 日間	5 日間	10 日間	20 日間
金	$\widehat{\text{VaR}}_{1\%}^{(j)}$	あり	-150.00	-542.02	-824.02	-1323.01
		なし	-234.00	-557.02	-841.01	-1339.01
			0.64	0.97	0.98	0.99
	$\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(j)}$	あり	-150.00	-604.44	-923.34	-1484.16
		なし	-266.86	-637.07	-955.33	-1496.95
			0.56	0.95	0.97	0.99
白金	$\widehat{\text{VaR}}_{1\%}^{(j)}$	あり	-300.00	-1251.02	-2020.04	-3318.07
		なし	-514.00	-1330.02	-2090.02	-3366.05
			0.58	0.94	0.97	0.99
	$\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(j)}$	あり	-300.00	-1363.39	-2210.97	-3687.19
		なし	-596.10	-1473.43	-2296.28	-3776.38
			0.50	0.93	0.96	0.98
ガソリン	$\widehat{\text{VaR}}_{1\%}^{(j)}$	あり	-3600.00	-13290.00	-21950.10	-35790.00
		なし	-5840.00	-14310.50	-22640.40	-36431.10
			0.62	0.93	0.97	0.98
	$\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(j)}$	あり	-3600.00	-14714.20	-24325.50	-39760.70
		なし	-6863.20	-16292.50	-25354.80	-40448.50
			0.52	0.90	0.96	0.98
原油	$\widehat{\text{VaR}}_{1\%}^{(j)}$	あり	-3600.00	-13280.00	-21510.50	-35450.40
		なし	-5900.10	-14410.10	-22160.10	-36070.10
			0.61	0.92	0.97	0.98
	$\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(j)}$	あり	-3600.00	-14963.20	-24013.00	-40037.10
		なし	-6796.30	-16327.20	-25004.90	-40668.60
			0.53	0.92	0.96	0.98

各々のリスク指標には、1 行目に値幅制限制度の下での値、2 行目に値幅制限制度を撤廃した場合の値、3 行目には両者の比（「値幅制限制度の下での推定値」 / 「撤廃した場合の推定値」）を記している。

(a) 値幅制限を課した場合 ($L = 150$)



(b) 値幅制限を撤廃した場合

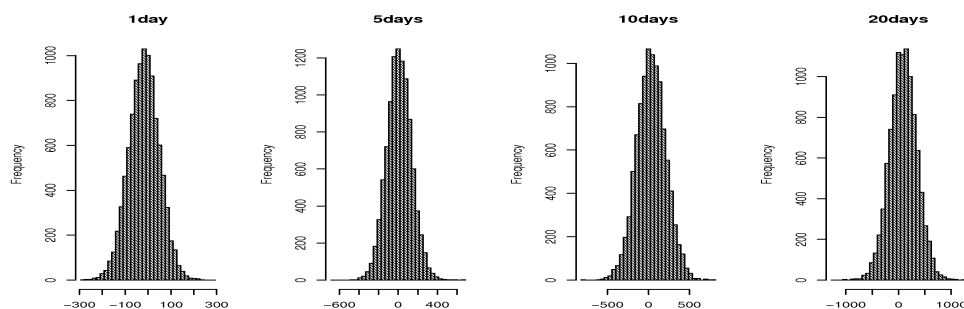
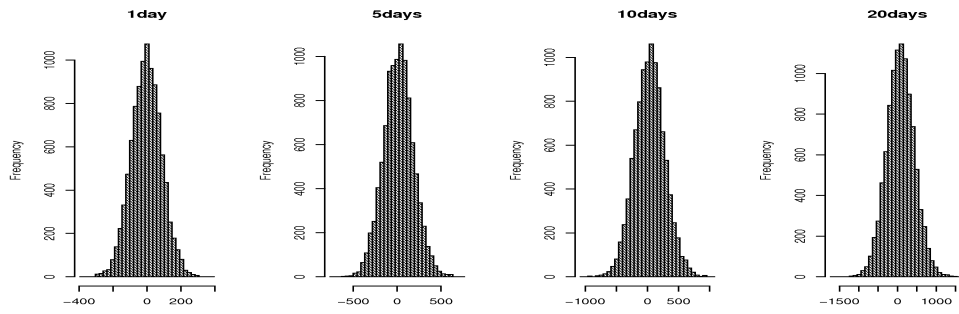


図 4.12: 2009 年 2 月の 1ヶ月間に金を保有し続けた時の損益の分布。

第 3 期間に続く 1ヶ月間保有した場合

最後に、第 3 期間に続く 1ヶ月間である 2009 年 2 月に保有した場合を考える。市場リスク指標の計測結果を表 4.16 にまとめ、それぞれの商品を保有したときの累積損益分布を金については図 4.12、白金については図 4.13、ガソリンについては図 4.14、原油については図 4.15 にまとめた。この期間は、すべての商品で価格変動が落ち着いた時期にあたる。特に白金は価格変動が大きくなり、保有期間が 1 日間の場合においても値幅制限の影響はない。一方で、金、ガソリン、原油の 3 商品では、保有期間が 1 日間の場合の $VaR_{1\%}$ 、 $ES_{1\%}$ において、値幅制限の有無による差がわずかながら観測されるが、保有期間を 5 日間以降に延ばした場合には、その差はほとんど失われている。

(a) 値幅制限を課した場合 ($L = 300$)



(b) 値幅制限を撤廃した場合

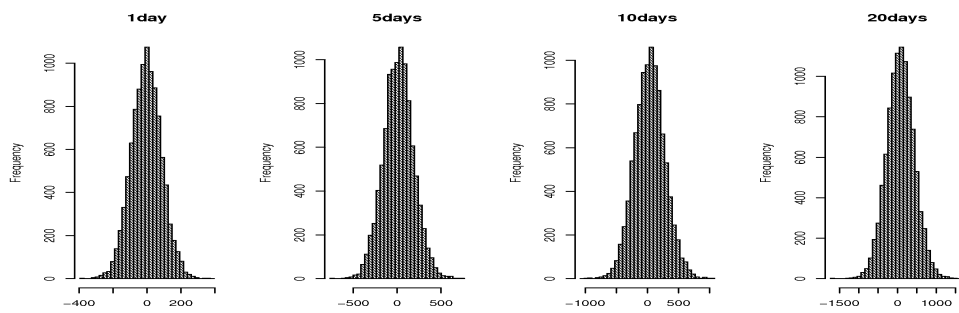
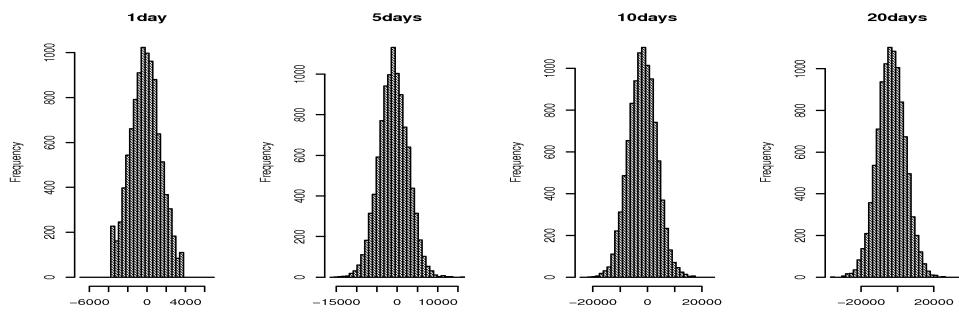


図 4.13: 2009年2月の1ヶ月間に白金を保有し続けた時の損益の分布.

(a) 値幅制限を課した場合 ($L = 3600$)



(b) 値幅制限を撤廃した場合

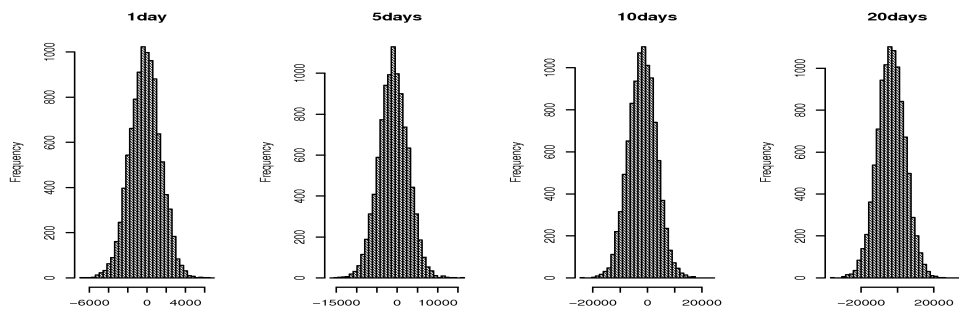


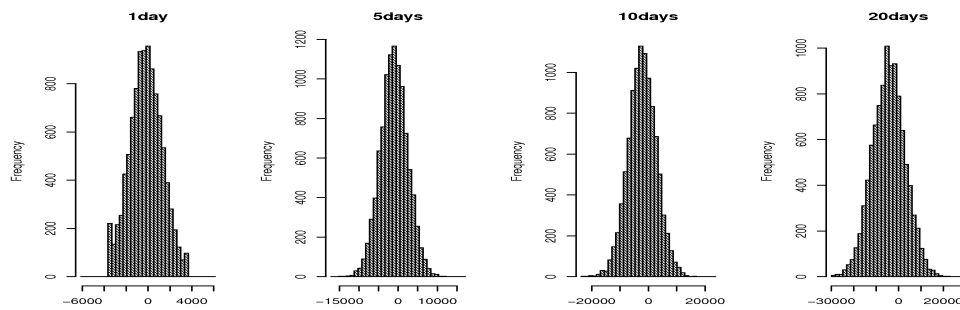
図 4.14: 2009年2月の1ヶ月間にガソリンを保有し続けた時の損益の分布.

表 4.16: 2009 年 2 月の 1 ヶ月間における保有期間ごとの市場リスク

商品	リスク指標	値幅制限の有無	保有期間			
			1 日間	5 日間	10 日間	20 日間
金	$\widehat{\text{VaR}}_{1\%}^{(j)}$	あり	-150.00	-274.00	-377.00	-521.01
		なし	-175.01	-277.01	-382.01	-522.00
			0.86	0.99	0.99	1.00
	$\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(j)}$	あり	-150.00	-324.31	-443.13	-631.37
		なし	-202.25	-328.31	-447.08	-633.21
			0.74	0.99	0.99	1.00
白金	$\widehat{\text{VaR}}_{1\%}^{(j)}$	あり	-212.00	-380.01	-526.01	-747.02
		なし	-212.00	-380.01	-526.01	-747.02
			1.00	1.00	1.00	1.00
	$\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(j)}$	あり	-244.16	-439.97	-624.67	-885.04
		なし	-245.50	-441.52	-624.67	-885.19
			0.99	1.00	1.00	1.00
ガソリン	$\widehat{\text{VaR}}_{1\%}^{(j)}$	あり	-3600.00	-9180.00	-13460.40	-21200.40
		なし	-3990.00	-9230.10	-13540.10	-21240.10
			0.90	0.99	0.99	1.00
	$\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(j)}$	あり	-3600.00	-10590.40	-15464.40	-24302.90
		なし	-4593.70	-10731.00	-15602.30	-24316.00
			0.78	0.99	0.99	1.00
原油	$\widehat{\text{VaR}}_{1\%}^{(j)}$	あり	-3600.00	-9050.00	-13800.00	-21670.00
		なし	-3770.10	-9100.20	-13810.20	-2670.600
			0.95	0.99	1.00	1.00
	$\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(j)}$	あり	-3600.00	-10206.90	-15860.90	-24020.00
		なし	-4414.30	-10302.60	-15928.50	-24054.30
			0.82	0.99	1.00	1.00

各々のリスク指標には、1 行目に値幅制限制度の下での値、2 行目に値幅制限制度を撤廃した場合の値、3 行目には両者の比（「値幅制限制度の下での推定値」 / 「撤廃した場合の推定値」）を記している。

(a) 値幅制限を課した場合 ($L = 3600$)



(b) 値幅制限を撤廃した場合

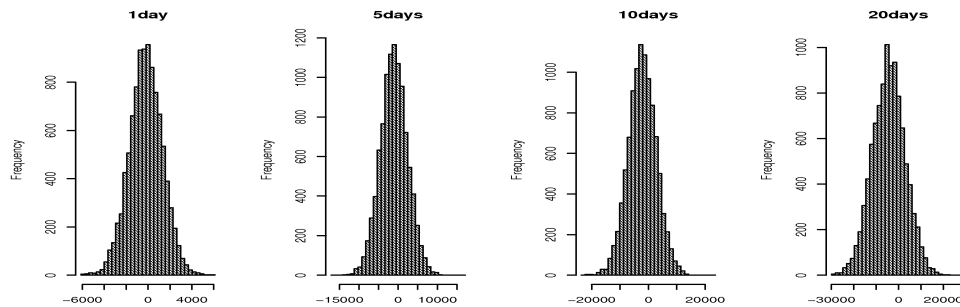


図 4.15: 2009年2月の1ヶ月間に原油を保有し続けた時の損益の分布.

これまでに3つの期間での市場リスクの計測で確認してきた通り、値幅制限が市場リスクに与える影響は、短期的な保有期間の場合には大きいですが、保有期間が長くなるにつれ影響は弱まっていく。値幅制限制度は1日における価格変動に上限を課した制度であるため、短期的な価格の下落を抑える機能がある一方で、真の価格変動には影響を与えず当日に下がりきらなかった価格の影響が翌日以降に持ち越されるため、金融危機の前後のように特に価格変動の大きい時期であっても保有期間が2週間以上になれば、値幅制限による市場リスクへの影響はほとんどみられなくなる。

4.4 信用リスクへの影響

本節では、営業日ベースで1日間、5日間(1週間)、10日間(2週間)、20日間(1ヶ月間)、保有したときの追証とデフォルトの発生率、デフォルト損失額に対し、値幅制限制度が与える影響について数値実験による考察を行う。前節で調べた市場リスクへの影響と同様に、値幅制限制度を最大限緩和した状況である、値幅制限制度の撤廃時の信用リスクとの比較を行うことで、値幅制限制度が信用リスクに与える影響について考察する。なお、本節の信用リスクの計測にあたっては、3つの期間でのパラメタ推定時に発生させた価格前日差の予測パスにもとづき各指標の算出を行っており、算出結果はそれぞれ、第1期間に続く1ヶ月間である2008年8月に保有した場合の指標を表4.17、第2期間に続く1ヶ月間である2008年11月に保有した場合の指標を表4.18、第3期間に続く1ヶ月間である2009年2月に保有した場合の指標を表4.19にまとめた。

値幅制限の影響について調べるためには、値幅制限抵触回数が多い商品に注目すればよい。第1期間のガソリン、原油、第2期間の4商品では、値幅制限を課した場合に追証発生率は高々0.03と値はわずかであるが減少しており、1日における価格変動に上限を課しているため追証発生が抑えられている。しかしながら、当日に下がりきらなかった価格の影響は当然翌日以降に持ち越されるため、結果的には追証が発生してしまい、追証発生を抑制する機能は大きくないと考えられる。

一方でデフォルトの発生については、第2期間のガソリンと原油では顕著に値幅制限の影響を受けている。値幅制限を撤廃することで、デフォルトの発生率と条件付発生率ともに、ガソリンでは0.05程度、原油では0.03程度の減少を示している。値幅制限を課すとデフォルトリスクが高まる原因は、取引を停止することで清算の機会を奪うことにあると考えられる。仮に追証が発生した翌日以降も価格が大きく下落し続けた場合を考えよう。値幅制限下ではストップ安のため取引停止に陥り、清算できないまま累積損失額が膨らみ続けた結果、デフォルトに至ってしまう恐れがある。一方で値幅制限がなければ、取引停止は起こらずに必ず翌

日に清算できるため、累積損失額が膨らみ続けるような状況を回避でき、デフォルトに至らずにすむ可能性がある。したがって、値幅制限を課した場合にデフォルトが起こる可能性が高まっていると考えられる。一方で、値幅制限がなければ価格の大きな下落が起こる可能性があり、デフォルト発生時の損失額が大きくなることが考えられる。数値実験の結果からも、分析を行ったあらゆる期間の全ての商品において、値幅制限が無い場合にデフォルト発生時の損失額がより大きくなっていることが確認できる。

追証・デフォルトの発生条件は、累積損失額と取引本証拠金基準額の比較であるため、取引本証拠金基準額の設定はそれぞれのリスクに大きく影響を与える。2009年2月には、全ての商品で取引追証拠金基準額が増額されている。この期間に注目して、値幅制限と追証・デフォルトの関係について考察する。追証発生の定義を考えると、日々の価格変動が小さい場合でも、価格が下落し続ければ追証は発生する。大幅に価格変動が小さくなった白金であっても20日間保有した場合の追証発生率は0.49に上っており、ガソリンは0.78、原油では0.81と高い水準を示しており、追証発生率は必ずしも低くはない。

一方で、デフォルトの発生条件は、追証が発生してから清算をするまでの間に取引本証拠金基準額を使い果たしたか否かで判定される。ここで、制限値段幅 L に対する価格変動 σ が小さく（値幅制限に抵触しづらく）、取引本証拠金基準額 K に対して資産変動 $\eta\sigma$ も小さい（資産変動も小さい）状況を考えてみよう。この状況下で追証が発生したとしても、翌日にストップ安で取引が停止せずに清算できる可能性が高く、追証発生から清算までの間に取引本証拠金基準額を使い果たすほどには累積損失額も膨らまないため、デフォルトには至りにくい。2009年2月は、他の期間に比べ、価格変動が小さく（ σ が小さく）取引本証拠金基準額 K が大きいため、値幅制限に抵触しづらく資産変動も小さい期間であり、デフォルトの発生率は高々0.21と小さく、デフォルト損失額も他の期間のものとは比べて少ない。

取引本証拠金基準額は取引所によって設定されるため、デフォルトの発生率を

下げ、デフォルト損失額を抑えたいならば、取引本証拠金基準額を増額すればよい。ただし、取引本証拠金基準額を増額は、商品取引員の保護という観点からは望ましいことかもしれないが、投資家の立場からは投資開始時点の出費が増えるために新たな投資を呼び込む妨げとなりうるので、必ずしも商品取引員にとって歓迎されるとは限らないことに注意が必要である。

表 4.17: 2008/08 の1ヶ月間運用した場合の追証・デフォルト発生リスク

		値幅制限の 有無	保有期間 (営業日)			
			1	5	10	20
金	追証	有	0.02	0.19	0.30	0.40
	発生率	なし	0.02	0.19	0.30	0.40
	デフォルト	有	0.00	0.02	0.03	0.04
	発生率	なし	0.00	0.02	0.03	0.04
	デフォルト	有	0.04	0.11	0.10	0.10
	条件付発生率	なし	0.04	0.11	0.10	0.09
	デフォルト	有	23,875	20,350	21,483	20,564
	損失額 [円]	なし	23,875	20,350	21,483	20,564
白金	追証	有	0.02	0.20	0.32	0.42
	発生率	なし	0.02	0.20	0.32	0.42
	デフォルト	有	0.00	0.02	0.03	0.04
	発生率	なし	0.00	0.02	0.03	0.04
	デフォルト	有	0.06	0.09	0.09	0.09
	条件付発生率	なし	0.06	0.09	0.09	0.09
	デフォルト	有	14,583	21,566	21,989	22,092
	損失額 [円]	なし	14,583	21,566	21,989	22,092
ガソリン	追証	有	0.13	0.42	0.53	0.63
	発生率	なし	0.13	0.42	0.54	0.63
	デフォルト	有	0.04	0.14	0.18	0.21
	発生率	なし	0.04	0.14	0.17	0.20
	デフォルト	有	0.29	0.33	0.33	0.33
	条件付発生率	なし	0.29	0.32	0.33	0.32
	デフォルト時	有	66,349	73,181	73,021	72,516
	損失額 [円]	なし	78,517	82,693	80,581	79,681
原油	追証	有	0.13	0.39	0.49	0.57
	発生率	なし	0.13	0.40	0.49	0.57
	デフォルト	有	0.03	0.12	0.15	0.18
	発生率	なし	0.03	0.12	0.15	0.17
	デフォルト	有	0.28	0.31	0.31	0.31
	条件付発生率	なし	0.28	0.31	0.30	0.30
	デフォルト時	有	62,695	70,999	71,241	71,404
	損失額 [円]	なし	73,357	78,838	78,787	79,162

注)2008/08 の1ヶ月間、金の取引本証拠金基準額は 135,000 円、制限値段幅は 150 円であり、白金の取引本証拠金基準額は 150,000 円、制限値段幅は 300 円であり、ガソリンと原油の取引本証拠金基準額は 210,000 円、制限値段幅は 3,600 円であった。なお、それぞれ上段には値幅制限が課せられている場合の算出値、下段には値幅制限がないと仮定した場合の算出値を載せている。また、デフォルトの条件付発生率とは、追証が発生したという条件のもとでのデフォルト発生率である。

表 4.18: 2008/11 の1ヶ月間運用した場合の追証・デフォルト発生リスク

		値幅制限の 有無	保有期間 (営業日)			
			1	5	10	20
金	追証	有	0.28	0.66	0.79	0.88
	発生率	なし	0.28	0.66	0.79	0.89
	デフォルト	有	0.14	0.34	0.41	0.46
	発生率	なし	0.14	0.34	0.41	0.46
	デフォルト	有	0.50	0.53	0.52	0.52
	条件付発生率	なし	0.50	0.51	0.51	0.51
	デフォルト時	有	78,007	78,551	78,767	78,783
	損失額 [円]	なし	88,277	87,922	87,772	87,607
白金	追証	有	0.31	0.74	0.87	0.95
	発生率	なし	0.31	0.75	0.87	0.95
	デフォルト	有	0.17	0.41	0.49	0.53
	発生率	なし	0.17	0.41	0.49	0.53
	デフォルト	有	0.53	0.56	0.57	0.56
	条件付発生率	なし	0.53	0.56	0.56	0.55
	デフォルト時	有	81,039	83,919	84,062	84,243
	損失額 [円]	なし	98,553	98,469	98,567	98,285
ガソリン	追証	有	0.18	0.63	0.82	0.93
	発生率	なし	0.18	0.66	0.83	0.94
	デフォルト	有	0.08	0.28	0.37	0.43
	発生率	なし	0.08	0.27	0.34	0.38
	デフォルト	有	0.42	0.45	0.46	0.46
	条件付発生率	なし	0.42	0.41	0.41	0.41
	デフォルト時	有	80,859	88,960	90,841	90,957
	損失額 [円]	なし	103,132	107,459	108,911	108,936
原油	追証	有	0.21	0.69	0.86	0.96
	発生率	なし	0.21	0.71	0.87	0.96
	デフォルト	有	0.08	0.30	0.37	0.42
	発生率	なし	0.08	0.29	0.35	0.39
	デフォルト	有	0.38	0.43	0.43	0.43
	条件付発生率	なし	0.38	0.41	0.40	0.40
	デフォルト時	有	77,519	84,438	85,088	85,280
	損失額 [円]	なし	94,694	97,564	97,590	97,568

注)2008/11 の1ヶ月間、金の取引本証拠金基準額は135,000円、制限値段幅は150円であり、白金の取引本証拠金基準額は150,000円、制限値段幅は300円であり、ガソリンと原油の取引本証拠金基準額は210,000円、制限値段幅は3,600円であった。なお、それぞれ上段には値幅制限が課せられている場合の算出値、下段には値幅制限がないと仮定した場合の算出値を載せている。また、デフォルトの条件付発生率とは、追証が発生したという条件のもとでのデフォルト発生率である。

表 4.19: 2009/02 の1ヶ月間運用した場合の追証・デフォルト発生リスク

		値幅制限の 有無	保有期間 (営業日)			
			1	5	10	20
金	追証	有	0.19	0.46	0.56	0.64
	発生率	なし	0.19	0.46	0.56	0.64
	デフォルト	有	0.03	0.07	0.09	0.11
	発生率	なし	0.03	0.07	0.09	0.10
	デフォルト	有	0.14	0.16	0.16	0.17
	条件付発生率	なし	0.14	0.15	0.16	0.16
	デフォルト時	有	37,594	39,777	39,792	40,450
	損失額 [円]	なし	37,849	39,993	40,147	49,934
白金	追証	有	0.04	0.24	0.38	0.49
	発生率	なし	0.04	0.24	0.38	0.49
	デフォルト	有	0.00	0.02	0.02	0.03
	発生率	なし	0.00	0.02	0.02	0.03
	デフォルト	有	0.04	0.07	0.07	0.07
	条件付発生率	なし	0.04	0.07	0.07	0.07
	デフォルト時	有	21,333	24,088	23,851	24,872
	損失額 [円]	なし	21,333	24,088	23,851	24,872
ガソリン	追証	有	0.09	0.46	0.64	0.78
	発生率	なし	0.09	0.46	0.64	0.78
	デフォルト	有	0.02	0.11	0.16	0.20
	発生率	なし	0.02	0.11	0.16	0.20
	デフォルト	有	0.20	0.25	0.25	0.25
	条件付発生率	なし	0.20	0.25	0.25	0.25
	デフォルト時	有	49,475	54,755	55,923	55,552
	損失額 [円]	なし	53,992	57,763	58,655	58,070
原油	追証	有	0.09	0.48	0.66	0.81
	発生率	なし	0.09	0.48	0.66	0.81
	デフォルト	有	0.02	0.13	0.18	0.21
	発生率	なし	0.02	0.13	0.17	0.21
	デフォルト	有	0.22	0.27	0.27	0.26
	条件付発生率	なし	0.22	0.27	0.26	0.26
	デフォルト時	有	46,515	50,892	51,758	51,680
	損失額 [円]	なし	49,550	53,390	53,975	53,698

注) 2009/02 の1ヶ月間、金の取引本証拠金基準額は 150,000 円、制限値段幅は 150 円であり、白金の取引本証拠金基準額は 165,000 円、制限値段幅は 300 円であり、ガソリンと原油の取引本証拠金基準額は 225,000 円、制限値段幅は 3,600 円であった。なお、それぞれ上段には値幅制限が課せられている場合の算出値、下段には値幅制限がないと仮定した場合の算出値を載せている。また、デフォルトの条件付発生率とは、追証が発生したという条件のもとでのデフォルト発生率である。

第5章 サーキットブレーカー制度導入後の市場リスク

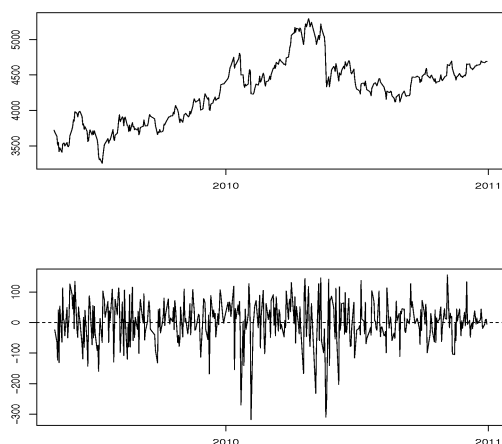
5.1 はじめに

サーキットブレーカー制度とは、1日の価格変動に上限を持たせる一方で、価格の大幅な変動時には取引を一時停止し、その後上限値を段階的に拡張し取引を再開する制度である。サーキットブレーカー制度で多段的に設定された上限値のうち最大の価格変動幅は、旧制度である値幅制限制度の変動幅と比べて大きな値に設定されている。制度導入後の2009年5月から2012年10月末までの間に、最大の価格変動幅に抵触したことが皆無であったため、本論文では価格の打ち切りの影響を考えず、少なくとも分析期間では真の価格と観測価格が一致しているという前提をおく。

サーキットブレーカー制度下の商品先物価格では、旧制度下に比べて大きな価格変動が観測されるようになった。特に価格の下落時に大きく変動し、価格前日差の分布では下落時に裾が重く上昇時には比較的裾が軽いという非対称な形状がしばしば観測される。図5.1には、2009年5月から2010年12月末までの白金先物の価格と前日差の時系列プロットと、前日差のヒストグラムを示した。

白金先物価格の前日差では、最大で300円を上回るような大きな下落が観測されているが、上昇時には高々150円程度の値しか観測されていない。価格変動の大きさが下落時と上昇時で異なるという性質はヒストグラムで顕著に示されており、価格前日差の分布は、下落局面で分布の裾が重く上昇局面で裾が軽いという非対称な形状を示している。なお、価格前日差の分布の非対称性についてはヒストグ

(a) 価格と価格前日差



(b) 価格前日差のヒストグラム

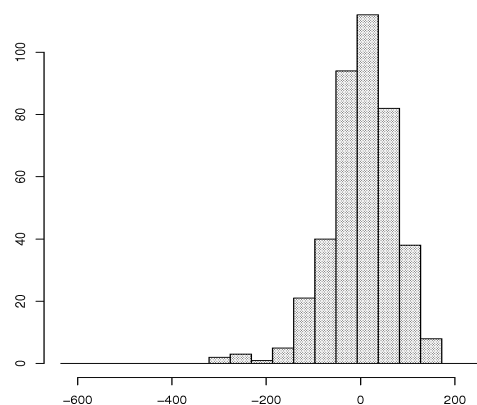


図 5.1: 2009 年 5 月から 2010 年 12 月末までの白金先物価格と価格前日差

ラムの形状を視覚的に判断しただけでなく、5.5 節でも述べるように、DIC によるモデル選択でも、対称モデルよりも非対称性を考慮したモデルが選択された。加えて、図 5.1 で示した期間だけでなくその他の期間においても、価格前日差の分布に同様の非対称性が認められた。なお、白金以外の 3 商品（金、ガソリン、原油）でも同様に、価格前日差の非対称性が観測された。

価格前日差の分布が非対称な形状を示していることは、商品先物の市場リスクを計測するうえでは注意する必要がある。一般的な市場リスクの計測では下落局面のリスクが強調されがちであるが、商品先物取引で空売りを行っている場合には、むしろ上昇局面において損失が膨らむため、商品先物の市場リスク管理では価格の上昇局面の挙動も考慮する必要がある。第 2 章で導入した、 $\text{VaR}_{\alpha \times 100\%}$ に加え、上昇局面のリスクとして $(1 - \alpha) \times 100\%$ 点である $\text{VaR}_{(1-\alpha) \times 100\%}$ を採用する。また、サーキットブレーカー制度のもとでは、裾が重い形状をもつ損益分布が観察されるため、裾の形状を考慮したリスク指標である ES も合わせて計測したほうがよく、上昇局面での ES を

$$\text{ES}_{(1-\alpha) \times 100\%} = E \left[\Delta P_t \mid \Delta P_t \geq \text{VaR}_{(1-\alpha) \times 100\%} \right]$$

で定義する。以上、本章では下落・上昇局面のそれぞれについて2種類ずつ、合わせて4種類のリスク指標 $\text{VaR}_{\alpha \times 100\%}$, $\text{VaR}_{(1-\alpha) \times 100\%}$, $\text{ES}_{\alpha \times 100\%}$, $\text{ES}_{(1-\alpha) \times 100\%}$ を計測する。

5.2 サーキットブレーカー制度の概要と価格変動の特徴

サーキットブレーカー制度は、値幅制限制度と同様に1日の価格変動に上限を課す制度であるが、制限に抵触した場合の取引停止が一時的なものに変更された点が特徴である。

東商取のサーキットブレーカー制度では、価格変動の上限幅が多段階に設定されている。取引開始時点の上限幅は小さく設定されているが、ひとたび上限幅に抵触した場合には取引を5分間中断した後、上限幅を拡大して取引を再開する。なお、上限幅の拡大は3回まで行われ、結果的には1日における最大価格変動幅が値幅制限制度下の制限値段幅よりも大きいため、大きな価格変動が観測されるようになり価格前日差の分布特性が異なると考えられる。ここで、4商品の上限幅と抵触回数について表5.1にまとめた。

表 5.1: サーキットブレーカー制度下の価格の上限幅

抵触回数	金	白金	ガソリン	原油
1回目まで	150円	200円	2,400円	2,400円
2回目まで	300円	400円	4,800円	4,800円
3回目まで	450円	600円	7,200円	7,200円
4回目以降	600円	800円	9,600円	9,600円

注: 東京商品取引所による発表資料から抜粋

値幅制限制度が終了する直前の2009年4月における商品ごとの制限値段幅は、金は150円、白金は300円、ガソリンと原油は3,600円である（第2章の表2.2を参照）ため、各商品の値幅制限の下での制限値段幅とサーキットブレーカー制度下での上限幅を比べると、最も大きな差がある金の4倍をはじめとして、その他の3商品でも3倍程度の大きい水準に設定されており、東商取のサーキットブレー

カー制度が大きな価格変動を許容していることが制度設計上明らかである。加えて、月ごとに制限値段幅が変更される可能性がなくなり、最大価格変動幅が長期間にわたって固定されるようになったため、値幅制限制度時と比べて長期の価格変動分析が行いやすくなった。

値幅制限制度下での分析からも明らかなように、商品先物価格は対象商品の需給状況によって価格が大きく変動することがあるため、短期的にはトレンド構造が観測される場合がある。しかしながら、本章の目的は、このような短期的な傾向の抽出ではなく、サーキットブレーカー制度導入後の価格変動の特徴を調査することであるため、長期の日次価格系列を分析対象とする。

東商取の商品先物では、商品ごとに発会日（商品の取引開始日）と納会日（取引終了・清算日）が異なっているため、商品間の特性を比較することが難しい。金、白金では、2, 4, 6, 8, 10, 12月の月末に発会し、1年後に納会日を迎えるため、1つの商品先物の取引期間は1年間であり、同時期に納会日の異なる6種類の商品先物が上場されている。ガソリンは、毎月末に発会し、6ヶ月後の月末に納会日を迎えており、原油は、毎月初に発会を迎え6ヶ月目の月末に納会を迎えているため、発会日と納会日は異なるが、2つの商品ともに6カ月間の取引期間をもち、同時期に6種類の商品先物が上場されている。

このように、発会日と納会日が異なるばかりでなく、金、白金では1年間、原油、ガソリンでは半年間と上場期間が短いために、そのままの価格系列では長期的な傾向の分析が困難である。そこで、本論文では、取引量が多い限月となる期先物（発会したての先物）をつないでいくことにより、各商品につき1本ずつの長期日次価格系列を作成する。このように期先物をつなぎ長期間の価格系列を作成する手法は、チャートなどによる価格傾向の分析でも採用されており、実務では一般的に利用されているものである（高見(2006)）。

5.3 価格変動とイノベーションのモデル

5.3.1 非対称性の考察

商品先物価格のデータの観察からは、価格前日差の挙動が上昇局面と下落局面で異なることがしばしば観測された。いま、価格前日差が負となる時点を下落局面、正となる時点を上昇局面として、それぞれの時点の集合を、下落局面 $D_1 := \{t | \Delta P_t < 0\}$ 、上昇局面 $D_2 := \{t | \Delta P_t \geq 0\}$ とおくことで、価格前日差 ΔP_t を

$$p_1 f_1(\Delta P_t | \Theta_1) \times I_{D_1}(t) + p_2 f_2(\Delta P_t | \Theta_2) \times I_{D_2}(t). \quad (5.1)$$

と定式化する。ただし、 Θ_1, Θ_2 はそれぞれの D_1, D_2 における確率分布のパラメタの集合である。また、 p_1, p_2 はそれぞれ上昇・下落する割合を示すパラメタであり、 $p_1, p_2 > 0, p_1 + p_2 = 1$ である。なお、 $I_A(x)$ は指示関数であり、 $x \in A$ のときは1、その他の場合には0をとる。ここで、上昇時、下落時の確率密度関数を、それぞれ

$$\int_{-\infty}^0 f_1(x | \Theta_1) dx = 1, \quad \int_0^{\infty} f_2(x | \Theta_2) dx = 1 \quad (5.2)$$

とする。

いま、 $p_1 = p_2$ かつ $f_1(|x|) = f_2(x)$ のときは対称分布モデルになる。また、 $f_1(|x|), f_2(x)$ をともに指数分布であると仮定した場合には、Kouモデル (Kou(2002)) :

$$p_1 \theta_1 \exp(-\theta_1 |\Delta P_t|) I_{D_1}(t) + p_2 \theta_2 \exp(-\theta_2 \Delta P_t) I_{D_2}(t)$$

に一致する。

5.3.2 価格変動の平均構造

前節で導入したモデルのように、分布が切り替わる軸を原点上にとると、分布の切り替えと価格の下落・上昇局面の切り替えの軸が一致するため、モデルを解釈しやすいという利点がある。しかしながら、分布の切り替わる軸が必ずしも原

点上にあるとは限らない．そのため本論文では，先物価格の前日差で観測された非対称性をイノベーション ε_t の構造として考え，分布が切り替わる軸を ΔP_t の平均構造として考える．また，第2章で指摘したように商品先物価格の前日差には自己回帰性の存在を否定できず，第4章の数値実験結果からは真の価格の前日差は高々1次の自己回帰モデルが選択された場合があったため，本章においても ΔP_t の平均構造として1次の自己回帰モデルを仮定する．すなわち，

$$\Delta P_t = \mu + \phi \Delta P_{t-1} + \varepsilon_t \quad (5.3)$$

とおく．ここで，イノベーションが負となる時点を下落局面 $D_1 := \{t | \varepsilon_t < 0\}$ ，正となる時点を上昇局面 $D_2 := \{t | \varepsilon_t \geq 0\}$ と定義し直す．同様に ΔP_t に対するモデルを改め，(5.1)を

$$p_1 f_1(\varepsilon_t | \Theta_1) \times I_{D_1}(t) + p_2 f_2(\varepsilon_t | \Theta_2) \times I_{D_2}(t) \quad (5.4)$$

と変更し，(5.2)も

$$\int_{-\infty}^0 f_1(\varepsilon_t | \Theta_1) d\varepsilon_t = 1, \quad \int_0^{\infty} f_2(\varepsilon_t | \Theta_2) d\varepsilon_t = 1 \quad (5.5)$$

と書き改める．

これ以降は，(5.3)から(5.5)までに示した通り， ΔP_t の平均構造として高々1次の自己回帰モデル， ε_t には正負で異なる分布をもつモデルを仮定していく．

5.3.3 モデルの種類

ここでは，本論文で扱う ΔP_t の平均構造とイノベーション項の定式化の種類について具体的に述べる．

ΔP_t の平均構造については，“定数項をもつ1次の自己回帰モデル”，“定数項のみを仮定したもの”，と“平均構造を考えずにイノベーションのみを仮定 ($\Delta P_t = \varepsilon_t$)”，の3種のモデルを考える．一方で， ε_t に対しては，

(i) 正規分布モデル: $(2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\{-\varepsilon_t^2/(2\sigma^2)\}$.

(ii) Kou モデル: $p_1\theta_1 \exp(\theta_1\varepsilon_t) I_{D_1}(t) + p_2\theta_2 \exp(-\theta_2\varepsilon_t) I_{D_2}(t)$.

(iii) 指数 - 半正規分布モデル:

$$p_1\theta_1 \exp(\theta_1\varepsilon_t) I_{D_1}(t) + p_2 \left[2(2\pi\sigma_2^2)^{-1/2} \exp\{-\varepsilon_t^2/(2\sigma_2^2)\} I_{D_2}(t) \right]$$

の3種のモデルをそれぞれ仮定する。内訳は、ベンチマークとして仮定する正規分布モデルと、非対称性を考慮した次の2つのモデルである。Kou モデルは、下落時と上昇時が異なるパラメタをもつ指数分布であるため、両局面において分布の裾が重いという特徴がある。一方、指数-半正規分布モデルは、下落時に裾が重い指数分布を採用したことが特徴であり、実際の商品先物価格の観察にもとづいて定式化している。

以上のように本論文では、 ΔP_t の平均構造に3種類、 ε_t の構造に3種類のモデルを仮定するため、合計して 3×3 の9種のモデルを扱う。

5.4 パラメタ推定

本節では、未知パラメタの推定法について述べる。なお、価格前日差 ΔP_t に対しては3種類のモデルを仮定しているが、ここでは1次の自己回帰モデル ($\Delta P_t = \mu + \phi\Delta P_{t-1} + \varepsilon_t$) の推定法についてのみ説明する。なぜならば、切片のみを仮定したモデルの場合には $\phi = 0$ とし、構造を考慮しない場合には $\phi = \mu = 0$ とおけばよいからである。また、イノベーション ε_t については、対称モデルである正規分布モデルと、非対称性を考慮した Kou モデル、指数-半正規分布モデルの順番で説明を行う。

パラメタ推定に際しては、MCMC法を採用する。したがって、それぞれのパラメタのサンプリングに必要な条件付事後分布の計算法に焦点を当てて説明していく。

5.4.1 対称モデル

イノベーションに正規分布モデルを仮定した場合のパラメタ推定について述べる。推定対象のパラメタは、 μ, ϕ, σ^2 の3つである。

いま、 ΔP_t と ε_t に仮定するモデルは、

$$\Delta P_t = \mu + \phi \Delta P_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

であるので、尤度関数は、

$$\prod_{t \in D} (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{(\Delta P_t - \mu - \phi \Delta P_{t-1})^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (5.6)$$

と記述できる。ここで、 $D := D_1 \cup D_2$ である。

1. μ のサンプリング

μ の事前分布を区間 (C_1, C_2) の一様分布とおき、 $\Delta \mathbf{P} = \{\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_n\}$ 、 ϕ, σ^2 を所与としたときの条件付事後分布は

$$\begin{aligned} f(\mu | \Delta \mathbf{P}, \phi, \sigma^2) &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^n (\Delta P_t - \mu - \phi \Delta P_{t-1})^2 \right\} \times I_{(C_1, C_2)}(\mu) \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_a^2} (\mu - \mu_a)^2 \right\} \times I_{(C_1, C_2)}(\mu) \end{aligned} \quad (5.7)$$

で与えられ、切断正規分布 $TN_{(C_1, C_2)}(\mu_a, \sigma_a^2)$ に従う。ただし、

$$\mu_a = \frac{\sum_{t=2}^n (\Delta P_t - \phi \Delta P_{t-1})}{n-1}, \quad \sigma_a^2 = \frac{\sigma^2}{n-1}$$

である。(5.7)を利用して μ をサンプリングする。

2. ϕ のサンプリング

ϕ の事前分布を区間 $(-1, 1)$ の一様分布とおき、 $\Delta \mathbf{P}, \mu, \sigma^2$ を所与としたときの条件付事後分布は次のように得られる。

$$\begin{aligned} f(\phi | \Delta \mathbf{P}, \mu, \sigma^2) &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^n (\Delta P_t - \mu - \phi \Delta P_{t-1})^2 \right\} \times I_{(-1, 1)}(\phi) \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_b^2} (\phi - \mu_b)^2 \right\} \times I_{(-1, 1)}(\phi) \end{aligned} \quad (5.8)$$

すなわち、切断正規分布 $TN_{(-1,1)}(\mu_b, \sigma_b^2)$ となる。ただし、

$$\mu_b = \frac{\sum_{t=2}^n \Delta P_t \Delta P_{t-1} - \mu \sum_{t=2}^n \Delta P_{t-1}}{\sum_{t=2}^n \Delta P_{t-1}^2}, \quad \sigma_b^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=2}^n \Delta P_{t-1}^2}$$

である。(5.8)を利用して ϕ をサンプリングする。

3. σ^2 のサンプリング

σ^2 の事前分布を逆ガンマ分布 $IG(\alpha_0, \beta_0)$ としたときの、条件付事後分布は次の通り計算できる。

$$\begin{aligned} & f(\sigma^2 | \Delta \mathbf{P}, \mu, \phi) \\ & \propto (\sigma^2)^{-(\alpha_0+1)} \exp\left(-\frac{\beta_0}{\sigma^2}\right) \times (\sigma^2)^{-(n-1)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^n (\Delta P_t - \mu - \phi \Delta P_{t-1})^2\right\} \\ & \propto (\sigma^2)^{-(\alpha_1+1)} \exp\left(-\frac{\beta_1}{\sigma^2}\right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

すなわち、条件付事後分布も逆ガンマ分布 $IG(\alpha_1, \beta_1)$ となる。ただし、

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{n-1}{2}, \quad \beta_1 = \beta_0 + \frac{1}{2} \sum_{t=2}^n (\Delta P_t - \mu - \phi \Delta P_{t-1})^2$$

である。(5.9)を利用して σ^2 をサンプリングする。

以上、3ステップを十分大きな回数 M だけ試行し、最初の N 回を捨てた $(M-N)$ 個の平均値をパラメタの推定値として採用する。

5.4.2 非対称モデル

イノベーション ε_t が非対称な場合は、下落局面の割合を示す p_1 と、それぞれの局面での分布を表現するパラメタが推定対象に加わる。したがって、推定の手順は次の5ステップ：

1. μ のサンプリング
2. ϕ のサンプリング

3. p_1 のサンプリング
4. 下落局面の分布のパラメタのサンプリング
5. 上昇局面の分布のパラメタのサンプリング

となる．第1から第3ステップまでは両局面のデータをまとめて扱うが，続く第4，第5ステップでは下落・上昇局面を分けてパラメタ推定を行う．

Kou モデル

イノベーションに Kou モデルを仮定すると， ε_t の確率密度関数は

$$p_1 \theta_1 \exp(\theta_1 \varepsilon_t) I_{D_1}(t) + p_2 \theta_2 \exp(-\theta_2 \varepsilon_t) I_{D_2}(t)$$

であるので，下落局面の標本数を n_1 ，上昇局面の標本数を n_2 としたとき，尤度関数は

$$p^{n_1} \theta_1^{n_1} \exp\left(\theta_1 \sum_{t \in D_1} \varepsilon_t\right) \times p^{n_2} \theta_2^{n_2} \exp\left(-\theta_2 \sum_{t \in D_2} \varepsilon_t\right)$$

と表せる．

1. μ のサンプリング

μ の事前分布として区間 (C_1, C_2) 上の一様分布を考えると，条件付事後分布は，

$$\begin{aligned} f(\mu | \Delta \mathbf{P}, \phi, p_1, \theta_1, \theta_2) &\propto \exp\left(\theta_1 \sum_{t \in D_1} \varepsilon_t\right) \exp\left(-\theta_2 \sum_{t \in D_2} \varepsilon_t\right) \times I_{(C_1, C_2)}(\mu) \\ &\propto \exp\{\mu(\theta_2 n_2 - \theta_1 n_1)\} \times I_{(C_1, C_2)}(\mu) \end{aligned} \quad (5.10)$$

と計算できる．いま，(5.10) の右辺は良く知られた分布ではないため，サンプリングでは，次のように逆関数を用いた方法を採用する． $K_2 = \theta_2 n_2 - \theta_1 n_1$ とおくと，(5.10) の分布関数

$$\int_{C_1}^u \exp(K_2 \mu) d\mu \propto \frac{e^{K_2 u} - e^{K_2 C_1}}{e^{K_2 C_2} - e^{K_2 C_1}}$$

が得られる。ここで、逆関数を求めると

$$\mu = C_1 + \frac{1}{K_2} \log \left\{ (1-u) + ue^{K_2(C_2-C_1)} \right\} \quad (5.11)$$

と計算できるので、区間 $(0, 1)$ の一様分布に従う乱数 u を発生させ、(5.11) に代入することで、 μ のサンプリングを行う。

2. ϕ のサンプリング

ϕ の事前分布として区間 $(-1, 1)$ の一様分布を考えると、条件付事後分布は、

$$\begin{aligned} f(\phi | \Delta \mathbf{P}, \mu, p_1, \theta_1, \theta_2) \\ &\propto \exp \left(\theta_1 \sum_{t \in D_1} \varepsilon_t \right) \exp \left(-\theta_2 \sum_{t \in D_2} \varepsilon_t \right) \times I_{(-1,1)}(\phi) \\ &\propto \exp \left\{ \phi \left(\theta_2 \sum_{t \in D_2} \Delta P_{t-1} - \theta_1 \sum_{t \in D_1} \Delta P_{t-1} \right) \right\} \times I_{(-1,1)}(\phi) \end{aligned} \quad (5.12)$$

と計算でき、(5.12) に関しても (5.10) と同様に逆関数を用いて ϕ をサンプリングする。いま、 $K_3 = \theta_2 \sum_{t \in D_2} \Delta P_{t-1} - \theta_1 \sum_{t \in D_1} \Delta P_{t-1}$ とおくと、(5.12) の分布関数は

$$\int_{-1}^u \exp(K_3 \phi) d\phi \propto \frac{e^{K_3 u} - e^{-K_3}}{e^{K_3} - e^{-K_3}}$$

となるので、逆関数が

$$\phi = -1 + \frac{1}{K_3} \log \left\{ (1-u) + ue^{2K_3} \right\} \quad (5.13)$$

で与えられる。従って、 ϕ のサンプリングは、区間 $(0, 1)$ の一様分布に従う乱数 u を発生させ、(5.13) に代入することで実現する。

3. p_1 のサンプリング

p_1 の事前分布をベータ分布、 $Beta(a_0, b_0)$ とした場合の、 p_1 の条件付事後分布 $f(p_1 | \Delta \mathbf{P})$ は、

$$f(p_1 | \Delta \mathbf{P}) \propto p_1^{n_1} p_2^{n_2} \times p_1^{a_0-1} (1-p_1)^{(b_0-1)} = p_1^{a_1-1} (1-p_1)^{b_1-1} \quad (5.14)$$

となる．すなわち，条件付事後分布はベータ分布， $Beta(a_1, b_1)$ となる．ただし， $a_1 = n_1 + a_0$ ， $b_1 = n_2 + b_0$ である． p_1 のサンプリングに際しては(5.14)を利用する．

4. 下落局面の分布のパラメタのサンプリング

下落局面 $D_1 = \{t | \varepsilon_t < 0\}$ での ε_t の確率密度関数は $p_1 \theta_1 \exp(-\theta_1 |\varepsilon_t|)$ であるので，尤度関数は

$$\prod_{t \in D_1} p_1 \theta_1 \exp(-\theta_1 |\varepsilon_t|)$$

と計算できる．

いま，下落局面の価格前日差について $\Delta \mathbf{P}_1 = \{\Delta P_t | t \in D_1\}$ とおき， θ_1 の事前分布をガンマ分布 $G(\alpha_0, \beta_0)$ を仮定した場合の条件付事後分布は，

$$\begin{aligned} f(\theta_1 | \Delta \mathbf{P}_1) &\propto \theta_1^{\alpha_0 - 1} \exp(-\beta_0 \theta_1) \times \theta_1^{n_1} \exp\left(\theta_1 \sum_{t \in D_1} \varepsilon_t\right) \\ &\propto \theta_1^{\alpha_1 - 1} \exp(-\theta_1 \beta_1) \end{aligned} \quad (5.15)$$

である．すなわち条件付事後分布もガンマ分布 $G(\alpha_1, \beta_1)$ となる．ただし，

$$\alpha_1 = n_1 + \alpha_0, \quad \beta_1 = \beta_0 - \sum_{t \in D_1} (\Delta P_t - \mu - \phi \Delta P_{t-1})$$

である．(5.15)を用いて θ_1 のサンプリングを行う．

5. 上昇局面の分布のパラメタのサンプリング

上昇局面 $D_2 = \{t | \varepsilon_t \geq 0\}$ での ε_t の確率密度関数は $p_2 \theta_2 \exp(-\theta_2 \varepsilon_t)$ であるので，尤度関数は

$$\prod_{t \in D_2} p_2 \theta_2 \exp(-\theta_2 \varepsilon_t)$$

と表せる．

いま、上昇局面の価格前日差について、 $\Delta \mathbf{P}_2 = \{\Delta P_t | t \in D_2\}$ とおき、 θ_2 の事前分布としてガンマ分布 $G(\alpha_0, \beta_0)$ を仮定した場合の条件付事後分布は、

$$\begin{aligned} f(\theta_2 | \Delta \mathbf{P}_2) &\propto \theta_2^{\alpha_0 - 1} \exp(-\beta_0 \theta_2) \times \theta_1^{n_2} \exp \left\{ -\theta_2 \sum_{t \in D_2} (\Delta P_t - \mu - \phi \Delta P_{t-1}) \right\} \\ &\propto \theta_2^{\alpha_1 - 1} \exp(-\theta_2 \beta_1) \end{aligned} \quad (5.16)$$

である。すなわち、条件付事後分布もガンマ分布 $G(\alpha_1, \beta_1)$ となり、

$$\alpha_1 = n_2 + \alpha_0, \quad \beta_1 = \beta_0 + \sum_{t \in D_2} (\Delta P_t - \mu - \phi \Delta P_{t-1})$$

である。(5.16) を用いて、 θ_2 をサンプリングする。

以上、5ステップを十分大きな回数 M だけ試行し、最初の N 回を捨てた $(M - N)$ 個の平均値をパラメタの推定値として採用する。

指数-半正規分布モデル

引き続き、イノベーションに指数-半正規分布モデルを仮定した場合のパラメタ推定について述べる。イノベーション ε_t の確率密度関数は

$$p_1 \theta_1 \exp(\theta_1 \varepsilon_t) I_{D_1}(t) + 2p_2 (2\pi\sigma_2^2)^{-1/2} \exp\left\{-\varepsilon_t^2 / (2\sigma_2^2)\right\} I_{D_2}(t)$$

であるため、尤度関数は

$$p^{n_1} \theta_1^{n_1} \exp\left(\theta_1 \sum_{t \in D_1} \varepsilon_t\right) \times 2p^{n_2} (2\pi\sigma_2^2)^{-n_2/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_{t \in D_2} \varepsilon_t^2\right)$$

と計算できる。

1. μ のサンプリング

μ の事前分布として区間 (C_1, C_2) 上の一様分布を考えると、条件付事後分布は、

$$\begin{aligned} f(\mu | \Delta \mathbf{P}, \phi, p_1, \theta_1, \theta_2) &\propto \exp\left(\theta_1 \sum_{t \in D_1} \varepsilon_t\right) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_{t \in D_2} \varepsilon_t^2\right) \times I_{(C_1, C_2)}(\mu) \\ &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_a^2} (\mu - \mu_a)^2\right\} \times I_{(C_1, C_2)}(\mu) \end{aligned} \quad (5.17)$$

となり, $TN_{(C_1, C_2)}(\mu_a, \sigma_a^2)$ に従う切断正規分布となる. ただし,

$$\mu_a = \frac{\sum_{t \in D_2} \Delta P_t - \phi \sum_{t \in D_2} \Delta P_{t-1} - \theta_1 n_1 \sigma_2^2}{n_2} \quad \sigma_a^2 = \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

である. μ のサンプリングは (5.17) を用いて行う.

2. ϕ のサンプリング

ϕ の事前分布として区間 $(-1, 1)$ の一様分布を考えると, 条件付事後分布は,

$$\begin{aligned} f(\phi | \Delta \mathbf{P}, \mu, p_1, \theta_1, \theta_2) &\propto \exp\left(\theta_1 \sum_{t \in D_1} \varepsilon_t\right) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_{t \in D_2} \varepsilon_t^2\right) \times I_{(-1,1)}(\phi) \\ &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_b^2} (\phi - \mu_b)^2\right\} \times I_{(-1,1)}(\phi) \end{aligned} \quad (5.18)$$

となり, $TN_{(-1,1)}(\mu_b, \sigma_b^2)$ の切断正規分布として得られる. ただし,

$$\mu_b = \frac{\sum_{t \in D_2} \Delta P_t \Delta P_{t-1} - \mu \sum_{t \in D_2} \Delta P_{t-1} - \theta_1 \sigma_2^2 \sum_{t \in D_1} \Delta P_{t-1}}{\sum_{t \in D_2} \Delta P_{t-1}^2}, \quad \sigma_b^2 = \frac{2\sigma_2^2}{\sum_{t \in D_2} \Delta P_{t-1}^2}$$

である. (5.18) を利用して ϕ をサンプリングする.

3. p_1 のサンプリング

p_1 の事前分布をベータ分布, $Beta(a_0, b_0)$ とした場合の, p_1 の条件付事後分布 $f(p_1 | \Delta \mathbf{P})$ は,

$$f(p_1 | \Delta \mathbf{P}) \propto p_1^{n_1} p_2^{n_2} \times p_1^{a_0-1} (1-p_1)^{(b_0-1)} = p_1^{a_1-1} (1-p_1)^{b_1-1} \quad (5.19)$$

となり, ベータ分布 $Beta(a_1, b_1)$ に従う. ただし, $a_1 = n_1 + a_0$, $b_1 = n_2 + b_0$ であり, (5.14) と同等である. なお, p_1 のサンプリングには (5.19) を用いる.

4. 下落局面の分布のパラメタのサンプリング

下落局面 D_1 の確率密度関数は $p_1 \theta_1 \exp(-\theta_1 |\varepsilon_t|)$ であるため, 尤度関数は

$$\prod_{t \in D_1} p_1 \theta_1 \exp(-\theta_1 |\varepsilon_t|)$$

と計算できる．ここで， θ_1 の事前分布をガンマ分布 $G(\alpha_0, \beta_0)$ を仮定した場合の条件付事後分布は，

$$\begin{aligned} f(\theta_1 | \Delta \mathbf{P}_1) &\propto \theta_1^{\alpha_0-1} \exp(-\beta_0 \theta_1) \times \theta_1^{n_1} \exp\left(\theta_1 \sum_{t \in D_1} \varepsilon_t\right) \\ &\propto \theta_1^{\alpha_1-1} \exp(-\theta_1 \beta_1) \end{aligned} \quad (5.20)$$

であり，条件付事後分布もガンマ分布 $G(\alpha_1, \beta_1)$ となる．ただし，

$$\alpha_1 = n_1 + \alpha_0, \quad \beta_1 = \beta_0 - \sum_{t \in D_1} (\Delta P_t - \mu - \phi \Delta P_{t-1})$$

である． θ_1 は (5.20) を用いて発生する．

5. 上昇局面の分布のパラメタのサンプリング

上昇局面 D_2 の確率密度関数は

$$2p_2 \left(2\pi\sigma_2^2\right) \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_2^2} (\Delta P_t - \mu - \phi \Delta P_{t-1})^2\right\}$$

であるため，尤度関数は

$$\prod_{t \in D_2} 2p_2 \left(2\pi\sigma_2^2\right) \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_2^2} (\Delta P_t - \mu - \phi \Delta P_{t-1})^2\right\}$$

と計算できる．いま， σ_2^2 の事前分布を逆ガンマ分布， $IG(\alpha_0, \beta_0)$ を仮定した場合の条件付事後分布は，

$$\begin{aligned} f(\sigma_2^2 | \Delta \mathbf{P}_2, \mu, \phi) &\propto (\sigma_2^2)^{-(\alpha_0+1)} \exp\left(-\frac{\beta_0}{\sigma_2^2}\right) \times (\sigma_2^2)^{-\frac{n_2}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma_2^2} \sum_{t \in D_2} (\Delta P_t - \mu - \phi \Delta P_{t-1})^2\right\} \\ &\propto (\sigma_2^2)^{-(\alpha_1+1)} \exp\left(-\frac{1}{\sigma_2^2} \beta_1\right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

であり，条件付事後分布も逆ガンマ分布 $IG(\alpha_1, \beta_1)$ となる．ここで，

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{n_2}{2}, \quad \beta_1 = \beta_0 + \frac{1}{2} \sum_{t \in D_2} (\Delta P_t - \mu - \phi \Delta P_{t-1})^2$$

である。(5.21)を用いて、 σ_2^2 をサンプリングする。

以上、5ステップを十分大きな回数 M だけ試行し、最初の N 回を捨てた $(M - N)$ 個の平均値をパラメタの推定値として採用する。

5.5 価格変動の構造分析と市場リスク計測

サーキットブレーカー制度導入時点の2009年5月7日から分析時に入手できたデータの終端日である2012年10月31日までの金、白金、ガソリン、原油の4商品の日次価格データを対象として、本論文で提案する9種類のモデルの当てはめと市場リスクの計測を行う。

モデルは、全期間を通じた価格データに当てはめるだけでなく、おおむね等分した

- 第1期間：「サーキットブレーカー制度導入直後である2009年5月7日から2010年12月30日まで」
- 第2期間「それ以降となる2011年1月4日から2012年10月31日まで」

のそれぞれに対してもモデルを当てはめる。それぞれの期間でモデルの当てはめと未知パラメタの推定結果を比較することで、商品ごとに価格変動の特徴が時期に伴って変化したか否かについても確認する。また、第1期間でのモデル当てはめの結果をもとに市場リスクの推定を行い、第2期間の一部の価格データから算出した市場リスクの実績値との比較を行うことで、本論文が提唱するモデルにもとづく市場リスクの予測精度についても検証する。

なお、各モデルのパラメタ推定に際しては、MCMC法の試行回数を12,000回とし、はじめの2,000回を棄てた残りの10,000回の平均値をパラメタの推定値として採用する。また、 μ の事前分布である一様分布の区間 (C_1, C_2) は、価格の前日差データの下側40%点を C_1 とし、上側40%点を C_2 と設定した。

今回の分析における事後分布の収束については、すべてのパラメタに関して Geweke の統計量の絶対値が 1.645 以内に収まっていたため、有意水準 10% ですべての事後分布は収束していると判断した。また、非効率因子を計算したところ、ほとんどのもので 2.0 を下回る値をとっており、大きなものでも高々 2.8 であったため、本論文で用いたアルゴリズムはサンプリングの効率性については問題ないと判断して良いだろう。

なお、各々の期間における商品先物価格の傾向について第 5.5.1 節で述べたのちに、商品ごとに当てはめたモデルの詳しい結果については第 5.5.2 節で、市場リスクの推定については第 5.5.3 節でそれぞれ述べる。

5.5.1 サークットブレーカー制度導入後の商品先物価格の傾向

本小節ではモデルの当てはめに先立ち、各商品の価格変動がそれぞれの期間でどのような特徴を有しているかを確認する。はじめに、それぞれの期間での商品先物価格の前日差 ΔP_t の平均と分散について表 5.2 に記した。価格前日差の平均で

表 5.2: 各期間の商品先物価格の前日差の平均と分散

期間	金		白金		ガソリン		原油	
	平均	分散	平均	分散	平均	分散	平均	分散
全期間	1.73	2288.80	0.32	4635.67	23.57	980109.01	18.36	860311.87
第 1 期間	1.98	1492.83	2.39	4969.31	37.83	1001341.00	25.99	828456.19
第 2 期間	1.42	3010.67	-1.63	4344.12	8.47	962595.20	9.42	890635.10

あるので、価格水準では線形トレンドに対応している。白金では 2.39 から -1.63 と負の値に転じており価格変動の傾向が変化したことが予想される。ガソリンでは 37.83 から 8.47、原油では 25.99 から 9.42 と減少しており、価格水準で考えた場合には上昇傾向が薄まったと考えられる。一方、分散の値については、金では第 1 期間から第 2 期間にかけて 2 倍程度と大きく増加しているが、その他の 3 商品では 1 割程度の増減しかしておらず、顕著な変動はみられない。価格変動の傾向と下落

と上昇局面での分布の特徴を詳しく観察するために、各々の期間での先物価格 P_t と、価格前日差 ΔP_t の挙動とヒストグラムを商品ごとに示し（金は図 5.2，白金は図 5.3，ガソリンは図 5.4，原油は図 5.5），特徴をまとめていく。

1. 金

全期間を通して先物価格は上昇傾向を示している。価格変動については、 ΔP_t の値域は $(-509, 203)$ であり下落時に特に大きな値をとっている。分布の形状は、下落時の裾が非常に重く、上昇時においても裾がやや重い。期間を区切って観察すると、前半部の第 1 期間の先物価格も上昇傾向を示しているが、 ΔP_t の値域は $(-166, 120)$ であり価格変動は比較的穏やかである。分布の形状は、下落時にはやや裾が重く上昇時には裾が軽い非対称性を有している。第 2 期間の先物価格は、大きな上昇・下落を繰り返しながらも全体的には穏やかに上昇している。 ΔP_t の値域は $(-509, 203)$ と拡大しており、分布の形状でも下落局面で非常に裾が重く、上昇局面でも裾がやや重い。また、原点付近で分布が尖っていることも特徴として挙げられる。

2. 白金

先物価格の挙動には、全期間を通して非常に大きな下落がいくつか存在しているが、長期的には特定の方向性は観測されない。 ΔP_t は大きな負の値を取るために下落局面で裾が非常に重い分布となっている。第 1 期間の先物価格は緩やかな上昇傾向を示しているが、 ΔP_t の値域は $(-318, 156)$ であり下落局面で大きな値をとっている。分布の形状は下落局面で裾が重く上昇局面では比較的裾が軽い非対称性を有している。第 2 期間の先物価格は大きな下落と小刻みな回復を繰り返しており、上昇・下落のいずれかに関して際立った長期的傾向は観測されない。 ΔP_t の値域は $(-635, 262)$ と広がっており、特に下落局面で大きな値をとっている。また、分布の形状でも下落時の裾が非常に重くなっている。

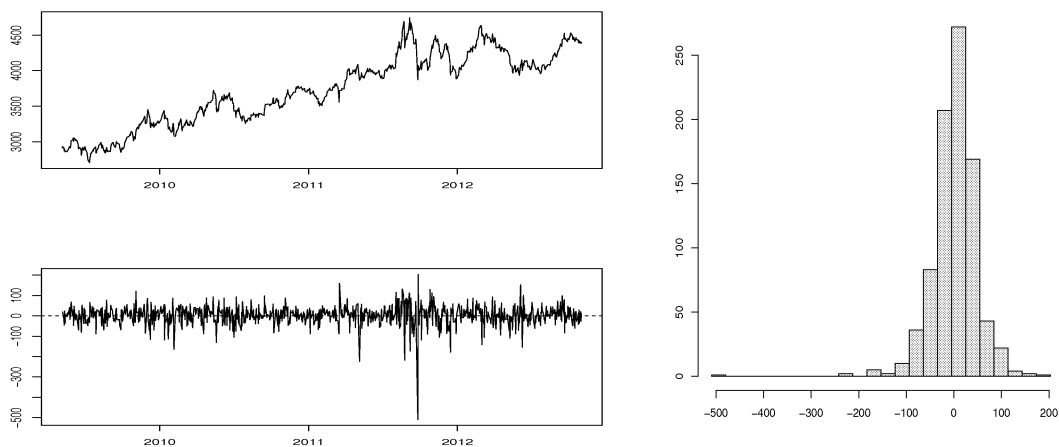
3. ガソリン

全期間を通して緩やかな上昇傾向を示している。価格の下落時にはいくつかの大きな変動が観測され、分布の形状は下落時に裾が重く上昇時に裾が軽い非対称性を有している。第1期間に注目すれば、上昇・下落を繰り返しながら緩やかな上昇傾向を示している。 ΔP_t は(-3160, 3030)の範囲に値をとり、下落時と上昇時の値に大きな差は見られない。第2期間では、先物価格に特徴だった方向性は観測されない。 ΔP_t の値域は(-6410, 3260)であり下落時に大きな値をとり、分布の形状は下落時に裾が重く上昇時には比較的裾が軽い非対称性を有している。

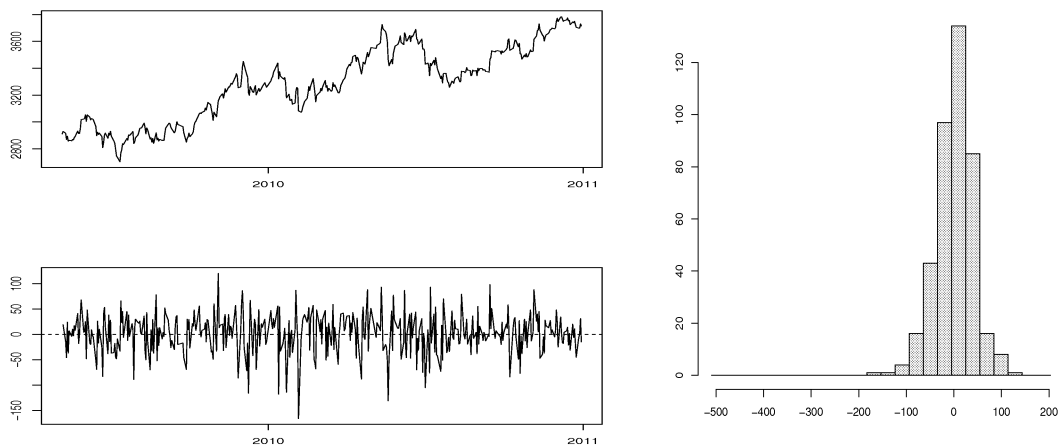
4. 原油

先物価格は、全期間を通して緩やかな上昇傾向にある。 ΔP_t は負の場合に大きな値を記録しており、分布の形状は下落時に裾が重くなっている。第1期間の先物価格は、上昇と下落を繰り返しながらも全体的には緩やかに上昇している。 ΔP_t の値域は(-2920, 2670)であり、正負で取り得る値の差は小さい。分布の形状は、下落局面で僅かながら裾が重くなっているが、原点付近を軸に対称な形状であると考えられる。第2期間では、価格は回復と下落を繰り返している。 ΔP_t の値域は(-7350, 3950)であり下落時に大きな値をとっており、分布の形状は下落局面で裾が重くなっている。

(a) 全期間 : 2009年5月7日から2012年10月31日まで



(b) 第1期間 : 2009年5月7日から2010年12月30日まで



(c) 第2期間 : 2011年1月4日から2012年10月31日まで

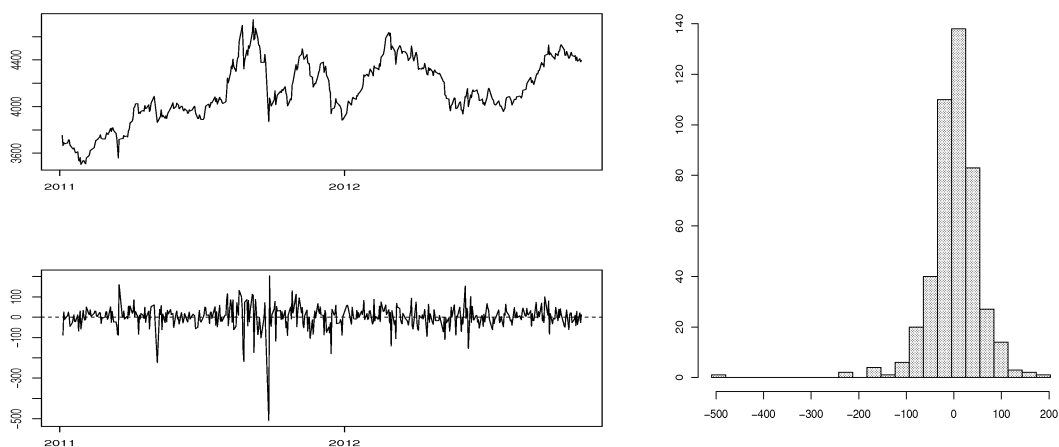
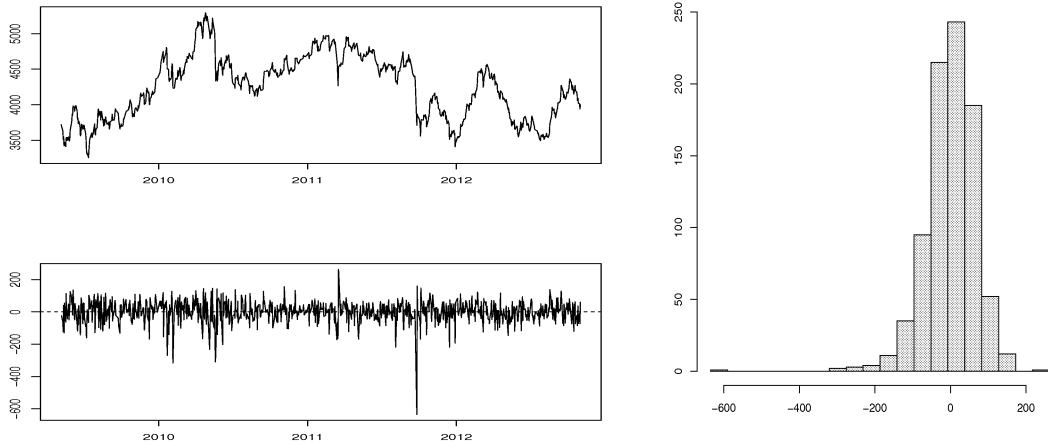
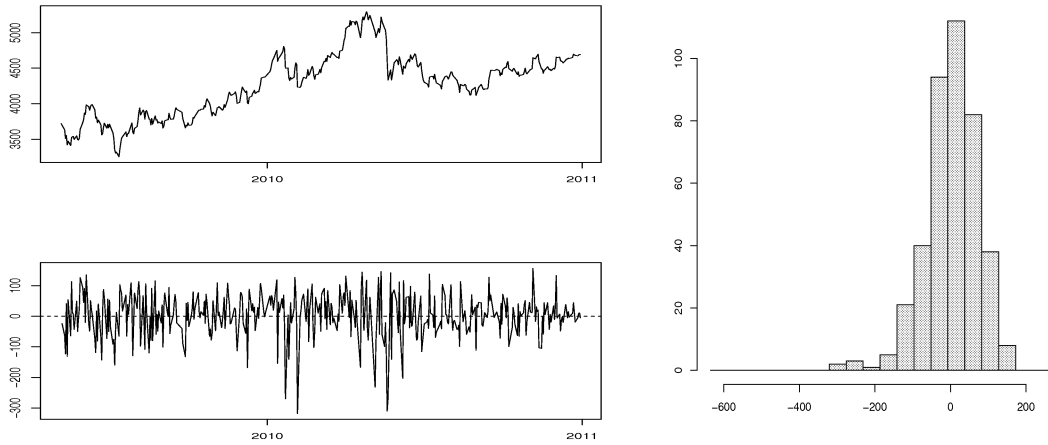


図 5.2: 金 : 各期間での価格と価格前日差の推移と価格前日差のヒストグラム

(a) 全期間：2009年5月7日から2012年10月31日まで



(b) 第1期間：2009年5月7日から2010年12月30日まで



(c) 第2期間：2011年1月4日から2012年10月31日まで

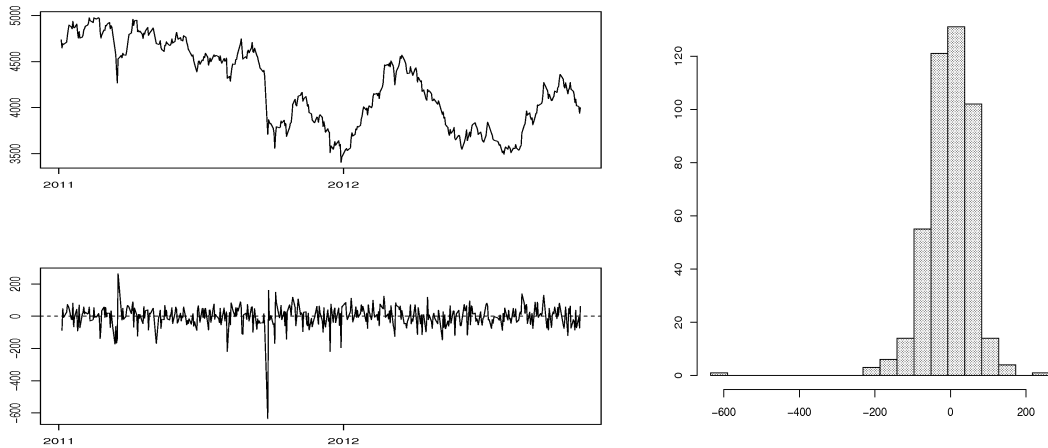
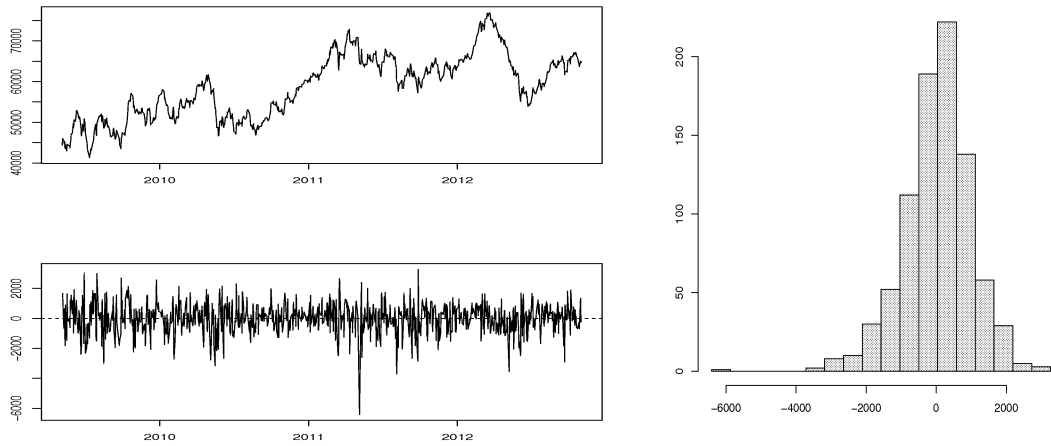
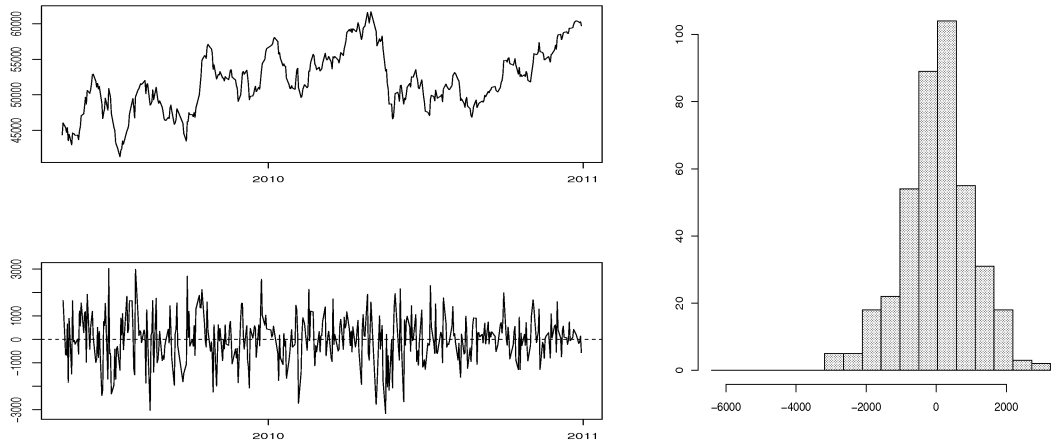


図 5.3: 白金：各期間での価格と価格前日差の推移と価格前日差のヒストグラム

(a) 全期間：2009年5月7日から2012年10月31日まで



(b) 第1期間：2009年5月7日から2010年12月30日まで



(c) 第2期間：2011年1月4日から2012年10月31日まで

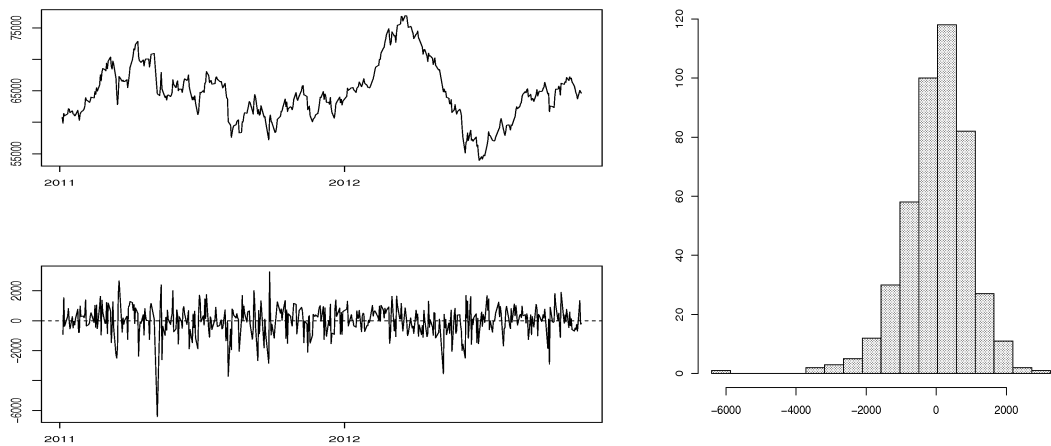
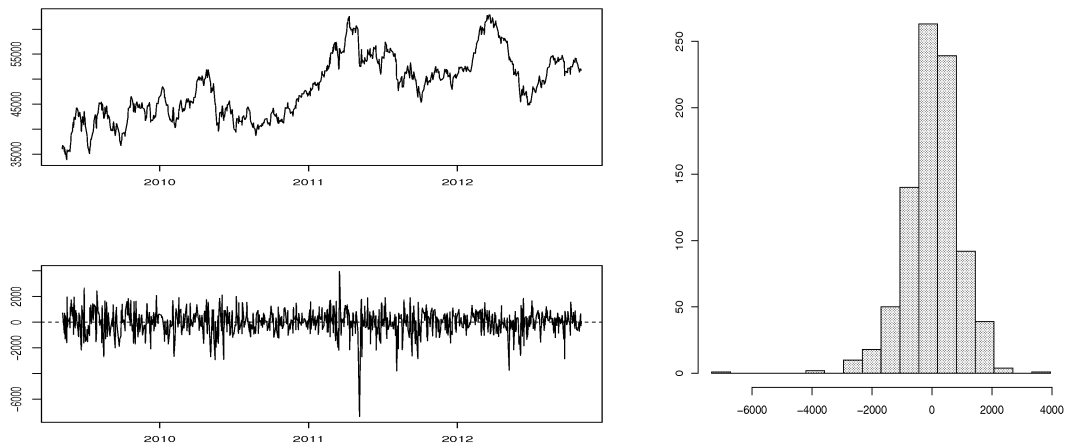
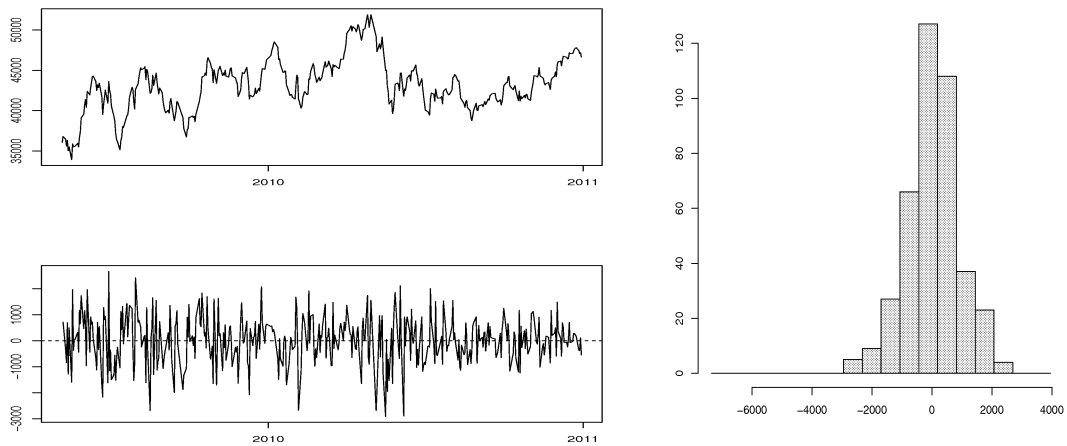


図 5.4: ガソリン:各期間での価格と価格前日差の推移と価格前日差のヒストグラム

(a) 全期間：2009年5月7日から2012年10月31日まで



(b) 第1期間：2009年5月7日から2010年12月30日まで



(c) 第2期間：2011年1月4日から2012年10月31日まで

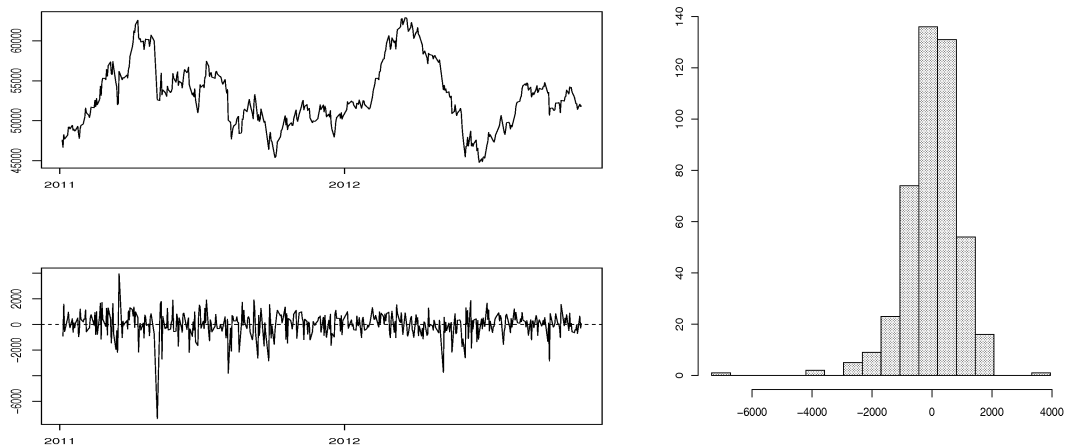


図 5.5: 原油：各期間での価格と価格前日差の推移と価格前日差のヒストグラム

5.5.2 価格変動の構造

本節では、それぞれの期間における4種類の商品先物価格の前日差に対して9つのモデルを当てはめる。内訳は、 ΔP_t の平均構造に対するモデルは、1次の自己回帰モデル： $\Delta P_t = \mu + \phi \Delta P_{t-1} + \varepsilon_t$ 、切片のみ： $\Delta P_t = \mu + \varepsilon_t$ 、平均構造を考えない場合： $\Delta P_t = \varepsilon_t$ の3通りであり、 ε_t に対しては、正規分布モデル、Kouモデル、指数-半正規分布モデルの3通りであり、それぞれの組み合わせを考慮した 3×3 の計9通りになる。

各期間のそれぞれの商品先物価格の価格前日差に対して、それぞれのモデル推定を行い、DICにもとづいて最適なモデルを選択する。それぞれの期間ごとに選択されたモデルを商品ごとにまとめた結果については表5.3に示した。対象期間を

表 5.3: 選択されたモデル

期間	対象	金	白金	ガソリン	原油
全期間	ΔP_t	ϕ と μ	μ のみ	μ のみ	μ のみ
	ε_t	指数-半正規分布モデル	指数-半正規分布モデル	指数-半正規分布モデル	指数-半正規分布モデル
第1期間	ΔP_t	μ のみ	μ のみ	μ のみ	μ のみ
	ε_t	指数-半正規分布モデル	指数-半正規分布モデル	指数-半正規分布モデル	指数-半正規分布モデル
第2期間	ΔP_t	平均構造なし	μ のみ	μ のみ	平均構造なし
	ε_t	Kouモデル	指数-半正規分布モデル	指数-半正規分布モデル	指数-半正規分布モデル

表中の略語は、“ ϕ と μ ”は1次の自己回帰モデル、“ μ のみ”は切片のみ、“平均構造なし”は ΔP_t の平均構造を考えず、 $\Delta P_t = \varepsilon_t$ を示している。

全期間とした場合、 ΔP_t については、金で1次の自己回帰モデルが選択されたが、その他の3商品では切片のみのモデルが選択された。 ε_t については、全ての商品で指数-半正規分布モデルが選択されているため、下落局面の裾が重く、上昇局面では比較的裾が軽い形状をしていると考えられる。

次にパラメタの推定値を詳細に検討する（表5.4を参照）。

白金、ガソリン、原油の3商品では、 ΔP_t の平均構造に対して切片のみを仮定したモデルが選択されている。パラメタ推定の結果は、白金では、 μ の推定値は -10.102 、

表 5.4: 選択されたモデルのパラメタ推定値：全期間

(a) 金：「 ϕ と μ , 指数-半正規分布モデル」

	θ_1	σ_2^2	μ	ϕ	p_1	p_2
事後平均	0.029	1880.143	-3.999	-0.113	0.408	0.592
事後標準偏差	0.002	124.074	1.118	0.068	0.022	-
5%点	0.027	1685.406	-4.951	-0.221	0.375	-
95%点	0.032	2090.978	-1.848	-0.001	0.446	-

(b) 白金：「 μ のみ, 指数-半正規分布モデル」

	θ_1	σ_2^2	μ	p_1	p_2
事後平均	0.020	4104.004	-10.102	0.410	0.590
事後標準偏差	0.001	288.572	2.051	0.021	-
5%点	0.018	3645.166	-11.920	0.378	-
95%点	0.022	4582.683	-5.880	0.449	-

(c) ガソリン：「 μ のみ, 指数-半正規分布モデル」

	θ_1	σ_2^2	μ	p_1	p_2
事後平均	0.0013	896429.100	-100.578	0.412	0.588
事後標準偏差	0.0001	61858.460	30.140	0.022	-
5%点	0.0012	797450.500	-128.730	0.379	-
95%点	0.0014	1001410.001	-37.462	0.450	-

(d) 原油：「 μ のみ, 指数-半正規分布モデル」

	θ_1	σ_2^2	μ	p_1	p_2
事後平均	0.0014	761917.000	-92.106	0.414	0.586
事後標準偏差	0.0001	54401.740	28.829	0.021	-
5%点	0.0013	675167.800	-118.721	0.382	-
95%点	0.0015	853870.200	-32.000	0.449	-

事後標準偏差は2.051, 90%信用区間は(-11.920, -5.880), ガソリンでは, μ の推定値は-100.578, 事後標準偏差は30.104, 90%信用区間は(-128.730, -37.462), 原油では, μ の推定値は-92.106, 事後標準偏差は28.829, 90%信用区間は(-118.721, -32.000), となっており, 3商品ともに負の切片をもつために, 価格前日差は平均的に負の値がでやすい状況であったと考えられる. 一方で, ε_t は全て指数-半正規分布モデルが選択されており, 下落局面で裾が重く上昇局面では比較的裾が軽い性質をもつため下落局面で大きな値が出やすいが, その一方で p_2 の推定値がいずれも0.6程度であるため, 正のイノベーションが起りやすい状況であった. したがって, 3商品ともに, 大きな下落が発生する可能性はある一方で, 小刻みに価格が回復しやすい状況であったと考えられる.

金では, ΔP_t の平均構造として1次の自己回帰モデルが選択されている. μ の

推定値は -3.999 ，事後標準偏差は 1.118 ，90%信用区間は $(-4.951, -1.848)$ であり切片は負値をとり， ϕ の推定値は -0.113 ，事後標準偏差は 0.068 ，90%信用区間は $(-0.221, -0.001)$ であるので負の係数をとる．負の自己回帰構造を持っているために，価格前日差は，前日とは反対符号の値が出やすく日々騰落を繰り返しやすい状況であったと考えられる．一方で， ε_t は金の場合も指数-半正規分布モデルが選択されており，下落局面で大きな値をとりやすい傾向にあった．また， p_1 の推定値は 0.408 ，事後標準偏差は 0.022 ，90%信用区間は $(0.375, 0.446)$ であるので，負のイノベーションが起こりにくく，小刻みな回復基調にあったと考えられる．

ここまでのところ，長い期間での商品先物価格の挙動について論じてきた．ここからは，分析期間の前半部（第1期間）と後半部（第2期間）に分け，それぞれで選択されたモデルとパラメタ推定値を比較することにより，価格変動の構造に変化があったか否かを検証していく．なお，第1期間で選択されたモデルのパラメタ推定値の詳細については表 5.5 に，第2期間での結果については表 5.6 にまとめた．

表 5.5: 選択されたモデルのパラメタ推定値：第1期間

(a) 金：「 μ のみ，指数-半正規分布モデル」					
	θ_1	σ_2^2	μ	p_1	p_2
事後平均	0.032	1419.356	-2.989	0.417	0.583
事後標準偏差	0.003	148.398	1.996	0.032	-
5%点	0.028	1184.727	-4.914	0.370	-
95%点	0.037	1666.496	1.157	0.473	-

(b) 白金：「 μ のみ，指数-半正規分布モデル」					
	θ_1	σ_2^2	μ	p_1	p_2
事後平均	0.018	4415.944	-5.900	0.420	0.580
事後標準偏差	0.001	464.831	3.877	0.035	-
5%点	0.016	3675.282	-9.817	0.369	-
95%点	0.021	5208.738	1.994	0.483	-

(c) ガソリン：「 μ のみ，指数-半正規分布モデル」					
	θ_1	σ_2^2	μ	p_1	p_2
事後平均	0.0014	1076054.137	-153.604	0.408	0.592
事後標準偏差	0.0001	103987.953	32.979	0.028	-
5%点	0.0012	916286.032	-178.812	0.367	-
95%点	0.0026	1256323.861	-96.373	0.453	-

(d) 原油：「 μ のみ，指数-半正規分布モデル」					
	θ_1	σ_2^2	μ	p_1	p_2
事後平均	0.0015	924772.200	-165.005	0.408	0.592
事後標準偏差	0.0001	90338.760	33.781	0.027	-
5%点	0.0013	785517.100	-188.862	0.366	-
95%点	0.0017	1076927.000	-110.238	0.451	-

表 5.6: 選択されたモデルのパラメタ推定値：第 2 期間

(a) 金：「構造なし，Kou モデル」

	θ_1	θ_2	p_1	p_2
事後平均	0.026	0.029	0.450	0.550
事後標準偏差	0.002	0.002	0.023	-
5%点	0.023	0.026	0.412	-
95%点	0.029	0.032	0.489	-

(b) 白金：「 μ のみ，指数-半正規分布モデル」

	θ_1	σ_2^2	μ	p_1	p_2
事後平均	0.022	3683.363	-11.600	0.414	0.586
事後標準偏差	0.002	360.113	2.565	0.028	-
5%点	0.019	3122.772	-13.885	0.372	-
95%点	0.025	4290.430	-6.193	0.466	-

(c) ガソリン：「 μ のみ，指数-半正規分布モデル」

	θ_1	σ_2^2	μ	p_1	p_2
事後平均	0.0013	726989.100	-15.021	0.440	0.560
事後標準偏差	0.0001	74433.550	56.056	0.038	-
5%点	0.0011	608266.800	-76.543	0.384	-
95%点	0.0014	851621.600	97.481	0.509	-

(d) 原油：「構造なし，指数-半正規分布モデル」

	θ_1	σ_2^2	p_1	p_2
事後平均	0.0013	612909.160	0.435	0.565
事後標準偏差	0.0001	54918.849	0.024	-
5%点	0.0012	527920.800	0.396	-
95%点	0.0015	708414.941	0.474	-

また，選択されなかったモデルを含めたモデル推定結果の概要については，金を表 5.7，白金を表 5.8，ガソリンを表 5.9，原油を表 5.10 にまとめた。

表中では，パラメタの推定値を記載するにとどめている。また， Δ DIC は当てはめた 9 つのモデルのうち最小となるモデルの DIC の値との差であり， Δ DIC が 0 のものが DIC で選択されたモデルである。

それでは，商品ごとに価格変動の構造の特徴を述べていこう。

1. 金

金は最も構造が変化した商品であった。選択されたモデルはそれぞれ，全期間では ΔP_t に 1 次の自己回帰モデル ε_t に指数-半正規分布モデルが選択されるが，第 1 期間では ΔP_t に切片のみ ε_t に指数-半正規分布モデルが，第 2 期間では ΔP_t に構造がなく ε_t に Kou モデルが選択されており，期間によって価格変動の構造が異なっていた。

表 5.7: モデル推定結果 : 金

(a) 全期間								
ε_t	ΔP_t	ΔDIC	パラメタ推定値					
			σ^2		μ	ϕ		
正規分布	ϕ と μ	163.250	2282.203		1.841	-0.080		
	μ のみ	166.804	2293.374		1.694	-		
	構造なし	165.938	2292.137		-	-		
			θ_1	θ_2	μ	ϕ	p_1	p_2
Kou モデル	ϕ と μ	1189.182	0.020	0.022	3.768	0.001	0.497	0.503
	μ のみ	10.160	0.028	0.032	4.184	-	0.503	0.497
	構造なし	5.211	0.028	0.032	-	-	0.449	0.551
			θ_1	σ_2^2	μ	ϕ	p_1	p_2
指数-半正規分布 モデル	ϕ と μ	0.000	0.029	1880.143	-3.999	-0.113	0.408	0.592
	μ のみ	3.094	0.029	1906.627	-4.123	-	0.409	0.591
	構造なし	10.030	0.028	1765.204	-	-	0.449	0.551

(b) 第 1 期間								
ε_t	ΔP_t	ΔDIC	パラメタ推定値					
			σ^2		μ	ϕ		
正規分布	ϕ と μ	13.764	1499.615		2.012	-0.045		
	μ のみ	12.510	1500.397		1.976	-		
	構造なし	11.539	1500.973		-	-		
			θ_1	θ_2	μ	ϕ	p_1	p_2
Kou モデル	ϕ と μ	557.929	0.022	0.025	4.738	0.000	0.497	0.503
	μ のみ	19.641	0.031	0.037	5.121	-	0.514	0.486
	構造なし	18.822	0.032	0.035	-	-	0.447	0.553
			θ_1	σ_2^2	μ	ϕ	p_1	p_2
指数 - 半正規分布モデル	ϕ と μ	26.414	0.032	1445.753	-2.638	-0.092	0.416	0.584
	μ のみ	0.000	0.033	1419.356	-2.989	-	0.417	0.583
	構造なし	0.842	0.032	1312.631	-	-	0.447	0.553

(c) 第 2 期間								
ε_t	ΔP_t	ΔDIC	パラメタ推定値					
			σ^2		μ	ϕ		
正規分布	ϕ と μ	123.461	2983.874		1.801	-0.094		
	μ のみ	125.516	3006.543		1.648	-		
	構造なし	123.918	3004.212		-	-		
			θ_1	θ_2	μ	ϕ	p_1	p_2
Kou モデル	ϕ と μ	635.399	0.018	0.019	3.768	0.000	0.505	0.495
	μ のみ	1.364	0.026	0.030	4.413	-	0.507	0.493
	構造なし	0.000	0.026	0.029	-	-	0.450	0.550
			θ_1	σ_2^2	μ	ϕ	p_1	p_2
指数 - 半正規分布モデル	ϕ と μ	535.124	0.027	2298.935	-3.770	-0.118	0.420	0.580
	μ のみ	9.950	0.026	2312.016	-3.648	-	0.418	0.582
	構造なし	12.801	0.026	2180.017	-	-	0.450	0.550

表 5.8: モデル推定結果：白金

(a) 全期間		ΔP_t	ΔDIC		パラメタ推定値			
ε_t								
正規分布	ϕ と μ	121.595	σ^2		μ	ϕ		
	μ のみ	119.600	4648.544		0.335	-0.002		
	構造なし	117.662	4644.326		0.329	-		
Kou モデル	ϕ と μ	1163.096	θ_1	θ_2	μ	ϕ	p_1	p_2
	μ のみ	62.578	0.013	0.015	3.340	0.001	0.495	0.505
	構造なし	55.132	0.019	0.022	5.837	-	0.515	0.485
指数 - 半正規分布モデル	ϕ と μ	5.897	θ_1	σ_2^2	μ	ϕ	p_1	p_2
	μ のみ	0.000	0.020	4094.772	-9.971	-0.048	0.410	0.590
	構造なし	5.860	0.020	4104.004	-10.102	-	0.410	0.590
			0.019	3500.786	-	-	0.470	0.530
(b) 第 1 期間		ΔP_t	ΔDIC		パラメタ推定値			
ε_t								
正規分布	ϕ と μ	34.918	σ^2		μ	ϕ		
	μ のみ	33.705	4995.347		2.313	0.043		
	構造なし	32.145	4988.813		2.501	-		
Kou モデル	ϕ と μ	540.821	θ_1	θ_2	μ	ϕ	p_1	p_2
	μ のみ	30.422	0.012	0.014	4.703	0.000	0.486	0.514
	構造なし	27.222	0.018	0.020	5.613	-	0.503	0.497
指数 - 半正規分布モデル	ϕ と μ	10.018	θ_1	σ_2^2	μ	ϕ	p_1	p_2
	μ のみ	0.000	0.018	4426.156	-5.395	-0.032	0.422	0.578
	構造なし	0.311	0.018	4415.944	-5.900	-	0.420	0.580
			0.018	4078.529	-	-	0.459	0.541
(c) 第 2 期間		ΔP_t	ΔDIC		パラメタ推定値			
ε_t								
正規分布	ϕ と μ	89.753	σ^2		μ	ϕ		
	μ のみ	88.789	4347.263		-1.550	-0.046		
	構造なし	86.976	4347.433		-1.410	-		
Kou モデル	ϕ と μ	610.183	θ_1	θ_2	μ	ϕ	p_1	p_2
	μ のみ	26.372	0.014	0.016	3.116	0.000	0.505	0.495
	構造なし	30.214	0.019	0.026	9.843	-	0.548	0.452
指数 - 半正規分布モデル	ϕ と μ	3.377	θ_1	σ_2^2	μ	ϕ	p_1	p_2
	μ のみ	0.000	0.020	3599.838	-10.999	-0.068	0.415	0.585
	構造なし	5.802	0.022	3683.363	-11.600	-	0.414	0.586
			0.030	2987.145	-	-	0.479	0.521

表 5.9: モデル推定結果 : ガソリン

(a) 全期間		ΔP_t	ΔDIC	パラメタ推定値					
ε_t				σ^2	μ	ϕ			
正規分布	ϕ と μ	54.830	978936.400		20.997	0.030			
	μ のみ	53.670	978495.430		21.723	-			
	構造なし	52.100	977644.944		-	-			
Kou モデル	ϕ と μ	1158.980	0.0009	θ_1	θ_2	μ	ϕ	p_1	p_2
	μ のみ	36.540	0.0012	0.0010	0.0015	75.011	0.001	0.513	0.487
	構造なし	24.210	0.0013	0.0012	0.0014	99.380	-	0.510	0.490
指数 - 半正規分布モデル	ϕ と μ	8.230	0.0013	θ_1	σ_2^2	μ	ϕ	p_1	p_2
	μ のみ	0.000	0.0013	0.0013	906525.300	-103.263	0.011	0.413	0.587
	構造なし	4.070	0.0013	0.0013	896429.100	-100.578	-	0.412	0.588
(b) 第 1 期間		ΔP_t	ΔDIC	パラメタ推定値					
ε_t				σ^2	μ	ϕ			
正規分布	ϕ と μ	8.785	997441.765		30.395	0.071			
	μ のみ	8.699	999497.000		34.007	-			
	構造なし	7.171	997856.827		-	-			
Kou モデル	ϕ と μ	532.689	0.0009	θ_1	θ_2	μ	ϕ	p_1	p_2
	μ のみ	15.936	0.0013	0.0009	0.0014	42.411	0.000	0.511	0.489
	構造なし	11.690	0.0013	0.0013	0.0014	56.269	-	0.503	0.497
指数 - 半正規分布モデル	ϕ と μ	416.676	0.0010	θ_1	σ_2^2	μ	ϕ	p_1	p_2
	μ のみ	0.000	0.0014	0.0013	1817688.082	-132.082	0.007	0.433	0.567
	構造なし	5.828	0.0013	0.0013	1076054.137	-153.604	-	0.408	0.592
(c) 第 2 期間		ΔP_t	ΔDIC	パラメタ推定値					
ε_t				σ^2	μ	ϕ			
正規分布	ϕ と μ	52.171	966798.912		13.516	-0.004			
	μ のみ	50.185	964475.136		13.836	-			
	構造なし	48.513	963162.212		-	-			
Kou モデル	ϕ と μ	623.414	0.0009	θ_1	θ_2	μ	ϕ	p_1	p_2
	μ のみ	14.096	0.0012	0.0009	0.0010	117.505	0.002	0.516	0.484
	構造なし	16.724	0.0012	0.0012	0.0017	183.398	-	0.543	0.457
指数 - 半正規分布モデル	ϕ と μ	7.897	0.0013	θ_1	σ_2^2	μ	ϕ	p_1	p_2
	μ のみ	0.000	0.0013	0.0012	735385.723	-16.758	-0.006	0.440	0.560
	構造なし	0.269	0.0012	0.0012	726989.100	-15.021	-	0.440	0.560

表 5.10: モデル推定結果：原油

(a) 全期間		ΔP_t	ΔDIC	パラメタ推定値					
ε_t				σ^2	μ	ϕ			
正規分布	ϕ と μ	77.710	861484.322		18.627	-0.032			
	μ のみ	76.630	861011.462		17.452	-			
	構造なし	74.950	860592.272		-	-			
Kou モデル	ϕ と μ	1155.540	θ_1	θ_2	μ	ϕ	p_1	p_2	
	μ のみ	37.390	0.0010	0.0010	75.126	0.001	0.514	0.486	
	構造なし	24.280	0.0013	0.0016	112.904	-	0.519	0.481	
指数 - 半正規分布モデル	ϕ と μ	4.510	θ_1	σ_2^2	μ	ϕ	p_1	p_2	
	μ のみ	0.000	0.0014	756536.200	-87.851	-0.042	0.414	0.586	
	構造なし	3.820	0.0014	761917.000	-92.106	-	0.414	0.586	
			0.0013	685693.283	-	-	0.451	0.549	

(b) 第 1 期間		ΔP_t	ΔDIC	パラメタ推定値					
ε_t				σ^2	μ	ϕ			
正規分布	ϕ と μ	4.246	833042.212		23.646	0.015			
	μ のみ	2.326	830873.093		23.858	-			
	構造なし	0.642	829743.640		-	-			
Kou モデル	ϕ と μ	515.198	θ_1	θ_2	μ	ϕ	p_1	p_2	
	μ のみ	27.927	0.0010	0.0010	33.565	0.000	0.490	0.510	
	構造なし	18.348	0.0014	0.0014	35.212	-	0.503	0.497	
指数 - 半正規分布モデル	ϕ と μ	89.730	θ_1	σ_2^2	μ	ϕ	p_1	p_2	
	μ のみ	0.000	0.0014	1015940.929	-147.957	-0.023	0.412	0.588	
	構造なし	5.778	0.0015	924772.200	-165.005	-	0.408	0.592	
			0.0014	771824.009	-	-	0.469	0.531	

(c) 第 2 期間		ΔP_t	ΔDIC	パラメタ推定値					
ε_t				σ^2	μ	ϕ			
正規分布	ϕ と μ	78.328	890700.619		12.797	-0.068			
	μ のみ	78.391	892368.600		12.018	-			
	構造なし	76.583	891507.257		-	-			
Kou モデル	ϕ と μ	635.698	θ_1	θ_2	μ	ϕ	p_1	p_2	
	μ のみ	4.100	0.0010	0.0011	87.742	0.002	0.522	0.478	
	構造なし	8.313	0.0013	0.0018	193.043	-	0.551	0.449	
指数 - 半正規分布モデル	ϕ と μ	3.527	θ_1	σ_2^2	μ	ϕ	p_1	p_2	
	μ のみ	0.239	0.0013	632821.488	-14.129	-0.065	0.432	0.568	
	構造なし	0.000	0.0013	634626.000	-17.131	-	0.432	0.568	
			0.0013	612909.160	-	-	0.435	0.565	

パラメタの推定値については、第1期間での μ は、推定値が -2.989 、事後標準偏差が 1.996 であるが、90%信用区間は $(-4.914, 1.157)$ であり信用区間に0が含まれているため、 μ の符号は正負のいずれかと判断できない。そのため、表5.7-(b)で示されているように、 ΔP_t に構造を考えず ε_t に指数-半正規分布モデルを仮定したモデルの Δ DICが 0.842 と小さく、この期間では切片を考慮する効果は高くないと考えられる。なお、この期間の先物価格が示す上昇傾向は、モデルの切片の値ではなく、正のイノベーションが生じる確率 p_2 が高いことにより生じていると考えられる。

第2期間の損益分布は、下落時と上昇時の両局面で裾が重く原点付近で分布が尖っているため（図5.2-(c)を参照）、 ΔP_t に構造がなく ε_t にKouモデルを仮定したものが選択される。パラメタの推定値は $\theta_1 < \theta_2$ となっており、下落局面のほうが上昇局面よりも大きな値が出やすい。その一方で p_1 の推定値が 0.450 であるため負のイノベーションの頻度は少なく、下落した場合に価格の下落幅は大きい下落の頻度が少なく価格が上昇する割合が大きいことが示されている。

2. 白金

白金は全期間、第1期間、第2期間のいずれにおいても ΔP_t に切片のみ ε_t に指数-半正規分布モデルを仮定したモデルが選択されており、安定した構造をもつ商品と考えられる。

第1期間の μ の推定値は -5.900 と負の値をとっているが、事後標準偏差が 3.877 、90%信用区間が $(-9.817, 1.994)$ となっており信用区間に0が含まれている。表5.8-(b)で示される通り、 ΔP_t に切片を考慮せず ε_t に指数-半正規分布モデルを仮定した場合の Δ DICが 0.311 と小さい値であるため、同期間における切片の効果は高くないと考えられる。

第2期間の μ は、推定値が -11.600 、事後標準偏差が 2.565 、90%信用区間が $(-13.885, -6.193)$ であるので、負の切片をもつと考えられる。すなわち、第1期間から第2期間にかけて ΔP_t の切片は負の性質が強まってきたと考えられる。

一方で、上昇局面が起こる確率 p_2 の推定値は、それぞれの期間で 0.58 程度と差は見られず、上昇局面が起こりやすいという特徴は保持されていた。また、両局面の分布のパラメタ推定値は、第 1 期間から第 2 期間にかけて、 θ_1 の推定値は 0.018 から 0.022 と増加し、 σ_2^2 の推定値は 4415.944 から 3683.363 に減少しており、下落と上昇の両局面で発生する値が小さくなった。

3. ガソリン

白金と同様に、一貫して ΔP_t に切片のみ ε_t に指数-半正規分布モデルを仮定したモデルが選択されている。推定値の推移については、第 1 期間の μ は、推定値が -153.604 、事後標準偏差が 32.979 、90%信用区間が $(-178.812, -96.373)$ であるため負の値をとると考えられるが、第 2 期間では推定値が -15.021 、事後標準偏差が 56.056 、90%信用区間が $(-76.543, 97.481)$ であり、信用区間に 0 が含まれるため μ が負の値をもつとは言い難い。特に第 2 期間では、 ΔP_t に切片がなく ε_t に指数-半正規分布モデルを仮定した場合の Δ DIC は 0.269 と小さい値をとるため (表 5.9-(c) を参照)、 μ の効果は高くないと考えられる。すなわち、第 1 期間から第 2 期間にかけて、平均的に負の値が出にくくなった。

一方で、上昇局面が起こる確率 p_2 の推定値は第 1 期間が 0.592 と高い値を示していたが、第 2 期間では 0.560 と若干低くなり、価格が上昇する頻度が少なくなったと考えられる。なお、それぞれの局面の分布におけるパラメタの推定値は、第 1 期間から第 2 期間にかけて、下落局面は θ_1 の推定値は 0.014 から 0.013 とほとんど変化していないが、上昇局面は σ_2^2 の推定値は 1076054.137 から 726989.100 と減少しており、上昇局面でのみ発生する値が小さくなった。

4. 原油

原油は構造に一部変化があった商品である。第 1 期間では ΔP_t に切片のみ ε_t に指数-半正規分布モデルが選択されている⁵。第 2 期間では ΔP_t に切片がなく ε_t に

指数-半正規分布モデルが選択されており、 ε_t のモデルは同じものが選択されているが、 ΔP_t については異なるモデルが選択されている。

パラメタの推定値を調べると、第1期間の μ は、推定値が -165.005 、事後標準偏差が 33.781 、90%信用区間が $(-188.862, -110.238)$ であるため、負の切片をもつ。しかしながら、第2期間では切片が選択されないため、ガソリンと同様に第1期間から第2期間にかけて平均的に負の値が出にくくなったと考えられる。

一方で、イノベーションの発生頻度は、第1期間の p_2 の推定値は 0.592 、第2期間では 0.565 であり、正のイノベーションが起こる頻度が低くなり、上昇局面が生じにくくなっている。ここで、それぞれの局面の分布におけるパラメタ推定値の第1期間から第2期間にかけての変化は、下落局面は θ_1 の推定値は 0.015 から 0.013 とわずかながらイノベーションの値が大きくなったが、上昇局面は σ_2^2 の推定値は 924772.200 から 612909.160 と減少しており、正のイノベーションの値は小さくなった。

商品ごとの価格変動の構造についてまとめると、表 5.3 で示した分析期間ごとに選択されたモデルの推移からは、金と原油で構造が変化しており、白金とガソリンの構造が安定していると考えられた。しかし、表 5.4, 5.5, 5.6 で示した通り、選択されたモデルのパラメタ推定値の推移からは、構造が安定している商品は白金のみであり、ガソリンと原油では、価格変動は平均的に負の値をとりにくくなる一方で、正のイノベーションが起こりづらくなるという構造変化が観測された。

⁵原油の第1期間では表 5.10-(b) で示されるように、切片を考えずに正規分布を仮定した場合の Δ DIC が 0.642 と小さい値をとっている。図 5.5-(b) における ΔP_t のヒストグラムでは、原点付近を軸とした対称分布に近く、正規分布に近い特徴が視覚的に確認できる。一方で、平均が 0 である正規分布モデルを仮定すると、先物価格の挙動としては上昇と下落に偏りがなく特定の傾向を持たないと考えられるが、実際には緩やかな上昇傾向が示されている。こうした上昇傾向は正のイノベーションが起こりやすいという性質から生じるものと推測できるため、DIC で選択された通り、イノベーションに指数-半正規分布モデルを適用したほうが妥当であると判断した。

5.5.3 市場リスクの計測

本節では、当てはめたモデルにもとづく市場リスクの推定と評価について論じる。市場リスクの推定手順は次の通りである。モデル推定時に実行したMCMCアルゴリズムの各試行で発生させたパラメタの数値を加味した価格の予測パスを生成する。試行回数に応じた本数の予測パスを用いて生成した推定損益分布にもとづいて計測した市場リスク指標を推定値として採用する。なお、 j 日間保有した場合の下方リスク指標として $\widehat{\text{VaR}}_{1\%}^{(j)}$, $\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(j)}$ を、上方リスク指標として $\widehat{\text{VaR}}_{99\%}^{(j)}$, $\widehat{\text{ES}}_{99\%}^{(j)}$ を計測する。

当てはめたモデルごとの市場リスクの予測精度を考えるために、市場リスクの予測値と、アウトサンプルの先物価格の実績データにもとづく市場リスクとの乖離具合を調べる。市場リスクの予測値としては、第1期間（2009年5月7日から2010年12月30日まで）のモデル推定時に生成した10,000本の価格の予測パスにもとづく市場リスクの推定値を採用する。一方で、市場リスクの実績値は次の通り計測する。はじめに、第1期間後の1年間（2011年1月4日から2011年12月30日まで）の実際の商品先物価格にもとづき、 j 日間保有した場合の損益分布をそれぞれ求める。同期間のデータ数は245であるので、1日間保有した場合の損益分布を作成するためには、 $P_{t+1} - P_t$, ($t = 1, 2, \dots, 244$) の計244の標本を用い、同様に、 j 日間保有した場合の損益分布は、 $P_{t+j} - P_t$, ($t = 1, 2, \dots, 245 - j$) の計 $(245 - j)$ の標本を用いて損益分布を生成する。生成された損益分布にもとづいて市場リスクの実績値 $\overline{\text{VaR}}_{1\%}^{(j)}$, $\overline{\text{ES}}_{1\%}^{(j)}$, $\overline{\text{VaR}}_{99\%}^{(j)}$, $\overline{\text{ES}}_{99\%}^{(j)}$ を計測する。

市場リスクの予測精度という観点からは、誤ったモデルを選択した場合に市場リスクの予測値に与える影響を評価する必要がある。第1期間のモデル当てはめの結果からは、4商品ともに ΔP_t の平均構造としては切片のみ仮定し、 ε_t に指数-半正規分布モデルを仮定したモデルが最適なモデルであると判断された。そこで、商品先物価格の特徴である非対称性を考慮しなかった場合の影響に焦点を絞り、 ε_t のモデルを変更した場合に市場リスク推定に与える影響を評価する。すなわち、 ΔP_t

には切片を仮定しておき、 ε_t には、(i) 正規分布モデル、(ii) Kou モデル、(iii) 指数-半正規分布モデルを仮定した計3種類のモデルを当てはめた場合の市場リスクの予測値を算出したのちに、市場リスクの実績値からの乖離度を評価することで、モデルごとの市場リスクの予測精度について論じていく。なお保有期間としては、1日間、5日間（1週間）、10日間（2週間）、20日間（1ヶ月間）の4期間を採用する。

商品ごとの市場リスクの推定値と実績値については、金については表 5.11、白金については表 5.12、ガソリンについては表 5.13、原油については表 5.14 にそれぞれまとめた。

表 5.11: 金における市場リスクの推定値と実現値

(a) 市場リスクの実績値

保有期間 (j)	$\overline{\text{VaR}}_{1\%}^{(j)}$	$\overline{\text{ES}}_{1\%}^{(j)}$	$\overline{\text{VaR}}_{99\%}^{(j)}$	$\overline{\text{ES}}_{99\%}^{(j)}$
1 日間	-201.230	-317.000	131.140	165.000
5 日間	-389.840	-487.333	304.830	328.667
10 日間	-531.580	-616.000	413.520	427.000
20 日間	-540.960	-618.000	523.040	583.667

(b) 市場リスクの推定値

ε_t のモデル	保有期間 (j)	$\widehat{\text{VaR}}_{1\%}^{(j)}$	$\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(j)}$	$\widehat{\text{VaR}}_{99\%}^{(j)}$	$\widehat{\text{ES}}_{99\%}^{(j)}$
正規分布 モデル	1 日間	-89.071	-100.438	90.671	101.620
	5 日間	-196.921	-232.787	211.756	240.796
	10 日間	-265.134	-304.688	309.162	352.414
	20 日間	-375.719	-434.028	449.504	515.352
Kou モデル	1 日間	-199.223	-152.099	116.907	144.215
	5 日間	-230.838	-277.116	237.558	276.897
	10 日間	-310.705	-373.266	340.573	384.578
	20 日間	-437.243	-526.174	486.006	555.295
指数-正規分布 モデル	1 日間	-117.135	-140.153	86.710	98.300
	5 日間	-230.393	-271.759	203.376	230.025
	10 日間	-303.137	-358.714	295.147	338.472
	20 日間	-411.164	-493.168	441.361	504.834

はじめに市場リスクの実績値について述べる。1日間保有した場合の下方リスク、上方リスクとしてそれぞれのESの実績値に注目すると、金の場合には $\overline{\text{ES}}_{1\%}^{(1)}$ が -317.000 に対して $\overline{\text{ES}}_{99\%}^{(1)}$ が165.000であり、下方リスクは上方リスクの2倍近く大きい。原油でも同様に $\overline{\text{ES}}_{1\%}^{(1)}$ が -4666.667 に対して $\overline{\text{ES}}_{99\%}^{(1)}$ が2593.333であり下方リスクの値が大きい。一方、指数-半正規分布モデルを用いた予測値でも同様の傾向が示されている。金の場合には、 $\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(1)}$ が -140.153 に対して $\widehat{\text{ES}}_{99\%}^{(1)}$ が98.300で

表 5.12: 白金における市場リスクの推定値と実現値

(a) 市場リスクの実績値

保有期間 (j)	$\overline{\text{VaR}}_{1\%}^{(j)}$	$\overline{\text{ES}}_{1\%}^{(j)}$	$\overline{\text{VaR}}_{99\%}^{(j)}$	$\overline{\text{ES}}_{99\%}^{(j)}$
1 日間	-208.680	-357.667	134.670	190.000
5 日間	-575.200	-651.333	300.880	309.333
10 日間	-759.320	-833.333	430.540	474.333
20 日間	-864.840	-986.333	425.320	519.000

(b) 市場リスクの推定値

ε_t のモデル	保有期間 (j)	$\widehat{\text{VaR}}_{1\%}^{(j)}$	$\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(j)}$	$\widehat{\text{VaR}}_{99\%}^{(j)}$	$\widehat{\text{ES}}_{99\%}^{(j)}$
正規分布 モデル	1 日間	-161.172	-184.075	165.018	187.844
	5 日間	-358.718	-414.466	381.828	433.739
	10 日間	-512.097	-579.747	549.807	621.096
	20 日間	-714.087	-827.813	798.753	908.933
Kou モデル	1 日間	-218.489	-275.149	204.458	264.174
	5 日間	-434.071	-517.685	419.310	493.234
	10 日間	-590.088	-700.665	604.761	725.931
	20 日間	-793.092	-944.665	878.308	1016.880
指数-正規分布 モデル	1 日間	-209.489	-253.846	155.195	181.258
	5 日間	-420.962	-497.527	350.235	396.146
	10 日間	-558.202	-674.624	510.765	575.298
	20 日間	-766.134	-890.430	770.880	857.557

表 5.13: ガソリンにおける市場リスクの推定値と実現値

(a) 市場リスクの実績値

保有期間 (j)	$\overline{\text{VaR}}_{1\%}^{(j)}$	$\overline{\text{ES}}_{1\%}^{(j)}$	$\overline{\text{VaR}}_{99\%}^{(j)}$	$\overline{\text{ES}}_{99\%}^{(j)}$
1 日間	-2772.600	-4323.333	2222.300	2770.000
5 日間	-5648.300	-6513.333	3976.900	4816.667
10 日間	-7246.200	-8066.667	5611.000	6060.000
20 日間	-8411.200	-8936.667	7140.800	7373.333

(b) 市場リスクの推定値

ε_t のモデル	保有期間 (j)	$\widehat{\text{VaR}}_{1\%}^{(j)}$	$\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(j)}$	$\widehat{\text{VaR}}_{99\%}^{(j)}$	$\widehat{\text{ES}}_{99\%}^{(j)}$
正規分布 モデル	1 日間	-2309.152	-2667.814	2366.862	2710.879
	5 日間	-5120.622	-5828.182	5318.909	6220.556
	10 日間	-7110.878	-8103.331	7973.272	8964.242
	20 日間	-9909.167	-11839.253	11478.036	12837.519
Kou モデル	1 日間	-3062.639	-3864.582	2964.639	3726.142
	5 日間	-5910.054	-7068.533	5906.544	7043.845
	10 日間	-8023.268	-9477.246	8510.715	10011.722
	20 日間	-11321.252	-13214.953	12324.961	14261.272
指数-正規分布 モデル	1 日間	-2847.464	-3560.139	2369.405	2708.971
	5 日間	-5481.461	-6600.261	5182.236	5923.097
	10 日間	-7422.967	-8747.435	7588.543	8575.295
	20 日間	-10199.541	-11645.674	11097.874	12476.090

表 5.14: 原油における市場リスクの推定値と実現値

(a) 市場リスクの実績値

保有期間 (j)	$\overline{\text{VaR}}_{1\%}^{(j)}$	$\overline{\text{ES}}_{1\%}^{(j)}$	$\overline{\text{VaR}}_{99\%}^{(j)}$	$\overline{\text{ES}}_{99\%}^{(j)}$
1 日間	-2779.800	-4666.667	1905.700	2593.333
5 日間	-6607.400	-7016.667	4125.200	4540.000
10 日間	-7190.600	-7600.000	5863.200	6446.667
20 日間	-8438.000	-8846.667	6948.800	7663.333

(b) 市場リスクの推定値

ε_t のモデル	保有期間 (j)	$\widehat{\text{VaR}}_{1\%}^{(j)}$	$\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(j)}$	$\widehat{\text{VaR}}_{99\%}^{(j)}$	$\widehat{\text{ES}}_{99\%}^{(j)}$
正規分布 モデル	1 日間	-2104.967	-2449.338	2188.108	2505.450
	5 日間	-4592.797	-5268.013	4957.345	5543.807
	10 日間	-6482.861	-7358.026	7068.568	8118.156
	20 日間	-8976.912	-10411.608	10307.943	11831.165
Kou モデル	1 日間	-2908.745	-3758.309	2823.295	3571.724
	5 日間	-5433.785	-6497.186	5753.511	6846.173
	10 日間	-7706.650	-8921.153	8088.655	9324.154
	20 日間	-10387.469	-12076.647	11484.471	13155.416
指数-正規分布 モデル	1 日間	-2582.463	-3248.342	2133.208	2506.190
	5 日間	-5252.790	-6280.225	4799.330	5579.708
	10 日間	-7270.088	-8455.066	7038.981	8169.258
	20 日間	-10007.564	-11819.648	10065.921	11601.933

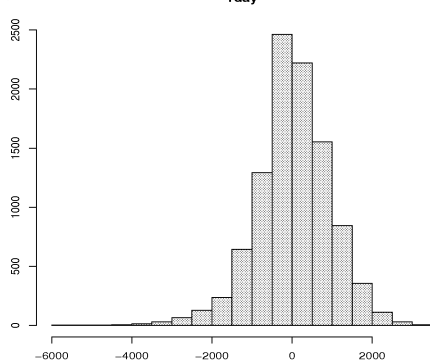
あり，原油では， $\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(1)}$ が -3248.342 に対して $\widehat{\text{ES}}_{99\%}^{(1)}$ が 2506.190 となっている．他の商品でも同様の傾向が示されており，全商品において1日間保有の場合の下方リスクが上方リスクに比べて大きいという傾向があり，市場リスクが非対称性をもっていることが観測される．

しかしながら，観測された市場リスクの非対称性は保有期間を延ばしていくにつれて薄れていく．図 5.6 では，保有期間が1日間と20日間のそれぞれの場合の原油に指数-半正規分布モデルを当てはめて生成した損益分布と実際の原油の価格系列から計算した実績値にもとづく損益分布のヒストグラムを示している．

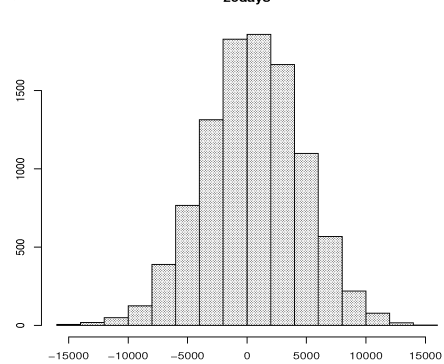
指数-半正規分布モデルを用いた推定値のうち，保有期間が1日間の場合（図 5.6 中の I-(a)）では，下落局面では $-4,000$ 円を超えるようなところまで値をとっており，下落時に裾が重い様子が読み取れる．一方，保有期間を20日間に延ばした場合（図 5.6 中の I-(b)）では，下落時も上昇時でも取りうる値の範囲に大きな違いがなく，損益分布が対称な形状をしていると判断できる．実際の原油先物価格にもとづく実績値でも，保有期間が1日間の場合（図 5.6 中の II-(a)）では，上昇時に比

I. 指数-半正規分布モデルを用いた場合

(a) 保有期間 1 日間

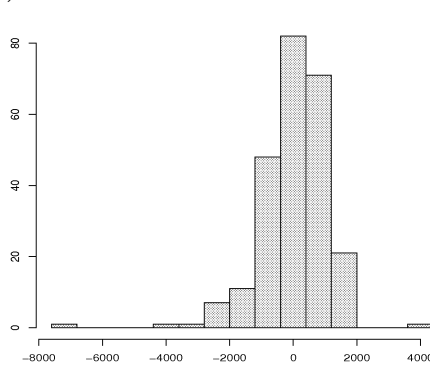


(b) 保有期間 20 日間



II. 実際の原油先物価格にもとづく実績値

(a) 保有期間 1 日間



(b) 保有期間 20 日間

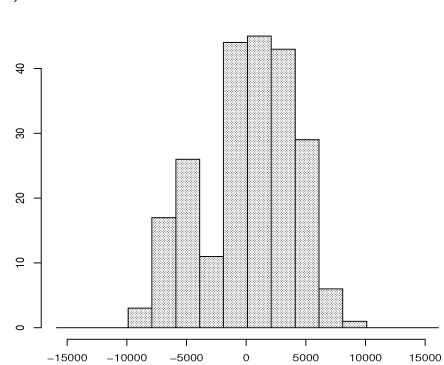


図 5.6: 原油 : 保有期間ごとの損益分布

べて下落時のほうが大きな値をとっており、損益分布は下落局面で裾が重いと考えられる。保有期間が 20 日間の場合（図 5.6 中の I-(b)）では、負の局面で形状にいびつなところが見受けられるものの、値の取りうる範囲が下落時では -10,000 円、上昇時でも 10,000 円程度に収まっており、対称な形状に近いと判断できる。

保有期間が 1 日間の場合に観測された非対称性は、下落局面で裾が重く大きな値が出やすいという構造によるものであった。この非対称性は保有期間を延ばすにしたがって薄まっていき、やがて対称に近い形になる。このように保有期間に応じた損益分布の形状の変化は、下落・上昇局面が生起する割合が異なる点と、イノベーションの分布形状が非対称である点の 2 つの兼ね合いによって生じている。

以下では、実例をもとに損益分布の形状変化について検討していこう。

原油の場合では第1期間で下落局面が起こる割合が $p_1 = 0.408$ ，上昇する割合が $p_2 = 0.592$ と推定されており，正のイノベーションが起こる割合が高い．仮に下落局面と上昇局面でイノベーションが取る値が等しい場合には，保有期間を延ばすにしたがって損益分布は上昇方向に偏っていくであろう．しかしながら，イノベーションが取る値は下落局面で大きく上昇局面では小さいため，保有期間を延ばしていくと，小刻みな価格上昇と希に起きる大きな価格下落が累積されていくために，損益分布が下落ないしは上昇のいずれかに偏らず，結果として対称な形状に近い累積損益分布が得られる．

なお，このような保有期間を延ばすにつれて累積損益分布が対称に近づく性質は4商品すべてで確認できており，今回のデータ分析からは，商品先物には，保有期間が1日間の場合には下方リスクが大きい，保有期間を延ばしていくにつれて下方リスクと上方リスクが拮抗していく性質があることが示唆された．

次に，当てはめたモデルの種類が市場リスクの予測に与える影響を考えていく．ここで，各保有期間の下方リスクと上方リスクの推定値と実績値を1組ずつ比較していくのではなく，モデルを用いて計測した市場リスクの推定値が市場リスクの実績値から乖離している度合いにより，モデルごとの市場リスクの予測精度を測る指標を導入する．具体的には，市場リスクの推定値の実績値からの乖離度の2乗で評価し， j 日間保有としたときの市場リスクの推定値と実績値の乖離度 ζ_j を

$$\zeta_j = \left(\frac{\widehat{\text{VaR}}_{1\%}^{(j)}}{\text{VaR}_{1\%}^{(j)}} - 1 \right)^2 + \left(\frac{\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(j)}}{\text{ES}_{1\%}^{(j)}} - 1 \right)^2 + \left(\frac{\widehat{\text{VaR}}_{99\%}^{(j)}}{\text{VaR}_{99\%}^{(j)}} - 1 \right)^2 + \left(\frac{\widehat{\text{ES}}_{99\%}^{(j)}}{\text{ES}_{99\%}^{(j)}} - 1 \right)^2 \quad (5.22)$$

と定義する．(5.22)の右辺に示したように， ζ_j は j 日間保有した時点での下落・上昇の2つの局面ごとの VaR, ES の2種類の合計4種類の市場リスク指標について，推定値の実績値に対する相対誤差の2乗を足し合わせたものである．したがって，値は非負であり，小さい値であるほど乖離度が低い．

本論文では，1, 5, 10, 20日間の4つの保有期間を考えるため，それらを足し合わせた総合的な乖離度 $Z := \zeta_1 + \zeta_5 + \zeta_{10} + \zeta_{20}$ を定義し，当てはめたモデルごと

に Z を計測する。その結果、最小の Z をとるモデルが実現した市場リスクからの乖離度が低く、市場リスクを推計するうえで良いモデルと考える。

引き続き、それぞれの商品に対して ΔP_t には切片を仮定しておき、 ε_t には、(i) 正規分布モデル、(ii) Kou モデル、(iii) 指数-半正規分布モデル、の3種類のモデルを当てはめた場合を考える。各商品にそれぞれのモデルを当てはめた場合の乖離度 Z を計測した結果を表 5.15 に示す。

表 5.15: 実現した市場リスクからの乖離度 Z

ε_t のモデル	金	白金	ガソリン	原油
正規分布モデル	2.519	2.609	1.860	1.237
Kou モデル	1.325	3.670	3.195	2.370
指数-半正規分布モデル	1.953	1.638	1.410	0.982

注意：すべての場合で、 ΔP_t には切片のみを仮定したモデルを当てはめている。

白金、ガソリン、原油では、指数-正規分布モデルを用いた場合の乖離度が最も小さい。特に白金では、指数-半正規分布モデルの場合に 1.638、従来までの対象分布モデルである正規分布モデルの場合が 2.609 であるため、 Z の値は 37%程度小さくなっており、誤ったモデルを用いて市場リスクを計測した場合に受ける影響は大きい。他の2商品では白金ほどの影響の大きさはないが、ガソリンでも指数-半正規分布モデルの場合に 1.410、正規分布モデルの場合に 1.860 であり乖離度が 24%程度改善しており、原油でも指数-半正規分布モデルの場合に 0.982、正規分布モデルの場合に 1.237 であり乖離度が 20%程度改善している。以上の3商品は、第2期間におけるモデル推定においても ε_t のモデルとして指数-半正規分布モデルが選択されているため、指数-半正規分布モデルを採用した場合の市場リスクの乖離度が最も小さい結果となっている。

他方、金の場合では、第2期間のモデルフィッティングにおいては ε_t のモデルとして Kou モデルが選択されていたこともあり、Kou モデルを用いた場合が最も実績値からの乖離度が小さいという結果が得られた。正規分布モデルの場合に乖離度が 2.519 であることに対して、Kou モデルを採用した場合には 1.325 と 5 割弱の

改善がみられる。一方で、指数-半正規分布モデルの場合でも 1.953 であり、正規分布モデルを採用した場合に比べて 22% 程度の改善がなされているため、いずれにせよ非対称性を考慮したモデルを採用したほうが良いことが示唆されている。

以上のように、サーキットブレーカー制度下における 4 種類の商品先物では、イノベーションに対し対称なモデルよりも、非対称なモデルを当てはめたほうが良いということが、市場リスク計測という観点からも支持された。最後に、商品先物取引におけるリスク管理の実務上の観点から、本論文のモデルを採用する意義について述べたい。商品先物データの観察からは、保有期間を延ばした場合に累積損益分布は対称性を有するように観測されるが、この対称性は日々の損益分布が有する 2 つの非対称性が累積されて生じた結果であるため、日々の価格前日差の分布が有する非対称性を適切にとらえることが必要である。加えて、商品先物取引では清算が日々行われるため、実務上のリスク管理においては商品の保有期間に依らず、日々の損益分布の性質を監視することは重要である。

第6章 結論

本論文の第2章から第4章までは、東商取が金融危機前後に採用していた値幅制限制度のもとで、金、白金、ガソリン、原油の商品先物に投資した場合の市場リスクと信用リスクの計測と、値幅制限制度が与える影響の分析を行った。

価格変動のモデル化では、値幅制限制度がなければ実現したであろう価格系列を真の価格として新たに導入し、真の価格の前日差が自己回帰モデルに従うと仮定した。定義上、真の価格は一部観測不可能であるため、未知パラメタ推定に際しては適切なデータ補間を行う必要があるため、MCMC法を利用しデータ補間と未知パラメタの推定を同時に行う推定アルゴリズムを提案している。なお、実際の商品先物価格データへの当てはめでは、3次までの自己回帰モデルを当てはめ、DICにより最適な自己回帰モデルの次数選択を行った。また、値幅制限制度の有無が価格変動モデルに与える影響を調べるために、データ補間を行ってパラメタ推定した場合と、データ補間を行わずにパラメタ推定した場合の2種類の推定法を適用した。

値幅制限は、価格の急激な変動を防ぐため、取引を停止させ価格変動を緩やかにする。この機能により、上昇（または下落）しつくせなかった影響が翌日以降に持ち越されるため、値幅制限制度下の価格変動には同じ騰落の符号が続きやすくなるという見かけ上の構造が生み出される。また、値幅制限は価格変動を抑制するため、データ補間を行わないと、価格変動を本来の大きさよりも小さく推定し、リスクの過小評価につながってしまう。したがって、パラメタ推定時には適切なデータ補間が重要である。

なお、値幅制限の有無が市場リスクに与える影響は、短期的な保有時に大きく、

長期的な保有時には小さい。金融危機時のように相場が大きく変動している際には2週間、平時であれば1週間程度保有した場合には、値幅制限の影響はほとんどみられなくなる。しかしながら、商品先物取引では保有資産に対して日々清算が行われるため、実務では短期保有を前提とした市場リスクの計測が不可欠であり、値幅制限制度の影響を考慮する必要がある。一方、信用リスクに与える影響としては、値幅制限が有する急激な価格変動を抑制する機能によりデフォルト時の損失額を抑え、追証発生をわずかながら抑制する一方で、取引の停止により清算の機会を奪うためにデフォルト発生を高めるといった負の側面を持つことが観測された。

本論文の第5章では、2009年5月より導入されたサーキットブレーカー制度下での市場リスクを計測する手法のひとつを示した。サーキットブレーカー制度は、値幅制限制度に比べて1日における価格変動の最大上限幅が結果的に大きく設定されているため、価格変動が大きくなった。また、価格前日差の分布は下落時に特に裾が重くなるという非対称性を有するようになった。

サーキットブレーカー制度下の価格変動モデルでは、平均構造に高々1次のARモデルを仮定し、上昇局面と下落局面の2つの局面が生起する頻度とそれぞれの分布の裾確率が異なる非対称なイノベーションをもつと仮定した。ベンチマークとして対称なイノベーションをもつモデルとの比較について、実際の商品先物価格データへの当てはめを確認したところ、全ての商品で非対称なイノベーションをもつモデルが選択された。また、モデルを用いた市場リスクの予測精度という観点から、市場リスクの推定値とアウトサンプルのデータを用いた市場リスクの実績値との乖離度を計測すると、非対称性を考慮したモデルのほうが予測精度が高く、サーキットブレーカー制度下で商品先物の市場リスク計測を行うには、非対称性の考慮が重要であると実証的に示された。

今後の研究課題としては次のようなものがある。信用リスクに大きく影響を与える取引本証拠金基準額 K の設定については、本論文で扱った2008年当時と2013

年現在では東商取が課す制度が変更されているため、新制度のもとでの考察は今後の課題である。商品取引員（仲介者）にとって、取引本証拠金基準額を大きくすることは、デフォルトの発生率、デフォルト発生時の損失金額を大きく引き下げることに寄与するため、好ましい状況といえるが、その一方で、投資家にとっては、取引開始時点で納めるべき証拠金が増大するという負の側面があるために、商品先物取引を活性化させる観点からは必ずしも好ましいものではない。どうバランスを取るかの問題であるが、デフォルトの発生率をある水準以下に抑えながら、一方で透明性の高い新たな取引本証拠金基準額をどう設定するのか。こうした観点から 2011 年 1 月より導入された、過去の価格変動のデータをもとに証拠金額を決定する SPAN 制度の影響を検証することも、今後の課題のひとつである。

サーキットブレーカー制度下の価格変動について次の 2 つの課題がある。本論文で提案したモデルは異なる分布をつなぎ合わせたモデルである。したがって、Skewed-t 分布などのあらかじめ歪みを含んだ分布をイノベーションに仮定したモデルとの比較についても今後考えるべき課題である。また、値幅制限制度からサーキットブレーカー制度に変更された際の大きな変更点のひとつとして、価格が大きく変動した場合の取引停止措置が一定時間になったことが挙げられる。本論文では先行研究にならいサーキットブレーカー制度による取引の一時停止が真の価格に影響を与えないという前提をおいた。また、分析対象を日次の価格データとし、東商取の商品先物価格の観察において最大価格変動幅に抵触する日がなかったために、すべての時点で真の価格と観測価格が一致していると仮定した。しかしながら、サーキットブレーカー制度の本来の目的は、取引参加者間での情報の不釣り合いによる価格のゆがみを是正することであるため、ティックデータなどの日中の取引価格データを用いて、サーキットブレーカー制度の一時停止措置が価格変動に与える影響を検証していくことも今後の課題のひとつといえる。

参考文献

- [1] Alexander, C.(2001). *Market Models: A Guide to Financial Data Analysis*, Wiley.
- [2] 安藤美孝 (2004). 「ヒストリカル法によるバリュー・アット・リスクの計測：市場価格変動の非定常性への実務的対応」, 『金融研究』, **23**(2), 1-42.
- [3] 青木義充, 横内大介, 加藤剛 (2012). 「値幅制限を考慮した商品先物価格の実証分析：MCMCによる先物商品価格のモデル化を利用して」, 『市場構造分析と新たな資産運用手法（ジャフイー・ジャーナル：金融工学と市場計量分析）』, 日本金融・証券計量・工学学会編集, 朝倉書店, 16-55.
- [4] 青木義充 (2014). 「金融危機前後の商品先物取引における証拠金不足に起因するリスクの評価」, 『統計数理（研究ノート）』（印刷中）.
- [5] Amemiya, T.(1984). Tobit models: a survey, *Journal of Econometrics* **24**(1,2), 3-61.
- [6] Artzner, P., Delbean, F., Eber, J. M. and Heath, D.(1999). Coherent measures of risk, *Mathematical Finance*, **9**, 203-228.
- [7] Brockwell, P. J., and Davis, R. A.(1991). *Time series: theory and methods second edition*, Springer-Verlag.
- [8] Bollerslev, T.(1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**, 307-327.

- [9] Brennan, M. J.(1986). A Theory of Price Limits in Futures Markets, *Journal of Financial Economics*, **16**, 213–233.
- [10] Chib, S. and Greenberg, E.(1994). Bayes inference in regression models with ARMA (p, q) errors, *Journal of Econometrics*, **64**, 183–206.
- [11] Chib, S.(2001). Markov Chain Monte Carlo Methods: Computation and Inference, in J. J. Heckman and E. Leaper (eds.), *Handbook of Econometrics*, Vol. 5, Chapter 57, Elsevier, 3569–3649.
- [12] Chiu, C., Shu-Mei, C., Jui-Cheng, H. and Yu-Lung, C.(2006). Clearing margin system in the futures markets - Applying the value-at-risk model to Taiwanese data, *Physica A*, **367**, 353–374.
- [13] Chou, P. A.(1997). Gibbs sampling approach to the estimation of linear regression models under daily price limits, *Pacific-Basin Finance Journal*, **5**, 39–62.
- [14] Geweke, J.(1992). Evaluating the Accuracy of Sampling-Based Approaches to the Calculation of Posterior Moments, in J.M. Bernardo, J.O. Berger, A.P. Dawid, and A.F.M.Smith (ed.), *Bayesian Statistics*, **4**, Oxford University Press, 169–193.
- [15] Glosten, L. R., Jagannathan, R. and Runkle, D. E.(1993). On the Relation between the Expected Value and the Volatility of Nominal Excess Returns on Stocks, *Journal of Finance*, **48**, 1779-1801.
- [16] Giot, P. and Laurent, S.(2003). Market risk in commodity markets: a VaR approach, *Energy Economics*, **25**(5), 435–457.
- [17] Gorton, G., 林文夫, Rouwenhorst, K. G.(2006). 「商品先物：日本の投資家にとっての効用」, 『現代ファイナンス』, **19**, 3–19.

- [18] Greenwald, B. C. and Stein, J. C.(1991). Transactional Risk, Market Crashes, and the Role of Circuit Breakers, *Journal of Business*, **64**(4), 443–462.
- [19] Grundnitski, G. and Osburn, L.(1993). Forecasting S&P and gold futures prices: Application of neural networks, *Journal of Futures Markets*, **13**(6), 631–643.
- [20] 羽森茂之, 羽森直子 (2000). 「商品先物市場における収益率の時系列特性：ボラティリティの日米比較」, 『先物取引研究』, **4**(2), 25–42.
- [21] Hsieh, P. and Yang, J.(2009). A censored stochastic volatility approach to the estimation of price limit moves, *Journal of Empirical Finance*, **16**, 337–351.
- [22] 伊庭幸人, 種村正美, 大森裕浩, 和合肇, 佐藤整尚, 高橋明彦 (2001). 『計算機統計Ⅱマルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺』, 岩波書店
- [23] 各務和彦, 和合肇, 大塚芳宏 (2011). 「地域間所得分布と所得収束仮説」, 『日本統計学会誌』, **41**(1), 181–200.
- [24] Kim, K. A. and Park, J.(2010). Why Do Price Limits Exist in Stock Markets? A Manipulation-Based Explanation, *European Financial Management*, **16**(2), 296–318.
- [25] 北川源四郎 (2005). 『時系列解析入門』, 岩波書店.
- [26] Kou, S. G.(2002). A Jump Diffusion Model for Option Pricing, *Management Science*, **48**, 1086–1101.
- [27] Lauterbach, B. and Ben-Zion, U.(1993). Stock Market Crashes and the Performance of Circuit Breakers: Empirical Evidence, *Journal of Finance*, **48**(5), 1909–1925.

- [28] Lin, M. and Chou, P.(2011). Prospect theory and the effectiveness of price limits, *Pacific-Basin Finance Journal*, **19**, 330–349.
- [29] Ljung, G. M. and Box, G. E. P.(1978). On a measure of lack of fit in time series models, *Biometrika*, **65**, 553–564.
- [30] Marriott, J., Ravishanker, N. and Gelfand A. E.(1996). Bayesian Analysis of ARMA Processes: Complete Sampling-Based Inference under Exact Likelihoods, *Bayesian analysis in Statistics and Econometrics Willey*, Wiley New York, 243–256.
- [31] McNeil, A. J., Frey, R. and Embrechts, P.(2008). 「定量的リスク管理：基本概念と数理技法」（訳者代表：塚原英敦），共立出版.
- [32] 中妻照雄 (2007). 『入門ベイズ統計学』，朝倉書店.
- [33] 日本商品先物取引協会 (2007a). 『商品先物取引委託のガイド (第 15 版)』.
- [34] 日本商品先物取引協会 (2007b). 『商品先物取引委託のガイド別冊 (第 27 版)』.
- [35] 大塚芳宏 (2011). 「マルコフ・スイッチング時空間自己回帰モデルによる日本の地域別の景気循環の計量分析」，『日本統計学会誌』，**40**(2), 89–109.
- [36] Perron, P.(1988). Trends and random walks in macroeconomic time series : Further evidence from a new approach, *Journal of Econometric Dynamics and Controls*, **12**, 297–332.
- [37] Shapiro, S. S. and Wilk, M. B.(1965). An analysis of variance test for normality (complete samples), *Biometrika*, **52**, 591–611.
- [38] Spiegelhalter, D. J., Best, N. G., Carlin, B. P. and van der Linde, A.(2002). Bayesian measures of model complexity and fit, *Journal of Royal Statistical Society, Series. B*, **64**(4), 583–639.

- [39] 高見茂雄 (2006). 「商品先物価格変動へのニューラルネットモデルの適用」, 『先物取引研究』, **10**(1), 41–61.
- [40] Tsay, R. S.(2002). *Analysis of Financial Time Series*, Wiley.
- [41] 照井伸彦 (2010). 『Rによるベイズ統計分析』, 朝倉書店.
- [42] 和合肇 (編)(2005). 『ベイズ計量経済分析』, 東洋経済新報社.
- [43] 渡部敏明, 大鋸崇 (1996). 「日本の商品先物市場における価格のボラティリティと出来高および取組高との関係」, 『先物取引研究』, **2**(3), 41–56.
- [44] 渡部敏明, 大森裕浩 (2000). 「日本の商品先物市場における価格と出来高の変動: 動学的2変量分布混合モデルによる分析」, 『先物取引研究』, **5**(1), 111–130.
- [45] Wei, S. X.(2002). A censored-GARCH model of asset returns with price limits, *Journal of Empirical Finance*, **9**, 197–223.
- [46] Wei, K. C. J. and Chiang, R.(2004). A GMM approach for estimation of volatility and regression models when daily prices are subject to price limits, *Pacific-Basin Finance Journal*, **12**, 445–461.
- [47] Zivot, E. and Wang, J.(2005). *Modeling Financial Time Series with S-PLUS (2nd ed.)*, Springer.