

拡張 MHD モデルを用いた Rayleigh-Taylor 不安定性の成長に対する Hall 項及びジャイロ粘性の影響の数値シミュレーション研究

主任指導教員：三浦 英昭 准教授  
指導教員：伊藤 淳 助教

総合研究大学院大学 物理科学研究科 核融合科学専攻  
5 年一貫制博士課程 5 年 後藤 涼輔

提出日：2015 年 3 月 29 日



# 目次

1	序論	1
1.1	研究背景・動機	1
1.2	MHD モデルの拡張	3
1.3	拡張 MHD モデルによる RT 不安定性の数値シミュレーション研究	7
1.4	3次元拡張 MHD コード及びそれらを用いた研究	8
1.5	第 1 章まとめ	9
2	電磁流体力学方程式	13
2.1	MHD 方程式の導出	13
2.2	“一般化された Ohm の法則”の導出	16
2.3	拡張 MHD モデルと方程式の無次元化	17
3	数値計算手法	21
3.1	空間離散化	21
3.2	時間発展スキーム	22
3.3	数値安定性	23
4	非線形シミュレーション 1：平衡の $\beta$ が一定で圧力勾配が緩やかな場合	27
4.1	初期平衡及び拡張 MHD 方程式	27
4.2	線形段階の解析：線形成長率の波数依存性	29
4.3	非線形段階の解析	30
4.4	第 4 章まとめ	32
5	非線形シミュレーション 2：平衡に局在化した圧力勾配が存在する場合	41
5.1	初期平衡プロファイル	41
5.2	線形安定性解析	42
5.3	非線形成長に対する微視的效果及び反磁性ドリフトの影響	45
5.4	局在化した圧力勾配を持つ平衡についてのシミュレーションまとめ	48
6	研究総括	69
6.1	本研究課題の総括	69
6.2	本研究と核融合プラズマシミュレーション	70
付録 A	線形安定性解析	75
付録 B	一般化座標系を用いた拡張 MHD コードの開発	79

B.1	背景	79
B.2	目的	80
B.3	プロジェクト体制	81
B.4	一般化座標系を用いた拡張 MHD 方程式の表現	81
B.5	実施計画	85
B.6	シミュレーションコードの構成	86
B.7	シミュレーションコードの動作検証	87
B.8	作業スケジュール	87
B.9	予算計画	90
B.10	人件費	90

## 図目次

1.1	RT 不安定性の駆動機構の模式図	10
1.2	RT 不安定性による典型的なマッシュルーム構造	11
1.3	$z$ 方向の重力に平行な一様磁場が存在する場合の成長率の波数依存性	12
3.1	(a) 連続関数 (b) 離散関数	26
4.1	RT 不安定性における初期平衡プロファイル	33
4.2	運動エネルギースペクトルの時間発展 (a) MHD (b) Hall (c) Gyro (d) Hall+Gyro	35
4.3	線形成長率の波数依存性 (a) $D=2.0$ (b) $D=3.0$	36
4.4	$t = 70$ でのエネルギースペクトル	37
4.5	混合幅の時間発展	38
4.6	$t = 70$ での密度場のプロット (a) MHD (b) Hall+Gyro	39
5.1	平衡 2 における初期平衡プロファイル	49
5.2	典型的なパラメータでの (a) 線形成長率, (b) 実周波数の波数依存性	50
5.3	$\beta$ 値を変化させた場合の (a) 線形成長率, (b) 実周波数の波数依存性	51
5.4	密度比を変化させた場合の (a) 線形成長率, (b) 実周波数の波数依存性	52
5.5	(a) 成長率, (b) 実周波数の圧力比依存性	53
5.6	(a) 成長率, (b) 実周波数のジャンプ幅依存性	54
5.7	実周波数の波数依存性の (a) シミュレーション, (b) 線形解析の比較	55
5.8	線形成長率の波数依存性の (a) シミュレーション, (b) 線形解析の比較	56
5.9	圧力の固有関数の分布 (虚数部)	57
5.10	エネルギースペクトルの (a) MHD, (b) Hall+Gyro の比較	58
5.11	$t=500$ での密度場の (a) MHD, (b) Hall+Gyro の比較	59
5.12	$t=600$ での密度場の (a) MHD, (b) Hall+Gyro の比較	60
5.13	密度場の構造形成	61
5.14	二次不安定性が発生している領域の拡大図	62

5.15	(a) $t=430$ , (b) $t=480$ , (c) $t=530$ における二次不安定性の密度プロット . . . . .	63
5.16	二次的な不安定性が発生している領域での速度場及び密度場解析 . . . . .	64
5.17	密度比 (a) $\rho_2/\rho_1 = 1.05$ , (b) $\rho_2/\rho_1 = 2.0$ の場合の密度場プロット . . . . .	65
5.18	平坦化領域における (a) 速度シアの発生, (b) ジャイロ粘性によるシア層の急峻化	66
5.19	不安定性の現れる波数領域 . . . . .	67
5.20	(a) $t=500$ , (b) $t=600$ での密度スペクトルの波数依存性 . . . . .	68
6.1	圧力駆動型不安定性と RT 不安定性の類似性 . . . . .	73
付録 B.1	トーラスプラズマの温度 $T_e$ 、数密度分布 $n_e$ とプラズマエッジ近傍 (灰色に塗った部分) . . . . .	94
付録 B.2	直交座標系 $(x,y,z)$ から一般化座標系 $(\xi, \eta, \zeta)$ への変換の模式図 . . . . .	95
付録 B.3	作業工程表。括弧内は担当者 . . . . .	96



# 1 序論

この論文は表題の通り、Rayleigh-Taylor(RT) 不安定性の成長に対する Hall 項及びジャイロ粘性といった非理想的効果の影響を 2 次元数値シミュレーションによって調べたものである。RT 不安定性は非常によく知られた不安定性で、これに関する数値シミュレーション研究も多数発表されている。これは以下の研究背景でも述べる通りである。3 次元シミュレーションも多数行われており、2 次元シミュレーションの役割は限定されつつある。しかし、文献を調べた限り、いくつかのパラメータ領域の、特に高波数 (短波長) 領域の研究は十分ではなく、とりわけ Hall 項及びジャイロ粘性の影響は十分解明されたとは言えない。短波長領域を高精度に解く事は相当に困難で、3 次元シミュレーションではなかなか明確にならない物理が今なお残っている。ここに、この論文が 2 次元シミュレーションを行う理由がある。この序論では、これらの背景などを一通り述べた上で、本論文の課題を設定する。

## 1.1 研究背景・動機

この節では、研究背景としてこれまでの RT 不安定性のシミュレーションについて概観し、その後、本研究において RT 不安定性を調べるにあたっての動機を述べる。

密度勾配又は圧力勾配が駆動する RT 不安定性は非常に基礎的な流体力学的不安定性である [1, 2, 3, 4]。RT 不安定性は中性流体・電磁流体のいずれにおいても発生する不安定性であるが、最初に、より簡単な中性流体での研究について触れてみたい。RT 不安定性の成長機構は非常に単純である。簡単のために二次元  $x, y$  平面での RT 不安定性の駆動機構について考える。低密度  $\rho_1$  の流体の上に高密度  $\rho_2$  の流体が乗り、下向きに重力が掛かっている状況を考える。流体に働いている力は下向きの重力  $\rho g$  と上向きの圧力勾配  $\nabla p$  である (ここで流体の界面に表面張力は働かないものとする)。流体の界面に擾乱が発生していない場合には、初期平衡条件

$$\nabla p = \rho g, \quad (1.1)$$

が満たされているため、流体は静止した状態を保つ。しかし界面に擾乱が発生すると、高密度領域の流体が低密度領域に、低密度領域の流体が高密度領域に侵入する (図 1.1 を参照)。低密度領域に侵入した高密の流体を界面が支えきれずに重力により界面が押し下げられ、更に多くの高密度領域の流体が侵入していくこととなる。逆に、高密度領域に侵入した低密度領域の流体も界面が圧力勾配により押し上げられるため、更に多くの低密度領域の流体が侵入していくこととなる。これが RT 不安定性の駆動機構である。線形成長の過程では渦構造が形成される。この渦が大きく成長すると、周囲の領域を渦の内側に巻き込んで、いわゆるマッシュルーム構造が形成される (図 1.2)。非線形段階では、複数のマッシュルーム構造が非線形相互作用し更に多数の渦構造を形成し乱流状態へ遷移していく。従って RT 不安定性は非線形段階 (乱流状態) での熱及び流体の混合の観点からも重要な不安定性であると認識され、研究が進められている [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]。

RT 不安定性の駆動機構はこの様に非常に単純であるため、基礎的な流体力学的不安定性として

広範な研究が行われている。中性流体での RT 不安定性はナノスケール [13, 14] から宇宙空間のマクロスケール [15, 16] まで様々な空間スケールで現れる現象であり、様々な研究分野で現れる不安定性である。

一方、電磁場が存在する電磁流体中では、RT 不安定性は中性流体中とは異なる振る舞いをする場合がある。駆動機構に大きな違いは生じないが、圧力勾配だけでなく磁場エネルギー  $B^2/2$  も加わった形で初期平衡が成立する。

$$\nabla \left( p + \frac{B^2}{2} \right) = \rho \mathbf{g}. \quad (1.2)$$

中性流体中では、流体の運動は Navier-Stokes 方程式に従うが、磁気流体中では磁場の効果が加わった電磁流体力学 (MHD) 方程式が用いられる。(MHD 方程式の詳細は第 2 章で触れる。) 電磁流体中の RT 不安定性も様々な研究が行われているが、ここでは Chandrasekhar による線形成長率の研究、宇宙プラズマでの研究、核融合研究について簡単に触れる。Chandrasekhar[18] は三次元直交座標  $(x,y,z)$  で、 $z$  方向に一様な重力及び磁場が働いている場合について線形解析を行い、成長率の波数依存性を求めた。図 1.3 は Chandrasekhar が求めた成長率の波数依存性を表している。ここで  $n$  は成長率、 $k$  は波数、 $\alpha_2 = \rho_2/(\rho_1 + \rho_2)$  である。 $\alpha_2$  の定義より、密度比が高くなるほど不安定性の成長率は高くなっている。また、高波数モードほどその成長率は高くなり、一定値に漸近していく。

RT 不安定性は (1.2) から分かるように、 $\beta$  値 ( $\beta = 2p/B^2$ ) の値によって、より流体力学的に振る舞う場合 ( $\beta$  が大きい場合) と、電磁場に大きく影響される場合 ( $\beta$  が小さい場合) が考えられる。宇宙プラズマでは、電磁流体中の RT 不安定性が重要であると考えられており、多数の研究が行われている。ここでは代表例としてガンマ線バーストでの RT 不安定性について簡単に触れる [16]。ガンマ線バーストと呼ばれる天体から非常に強力なガンマ線が放出される場合には RT 不安定な状態であると言われている。この研究では、RT 不安定性が成長することによって磁場が増幅される可能性が指摘されている。別の例としては”かに星雲”を挙げることが出来る。かに星雲では超新星爆発により恒星の外層が吹き飛ばされることで RT 不安定性が発生していると考えられており、Hubble 望遠鏡による観測で見事な RT 不安定性が現れている様子が撮影されている [19]。

核融合プラズマでは、RT 不安定性と類似の不安定性としてバルーニング、交換型不安定性などの圧力勾配駆動型不安定性を挙げることが出来る [21]。RT 不安定性と圧力勾配駆動型不安定性との関係は、例えば Biskamp のテキスト [20] に示されている。バルーニング、交換型不安定性は、プラズマ領域と真空領域が擾乱により入れ替わったときに生じる不安定性である。平衡状態においては、遠心力とプラズマ圧力が釣り合うことで静止平衡を保つ。しかし、一度擾乱により真空領域の一部がプラズマ領域へ、プラズマ領域の一部が真空領域へ移ると、移動したプラズマ領域は真空領域の圧力では遠心力を支えきれず真空外側へ向かう。これが交換型不安定性の駆動機構である。バルーニング不安定性も圧力勾配が駆動する MHD 不安定性であり、曲率が悪い場所に不安定モードが補足され、成長する交換型不安定性の一種である。通常トラス内側は曲率が良く、不安定性の成長する向きと遠心力の向きが反対であるため不安定性は成長しにくい、トラス外側では不安定性の成長する向きと遠心力の向きが一致しているため不安定性は成長しやすい。したがっ



てトーラス外側に不安定モードが補足され成長していく。

多数の RT 不安定性の研究の中でも、粒子の衝突が殆ど起こらない無衝突な状態での不安定性がこの論文の研究対象である。この場合には、後で MHD 方程式の導出で見ると通り、微視的スケールにおいて MHD 近似が破綻する。微視的スケールにおける細かな構造が形成される短波長 MHD 不安定性 (RT 不安定性もその 1 つである) に対しては、不安定性の波長がイオン表皮長程度になり MHD 近似が成立しなくなるなどの理由から、イオンの運動のみを取り扱う一流体 MHD モデルでは不十分となる事、二流体効果及び有限ラーマー半径 (FLR) 効果が高波数モードの成長に大きく影響する事が早くから指摘されている。従って、短波長領域での RT 不安定性を無衝突時かプラズマについて調べるためには、一流体モデルにこれらの微視的效果を取り入れた拡張 MHD モデルを用いる必要がある。1.4 節でその概略について触れるが、RT 不安定性の 3 次元拡張 MHD シミュレーションにおいて、高波数モードを高精度、高解像度で扱うことは困難である。これは、(i) 高波数モードまで精度良く解析を行うためには、シミュレーションでは高い計算解像度を要求される事、(ii) 拡張 MHD モデルではホイッスラー波のような分散性波動が発生し (時間発展に対し陽解法を用いた場合)、高い計算解像度においては時間刻みが非常に厳しく制限される事、(iii) 小さ過ぎる時間刻みの問題を解決するためにコードを陽解法から陰解法に変更すると、緩和法を使わざるを得ず、短波長成分の収束精度に問題が生じやすい、などが理由である。従って、対象としている問題について単純化を行い、その基礎的な知見を得ることが微視的スケールにおける RT 不安定性を理解する上で有効であると考えた。本研究では、問題を 2 次元 Rayleigh-Taylor (RT) 不安定性として単純化、これに対する微視的效果の影響を研究した。本研究は RT 不安定性に対して微視的效果がその成長に対する影響を詳細に解析すると共に、3 次元 RT 不安定性の拡張 MHD シミュレーションを行う上で重要となる基礎的な特性を解明するものである。

次節で触れるとおり、拡張 MHD モデルを用いた 2 次元 RT 不安定性についてはいくつかの先行研究がある。ここでの研究と特に関連が深いものとしては、Rosenbluth et al[22]、Lernert[23]、Roberts and Taylor[24]、Winske[25]、Huba[26] 等の業績が上げられる。又、拡張 MHD 方程式には様々な理論モデルが存在し、Schnack et al[27] や Nakajima et al[28] で詳しく述べられている。

1.2 節では微視的スケールでの MHD モデルの拡張とこれによる RT の線形不安定性研究を、1.3 節では拡張 MHD モデルによる RT 不安定性の数値シミュレーション研究事例を、1.4 節では最近のトーラスプラズマの拡張 MHD シミュレーションコードについて、簡単に述べる。

## 1.2 MHD モデルの拡張

イオンの運動を考える一流体 MHD モデルはこれまでも様々な MHD 不安定性の解析や実験結果の説明等に幅広く利用されてきた。しかしながら、一流体 MHD モデルでは、FLR 効果や Hall 効果といった Larmor 半径やそれ以下の長さスケールで重要となる物理効果を無視したモデルとなっている。こうした微視的效果を一流体モデルに取り入れる研究がこれまでも複数なされている。本節では、特に FLR 効果のモデリングに関する研究として Rosenbluth[22]、Lehnert[23]、Roberts and Taylor[24] らの研究を取り上げる。

### 1.2.1 Rosenbluth et al による FLR 安定化研究

Rosenbluth et al[22] は重力 (RT) 不安定性の高波数モードが FLR 効果により完全に安定化されることを、運動論方程式に温度一様等を仮定し線形解析を行う事で示した。デカルト座標系  $(x, y, z)$  において磁場が  $z$  方向を向いているものとし、重力が  $x$  方向に存在するとした場合、Rosenbluth et al が求めた分散関係式は以下で与えられる。

$$\omega = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{k\epsilon'_i}{2\alpha_i\Omega_i} \right) \pm \left[ \left( \frac{k\epsilon'_i}{2\alpha_i\Omega_i} \right)^2 - 4g\epsilon'_e \right]^{1/2} \right\}. \quad (1.3)$$

ここで  $\Omega_i$  はイオンサイクロトロン周波数、 $\alpha_i$  はイオンラーマー半径と以下の関係で与えられる定数である。

$$\rho_i = \sqrt{\frac{\alpha_i}{\Omega_i}}. \quad (1.4)$$

パラメータ  $\epsilon'_j$  は  $\beta$  値と関連し、以下で定義されている。

$$-\frac{1}{n} \frac{dn}{dx} = \epsilon'_e - 2\alpha_e g = \epsilon'_i - 2\alpha_i g, \quad (1.5)$$

$$\epsilon \frac{B^2}{2} = \sum_j n_j m_j \left[ \frac{\epsilon'_j}{2\alpha_j} - g \right]. \quad (1.6)$$

従って安定性条件は以下のように与えられる。

$$(k\rho_i)(\epsilon'\rho_i) > \frac{4\omega_H}{\Omega_i}. \quad (1.7)$$

ここで  $\omega_H = \pm i\sqrt{g\epsilon'}$  は流体力学的な解である。従って、高波数モードが FLR 効果により完全に安定化されることが示された。

### 1.2.2 Lehnert による FLR 安定化研究

Lehnert[23] も重力不安定性での FLR 効果による安定化効果を、二流体方程式を用いて示した。しかしながら、Rosenbluth et al とは異なる結果となっている。この差異が生じた原因については次節の Roberts and Taylor[24] で述べるが、圧力をテンソルではなくスカラーとして取り扱ったためである。二流体モデルにおける連続の式と運動量方程式は以下で書かれる。

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) = 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = 0, \quad (1.9)$$

$$n_i \mathbf{v}_i = n_i \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} + m_i n_i \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{eB^2} - \nabla p_i \times \frac{\mathbf{B}}{B^2} - m_i n_i \left( \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} \right) \times \frac{\mathbf{B}}{eB^2}, \quad (1.10)$$

$$n_e \mathbf{v}_e = n_e \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} - m_e n_e \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{eB^2} + \nabla p_e \times \frac{\mathbf{B}}{B^2}. \quad (1.11)$$

ここで圧力はスカラー量であり、 $p_i = \frac{1}{2}m_i n_i V_{th,i}^2, p_e = \frac{1}{2}m_e v_e V_{th,e}^2$  ( $V_{th}$ : 熱速度、 $N$ : バルク密度) である。Lehnert が求めた線形解析により求めた分散関係式は以下で与えられる。

$$\omega = \frac{1}{2}(\alpha - f + \lambda) \pm \frac{1}{2} \left[ (\alpha - f + \lambda)^2 - 4\alpha^2\gamma \right]^{1/2}. \quad (1.12)$$

ここで  $\alpha = kg/\Omega_i, f = k \cdot \frac{1}{2}\rho_i^2\Omega_i N'/N, \lambda = k \cdot \frac{1}{2}\rho_i \epsilon N'/\epsilon_i B, \epsilon_i = Nm_i/B^2$  である。もし  $\alpha = \lambda = 0$  とすると、安定性条件は Rosenbluth et al と一致する。

$$(k\rho_i) \left( \rho_i \frac{N'}{N} \right) > \frac{4\omega_H}{\Omega_i}. \quad (1.13)$$

ここで  $\omega_H = (\alpha^2\gamma)^{1/2}$  である。

### 1.2.3 Roberts and Taylor による非等方圧力テンソルの導入

Roberts and Taylor[24] は圧力を非等方圧力テンソルとして取り扱うことで Rosenbluth et al と一致する結果が得られることを示した。Lehnert の論文では、Rosenbluth et al により見つかった安定化効果は、厳密には二流体方程式の他の項とキャンセルし、以前報告された残りの安定化効果のみが残るとしている。しかしながら Roberts and Taylor は、Lehnert の結果はイオンの方程式にスカラーな圧力のみを用いたことが原因であり、圧力テンソルに存在する他の項が Rosenbluth らの結果の原因である事を明らかにした。圧力テンソルは輸送項を含むように修正され、これらの項は Larmor 半径が平均自由行程に代わるような衝突領域では粘性を代表している。適当な項は Chapman, Cowling[29] が詳しく導出したように Boltzmann 方程式から推測することが可能である。しかしながら、Chapman らの導出は衝突を Larmor 半径と同様に含めたので、圧力テンソルの計算は複雑である。無衝突近似で必要な項を得るためのより簡単な方法が、Thompson[30] により考案されている。イオン圧力テンソルは以下で与えられる。

$$p_{xx} = p - \rho\nu \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right), \quad (1.14)$$

$$p_{yy} = p + \rho\nu \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right), \quad (1.15)$$

$$p_{xy} = p_{yx} = \rho\nu \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} \right). \quad (1.16)$$

ここでプラズマの速度は xy 平面である一方で、 $z$  方向の磁場は一樣と仮定し、 $p$  は垂直圧力、 $\rho$  は密度、 $\nu = a^2\Omega/4$  は動粘係数と同じ次元量、 $a$  は Larmor 半径である。又、電子圧力の輸送項は無視している。重力  $g$  が  $x$  方向を向き、 $\partial\rho_0/\partial x = -\eta\rho_0$ 、 $p$  が全垂直圧力を表すならば、運動方程式は以下のように書くことが出来る。

$$\frac{\rho DV}{Dt} = -\nabla \left( p + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \rho g + \nu\lambda. \quad (1.17)$$

ここで、

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla, \quad (1.18)$$

$$\lambda_x = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \rho \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \right], \quad (1.19)$$

$$\lambda_y = -\frac{\partial}{\partial y} \left[ \rho \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \right]. \quad (1.20)$$

である。連続の式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (1.21)$$

電場は

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = 0, \quad (1.22)$$

である。式 (1.22) の回転 (rot) をとり低  $\beta$  近似をすると、以下の通りになる。

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (1.23)$$

$$\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{V}). \quad (1.24)$$

ここで、 $x$  方向への依存性が小さいと仮定し、式 (1.17) の回転を取ったものを  $\exp(i\omega t +iky)$  の形の解を仮定して線形解析を行うと、分散関係式は

$$\omega^2 + 2\nu\eta k\omega + g\eta = 0, \quad (1.25)$$

で与えられる。Hall 項を取り入れる拡張を行う場合、電場は一般化されたオームの法則

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} + \frac{c}{ne} \nabla p_e - \frac{c}{ne} \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (1.26)$$

から与えられる。ここで  $n$  は数密度  $p_e$  は電子圧力  $\mathbf{J}$  は電流密度である。式 (1.26) では電子慣性と抵抗は無視している。最後の 2 項は運動方程式へと変換されて、以下の通りになる。

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} - \frac{c}{ne} \nabla p_i - \frac{Mc}{e} \frac{D\mathbf{V}}{Dt} + \frac{Mc}{e} \mathbf{g} + \frac{\nu c}{ne} \lambda = 0. \quad (1.27)$$

ここで  $p_i$  はスカラーイオン圧力、 $M$  はイオン質量である。上の式の rot をとると、簡単な整理の後に以下の結果を得る。

$$\mathbf{b} (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \frac{1}{\Omega} \nabla \times \left( \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \right) - \frac{\nu}{\Omega} \nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \lambda \right) = 0. \quad (1.28)$$

ここで  $\mathbf{b}$  は磁場の単位ベクトルである (温度変化を無視できるとする Lehnert の仮定では、第 3 項は寄与しない)。この簡単化された式を線形化すると、以下の分散関係が得られる。

$$\omega^2 + \left( 2\nu\eta k + \frac{gk}{\Omega} \right) \omega + g\eta = 0. \quad (1.29)$$

この式は Rosenbluth らの (2.14) と厳密には同じ安定条件を、 $\epsilon', \eta$  の違いを取り入れることで与えるものである：

$$\epsilon'_1 = \eta + \frac{2g}{a^2\Omega^2} = \eta + \frac{g}{2\nu\Omega}. \quad (1.30)$$

Rosenbluth らにより示された FLR 安定化効果を示すには Vlasov 方程式を解く必要はなく、ここで与えられた基本的な導出がより物理を明快にしている。このように Roberts and Taylor が扱った非等方圧力テンソルは、現在では gyro-viscosity(以下ジャイロ粘性) と呼ばれている。

本節でレビューした業績は線形解析のみが行われている。また、温度一様や低ベータ近似等の仮定を用いているため、温度が一様ではない状況においても同様の振る舞いをしているのかは不明確である。(この様な状況は核融合プラズマの実験装置内で実現されている。)

### 1.3 拡張 MHD モデルによる RT 不安定性の数値シミュレーション研究

RT 不安定性の成長に対する微視的效果の影響を、数値シミュレーションにより明らかにした先行研究として、本節では Winske[25], Huba[26], Zhu et al[31], Xi et al[32] の研究について取り上げる。(これらは、この論文に関わりの深い研究である。設定が大きく異なる RT 不安定性の論文はあまりに多数に上り、ここでは紹介しない。)

Winske[25] は RT 不安定性に対して、運動方程式にジャイロ粘性、電場に Hall 項を加えた拡張 MHD モデルを用いたイオンを粒子・電子を流体として扱うハイブリッドシミュレーションを行った。ここでは Hall 項の影響を調べるために Hall 項の影響が少ないほぼ流体の領域と Hall 項が大きい領域でのシミュレーションが行われた。この研究では、 $k > 6$  の短波長モードではジャイロ粘性による安定化により、成長率は理論値からは小さくなり、Hall 項が大きくなると逆に成長率が増加することが明らかとなった。また、Huba[26] は FLR 効果による高波数モードの安定化を調べるために、一流体モデルにジャイロ粘性のみを取り入れた二次元 FLR-MHD モデルによる RT 不安定性の数値シミュレーションを行った。この研究では、ジャイロ粘性の大きさを変化させることで RT 不安定性の高波数モードが大きく安定化されることが示されている。これらの数値シミュレーションを用いた先行研究は磁気圏プラズマを対象としており高  $\beta$ 、高密度比での結果である。これに対して、核融合プラズマに対応した低  $\beta$ 、低密度比での解析についての拡張 MHD 研究はあまり行われておらず、これを行うことが核融合プラズマの 3 次元シミュレーションについても有益なものであると考えられる。

近年行われた研究例としては、Zhu et al[31], Xi et al[32] が挙げられる。Zhu et al は RT 不安定性のジャイロ粘性による安定化効果への  $\beta$  値の影響について線形解析及び数値シミュレーションを行った。その結果、 $\beta$  値を上昇されると高波数モードの完全安定化効果が弱まり、高波数モードが完全には安定化されない結果が得られた。しかしながら、Zhu は Hall 項まで取り入れた解析は行っていない。又、Xi et al は、Bout++ コード [33] を用いてイオン密度勾配が存在する場合のバルーニング不安定性の線形及び非線形性シミュレーションを行った。その結果、反磁性効果だけでは高波数モードを完全には安定化することが出来ず、ジャイロ粘性を導入することで高波数モー

ドが完全安定化することを示した。ジャイロ粘性及び Hall 項による安定化の物理的な描像は以下のように考えることが可能である [34]。

- ・ FLR 効果による安定化は、垂直方向の運動量を上流から下流へ、下流から上流へとと輸送する事で生じる。
- ・ Hall 項による安定化は、電子が磁場揺動の位相を速度揺動と共にずらすことで生じる。

しかし、この論文の 4 章、5 章に示す通り、また Xi et al[32] も触れている通り、ジャイロ粘性だけの場合と、ジャイロ粘性と Hall 項が加わった場合では、線形成長に大きな違いが生じる事になる。

#### 1.4 3次元拡張 MHD コード及びそれらを用いた研究

これまでも拡張 MHD モデルを用いた非線形 3次元拡張 MHD コードの開発が進められている [33, 35, 36, 37]。ここでは、これらのコードにおける高波数モードまで精度良く解析を行う場合の問題点について触れる。

まず、高波数モードまで精度良く解析を行うためには、空間的には多数の格子点を用意する必要がある。トカマク装置における ELM が起こる領域での安全係数は  $q=m/n=4$  程度である [39]。ここで  $m, n$  はポロイダルモード数、トロイダルモード数である。この時に確保すべき波数空間を概算すると、線形段階では ( $n = 20, m = 80$ )、非線形段階では ( $n = 50, m = 200$ ) 程度の波数空間は確保する必要があると考えられる。格子点数  $N$  で表現可能な波数はエイリアシング誤差を考慮すると  $N/4$  である。従って、差分法を念頭に格子点数を議論するならば、最低でもポロイダル方向に ( $4 \times 200$ ) 点、トロイダル方向に ( $4 \times 50$ ) 点の格子点数を確保しなければシミュレーションに必要な波数を表現することが出来ない。径方向にも同程度の格子点数 (800 点) は確保する必要があるものと考えられる。実際にはこれ以上の格子点が必要と考えられ、これは時間に陰解法を用いる際に大きな負担になる。

次に、時間発展スキームには、大きく分けて過去の情報から未来の情報を求める陽解法と、現在の情報から行列計算を行うことで求める陰解法が存在する。拡張 MHD モデルに対して陽解法を採用した場合には、ホイッスラー波と呼ばれる分散性波動が発生する [38, 54]。ホイッスラー波は分散関係  $\omega \propto k_{\parallel} k$  で表され、空間解像度を倍にした場合には時間解像度を  $1/4$  にしなければ数値発散してしまうことを示唆している。M3D、NIMROD など主だった 3次元シミュレーションコードには、陰解法が用いられている。しかしながら、陰解法では一般的に、低波数モードから高波数モードまでが同時に含まれる場合、特に高波数モードに対して収束の問題がある。陰解法では緩和法を用いる事が多いが、大振幅の低波数モードに混じった高波数モードを正しく解く程に精度良く緩和させるのは、実用上なかなか困難な場合が多い。従って、陰解法及び陽解法の短波長モードへの妥当性を示すためにも、陽解法による数値シミュレーションが必要不可欠である。このような事情は、トカマク装置に限らず磁化プラズマの RT 不安定性についても共通する。短波長領域 (し

かし電子慣性領域よりも十分大きい) での RT 不安定性について調べるためには、問題を 2 次元へと簡単化することでこれらの問題を軽減し、様々な現象を研究する上で有効である。

## 1.5 第 1 章まとめ

これまで見てきたように、Rosenbluth et al は温度一様、Lehnert, Roberts and Taylor は低  $\beta$  近似、Winske は高  $\beta$ ・高密度比、Huba は Hall 項を考慮していないといったように、先行研究では RT 不安定性の短波長スケールについていくつかのパラメータ領域について限定的な研究が行われている。ここに紹介していない文献を考慮に入れても、特に低  $\beta$  かつ密度比の低い RT 不安定性についての Hall 項及びジャイロ粘性についての研究は不十分である。Hall 項・ジャイロ粘性の広範なパラメータサーベイは行われていないため、線形不安定性に対する影響は一部しか分かっていない。特に  $\beta$  値が低く、密度の比率が低い場合については不明な点が多い。また、非線形段階での微視的效果の影響は分かっていない点の方が多いと考えられる。例えば、RT 乱流でよく調べられる混合幅 (4 章) に対する微視的效果の影響などは典型的な例である。

したがって、これらに点に焦点を当て研究を行うとともに、2D の高波数 RT 不安定性シミュレーションによる基礎的な理解を将来的な 3D シミュレーションにつなげることが本研究の目的である。第 4 章では 2・3 章で述べる数値計算モデル及び数値計算手法を用いて、圧力勾配が計算領域全体に及んでいる平衡について RT 不安定性の拡張 MHD シミュレーション及び解析を行った。第 5 章では、圧力勾配が局在化している平衡について RT 不安定性の拡張 MHD シミュレーション及び解析を行った。第 6 章はまとめである。付録 B では、本研究を核融合プラズマに発展させることを念頭に置いた三次元トーラスプラズマに対する微視的效果の影響を高精度に計算するために、一般化座標系を用いて円筒トーラスのエッジ領域 (中空円環トーラス) を計算する非線形拡張 MHD コードの開発の概要が述べられている。

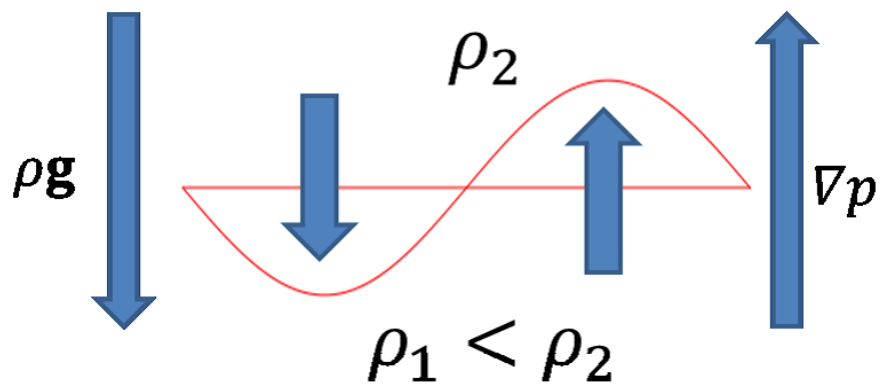


図 1.1 RT 不安定性の駆動機構の模式図



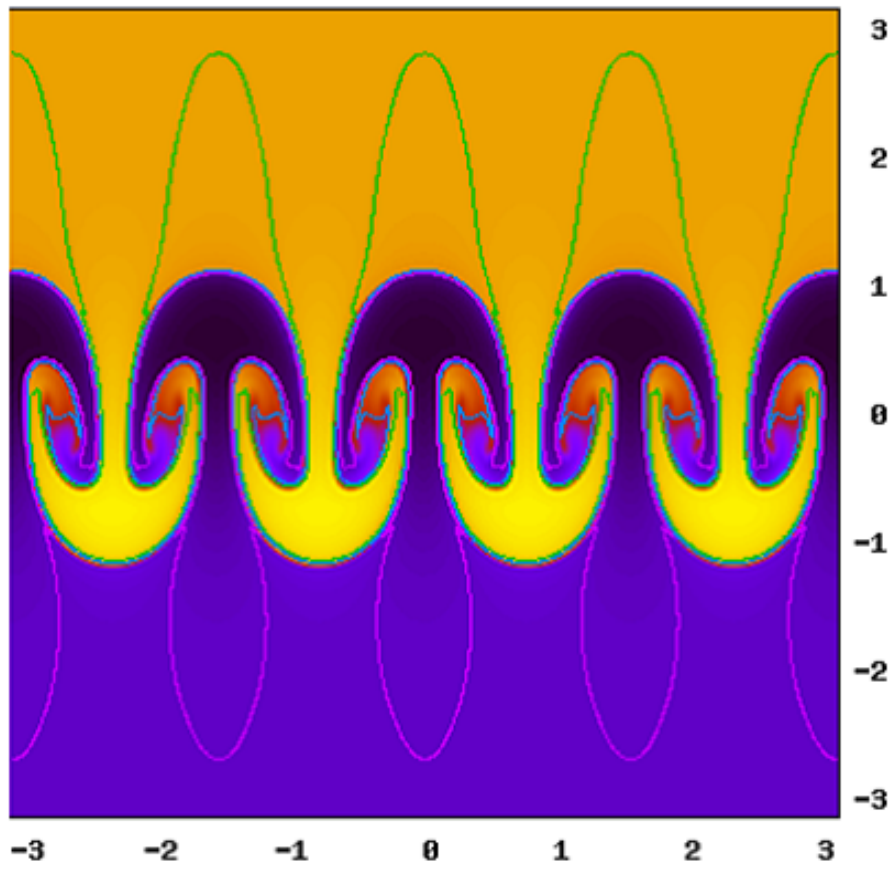


図 1.2 RT 不安定性による典型的なマッシュルーム構造

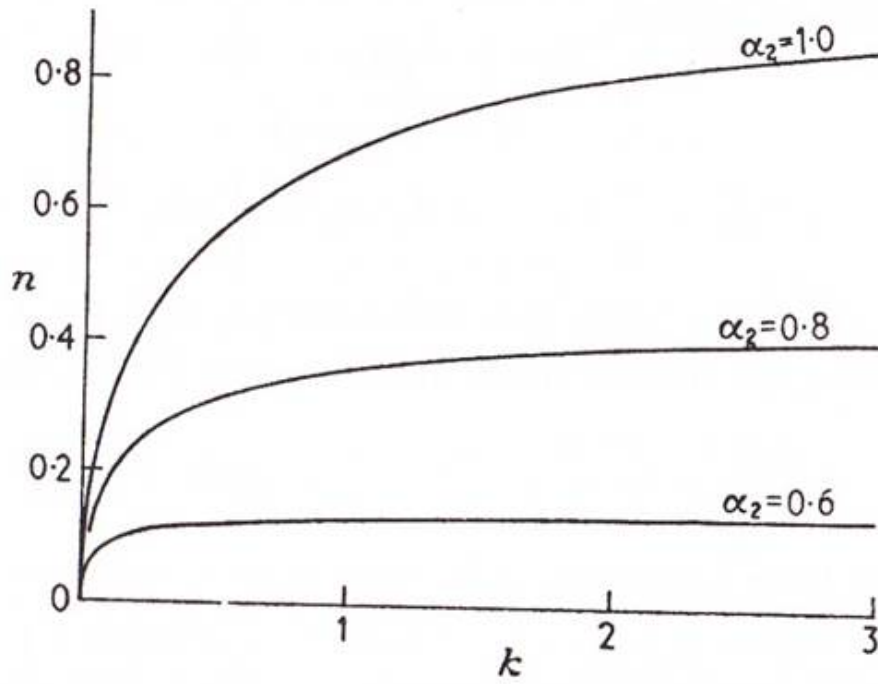


図 1.3  $z$  方向の重力に平行な一様磁場が存在する場合の成長率の波数依存性

## 2 電磁流体力学方程式

第2章では、本研究で採用する拡張電磁流体力学 (MHD) 方程式を、Braginskii のレビューに基づき、運動論方程式を用いたモーメント法により導出する [40]。この方程式を、代表量を用いて無次元化する。類似の、しかしやや結果・仮定の異なる手法として Callen の研究 [41] や、Hazeltine and Meiss[42] のテキストも参考にした。

### 2.1 MHD 方程式の導出

位相空間  $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  中の粒子の分布関数  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  の変化は Boltzmann 方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q}{m} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = C(f) \quad (2.1)$$

に従っている。ここで  $\mathbf{v}$  は速度ベクトル、 $\mathbf{x}$  は位置ベクトル、 $t$  は時間、 $q$  は電荷、 $m$  は質量、 $\mathbf{E}$  は電場、 $\mathbf{B}$  は磁場、 $C(f)$  は衝突項を表している。モーメント法では、式 (2.1) の  $n$  次モーメントを取ることで MHD 方程式を導出する。この方程式系は連続の式、運動方程式、エネルギー方程式と電磁場方程式から構成される。

#### 2.1.1 連続の式の導出

連続の式は式 (2.1) に 0 次モーメント  $\int m d^3\mathbf{v}$  をかけることで得られる。

$$\begin{aligned} & \int d^3\mathbf{v} m \frac{\partial f}{\partial t} + \int d^3\mathbf{v} m \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} f + \int d^3\mathbf{v} m \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{q}{m} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] f \\ & = \int d^3\mathbf{v} m C(f). \end{aligned} \quad (2.2)$$

流体の密度及び平均速度は以下で定義される。

$$n \equiv \int d^3\mathbf{v} f, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{V} \equiv \int d^3\mathbf{v} \mathbf{v} f. \quad (2.4)$$

この定義を用いると式 (2.2) の各項は以下のように表現することが出来る。

$$\int d^3\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3\mathbf{v} f = \frac{\partial n}{\partial t}, \quad (2.5)$$

$$\int d^3\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} f = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \int d^3\mathbf{v} \mathbf{v} f = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot n \mathbf{V} = \nabla \cdot n \mathbf{V}, \quad (2.6)$$

$$\int d^3\mathbf{v} m \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{q}{m} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] f = 0, \quad (2.7)$$

$$\int d^3\mathbf{v} m C(f) = 0. \quad (2.8)$$

ここで衝突項は、粒子がイオン化等により別の粒子へ変換されないものとする。第3項目はガウスの発散定理及び分布関数の境界条件から消えることが分かる。従って、衝突項が寄与しない閉じた系では連続の式は以下で与えられる。

$$\frac{\partial mn}{\partial t} + \nabla \cdot mn\mathbf{V} = 0. \quad (2.9)$$

この式は質量密度  $\rho = mn$  を用いて

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho\mathbf{V} = 0, \quad (2.10)$$

と書き直すことが出来る。本論文では主に質量密度を用いた式 (2.10) を用いる。

### 2.1.2 運動量方程式の導出

流体の運動量方程式又は運動方程式は式 (2.1) の1次モーメント  $\int d^3\mathbf{v} m\mathbf{v}$  をとることで得られる。1次モーメントを取った方程式の各項は以下で与えられる。

$$\int d^3\mathbf{v} m\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} mn\mathbf{V}, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{v} m\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} f &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \int d^3\mathbf{v} m\mathbf{v}\mathbf{v} f \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot m \int d^3\mathbf{v}' (\mathbf{v}'\mathbf{v}' + 2\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V}\mathbf{V}) f \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left[ \int d^3\mathbf{v}' m v'^2 f + mV^2 n \right] \\ &= \nabla P + \nabla \cdot \mathbf{\Pi} + \nabla \cdot (mnV^2), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{v} m\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{q}{m} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] f &= - \int d^3\mathbf{v} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} m\mathbf{v} \right) \cdot \frac{q}{m} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] f \\ &= -nq [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}], \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\int d^3\mathbf{v} m\mathbf{v} C(f) = F_1. \quad (2.14)$$

ここで  $\mathbf{v}' = \mathbf{V} - \mathbf{v}$  はランダム速度であり、

$$\int d^3v' v'v' f = 0, \quad (2.15)$$

を満たすものとする。又、 $P, \mathbf{\Pi}$  はそれぞれ以下で定義される。

$$P \equiv \int d^3v' \frac{1}{3} m v'^2 f = \int d^3v' m \frac{(v - V)^2}{3} f = \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{P}), \quad (2.16)$$

$$\mathbf{\Pi} \equiv \int d^3v' m \left( v'^2 - \frac{1}{3} v'^2 \mathbf{I} \right) f = \mathbf{P} - P\mathbf{I}. \quad (2.17)$$

記号  $\mathbf{I}, \mathbf{P} = \int d^3v' m v'^2 f$  はそれぞれ単位テンソル、圧力テンソルを表す。 $\mathbf{\Pi}$  の具体形はBraginskii[40]を参照されたい。従って、運動量方程式は以下のように表される。

$$\frac{\partial}{\partial t} (mn\mathbf{V}) = -\nabla \cdot (mnV^2 + \mathbf{\Pi}) - \nabla P + nq(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + F_1. \quad (2.18)$$

### 2.1.3 エネルギー方程式の導出

エネルギー方程式は式 (2.1) の 2 次モーメント  $\int d^3\mathbf{v} (mv^2/2)$  を取ることで得られる。2 次モーメントを取った方程式の第 1 項は以下のように表される。

$$\begin{aligned}\int d^3\mathbf{v} \frac{mv^2}{2} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int d^3\mathbf{v} \frac{mv^2}{2} f = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3\mathbf{v}' \frac{m}{2} [(v' + V) \cdot (v' + V)] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2}P + \frac{1}{2}mnV^2 \right).\end{aligned}\quad (2.19)$$

(2.19) の右辺第 2 項は以下のように表現される。

$$\int d^3\mathbf{v} \frac{mv^2}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} f = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \int d^3\mathbf{v} \frac{mv^2}{2} \mathbf{v} f. \quad (2.20)$$

ここで

$$\begin{aligned}\int d^3\mathbf{v} \frac{mv^2}{2} \mathbf{v} f &= \int d^3\mathbf{v}' \frac{m}{2} [(v' + V) \cdot (v' + V)] (v' + V) f \\ &= \mathbf{q} + \left( \frac{5}{2}P + \frac{mnV^2}{2} \right) \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Pi},\end{aligned}\quad (2.21)$$

また、熱流束  $\mathbf{q}$  の定義は

$$\mathbf{q} \equiv \int d^3\mathbf{v}' \frac{mv'^2}{2} \mathbf{v}' f, \quad (2.22)$$

なので、第 2 項目は

$$\nabla \cdot \left[ \mathbf{q} + \left( \frac{5}{2}P + \frac{mnV^2}{2} \right) \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Pi} \right], \quad (2.23)$$

である。第 3 項目は以下で与えられる。

$$\begin{aligned}\int d^3v \frac{mv^2}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{q}{m} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] f &= - \int d^3\mathbf{v} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{mv^2}{2} \right) \cdot \frac{q}{m} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] f \right\} \\ &= -nq\mathbf{V} \cdot \mathbf{E}.\end{aligned}\quad (2.24)$$

最後に衝突項は以下のように表現される。

$$\int d^3\mathbf{v} \frac{mv^2}{2} C(f) = \int d^3\mathbf{v}' \frac{m}{2} [v'^2 + 2v' \cdot V + V^2] C(f) = Q + \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}_1. \quad (2.25)$$

ここで衝突加熱  $Q$ 、衝突力  $F_1$  は

$$Q \equiv \int d^3\mathbf{v}' \frac{mv'^2}{2} C(f), \quad (2.26)$$

$$F_1 \equiv \int d^3\mathbf{v}' m\mathbf{v}' C(f), \quad (2.27)$$

である。従ってエネルギー方程式は以下のように表すことが出来る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2}P + \frac{1}{2}mnV^2 \right) + \nabla \cdot \left[ \mathbf{q} + \left( \frac{5}{2}P + \frac{mnV^2}{2} \right) \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Pi} \right] \\ = Q + \mathbf{V} \cdot (nq\mathbf{E} + \mathbf{F}_1). \end{aligned} \quad (2.28)$$

これを古典力学的エネルギー  $e \equiv p/(\gamma - 1) + (mnV^2)/2$  を用いて書き換えると、

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{q} + (e + p)\mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Pi}) = Q + \mathbf{V} \cdot (nq\mathbf{E} + \mathbf{F}_1), \quad (2.29)$$

と表すことが出来る。

#### 2.1.4 電磁場方程式

電磁場は以下で表される Maxwell 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (2.30)$$

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}. \quad (2.31)$$

に従う。ここで式 (2.30) では変位電流を無視している。この方程式を用いて電磁場の変化を得るには、電場  $\mathbf{E}$  および電流密度  $\mathbf{J}$  を決定する必要がある。この詳細は一流体 MHD モデル、二流体 MHD モデルによって異なるため、次節ではこれについて述べる。

## 2.2 “一般化された Ohm の法則” の導出

プラズマ中にはイオンと電子の 2 種類の荷電粒子が存在する。イオンと電子の質量比は  $M/m \approx 1800$  (ここで  $M, m$  はイオン及び電子質量とする。) であるので、準中性条件  $n_i = n_e = n$  を用いると質量密度、速度、電流密度は以下のように定義出来る。

$$\rho \equiv n_i M + n_e m = n(M + m), \quad (2.32)$$

$$\mathbf{v} \equiv \frac{1}{\rho} (n_i M \mathbf{v}_i + n_e m \mathbf{v}_e) = \frac{(M \mathbf{v}_i + m \mathbf{v}_e)}{(M + m)}, \quad (2.33)$$

$$\mathbf{J} \equiv e(n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e) = ne(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e). \quad (2.34)$$

イオン、電子のそれぞれについて運動方程式を以下のように求めることが出来る。

$$Mn \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) - \nabla p_i - \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_i + F_{ie}, \quad (2.35)$$

$$mn \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} = -en(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - \nabla p_e - \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_e + F_{ei}. \quad (2.36)$$

イオンの式 2.36 に  $m$ 、電子の式 2.36 に  $M$  をかけて後者を引くと以下の式で表されることが分

かる。

$$\begin{aligned}
& Mmn \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) + \nabla \cdot [Mmn (\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e \mathbf{v}_e)] \\
&= en (M + m) \mathbf{E} + en (m\mathbf{v}_i + M\mathbf{v}_e) \times \mathbf{B} - m\nabla p_i + M\nabla p_e \\
&\quad - m\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_i + M\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_e + mF_{ie} - MF_{ei},
\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}
& \therefore \frac{Mm}{e} \left[ \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{J}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{J}) \right] \\
&= e\rho \mathbf{E} + en (m\mathbf{v}_i + M\mathbf{v}_e) \times \mathbf{B} - m\nabla p_i + M\nabla p_e \\
&\quad - m\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_i + M\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_e - (M + m) F_{ei}.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

ここで電子とイオンの衝突力は抵抗  $\eta$  を用いて

$$F_{ei} = \eta e^2 n^2 (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e), \tag{2.39}$$

のように定義される。(2.38) の右辺第 2 項目と最終項は

$$en (m\mathbf{v}_i + M\mathbf{v}_e) \times \mathbf{B} = e\rho \mathbf{v} \times \mathbf{B} - (M - m) \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad - (M + m) F_{ei} = -\eta e\rho \mathbf{J}, \tag{2.40}$$

と書き直すことが出来る。従って、電場は

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{J} \\
&= \frac{1}{e\rho} \left[ \frac{Mm}{e} \left( \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{J}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{J}) \right) + (M - m) \mathbf{J} \times \mathbf{B} + m\nabla p_i - M\nabla p_e \right. \\
&\quad \left. - m\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_i + M\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_e \right],
\end{aligned} \tag{2.41}$$

のように表される。ここで電子による応力の寄与は小さいものとして無視し、極限  $m/M \rightarrow 0$  をとることで電場は以下の”一般化された Ohm の法則”で表される。

$$\mathbf{E} = \eta \mathbf{J} - \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{1}{ne} (\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p_e) + \frac{m}{(ne^2)} \left[ \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{J}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{J}) \right]. \tag{2.42}$$

(2.42) 式右辺の第 3 項目及び最終項はそれぞれ Hall 項、電子慣性項と呼ばれている。一流体 MHD モデルでは、第 2 項のみを、抵抗性 MHD モデルでは第 2 項目までを考慮している。本研究で採用する拡張 MHD モデルでは、イオンの運動に対する二流体効果の影響を調べるために電子慣性項を無視した形式が採用されている。電子慣性項は電子スケールの運動の効果を表しているため、イオンの運動に比べると非常に短い空間スケールを持っている。そのため、電子の運動まで記述する二流体 MHD モデルでは慣性項まで含まれた形式が採用されている。

### 2.3 拡張 MHD モデルと方程式の無次元化

一流体 MHD モデルは流体要素内で平均化した物理量を用いて表現されている。そのため、荷電粒子が磁力線の周りを旋回する有限 Larmor 半径 (FLR) 効果は無視されてしまっている。Roberts and Taylor[24] は流体モデルの枠組みで、FLR 効果を非等方圧力テンソルとして取り扱った。こ

の非等方圧力テンソル（その一部）は、近年ではジャイロ粘性テンソルと呼ばれている。ジャイロ粘性テンソルは、(2.17) 式で  $\Pi = \Pi_{gv}$  と考えることで容易に MHD モデルに導入が可能である。2次元デカルト座標系では、ジャイロ粘性は以下で与えられる。

$$\Pi_{xx} = -\Pi_{yy} = -\frac{p_i}{2B} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2.43)$$

$$\Pi_{xy} = \Pi_{yx} = \frac{p_i}{2B} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (2.44)$$

このジャイロ粘性項の表現からもわかるように、物理量は磁場の強さなどに依存した表現になる。このため、これまでの表現のままでは、異なる磁場の強さや装置サイズの間で普遍的な現象を調べる事が難しい。これを解消するため、この節では、2.1 節及び 2.2 節で導出した拡張 MHD モデル及び一流体 MHD モデルを無次元化する。

2.2 節で導出した結果から、無衝突プラズマを考慮するために衝突に関連した項を落とし、簡単のために熱流束  $\mathbf{q}$  を無視した拡張 MHD モデルは以下で表される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}), \quad (2.45)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g} - \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_i, \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} = -\nabla \cdot [(E_t + p) \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Pi}_i] + \mathbf{V} \cdot \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{V}, \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \left( -\mathbf{V} \times \mathbf{B} + \frac{1}{ne} (\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p_e) \right). \quad (2.48)$$

ここで、RT 不安定性を考えるために外力として重力項が加えられている。又、 $E_t = \rho v^2/2 + p/(\gamma - 1)$  である。物理量の無次元化を行うために、次元を持つ物理量について以下のように表される無次元量を用いて置き換えを行う。

$$A = A_0 \tilde{A}. \quad (2.49)$$

ここで  $A_0$  は代表的な値、 $\tilde{A}$  は無次元化した物理量である。 $A_0$  の具体的な表記については後に触れる。

連続の式 (2.10) の全ての物理量を無次元化物理量で表すと  $\rho = \rho_0 \tilde{\rho}$ ,  $\mathbf{V} = V_0 \tilde{\mathbf{V}}$ ,  $t = t_0 \tilde{t}$ ,  $\nabla = \frac{1}{L} \tilde{\nabla}$  である。ここで、 $V_0$  は Alfvén 速度  $V_0 = V_A = B_0/\sqrt{\mu_0 \rho_0} = L/t_0$  である。従って、無次元化した形式での連続の式は以下のように無次元化される。

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \frac{V_0 t_0}{L} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{V}}) = 0, \quad (2.50)$$

$$\frac{V_0 t_0}{L} = 1, \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0. \quad (2.52)$$

ここで、最後の式ではチルダを落としている。本節での無次元化した式の導出後に現れる物理量は全て無次元化量である。



連続の式と同様のプロセスで運動方程式についても無次元化した形式で表すことが出来る。  
(2.46) の各量を無次元量を用いて表すと、

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial t} + \frac{V_0 t_0}{L} (\tilde{\mathbf{V}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{V}} \right) &= -\frac{t_0 p_0}{\rho_0 V_0 L} \tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{t_0 J_0 B_0}{\rho_0 V_0} \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \frac{t_0 g_0}{V_0} \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{g}} \\ &- \frac{t_0}{\rho_0 V_0} \frac{1}{L} \frac{p_0 V_0}{\Omega_0 L} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{\Pi}}_i, \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g} - \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_i. \quad (2.54)$$

ここで、ジャイロ粘性テンソルは以下の形式で表される。

$$\Pi_{xx} = -\Pi_{yy} = -\delta \frac{p_i}{2B_Z} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2.55)$$

$$\Pi_{xy} = \Pi_{yx} = \delta \frac{p_i}{2B_Z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (2.56)$$

この導出で用いられている特徴的な物理量は  $V_0 = V_A = B_0 / \sqrt{\mu_0 \rho_0} = L / t_0$ ,  $J_0 = B_0 / \mu_0 L$ ,  $p_0 = B_0^2 / \mu_0$ ,  $g_0 = V_0 / t_0$ ,  $\Omega_0 = V_0 / \rho_i$  である。ここで記号  $\delta$  はジャイロ粘性係数であり  $\delta = \rho_i / L$  である。又、 $\rho_i, L$  はそれぞれイオン Larmor 半径、システムサイズである。

エネルギー方程式及び電磁場方程式を無次元化した結果は以下の通りである。

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} = -\nabla \cdot [(E_t + p) \mathbf{V} + \delta (\mathbf{V} \cdot \mathbf{\Pi}_i)] + \mathbf{V} \cdot \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{V}, \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \left( -\mathbf{V} \times \mathbf{B} + \frac{\epsilon}{\rho} (\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p_e) \right). \quad (2.58)$$

ここで、 $d_i = \sqrt{m / (\mu_0 n_0 e^2)}$ ,  $\epsilon = d_i / L$  はそれぞれイオンスキン長・Hall 係数である。ジャイロ粘性係数が上述のように表現されている場合、 $\delta, \epsilon$  の関係は以下で与えられる。

$$2\delta = \frac{\rho_i}{L} = \frac{1}{L} \frac{m}{(eB_0 B_Z)} V_A = \frac{1}{L} \frac{m}{(eB_0 B_Z)} \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 m n_0}} = \frac{1}{B_Z} \frac{d_i}{L} = \epsilon / B_Z. \quad (2.59)$$

ここで  $B_z$  は磁場の強さを表している。



### 3 数値計算手法

第3章では、本研究で検討及び採用した数値計算手法について述べる。3.1節では関数及びその微分の空間表現について言及する。時間発展スキームには、現在の情報から次ステップの情報を求める陽解法と、次ステップの情報も用いて行列計算を行うことで計算を進める陰解法が存在するが、3.2節では本研究で採用している陽解法の Runge-Kutta-Gill(RKG) 法について説明する。3.3節では陽解法を用いた場合での数値安定性について触れた後、本研究の初期段階で検討を行った移流項の風上差分法による表現、そしてシミュレーションコードで採用している超粘性について触れていく。ここで述べる数値手法は藤井 [43]、石岡 [44]、木田・柳瀬 [45]、桑原・河村 [46]、数値流体力学編集会 [47] らによるテキストと、そこに掲載された文献を参考にしている。

#### 3.1 空間離散化

第2章では、電磁流体の運動を支配する拡張 MHD 方程式を示した。拡張 MHD 方程式の解を解析的に表現できる場合は極めて限定されており (例えば Mahajan and Miura [48])、数値的に方程式の解を求める数値計算を実行する事が必要不可欠である。MHD 方程式そのものは連続的な関数として記述されているが、コンピュータは離散的な値しか取り扱うことが出来ない。そのために連続データを離散データとして取り扱う必要がある。簡単な例として、 $f(x) = \cos(2x)$  は各格子点  $i$  で  $f_i = \cos(2i)$  というように表される (図 3.1)。格子点の間隔が細かくなればなるほど元の関数を正確に表現出来るが、格子点間では値が定義されていないため完全には一致しない。

同様に空間微分についても離散的に表現する必要がある。離散的な空間微分は Taylor 展開により与えることが出来る。第  $i \pm 1$  番目の格子点では関数  $f$  は以下で与えられる。

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + \dots, \quad (3.1)$$

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + \dots. \quad (3.2)$$

従って 2 次精度の中心差分式は (3.1) から (3.2) を引くことで得られる。

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (3.3)$$

ここで  $O(\Delta x^2)$  は 2 次のオーダーの誤差を表している。より精度の高い 4 次精度中心差分式はより高次まで Taylor 展開し、 $f_{i\pm 2}$  まで考えると

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12\Delta x} + O(\Delta x^4). \quad (3.4)$$

で与えられる。本研究では空間微分については 4 次精度中心差分法が採用されている。

### 3.2 時間発展スキーム

本研究では時間発展スキームとして陽解法を採用している。時間発展についても差分式で考えることが出来、いくつかの手法が存在している。1次元移流拡散方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad (3.5)$$

について考えてみる。空間微分項を右辺に移し  $g$  と置くと以下で表すことが出来る。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -c \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = g. \quad (3.6)$$

最も単純な一次精度の差分を考えると式 (3.6) は以下のように表される。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} = g^n \rightarrow f^{n+1} = f^n + \Delta t g^n + O(\Delta t). \quad (3.7)$$

ここで上付きは時間ステップを表すものとする。この様に時間微分を一次精度の差分で表現する手法を手法をオイラー陽解法と呼ぶ。しかしながら、一次精度の誤差を含むために正確な関数の時間発展を追うことが困難である。本研究では、より高精度なスキームとして4次精度 RKG 法を採用している [49]。RKG 法は4段階に計算を分割し、各ステップで3つの変数を記憶することで時間発展を追うスキームである。記憶する3つの変数を  $u, v, w$  として各ステップでは以下で表現することが出来る。

$$w^{n,(1)} = \Delta t \cdot f(t, u^n), \quad (3.8)$$

$$v^{n,(1)} = u^n + \frac{1}{2} w^{n,(1)}, \quad (3.9)$$

$$u^{n,(2)} = \Delta t \cdot f\left(t + \frac{1}{2} \Delta t, v^{n,(1)}\right), \quad (3.10)$$

$$v^{n,(2)} = v^{n,(1)} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(u^{n,(2)} - v^{n,(1)}\right), \quad (3.11)$$

$$w^{n,(2)} = w^{n,(1)} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(2u^{n,(2)} - 3w^{n,(1)}\right), \quad (3.12)$$

$$u^{n,(3)} = \Delta t \cdot f\left(t + \frac{1}{2} \Delta t, v^{n,(2)}\right), \quad (3.13)$$

$$v^{n,(3)} = v^{n,(2)} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(u^{n,(3)} - w^{n,(2)}\right), \quad (3.14)$$

$$w^{n,(3)} = w^{n,(2)} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(2u^{n,(3)} - 3w^{n,(2)}\right), \quad (3.15)$$

$$u^{n,(4)} = \Delta t \cdot f\left(t + \frac{1}{2} \Delta t, v^{n,(3)}\right), \quad (3.16)$$

$$u^{n+1} = w^{n,(3)} + \frac{1}{6} \left(u^{n,(4)} - 2w^{n,(3)}\right). \quad (3.17)$$

ここで上付きの添え字  $n$  は時間発展の  $n$  ステップ目である事を、括弧中の数字は RKG の 1 段階目から 4 段階目を表す。RKG は 4 段階で 4 次精度であるので、4 段 4 次の Runge-Kutta 法の一つである。

### 3.3 数値安定性

#### 3.3.1 CFL 条件と風上差分

過去の情報から未来の情報を求める陽解法では Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 条件により時間/空間的なステップ幅が制限されている。簡単のために、以下の移流拡散方程式について、CFL 条件を考える [43]。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (3.18)$$

(3.18) の差分形式は

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} = -c \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2\Delta x} + \mu \frac{f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n}{\Delta x^2}. \quad (3.19)$$

である。又、 $f_j^n, f_{j\pm 1}^n$  の Fourier 変換はそれぞれ

$$f_j^n = a^n \exp(ijk\Delta x), \quad (3.20)$$

$$f_{j\pm 1}^n = a^n \exp(i(j \pm 1)k\Delta x) = f_j^n \exp(\pm ik\Delta x). \quad (3.21)$$

である。従って、(3.21) は以下のように書き換えることが出来る。

$$\begin{aligned} f_j^{n+1} &= f_j^n - \alpha(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) + \beta(f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n) \\ &= f_j^n \left[ 1 - i\alpha \sin(k\Delta x) - 4\beta \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (3.22)$$

ここで  $\alpha, \beta$  は

$$\alpha \equiv c \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right), \quad (3.23)$$

$$\beta \equiv \mu \left( \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right), \quad (3.24)$$

である。数値安定性の条件は以下で定義される増幅係数  $g$  を用いて以下の式で表される。

$$\begin{aligned} g &\equiv \frac{f_j^{n+1}}{f_j^n} \\ &= 1 - i\alpha \sin(k\Delta x) - 4\beta \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right), \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$g \begin{cases} < 1 & (stable) \\ = 1 & (neutral) \\ > 1 & (unstable) \end{cases} \quad (3.26)$$

もし  $\beta = 0$  であれば、(すなわち、非粘性の極限では)  $|g| \leq 1$  となる安定性条件は以下の通りである。

$$\alpha = c \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \leq 1. \quad (3.27)$$

この安定性条件が CFL 条件と呼ばれている。CFL 条件は、情報がタイムステップ  $\Delta t$  中に格子間隔  $\Delta x$  以上伝搬出来ないことを意味し、時間的な数値解像度を制限している。すなわち、陽解法では CFL 条件を超えないように時間ステップを決めなければならない。移流方程式 (式 (3.18) で  $\beta = 0$ ) で時間発展に陽的オイラー法、移流項に 2 次の中心差分法を用いると、 $g > 1$  になる事が示される。このような場合には、計算が直ちに数値発散を起こすため、適切なシミュレーションが実行できない。

このような数値発散を避けるために、移流項を風上差分法を用いて表現する場合を考える。風上差分法では中心差分により、2 点離れた格子点  $j \pm 1$  で表していた移流項を、隣り合った格子点  $j, j-1$  あるいは  $j, j+1$  で表現する手法である。1 次精度の風上差分は以下で表される。

$$c \frac{\partial u}{\partial x} = c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} (c > 0), \quad (3.28)$$

$$c \frac{\partial u}{\partial x} = c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} (c < 0). \quad (3.29)$$

この 2 つの式をまとめて表現すると、

$$c \frac{\partial u}{\partial x} = c \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{|c|\Delta x}{2} \left( \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} \right) \quad (3.30)$$

となり、右辺第 2 項は係数  $|c|\Delta x/2$  を粘性として持つ 2 階微分 (粘性項) であり、人工粘性と呼ばれる。1 次精度風上差分では人工粘性が大きいため、流れの変化を鋭くとらえる事ができない。このため、1 次精度の風上差分はシミュレーションの初期段階でのみ使われ、詳細なシミュレーションには、より高次精度の風上差分が用いられる。高次精度風上差分法としては、Kawamura-Kuwahara (KK) scheme がよく知られている [50]。KK スキームは 3 次精度の風上差分法であり以下のように表される。

$$\begin{aligned} c \frac{\partial u}{\partial x} &\approx \begin{cases} c \frac{u_{j+2} - 2u_{j+1} + 9u_j - 10u_{j-1} + 2u_{j-2}}{6\Delta x} & (c > 0) \\ -c \frac{u_{j+2} - 2u_{j+1} + 9u_j - 10u_{j-1} + 2u_{j-2}}{6\Delta x} & (c < 0) \end{cases} \\ &= c \frac{-u_{j+2} + 8u_{j+1} - 8u_{j-1} + u_{j-2}}{12\Delta x} + 3|c| \frac{u_{j+2} - 4u_{j+1} + 6u_j - 4u_{j-1} + u_{j-2}}{12\Delta x}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

KK スキームは 4 次精度の人工粘性が含まれるため、数値的安定性と数値解像度の両者に優れている。しかしながら、KK スキームでは人工粘性の強さがコントロール出来ないため、線形成長率を評価する場合などでは不都合となる側面が存在する。このため、本研究では以下に示す超粘性を採用することで数値発散を抑制している。

(3.18) の右辺 ( $\beta \rightarrow 0$ ) に  $(-1)^{n-1} \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$  の項を移流拡散方程式に加える。これは超粘性と呼ばれる。ここで  $n$  は微分のランクを示している。4 階微分の形での超粘性を考えると ( $n = 4$ )、超

粘性の Fourier 係数は  $-k^4 u_k$  と表される。これは各時間ステップにおいて高波数の Fourier 成分をダンプさせるため、高波数モードの引き起こす数値振動を抑制することが可能である。

4 階微分及び 8 階微分の超粘性は、KK スキームに準拠する形で以下のように与えられる。

$$\mu \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) = \mu \frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{\Delta x^4}, \quad (3.32)$$

$$\mu \left( \frac{\partial^8 u}{\partial x^8} \right) = \mu \frac{u_{i+4} - 8u_{i+3} + 28u_{i+2} - 56u_{i+1} + 70u_i - 56u_{i-1} + 28u_{i-2} - 8u_{i-3} + u_{i-4}}{\Delta x^8}. \quad (3.33)$$

本研究では、KK スキームの他にこれら 4 階及び 8 階の超粘性の使用を検討した。しかしながら、8 階微分の形式での超粘性は時間ステップ  $\Delta t$  を著しく制限してしまう。そのため、本研究では 4 階微分の形式の超粘性を採用している。

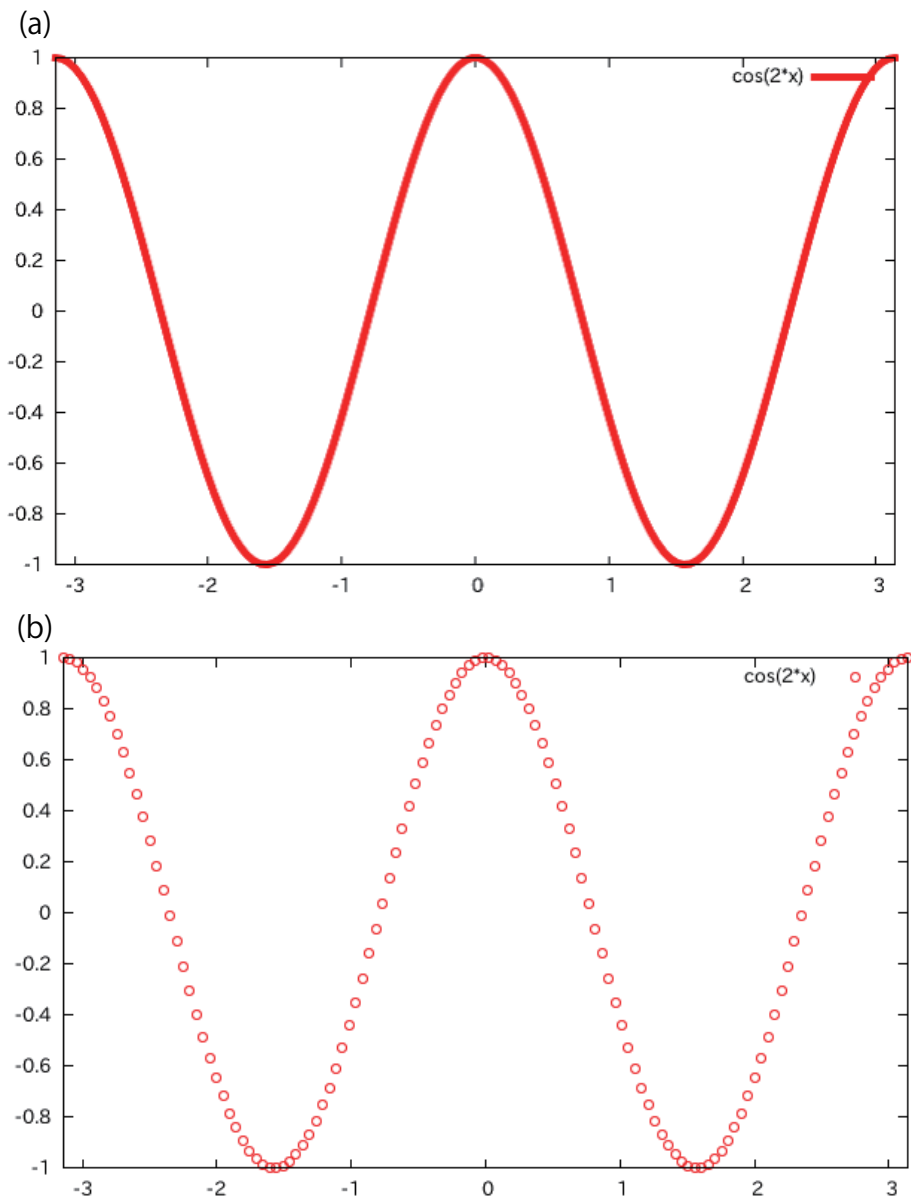


図 3.1 (a) 連続関数 (b) 離散関数



## 4 非線形シミュレーション 1：平衡の $\beta$ が一定で圧力勾配が緩やかな場合

第 1 章で述べたように、本論文の研究対象はの低  $\beta$  値の磁化プラズマ ( $\beta \leq 10\%$ ) における密度比が小さい場合の、比較的弱い RT 不安定性と、それに対する Hall 項及びジャイロ粘性の影響である。この磁化プラズマの運動を記述する方程式は第 2 章で、数値シミュレーション手法は第 3 章で示した。第 4 章及び第 5 章では、直交座標系  $(x, y, z)$  での RT 不安定性に対する Hall 項及びジャイロ粘性が線形及び非線形成長に及ぼす影響について述べる。第 4 章では圧力勾配が計算領域の広い領域に及ぶ平衡についてのシミュレーション及び解析結果について述べる。この章で示す結果は Goto et al[51] に掲載されたものである。4.1 節ではシミュレーションを行う初期平衡について説明する。4.2 節では線形段階、4.3 節では非線形段階での解析結果について、4.4 節では 4 章でのまとめを述べる。

### 4.1 初期平衡及び拡張 MHD 方程式

本研究では以下で表される、第 2 章で導出した Braginskii 型の拡張 MHD 方程式を採用する。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}), \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) = -\nabla \cdot \left[ \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \mathbf{I} \left( p + \frac{B^2}{2} \right) - \mathbf{B} \mathbf{B} + \delta \mathbf{\Pi}^{gv} \right] + \rho \mathbf{g}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} = -\nabla \cdot [(E_t + p) \mathbf{v} + \delta (\mathbf{v} \cdot \mathbf{\Pi}^{gv})] + \mathbf{v} \cdot \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times (-\mathbf{v} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{v}) + \nabla \times \left[ \frac{\epsilon}{\rho} (\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p_e) \right]. \quad (4.4)$$

ここで、 $\gamma$  は比熱比  $\gamma = 5/3$  である。以後、微視的效果を加えていない場合を MHD、Hall 項のみを加えた場合を Hall、ジャイロ粘性のみを加えた場合を Gyro、Hall 項及びジャイロ粘性を同時に加えた場合を Hall+Gyro と呼ぶこととする。2 次元シミュレーションを行うために、2 次元近似として  $z$  方向の速度及び微分がゼロの条件  $\partial/\partial z = 0$ ,  $\mathbf{v} = (u, v, 0)$  を式 (4-1)-(4-4) に適用し、その一方で磁場の第三成分は非ゼロとしている。

$$\mathbf{B} = (0, 0, B_z). \quad (4.5)$$

これは、ベータが有限の場合に  $z$  方向の磁場揺動が無視出来ないためである。ジャイロ粘性項は以下のように表現される。

$$\Pi_{xx}^{gv} = -\Pi_{yy}^{gv} = -\frac{p_i}{2B_z} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (4.6)$$

$$\Pi_{xy}^{gv} = \Pi_{yx}^{gv} = \frac{p_i}{2B_z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (4.7)$$

本研究では、Hall パラメータ及びジャイロ粘性係数をそれぞれ独立に扱い、Hall 項及びジャイロ粘性の有無の RT 不安定性の成長に対する影響を解明する。計算領域は  $x$  方向に  $-\pi \leq x \leq \pi$ 、 $y$  方向に  $-3\pi \leq y \leq 3\pi$  とする。境界条件としては  $x$  境界 ( $x = \pm\pi$ ) では周期境界、 $y$  境界 ( $y = \pm 3\pi$ ) では微分ゼロ ( $\partial/\partial y \rightarrow 0$ ) を課す。初期密度プロファイル  $\rho_0(y)$  は、上下境界から界面 ( $y = \pm d$ ) までは一様であり、界面間 ( $-d < y < +d$ ) では線形関数でつながれている。

$$\rho_0(y) = \begin{cases} \rho_2 & (y \geq d), \\ \rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{2d} (y + d) & (|y| < d), \\ \rho_1 & (y \leq -d). \end{cases} \quad (4.8)$$

初期圧力及び背景磁場プロファイルは平衡条件の式

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( p_0(y) + \frac{B_{z0}(y)^2}{2} \right) = -\rho_0 \mathbf{g}, \quad (4.9)$$

を満たすように決定される。これらは、式 (4.11) を積分することで以下のように与えられる。

$$p_0(y) + \frac{B_{z0}(y)^2}{2} = \begin{cases} -\rho_2 g y + \frac{1}{4} (\rho_2 - \rho_1) g d + \frac{B_Z^2}{2} & (y \geq d), \\ -\rho_1 g y - \frac{\rho_2 - \rho_1}{2d} g \left( \frac{y^2}{2} + d y \right) + \frac{B_Z^2}{2} & (|y| < d), \\ -\rho_1 g y + \frac{1}{4} (\rho_2 - \rho_1) g d + \frac{B_Z^2}{2} & (y \leq -d). \end{cases} \quad (4.10)$$

ここで、積分定数は以下の条件を満たすように決定される。

$$p_0(0) + \frac{B_{z0}^2(0)}{2} = \frac{B_Z^2}{2}. \quad (4.11)$$

最終的な初期圧力及び背景磁場プロファイルは、 $\beta \equiv 2p_0(y)/B_{z0}^2(y) = 10\%$  が計算領域内で一様となるように与える。初期平衡プロファイルの  $y$  方向に対する依存性を図 4.1 に示す。不安定性の成長を調べるために、数値シミュレーションでは速度場に  $\Sigma_i \cos(ix + 2\pi\phi_{ran,i})$  で与えられる揺動を加える。ここで  $\phi_{ran,i}$  は  $-1 \sim +1$  となる乱数であり、不安定モードの共鳴を防ぐために加えている。本シミュレーションで計算を行ったパラメータを表 1 に示す。初期平衡プロファイルは図 4.1 に示したように、密度比  $D$ 、界面のジャンプ幅  $\Lambda = 2d$ 、 $\beta$  値により特徴付けられている。RT 不安定性を調べるために、式 (4.1) – (4.4) は 4 次精度の中心差分法、4 次精度の Runge-Kutta-Gill 法を用いて数値シミュレーションを行っている。計算コードには物理的な粘性や抵抗を加えていないため、数値発散が起り易い。そのため、数値ノイズを防ぐために 4 次の超粘性が、粘性係数をコントロールパラメータとして扱う形で加えられている。いくつかの格子点数や超粘性係数を変更したテストを行い、 $k=40$  までは線形成長率に対して超粘性が影響していないことを確認した。従って、以降の線形・非線形段階での解析には超粘性は殆ど影響を及ぼしていない。また、第 4 章で実施したシミュレーションにおいて共通して用いられているパラメータは、 $p_i/p_e = 1.0$ 、 $g = 0.1$ 、 $\beta = 10.0\%$ 、 $B_Z = 10.0$ 、 $\Lambda = 1.0$  である。

表 1 平衡 1 のシミュレーションで用いたパラメータの組み合わせ

Run number	$N_x$	$N_y$	$\beta$	$\delta$	$\epsilon$	$D = \rho_2/\rho_1$
1	1024	4096	10.0%	0.00	0.00	2.0
2	1024	4096	10.0%	0.07	0.00	2.0
3	1024	4096	10.0%	0.10	0.00	2.0
4	1024	4096	10.0%	0.00	0.10	2.0
5	1024	4096	10.0%	0.00	0.30	2.0
6	1024	4096	10.0%	0.07	0.10	2.0
7	1024	4096	10.0%	0.10	0.10	2.0
8	1024	4096	10.0%	0.07	0.30	2.0
9	1024	4096	10.0%	0.00	0.00	3.0
10	1024	4096	10.0%	0.10	0.00	3.0
11	1024	4096	10.0%	0.00	0.10	3.0
12	1024	4096	10.0%	0.10	0.10	3.0

## 4.2 線形段階の解析：線形成長率の波数依存性

線形段階における不安定モードの時間成長について、Fourier パワースペクトルにより解析を行った。ある変数  $A(x, y, t)$  の  $x$  方向への Fourier 変換したときの Fourier 係数を、 $\tilde{A}(k_x, y, t)$  で表す。Fourier エネルギーを  $y$  方向に積分したパワースペクトルは  $P_A(k_x, t) = \int |\tilde{A}(k_x, y, t)|^2 dy$  で与えられる。運動エネルギースペクトル  $1/2[P_u(k_x, t) + P_v(k_x, t)]$  の時間発展を図 4.2 に示す。ここでは  $k = 20$  までを示している。ここで図 4.2 は (a)MHD( $\delta = \epsilon = 0$ ), (b) Hall( $\delta = 0, \epsilon = 0.1$ ), (c) Gyro ( $\delta = 0.1, \epsilon = 0$ ), (d) Hall+Gyro ( $\delta = \epsilon = 0.1$ ) の 4 つの場合のエネルギースペクトルの時間発展を表している。詳細についてはのちに触れるが、図 4.2(a)-(c) の各モードの線形成長率は互いに同程度であり、あまり波数には依存していない。一方、図 4.2 (d) では線形成長率は明らかに波数に依存した変化をしている。また、図 4.2 (a)-(c) では、殆どの Fourier モードが  $t = 40$  で二次的な非線形成長を始め、 $t = 60$  で飽和している。しかしながら、図 4.2 (d) では Fourier モードの線形成長が  $t = 60$  まで続き、 $t = 70$  で飽和している。従って Hall+Gyro の場合には、高波数モードの線形成長率が減少することで、非線形相互作用を通じて低波数モードを成長させるのに十分な振幅を持った Fourier モードの数が減少したために  $t > 40$  においても低波数モードが線形成長し続けていると考えられる。

線形成長率は、図 4.2 において各波数 Fourier モードが指数関数的に成長する領域の勾配で評価し、その波数依存性を求めている。密度比  $\rho_2/\rho_1 = 2, 3$  での線形成長率の波数依存性を図 4-3 に示す。Hall の場合には MHD の場合に比べどの波数領域においても若干成長率が増加する結果が得られた。一方で Gyro の場合では高波数モードの成長率が減少する結果が得られた。高波数モード

の成長率は減少するものの、成長率がゼロとなる完全な安定化は起こらないプロファイルとなっていることが分かる。しかしながら、Hall+Gyro の場合には高波数モードの成長率が大きく減少する結果が得られた。Hall パラメータ及びジャイロ粘性係数の組み合わせを変化させた場合においても、Hall+Gyro 場合においてのみ高波数モードの成長率が大きく減少する結果となった。(但し、成長率は完全にはゼロにならず、安定化効果は不完全である。) 従って高波数モードの成長率が大きく減少するためには、Hall 項及びジャイロ粘性が同時に存在することが本質的に重要であることを示唆している。

### 4.3 非線形段階の解析

不安定性の非線形段階での振る舞いを評価する上でも、エネルギースペクトルの解析は有効である。図 4.4 は  $t = 70$  でのエネルギースペクトルの波数依存性を表している。見やすくするために  $k_x \leq 100$  までのエネルギースペクトルを表している。超粘性は高波数モードの成長による数値発散を防ぐために導入されているが、4 階微分形式の超粘性は低波数モードの線形成長にも影響が現れている。より現実のプラズマらしく論ずるなら、項波数部の電子スケールにおいて散逸的效果が生じると期待され、ここでは便宜的に超粘性で電子効果の一部を代替しているという側面がある。非線形成長は多数のモードが関連した非線形相互作用が本質的であり、初期値問題としての厳密さは超粘性の導入で損なわれるものの、定性的な議論は可能である。図 4.4 より Hall+Gyro のエネルギースペクトルは MHD、Hall に比べどの波数領域においても低くなっている事が分かる。加えて、Hall+Gyro のエネルギースペクトルは Gyro と比較して  $k_x < 30$  では低く、 $k_x > 30$  では高くなっている。こうしたスペクトル間の差異は、Hall 係数の違いが寄与しているものと考えられる (Gyro は  $\epsilon = 0$ 、Hall+Gyro は  $\epsilon = 0.1$ )。Hall+Gyro では、Hall 項が高波数モードのエネルギーを増加させる一方で、低波数モードのエネルギーは減少させている事を示唆している。

非線形段階における不安定性の初期平衡への影響の大きさを特徴付ける指標のひとつとして、非線形混合幅を考える。各  $x$  座標での局所的混合幅は重い流体の密度  $\rho_2$  から 1% 変化した最大値と軽い流体の密度から 1% 変化した最小値との差で定義する。局所混合幅を  $x$  方向で平均を取ったものを時刻  $t$  での混合幅として解析を行った。

$$d_{mix} \equiv \frac{1}{2\pi} \int \{ \max [y(0.99\rho_2)] - \min [y(1.01\rho_1)] \} dx. \quad (4.12)$$

混合幅  $d_{mix}$  は、線形段階では流体が殆ど混合しないため殆ど増加せず、流体の混合が起こる非線形段階では大きく増加すると考えられる。そのため、混合幅は不安定性の非線形成長が起こっていることの指標として用いることが可能である。このような解析は RT 乱流の研究でしばしば用いられている [5]。図 4.4 に  $D=2.0$  での混合幅の時間発展を示す。Run 1, 3 の混合幅は他のものに比べ早く成長が起こる一方で、run 4, 7 は  $t = 70$  でそれらの成長に追いついている。従って混合幅の振る舞いは、線形成長率が減少しても必ずしもその後の非線形成長も抑えられるとは限らない可能性を示唆している。時刻  $t = 70$  での密度場のプロットを図 4.6 に示す。図 4.6(a) は run 1(MHD) の場合の結果である。様々な RT モードが同時に成長しているため、混合領域に多数の

マッシュルーム構造が形成されている。図 4.6(b) は Hall+Gyro の場合の結果である。大きな違いとしては、(b) では微細構造及び急峻な密度勾配が形成されている。(a) では RT 不安定性によるマッシュルーム構造の形成の結果として、 $\rho_2$  から  $\rho_1$  まで比較的滑らかに変化していることが分かる。(b) で見られるような急峻な密度勾配及び微細構造の形成は Hall+Gyro の場合でのみ現れる結果となった。従って、このような構造は Hall 項とジャイロ粘性が非線形過程において組み合わせることにより形成されたものと考えられる。なお、図 4.3 に見た通り、Hall+Gyro でのシミュレーションの線形段階では、 $k=3$  の線形モードの成長率が最も高い。これに反して、図 4.6(b) の密度場のプロットでは、微細構造が多く目につき、 $k=3$  の線形モードによる変形はそれほど目立たない。次の章で高波数モードが完全に安定化される場合についてのシミュレーション結果を報告するが、この場合には、密度場の変形は最も成長率が高いモードの構造に支配されることが分かる。この章の結果と次の章の結果の違いはいくつかあり、密度場の変形の違いの原因を明確にする事は困難であるが、一つの大きな違いは高波数モードの安定化の完全・不完全という点である。その意味で、線形モードの安定化の完全さ、不完全さは、非線形段階においても、(低波数よりも成長率が低い) 高波数モードが重要な役割を担っていることを示唆しているのかもしれない。

#### 4.4 第4章まとめ

第4章では、圧力勾配が計算領域全体に及ぶ平衡について非線形拡張MHDシミュレーションを実施し、Hall項及びジャイロ粘性の線形及び非線形成長に対する影響を解析した。線形段階ではHall及びFLR効果を同時に加えた場合に特に高波数モードの成長率が大きく減少することが明らかとなった。Hall項及びジャイロ粘性をそれぞれ単体で加えた場合には、一流体MHDモデルを用いた場合の結果と比べて大きな差異は生じなかった。従って、Hall項及びジャイロ粘性を同時に加えることが高波数モードの成長率を大きく減少させるためには重要であると考えられる。また、Hall+Gyroの場合でも高波数モードの成長率は完全には安定化されないことが明らかになった。これは、Zhu et al[31]が報告した有限な $\beta$ でのジャイロ粘性による高波数モードの安定化効果の弱体化が、このシミュレーションでも起きているものと考えられる。非線形段階では、まずエネルギースペクトルの波数依存性について解析を行った。この解析では、Hall項が高波数モードのエネルギーを増加させる一方で、低波数モードのエネルギーを減少させることを示唆する結果が得られた。非線形混合幅の時間成長に対する解析では、微視的效果を加えることで非線形成長が始まる時刻が遅延はするが、その後急激に混合幅が増加し一流体モデルの結果に追いつくことが明らかとなった。従って、線形成長率が減少しても必ずしもその後の非線形成長も抑制されるとは限らないことを示唆している。密度プロファイルの解析では、Hall+Gyroの場合のみで界面での急峻な密度勾配及び微細構造が形成されることが明らかとなった。線形・非線形段階のどちらにおいても、我々の数値シミュレーションはHall項及びジャイロ粘性の両方が同時に用いられることが重要であることを示している。この点については、次章で別の平衡について調べた後で再度検討する。

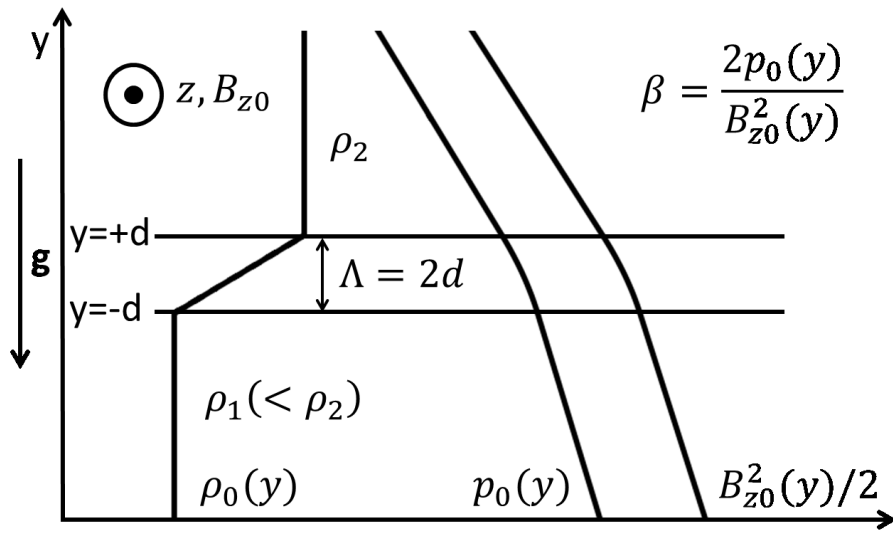
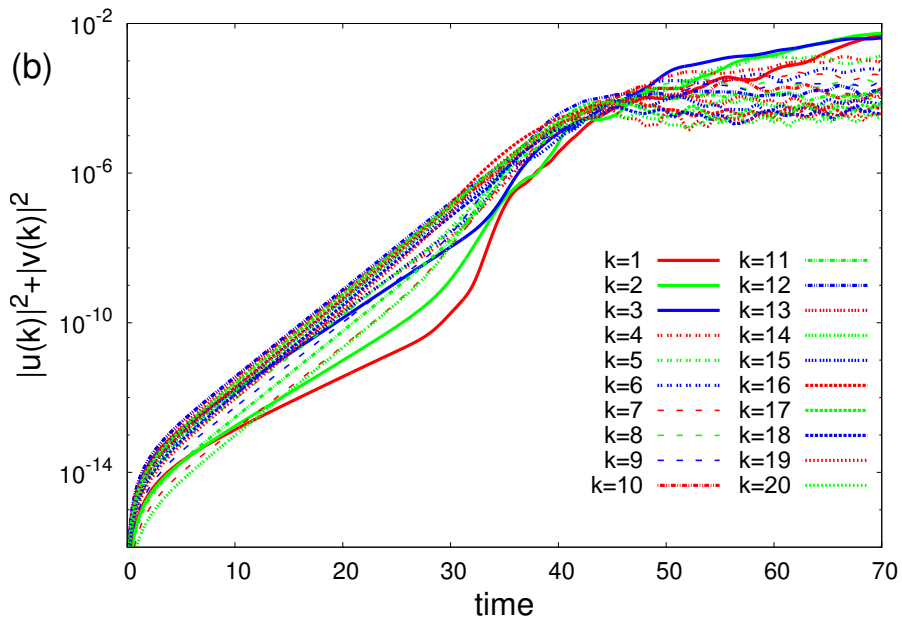
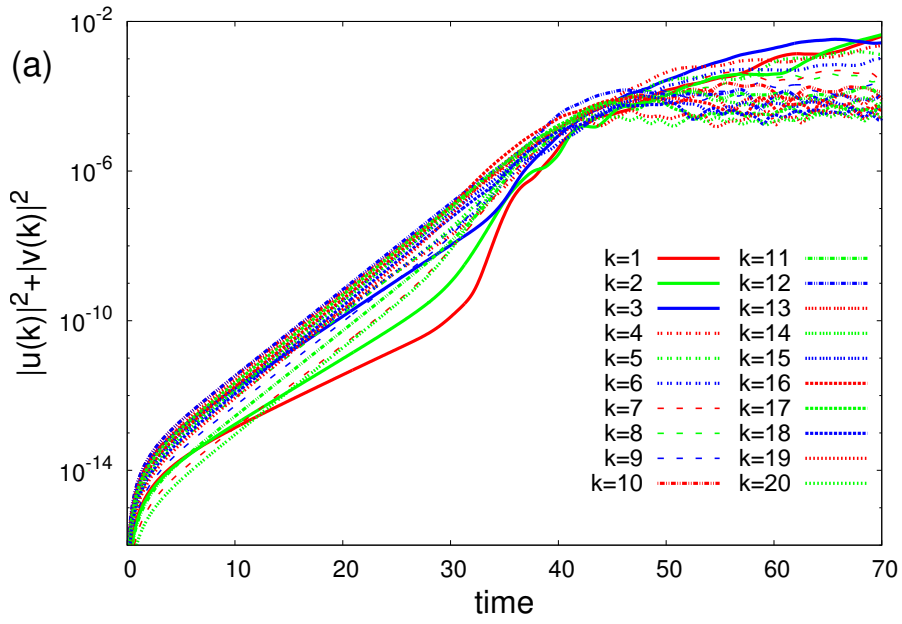


図 4.1 RT 不安定性における初期平衡プロファイル





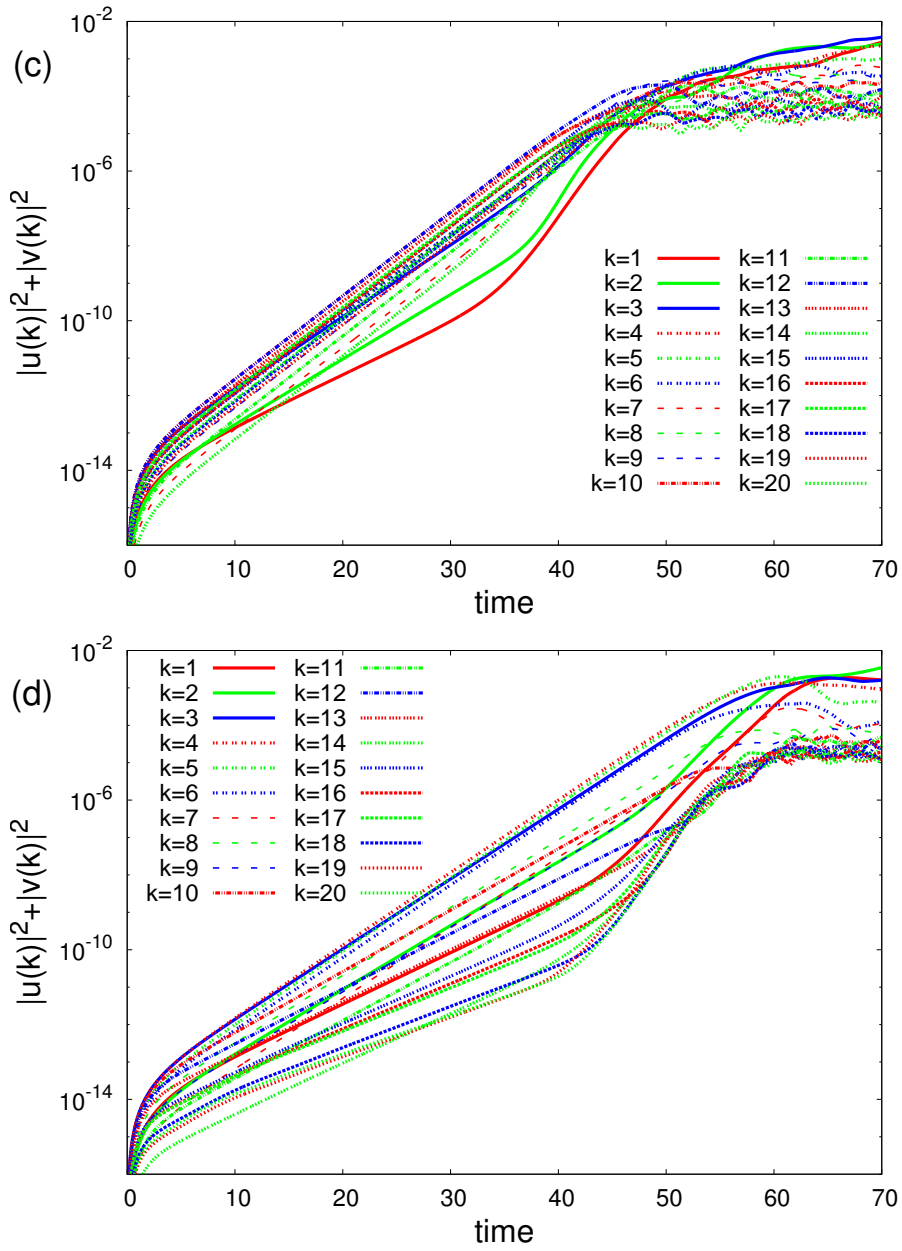


図 4.2 運動エネルギースペクトルの時間発展 (a) MHD (b) Hall (c) Gyro (d) Hall+Gyro

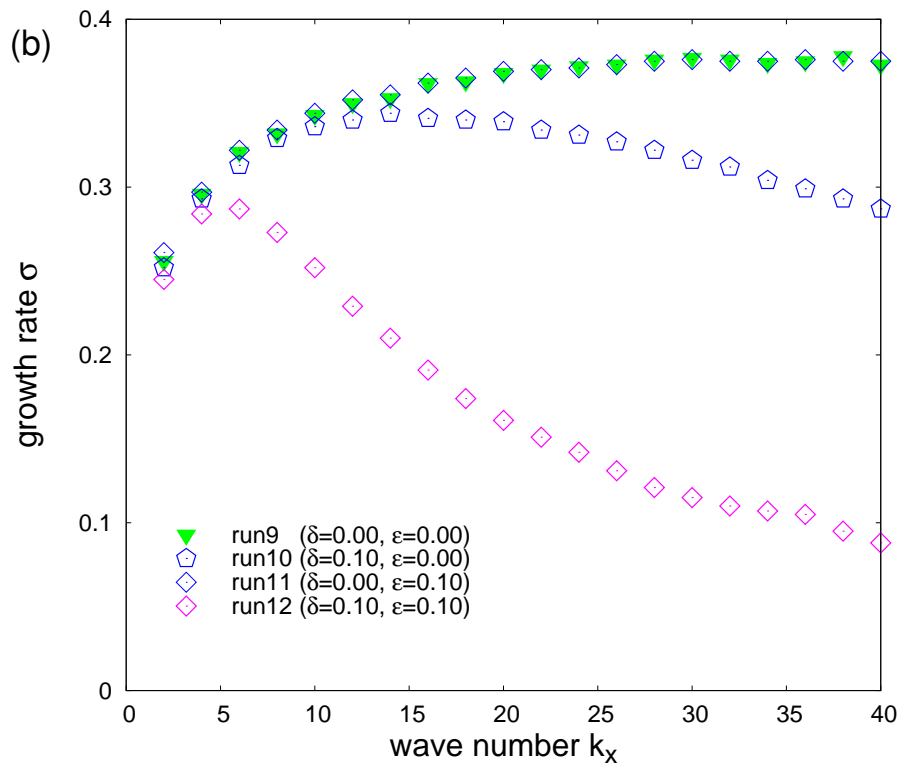
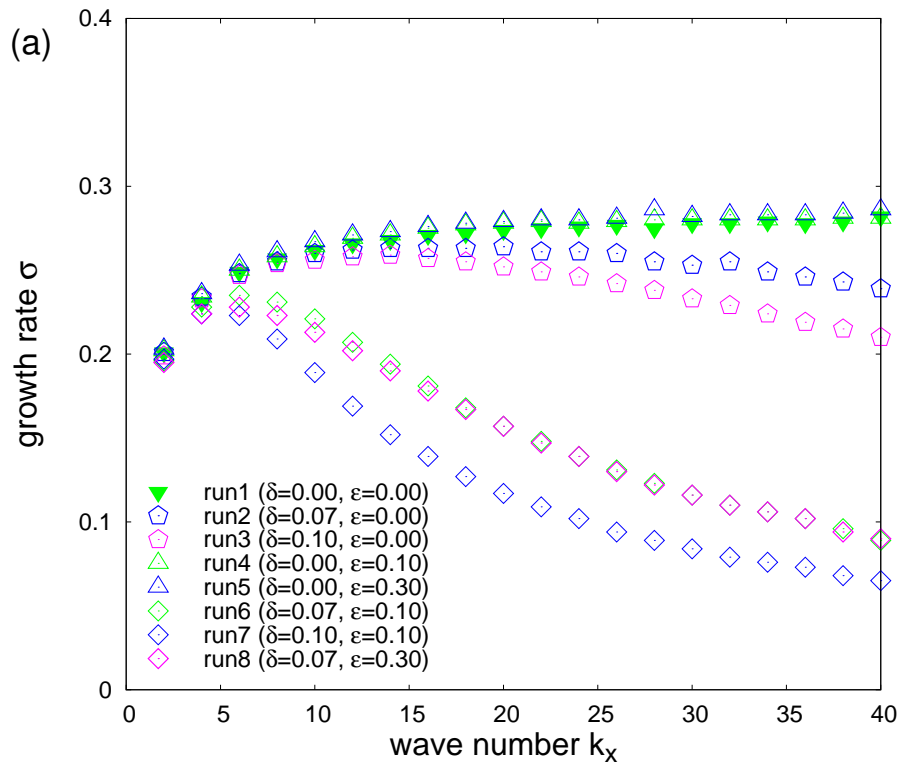


図 4.3 線形成長率の波数依存性 (a)  $D=2.0$  (b)  $D=3.0$

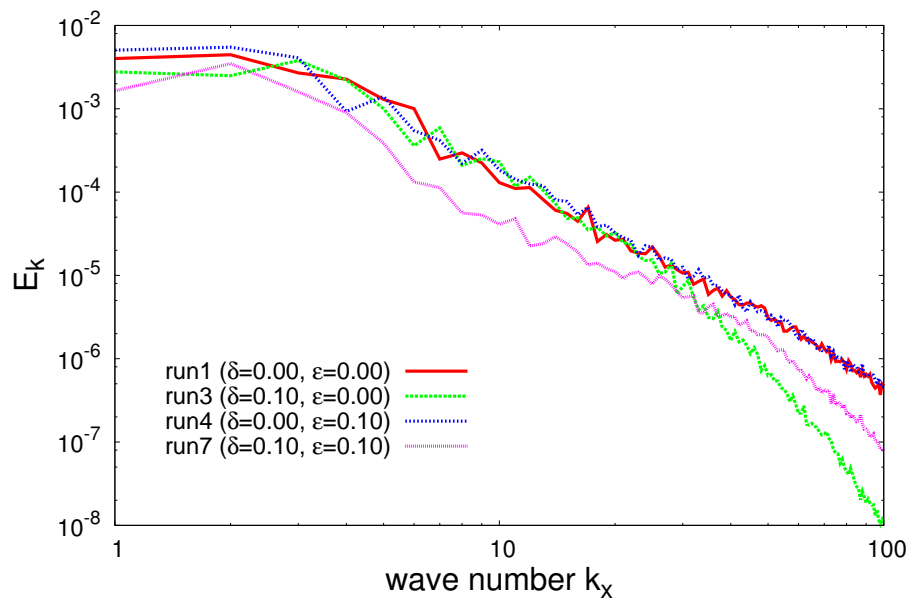


図 4.4  $t = 70$  でのエネルギースペクトル

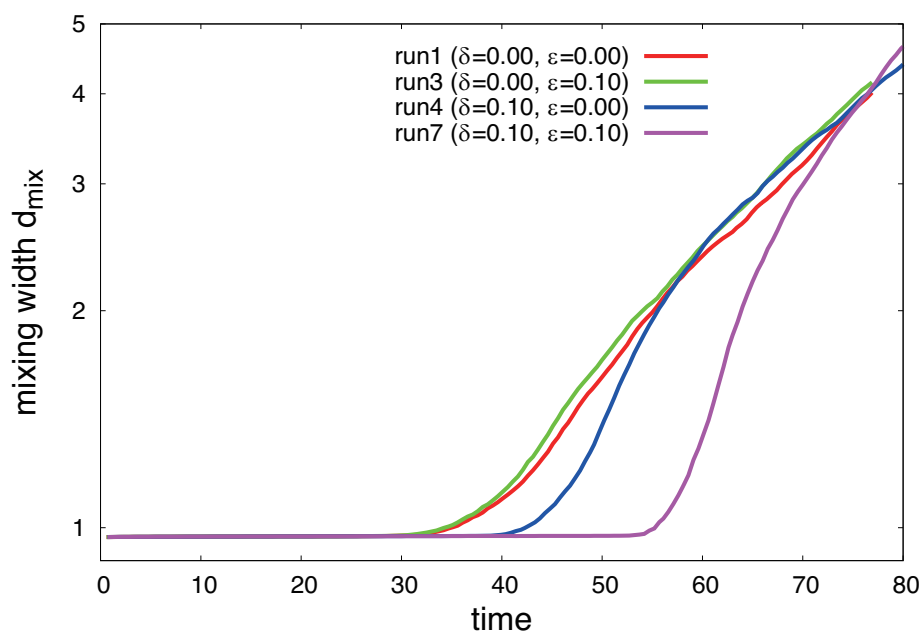


図 4.5 混合幅の時間発展

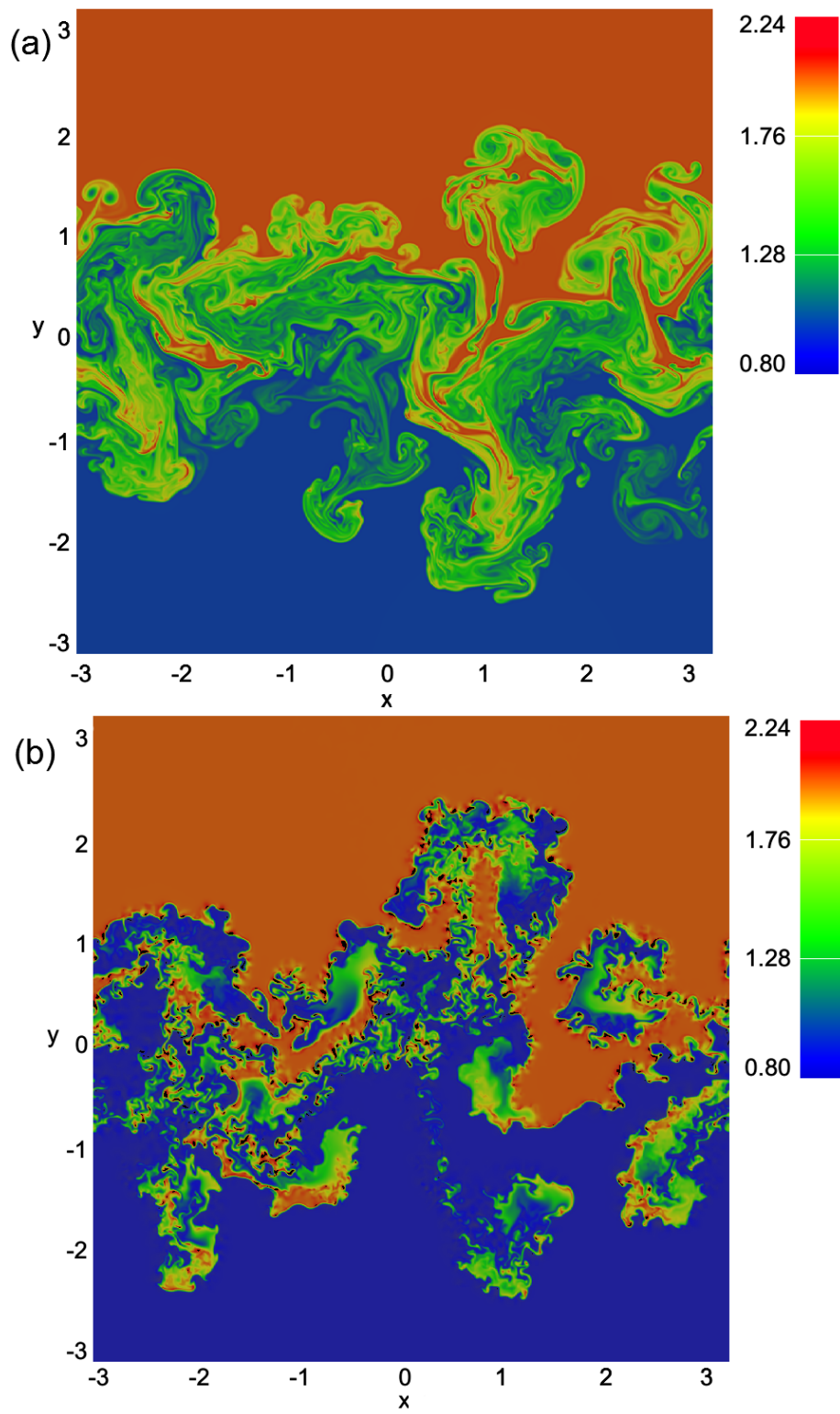


図 4.6  $t = 70$  での密度場のプロット (a) MHD (b) Hall+Gyro



## 5 非線形シミュレーション 2：平衡に局在化した圧力勾配が存在する場合

拡張 MHD モデルを用いた RT 不安定性では、反磁性流によるドリフトが発生することが予想される。ドリフト流は磁化プラズマ安定性の様々な問題に関連しており（この点については文献 [42, 53, 54] と、そこで引用されている論文を参照）、RT 不安定性の成長に対して反磁性流がどのように影響するのかについて詳細に解析を行うことは、RT 不安定性の基礎的な特性を解明する観点からも意義があるものと考えられる。第 4 章で調べた平衡（平衡 1）においては、Hall+Gyro の場合に、高波数モードの成長率が MHD の場合に比べ大きく減少する結果が得られた。しかしながら、高波数モードの成長率が完全にゼロになる完全な安定化は生じなかった。また、平衡 1 について反磁性流による実周波数について解析を行ったところ、実周波数は不安定性の成長率に比べ非常に小さく、反磁性流の影響がほとんど現れない平衡であった（図は省略した）。不安定性の成長率と同程度の実周波数を発生させるには、密度勾配を小さくすることで RT 不安定性の成長率を小さくし、圧力勾配を大きくすることで反磁性ドリフトを大きくする必要がある。しかしながら、平衡 1 の様に  $\beta$  を一様として密度プロファイルから自己無撞着に求まる圧力プロファイルでは圧力勾配を十分大きくとることができない。従って、反磁性流の影響を調べるためには平衡 1 とは異なり、圧力プロファイルが密度プロファイルとは独立に与える平衡を考慮しなければならない。この第 5 章では、密度及び圧力プロファイルを独立に与えることで反磁性流が不安定モードの成長率に比べ強くなる平衡について拡張 MHD シミュレーションを実施した。5.1 節ではシミュレーションで用いる初期平衡プロファイルについて述べ、5.2 節では線形解析コードによるパラメータ依存性の調査及び線形解析結果のシミュレーション結果との比較を行った。5.3 節では非線形段階での振る舞いについて解析を行っている。

### 5.1 初期平衡プロファイル

密度及び圧力の初期プロファイルを、以下で与えられる  $\tanh$  型関数で与える。

$$\rho_0(y) = \frac{\rho_2 + \rho_1}{2} + \frac{\rho_2 - \rho_1}{2} \tanh\left(\frac{2y}{y_2 - y_1}\right), \quad (5.1)$$

$$p_0(y) = \beta \left[ \frac{p_2 + p_1}{2} \tanh\left(\frac{2y}{y_2 - y_1}\right) \right]. \quad (5.2)$$

初期平衡の式を積分することで、 $p_0(y)$  と  $B_0(y)$  は以下の関係にあることが分かる。

$$\frac{d}{dy} \left( p_0(y) + \frac{B_0(y)^2}{2} \right) = \rho g, \quad (5.3)$$

$$p_0(y) + \frac{B_0^2(y)}{2} = P_0. \quad (5.4)$$

ここで

$$P_0 = - \int \rho_0 g dy = \frac{B_Z^2}{2} - \frac{\rho_2 + \rho_1}{2} gy - \frac{(\rho_2 - \rho_1)(y_2 - y_1)g}{4} \log \left[ \cosh \left( \frac{2y}{y_2 - y_1} \right) \right], \quad (5.5)$$

である。又、式 (5.4) より  $B_0(y)$  は以下の式で与えられる。

$$B_0(y) = \sqrt{2(P_0 - p_0)}. \quad (5.6)$$

平衡 2 における初期平衡プロファイルの模式図を図 5.1 に示す。平衡 1 との大きな違いは圧力プロファイルの分布が平衡 1 に比べ界面近傍で急峻になっている事である (図 4.1 参照)。これにより界面近傍で反磁性流の発生が期待されるプロファイルとなっている。

## 5.2 線形安定性解析

平衡 2 においては、シミュレーションパラメータの検討とシミュレーション結果の検証を行うために、短波長近似 (Wentzel-Kramers-Brillouin, WKB 近似) を用いた線形解析を行う。 $\beta$  値、密度比等のいくつかのパラメータに対する線形成長率及び実周波数の波数依存性についてパラメータランを実施した。線形解析の概略については次節で示すが、ここでは短波長近似による線形解析の利点について整理する。第一点はシミュレーションの実行時間に比べ、遙かに短時間で数値解を得る事が出来る点である。線形解析を行う事で、シミュレーションを実行するのに最適なパラメータの推定を容易に行う事が可能である。第二点は様々な平衡プロファイルについて広範なパラメータサーベイを行う事が可能な点である。線形解析コードでは、シミュレーションのように平衡のパラメータに応じてメッシュサイズや超粘性を調整する必要がない。従って、様々な平衡について微視的效果の線形成長の影響についての基礎的な知見を得るのに大いに役立つものと考えられる。第三点は高波数モードの完全安定化の有無を調査出来る点である。数値シミュレーションでは成長率が低くなっている高波数モードの成長に対して超粘性が影響をする可能性が考えられる。また、成長率が非常に低い場合に数値ノイズ等との分離が困難である事からも、数値シミュレーションでは、完全な安定化が存在するかの推定は困難である。(それ以前に、数値シミュレーションは、与えられた初期値から始まる一つの事例でしかないという問題もある。) このように、成長率が低い場合について数値シミュレーションで調べる場合には、十分な注意が必要となる。線形解析ではこのような要因が入らないため、数値シミュレーション結果と線形解析結果とを比較する事で微視的效果の影響について効率的な検討が可能になる。

### 5.2.1 線形解析概略

線形解析コードでは拡張 MHD 方程式に以下の形で揺動を与え、方程式の線形化を行っている。

$$f_1 = f_1(y) \exp(ikx - i\omega t). \quad (5.7)$$

(4.1)-(4.4) の主な変数について (5.5) の形の摂動を与えて方程式を線形化し、いくつかの変数を消去すると以下の形式の固有モード方程式が得られる。(この様な手続きは Drazin and Reid[52] や、



神部・ドレイジン [4] 等に詳しい。) )

$$A(y; \omega, k)u_{y1}'''' + B(y; \omega, k)u_{y1}''' + C(y; \omega, k)u_{y1}'' + D(y; \omega, k)u_{y1}' + E(y; \omega, k)u_{y1} = 0. \quad (5.8)$$

ここで上付きの' は微分を表し、A,B,C,D,E はそれぞれ以下で与えられる。

$$A = -A_2D_1, \quad (5.9)$$

$$B = D_1 \left( \frac{2F_2' A_2}{F_2} - 2A_2' - B_2 \right) - A_2E_1, \quad (5.10)$$

$$C = A_1F_2 + D_1 \left[ -\frac{F_2'}{F_2} \left( \frac{F_2' A_2}{F_2} - A_2' - B_2 \right) + \left( \frac{F_2' A_2}{F_2} - A_2' - B_2 \right)' + \frac{F_2' B_2}{F_2} - B_2' - C_2 \right] \\ + E_1 \left( \frac{F_2' A_2}{F_2} - A_2' - B_2 \right) - F_1A_2, \quad (5.11)$$

$$D = B_1F_2 + D_1 \left[ -\frac{F_2'}{F_2} \left( \frac{F_2' B_2}{F_2} - B_2' - C_2 \right) + \left( \frac{F_2' B_2}{F_2} - B_2' - C_2 \right)' + \frac{F_2' C_2}{F_2} - C_2' \right] \\ + E_1 \left( \frac{F_2' B_2}{F_2} - B_2' - C_2 \right) - F_1C_2, \quad (5.12)$$

$$E = C_1F_2 + D_1 \left[ -\frac{F_2'}{F_2} \left( \frac{F_2' C_2}{F_2} - C_2' \right) + \left( \frac{F_2' C_2}{F_2} - C_2' \right)' \right] + E_1 \left( \frac{F_2' C_2}{F_2} - C_2' \right) - F_1C_2. \quad (5.13)$$

それぞれの係数については付録 A にまとめられている。固有モード方程式は 4 階常微分方程式の形で書かれ、この式から各物理量の固有関数を求める事が可能である。ここでは、RT 不安定性の短波長モードでは固有関数が  $y=0$  付近で鋭く局在化する性質を利用し、WKB 近似を用いて得られる代数的な分散関係式を解くことで、短波長での微視的効果を効率的に解析する。WKB 近似により  $k \gg d/dy$  を用いると、(5.8) 式の最終項のみが支配的となる事が分かる。この近似のもとに、分散関係式

$$E(y = 0; \omega, k) = 0, \quad (5.14)$$

が得られる。線形解析コードでは分散関係式 (5.14) を、固有関数が  $y=0$  でピークすることを仮定して、ニュートン法を用いて数値的に解いている。WKB 近似を用いているために低波数モードについてはシミュレーション結果とのずれが大きくなることには注意する必要がある。非線形シミュレーションの超粘性は十分に粘性係数を小さく取ると、低波数モードの成長には殆ど影響しない。従って、低波数モードの振る舞いについては数値シミュレーションの方が妥当な結果を得られるものと考えられる。WKB 近似は係数 A,B,C,D を無視する荒い近似であるため、シミュレーション結果との定量的な比較を行う事は困難である。しかしながら、線形成長率及び実周波数の波数依存性等についての定性的な議論は行えるものと考えられる。

### 5.2.2 線形解析

$\beta$  値等の様々なパラメータ依存性については本節後半で触れるが、ここでは典型的なパラメータとして密度比・圧力比・ジャンプ幅・ $\beta$  値を、 $\rho_2/\rho_1 = 1.1, p_2/p_1 = 2.5, \Lambda = 2d = y_2 - y_1 = 0.5, \beta = 0.01$  とした場合の線形解析結果を図 5.2 に示す。

MHD の場合では、高波数モードほどその成長率は高くなるはずであるが、線形解析では低波数から高波数へとほぼ一定値に収束している。これは、WKB 近似が低波数モードの振る舞いを上手くとらえられていないためであると考えられる。図 5.2 より、線形成長率は Hall+Gyro の場合には  $k \approx 25$  程度で成長率がゼロとなり、完全安定化していることが分かる。図 5.2 では示していないが、Gyro の場合においても  $k \approx 55$  程度で完全安定化している。完全安定化する臨界波数がより低波数へ遷移しているため、Hall+Gyro の場合がこの平衡においても本質的に重要となることを示している。また、図 5.2 より、この平衡が成長率と同程度の大きさを持つ実周波数が発生する性質を有することが分かる。Hall では、高波数モードの実周波数は低波数モード ( $k \approx 10$ ) の実周波数に比べ小さくなっている。一方で Gyro 及び Hall+Gyro では、高波数モードほど実周波数が大きくなっている。また、Hall+Gyro では実周波数の波数依存性は成長率が完全安定化する臨界波数の前後で振る舞いに変化している。図 5.2 では示していないが、Gyro においても臨界波数の前後で振る舞いに変化している。この理由は、実数解と複素数解の境界で分岐が起きているものと考えられる。

$\beta$  値を  $\beta = 0.01, 0.03, 0.04$  と変化させた場合の、Hall+Gyro の場合での線形解析結果を図 5.3 に示す。 $\beta$  値を増加させることで各波数での成長率は減少し、完全安定化する臨界波数がより低波数側へシフトする。一方で実周波数は  $\beta$  値を増加させるにつれて大きくなる。従って、この平衡では  $\beta$  値を増加させることで実周波数の影響が現れやすく、より低波数モードが支配的なモード構造が形成される可能性を示唆している。

密度比を  $\rho_2/\rho_1 = 1.02, 1.05, 1.10, 1.5, 2.0$  と増加させた場合の、Hall+Gyro の場合の線形解析結果を図 5.4 に示す。理想 MHD の RT 不安定性では密度比が高くなるほど不安定性が急激に成長するため、線形成長率も密度比が大きくなれば増加することが予想される。線形解析の結果も、この点については理想 MHD の RT 不安定性と同様の傾向を示す結果が得られた。しかしながら、密度比が大きくなった場合には高波数モードの安定化が弱まる。図 5.4 では示していないが、密度比を 1.5, 2.0 とした場合でも完全安定化し、その臨界波数はそれぞれ  $k \approx 55, 80$  である。また、密度比が高くなると相対的に実周波数は低下している。従って、密度比が高くなると成長率に比べ実周波数が小さくなるために、反磁性ドリフトの影響が現れにくくなるものと考えられる。

圧力比を  $p_2/p_1 = 1.5, 2.0, 2.5$  と増加させた場合の、Hall+Gyro の場合の線形解析結果を図 5.5 に示す。圧力比を高くするほど界面近傍での圧力勾配は大きくなることから、これと共により実周波数が大きくなるものと考えられる。実際に線形解析においても、圧力比が大きくなるほど実周波数が大きくなる結果が得られた。また、高波数モードが完全安定化する臨界波数は圧力比が高いほどより低波数となっているため、圧力勾配が強くなるほど安定化効果が強くなる結果となった。

密度及び圧力が  $\rho_1$  から  $\rho_2$ 、 $p_1$  から  $p_2$  へと変化する界面のジャンプ幅  $d$  を 0.5 から 0.125 まで

減少させたときの成長率及び実周波数の波数依存性を、Hall+Gyro の場合について図 5.6 に示す。この図を見ると、ジャンプ幅を広くすると安定化効果が強まり、逆にジャンプ幅を狭くすると安定化効果が弱まり、成長率の波数依存性に変曲点が発生することが分かる ( $d = 0.125$  の成長率における  $k = 15$  付近を参照)。密度比及び圧力比のジャンプ幅を同時に変えたために、密度勾配を大きくしたことによる安定化効果の弱体化と、圧力勾配を大きくしたことによる成長率の減少が起るためにこうした変曲点が発生するものと考えられる。また、実周波数はジャンプ幅を小さくするほど大きくなることが明らかとなった。

以上の線形解析結果をまとめると、この、反磁性ドリフトの影響が現れやすくなる平衡プロファイルでは、密度比を下げることで不安定モードの成長率が小さく、圧力比を大きくすることで高波数モードの安定化が強くなる平衡である必要があることが分かった。

線形解析とシミュレーションの比較の観点から、本節の最初で示した典型的な実周波数が現れやすいパラメータ  $\rho_2/\rho_1 = 1.1$ ,  $p_2/p_1 = 2.5$ ,  $\Lambda = 2d = y_2 - y_1 = 0.5$ ,  $\beta = 0.01$  での数値シミュレーション及び数値解析結果の比較を図 5.7, 5.8 に示す。シミュレーション結果では、高波数モードの成長率が微視的效果を加えた場合 (Hall, Gyro, Hall+Gyro) に減少していること、Hall の場合には高波数モードの成長率が一定値で有限の値として残っていることなどから、成長率、実周波数共に線形解析とも定性的に対応する結果が得られたものと考えられる。また、線形解析では WKB 近似を用いているために低波数の挙動が明らかではなかったが、Hall + Gyro 場合には  $k_{max} \approx 6$  のモードが最も不安定になる結果が得られた。MHD の場合のシミュレーションでは  $k > 25$  の成長率は若干減少しているが、これは超粘性が影響しているものと考えられる。その他のパラメータでも超粘性の値は固定しているため、Hall, Gyro, Hall+Gyro においても  $k > 25$  では超粘性が影響しているものと考えられる。そのため、その他の解析では  $k = 25$  で数値解析を打ち切っている。

図 5.8 の左図に示した成長率を見ると、Gyro の場合では、線形解析との差が大きくなっている。この原因は、線形解析では固有関数が  $y=0$  でピークすることを仮定して分散関係式を求めていることに起因している。シミュレーション結果から求めた固有関数の分布を図 5.9 に示す。図 5.9 では圧力の固有関数の虚数部を示している。(実部がゼロになるように位相を合わせてプロットした。) この分布を見ると Gyro の場合のみ、中心部でピークせずにダブルピークするモード構造をしていることが分かる。従って、線形解析では異なる固有関数の解を示している可能性が存在する。しかしながら、定性的には線形解析とシミュレーション結果は良く対応するものであり、線形解析結果をシミュレーションパラメータの推定に用いることは妥当なものであると考えられる。高波数部で線形解析の結果が妥当とするならば、この平衡では Gyro, Hall+Gyro の場合に、不安定性の完全安定化が生じる。これは、シミュレーションだけでは確認できない、線形解析ならではの結果である。

### 5.3 非線形成長に対する微視的效果及び反磁性ドリフトの影響

以下では、WKB 法による解析も踏まえて、非線形シミュレーション結果について述べる。MHD と Hall+Gyro の場合について、エネルギースペクトルの時間成長を図 5.10 に示す。図 5.10(a) で

はいくつかのモードにおいて、非線形相互作用による加速が  $t = 300$  から始まる。いくつかのモードは  $t = 350$  から減速し始めているため、多数の Fourier モードによる非線形相互作用が  $t = 350$  から明確に現れている。一方で図 5.10(b) では非線形相互作用が明確に現れるのは  $t = 380$  からである。Hall+Gyro において非線形段階の始まりが遅延するのは、高波数モードの線形成長が安定化され、有意な大きさで非線形相互作用を行うモードの数が減少するためであると考えられる。又、低波数モードの成長及び非線形混合幅の解析から、 $t = 500$  で非線形成長を始め、 $t = 600$  では十分非線形段階に入っているものと判断することが出来る。 $t = 500$  及び  $t = 600$  について密度場をプロットした図を図 5.11、5.12 に示す。 $t = 500$  では Hall+Gyro において、低波数モードが支配的な構造が形成されていることが分かる (図 5.13 参照)。図 5.13 は線形成長率が最も高い  $k = 6$  モードと対応付け可能な構造を持っている。又、Hall+Gyro では界面に急峻な密度勾配及び速度差が駆動する二次的な Kelvin-Helmholtz(KH) 型の不安定性が発生している (図 5.14)。MHD の場合は、高波数モードも高い成長率を持つため密度場は激しく混合され、急峻な密度勾配の形成は観測されない。Hall+Gyro の  $t=600$  では、 $t=500$  でははっきりと見えていなかった二次的な不安定性が、界面のいたるところで発生していることが分かる。この二次的な不安定性は、密度勾配の局所的な平坦化などを通じて密度場の構造形成に対し影響を及ぼしているものと考えられる。特にマッシュルームの中心部に近い、バロクリニックトルク  $\nabla\rho \times \nabla p/\rho^2$  によるマッシュルーム構造の巻き込みが起こる場所でも二次的な KH が発生し、マッシュルーム構造の中心部にまで二次的な不安定性が影響を及ぼすことで非対称なマッシュルーム構造の形成が起きやすくなる状況となっている。この二次的な KH 不安定性は、マッシュルームによる成長の影響で、密度界面付近で速度差が大きくなりやすく、その結果として速度シアが生じて発生しているものと考えられる。(速度シアが密度等高線に沿って生じた場合には、ジャイロ粘性の影響で密度勾配が急峻化する方向に速度が誘起され易いことが簡単に示せる。これは後でもう少し詳しく述べる。) 二次不安定性は速度シアの符号によりその現れ方が異なっている。これは KH に対する微視的效果の影響と考えることが出来る。 $t = 430, t = 470, t = 530$  における Hall+Gyro での密度場プロットを図 5.15 に示す。KH 型の不安定性の成長が、波状の密度場構造として現れている。この波状構造はハンマーヘッドとも呼ばれる [31] 平坦化したマッシュルーム構造の頂点、マッシュルーム構造の根元やほぼ初期位置に留まっている密度ジャンプが起こる領域で発生している。二次不安定性の波数は  $k \approx 30$  程度である。又、この二次的不安定性は速度差だけでなく、急峻な密度勾配が存在する場所で発生しやすい特徴を持っている。

二次不安定性が発生している領域での速度場を解析した結果を図 5.16 に示す。図 5.16 から、二次不安定性が発生する場所では速度シアだけでなく膨張・圧縮も起こることが分かる。又、Hall,Gyro の場合では、急峻な密度勾配及び二次的な不安定性は観測されなかった。従って、低波数モードが支配的なモード構造を持つ Hall+Gyro の場合では、二次的な KH 型不安定性が構造形成に対して重要な役割を担うことを示唆している。密度比を 1.05、2.0 にした場合の密度場のプロットを図 5.17 に示す。前者の場合には、明らかに非対称なマッシュルーム構造が形成される結果が得られた。これは、密度比を下げた場合には高波数モードの安定化効果が強く、より低波数モードが卓越し、二次的な不安定性が起きやすい状況となっているものと考えられる。また、マッ

シュルーム構造が横に傾いているが、これは構造形成の初期において、反磁性流がマッシュルーム構造の根元に現れたためであると考えられる。対照的に、密度比を 2.0 にした場合には、二次的な不安定性は観測されにくい結果が得られたが、これは高波数モードの安定化効果が弱いため、MHD に近い状況が出来ていると考えられる。

密度等高線が  $y$  方向に対し殆ど変化しない領域 (図 5.14 中央付近。以下、平坦化領域) での速度シアは、この領域の左右で発生しているマッシュルーム構造が上下に成長しているためにこの影響を受けて発生する。上方にマッシュルームが成長している場合 (図 5.14 左側) には、界面の上側が下側よりもその成長に引っ張られる事で左向きの速度が発生する。一方、下方にマッシュルームが成長している場合 (図 5.14 右側) には、界面の下側に右向きの速度が発生する。これが速度シアが発生する原因であると考えられる (図 5.18(上) を参照)。同様に、マッシュルームの先端付近でも速度シアが発生する。マッシュルームは上下方向へ成長しているため、マッシュルームの外側の方が相対速度が速くなっている。そのため、速度シアが発生し、二次不安定性が駆動されている。この速度シアの幅がジャイロ粘性により急峻化することは、運動量方程式から示す事が出来る。  $x$  方向に一様な速度シア層があると仮定し、運動量方程式のジャイロ粘性に関連した項を  $(\partial\rho u/\partial t)_{gv}, (\partial\rho v/\partial t)_{gv}$  と表現すると、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\rho u}{\partial t}\right)_{gv} &= -\frac{\partial}{\partial x}\Pi_{xx} - \frac{\partial}{\partial y}\Pi_{yx} \\ &= -\delta\frac{\partial}{\partial x}\left\{p_i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} - \delta\frac{\partial}{\partial y}\left\{p_i\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\rho v}{\partial t}\right)_{gv} &= -\frac{\partial}{\partial x}\Pi_{xy} - \frac{\partial}{\partial y}\Pi_{yy} \\ &= -\delta\frac{\partial}{\partial x}\left\{p_i\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\} - \delta\frac{\partial}{\partial y}\left\{p_i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} \\ &= -\delta p_i \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \end{aligned} \tag{5.16}$$

と表される。ここで圧力が一様、 $y$  方向の速度はないものとしている。(実際には圧力勾配はあるが、KH の発生に重要な役割は果たしていないものと考えられる。)  $u = u(y) = \tanh(y)$  とすると、上下方向に界面を押しつけるような速度が働く事になる。従って、ジャイロ粘性により密度及び速度シアの幅は急峻化、これに移流されて密度勾配も急峻化する。速度シアの幅が急峻化するために、波数 30 程度の KH 不安定性が駆動されると考えられる。Gyro の場合には  $k \approx 30$  では高波数モードの成長率が十分に安定化されていないために速度シアが維持されず、Hall+Gyro の場合には  $k \approx 30$  で既に成長率の完全安定化が起こっているため、速度シアが維持されるような状況が実現されている。又、Hall+Gyro の場合には、30 程度で高波数モードの完全安定化が起こっており、RT 不安定性が安定化される波数領域では二次的な KH 不安定性が不安定化するとみなす事が出来る (図 5.19 を参照)。

上で見た急峻な密度勾配の影響が波数空間においてどのように現れるのかを調べるために、

密度スペクトルを調べた。図 5.20 は (a) $t = 500$ 、(b) $t = 600$  での密度スペクトルを MHD と Hall+Gyro について比較した図である。MHD の場合では、 $t = 500$  で既に完全に非線形な段階に突入していると考えられるため、密度スペクトルは  $t = 500$  でも  $t = 600$  でも広範な波数領域に連続的に分布している。一方で Hall+Gyro では、 $t=500$  の密度スペクトルは  $k = 6$  でピークし、 $k = 20$  以降の波数では急激に減衰している。しかしながら、 $t=600$  では高波数成分は MHD よりも大きなスペクトルを持っている。 $t = 500$  での密度スペクトルからは、密度場は  $k < 32$  の低波数で記述出来るように見えるが、ローパスフィルターをかけた解析を行うと、 $k < 128$  の成分が存在しなければ Gibbs 現象が発生してしまうことが分かる (図は省略した)。Gibbs 現象は不連続面を有限の Fourier 係数で表した場合に発生する振動現象である。従って、密度スペクトルでは高波数成分が急激に減衰しているが、急峻な密度勾配を形成する上では重要な役割を果たしているために無視出来ないものであると考えられる。また、拡張 MHD モデルを用いて非線形段階まで詳細な解析を行うためには、十分な波数空間 (又は数値解像度) を用意する必要があることを示唆している。我々が評価した限りでは、イオンスキン長の波数 (ここでは  $k = 5$ ) に対して、その 25 倍から 50 倍程度の波数空間 ( $k_{max} = 128 \sim 256$ ) が必要とされ、解像度がこれ以下の場合には、非線形段階での構造に目に見える変化が現れる。

#### 5.4 局在化した圧力勾配を持つ平衡についてのシミュレーションまとめ

この平衡を用いた RT 不安定性のシミュレーションからは、第 4 章との類似性、相違の両者が見られる。重要な類似性は、Hall 項及びジャイロ粘性の両者が加わることで、Hall 項及びジャイロ粘性がそれぞれ単独で加えられる場合よりも大きい安定化効果が発生することである。特に本章の平衡では、高波数部で完全な安定化が得られている。顕著な相違点は、二次不安定性の発生である。これは、線形モードの完全な (あるいは不完全な) 安定化とも強く関係していると考えられる。第 4 章の平衡では、高波数モードの成長率が有限で残っている影響もあり、密度のジャンプ面が乱れており、きれいな速度シア層が形成されにくい状況であった。本章の場合は、低波数モードのみ成長した結果、きれいな速度シア層が形成された事が KH 不安定性の成長をもたらしたと考えられる。この点は本章において、Hall 項のみ、ジャイロ粘性のみの場合との対比でも共通しており、これらの場合には KH 不安定性が発生しないのに対し、Hall 項とジャイロ粘性の両者を加えた場合にのみ KH が発生した事は注目に値する。

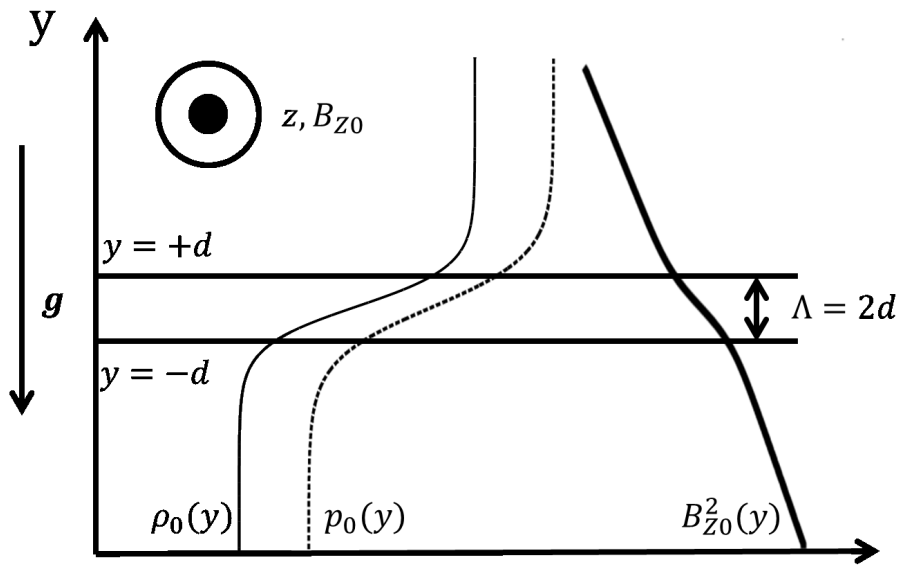


図 5.1 平衡 2 における初期平衡プロフィール

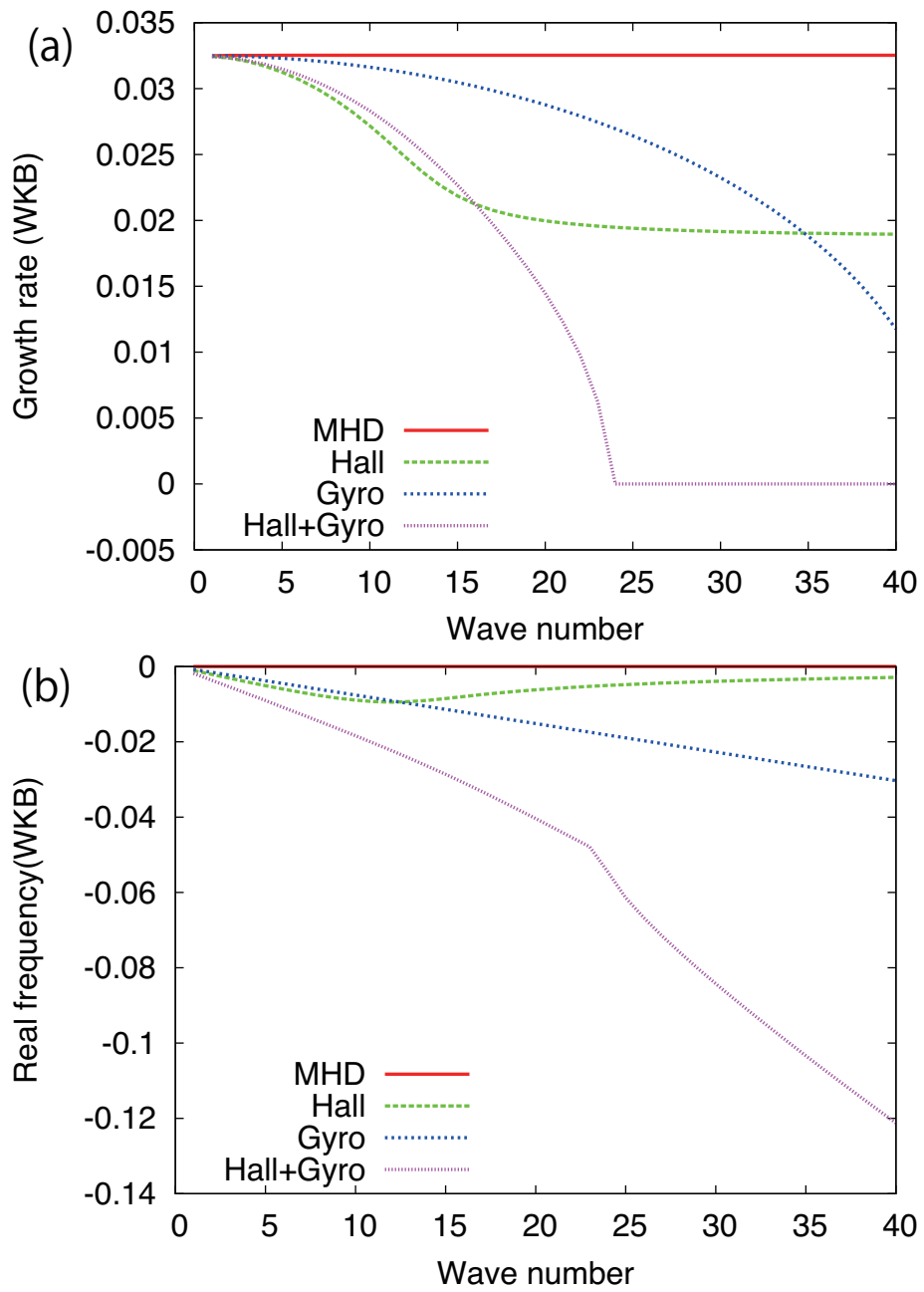


図 5.2 典型的なパラメータでの (a) 線形成長率, (b) 実周波数の波数依存性



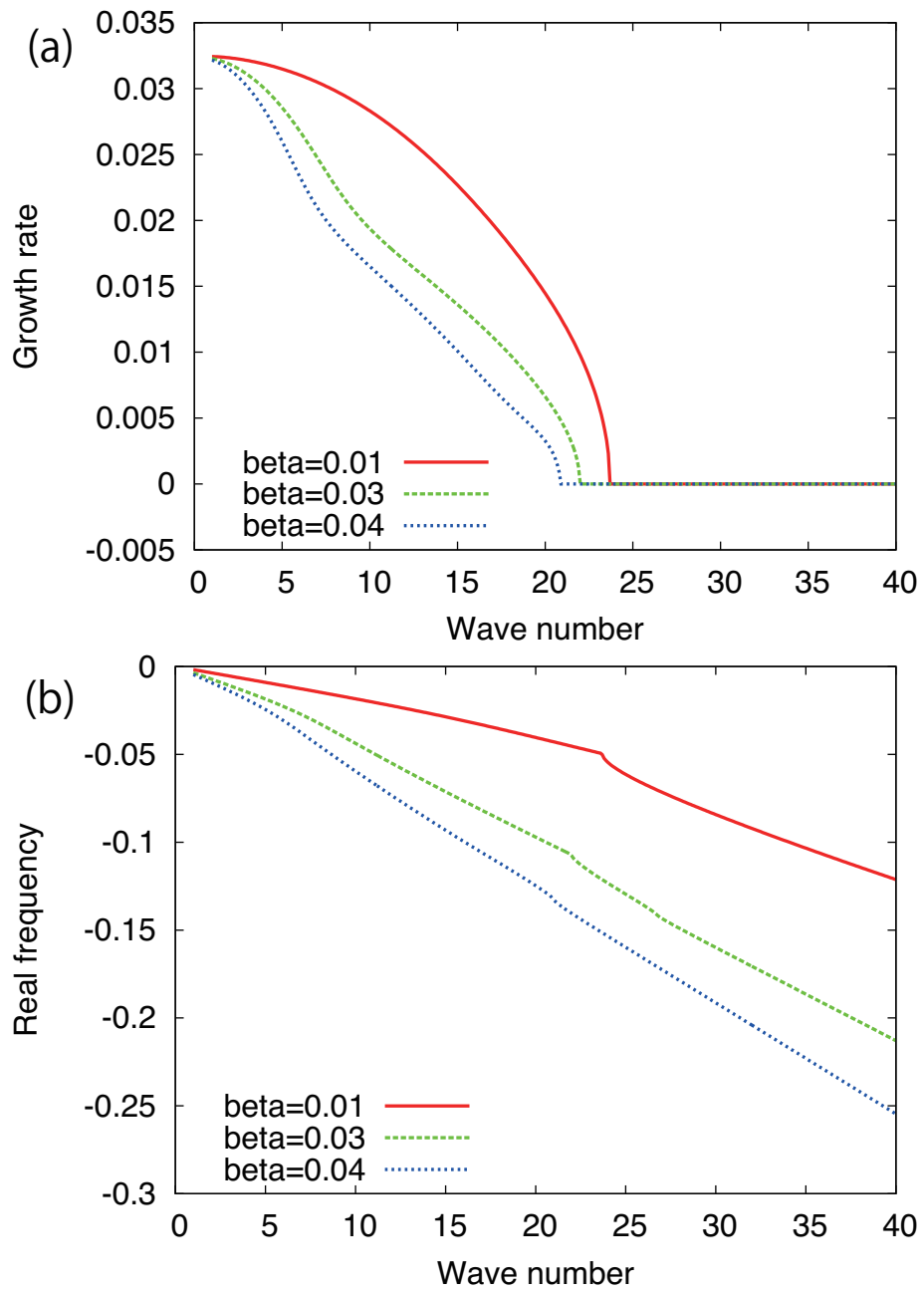


図 5.3  $\beta$  値を変化させた場合の (a) 線形成長率, (b) 実周波数の波数依存性

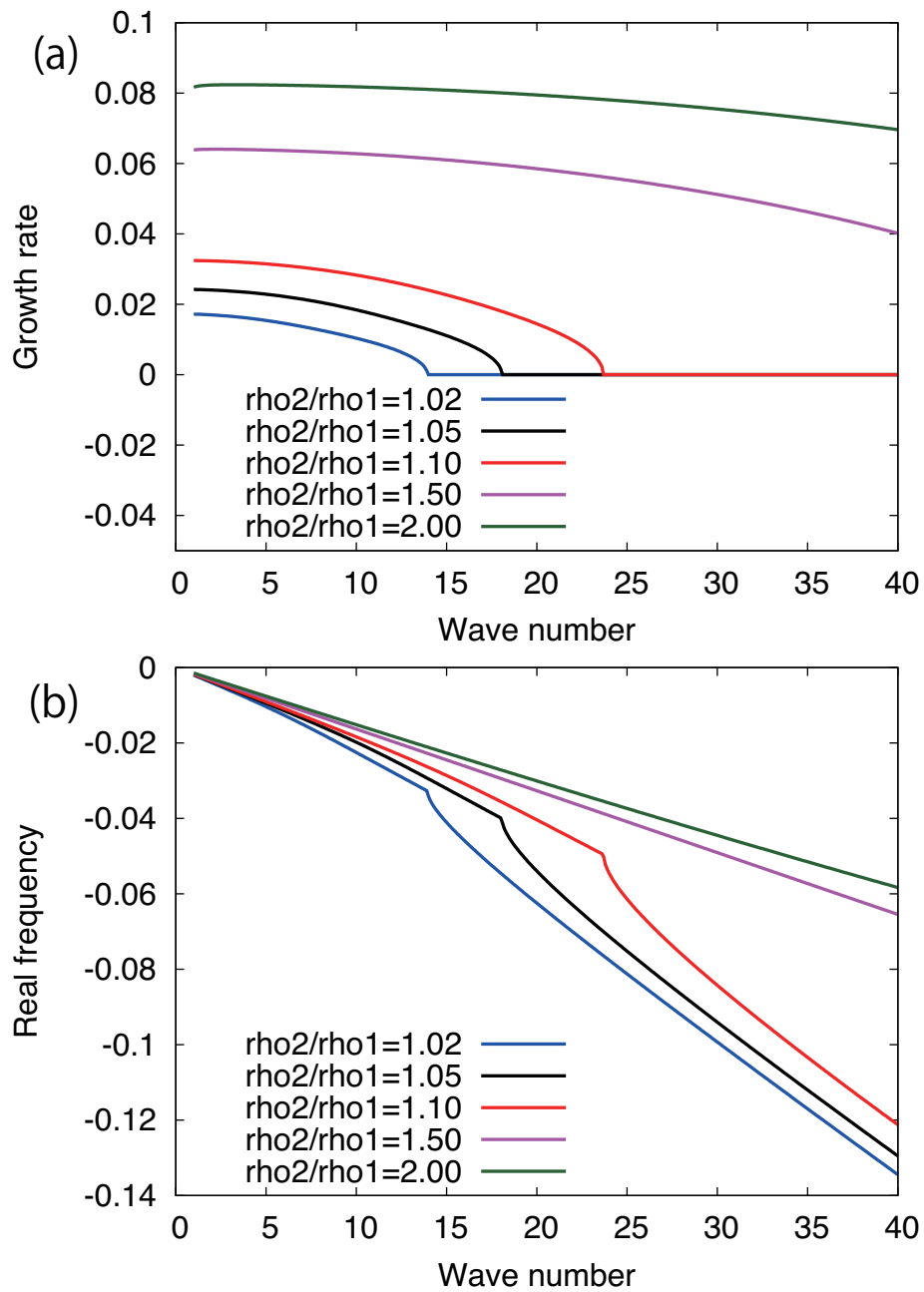


図 5.4 密度比を変化させた場合の (a) 線形成長率, (b) 実周波数の波数依存性

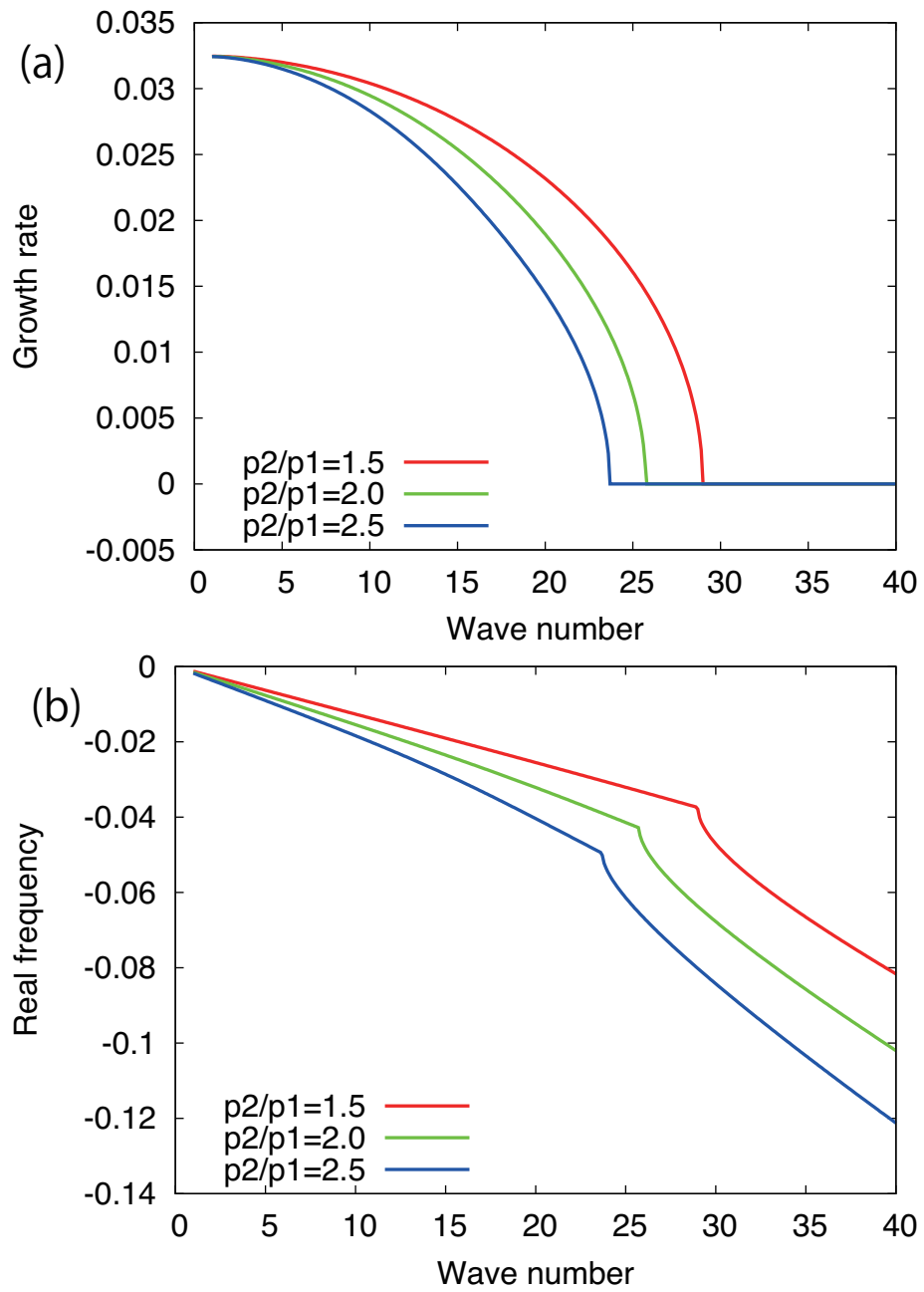


図 5.5 (a) 成長率, (b) 実周波数の圧力比依存性

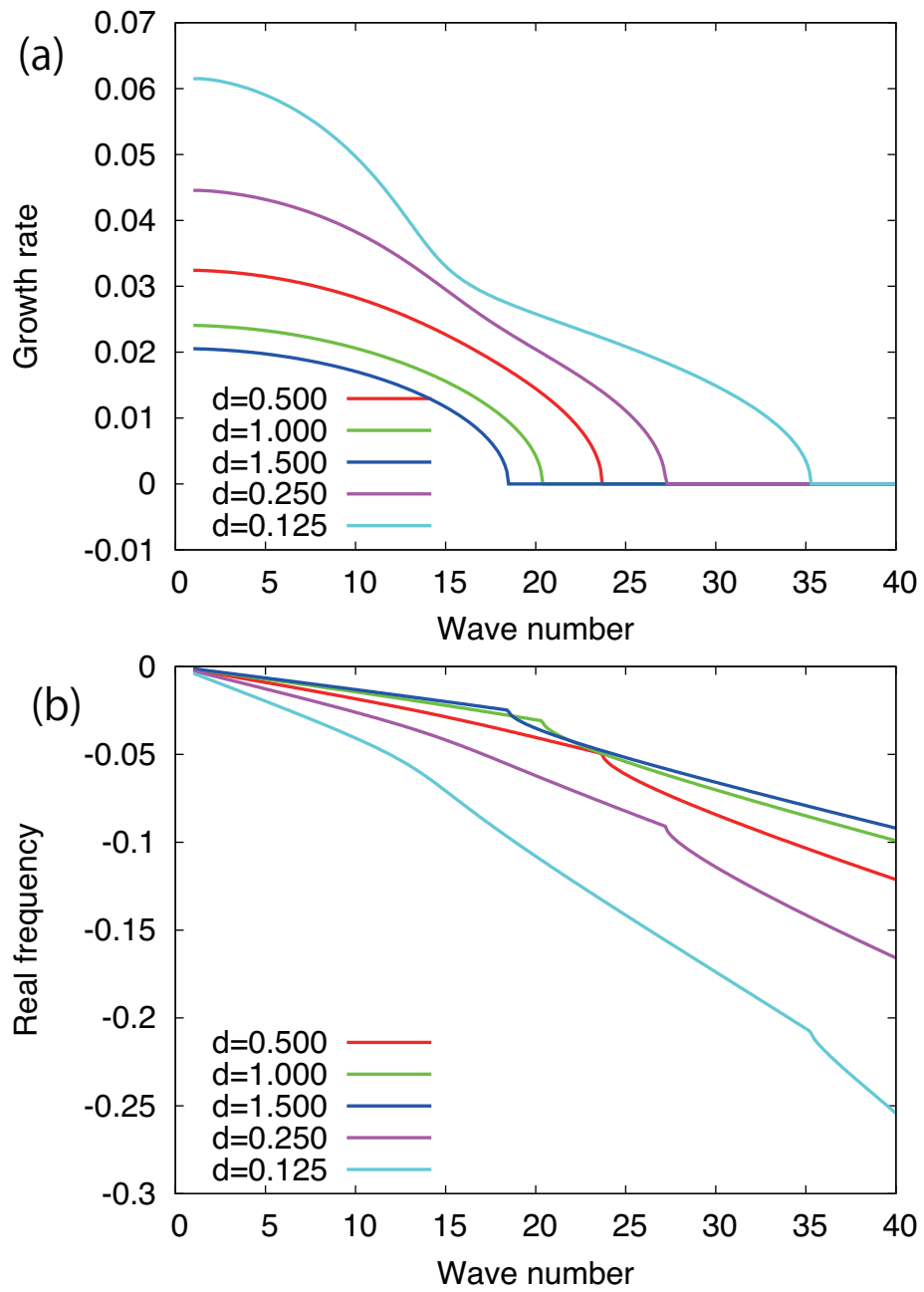


図 5.6 (a) 成長率, (b) 実周波数のジャンプ幅依存性

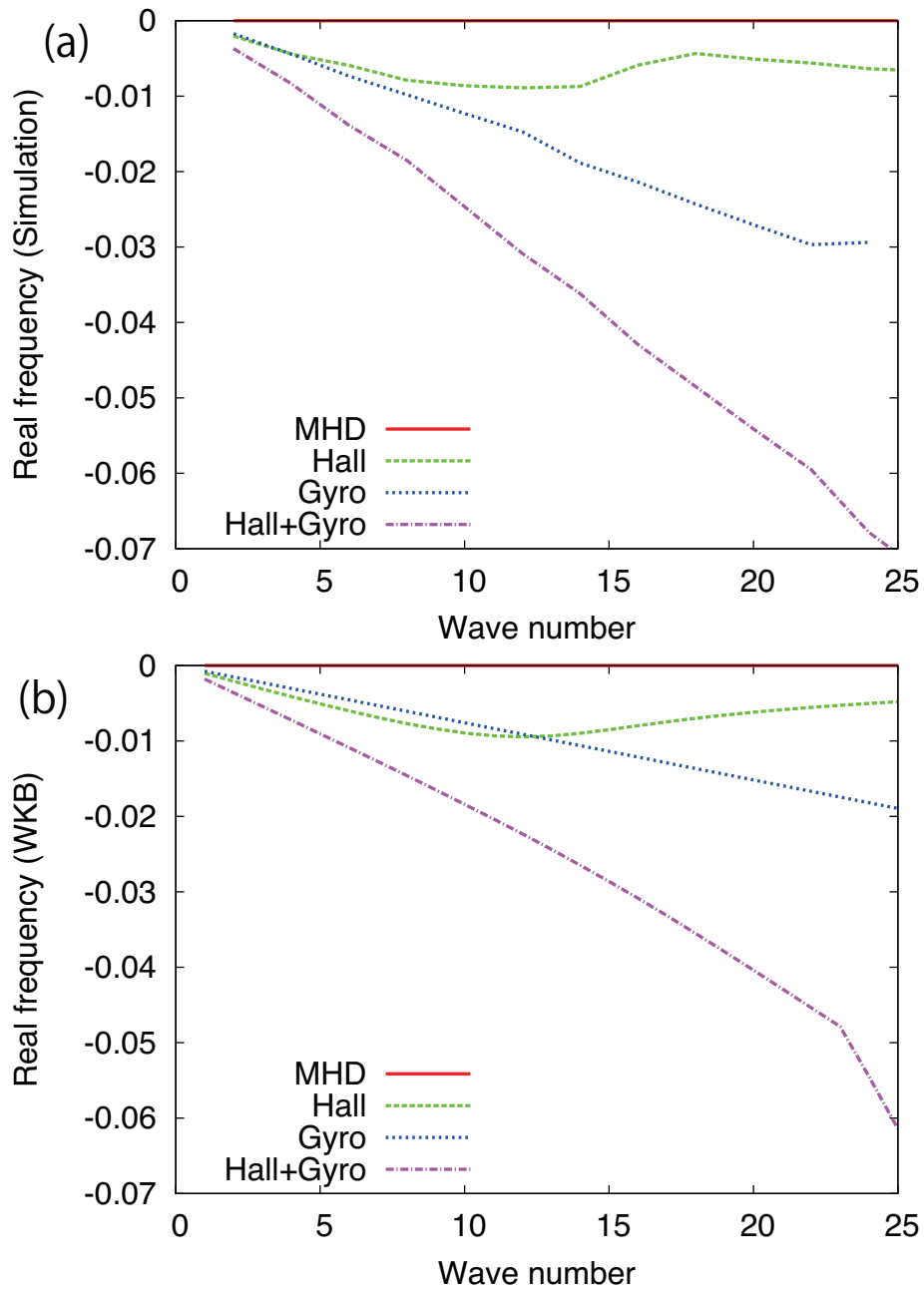


図 5.7 実周波数の波数依存性の (a) シミュレーション, (b) 線形解析の比較

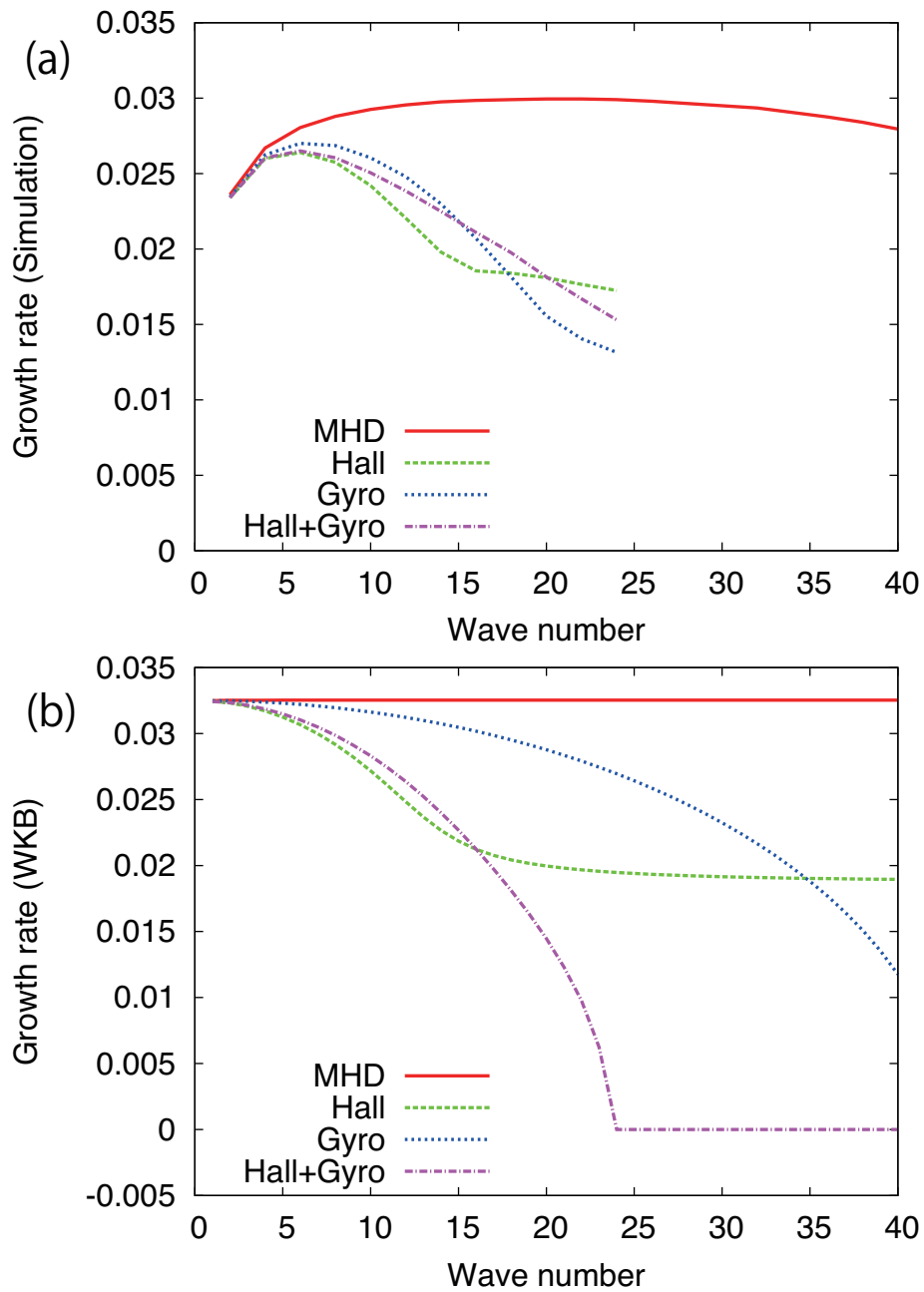


図 5.8 線形成長率の波数依存性の (a) シミュレーション, (b) 線形解析の比較

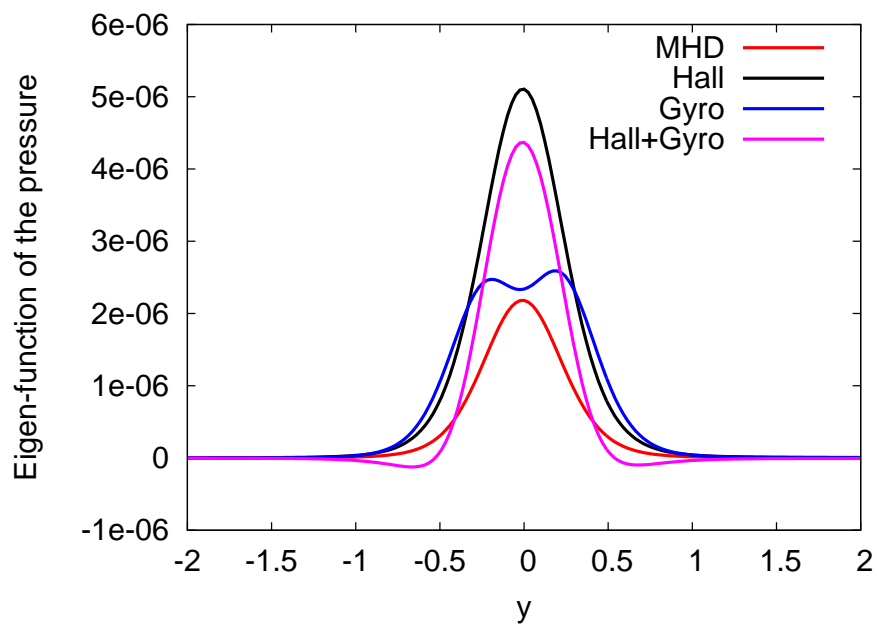


図 5.9 圧力の固有関数の分布 (虚数部)

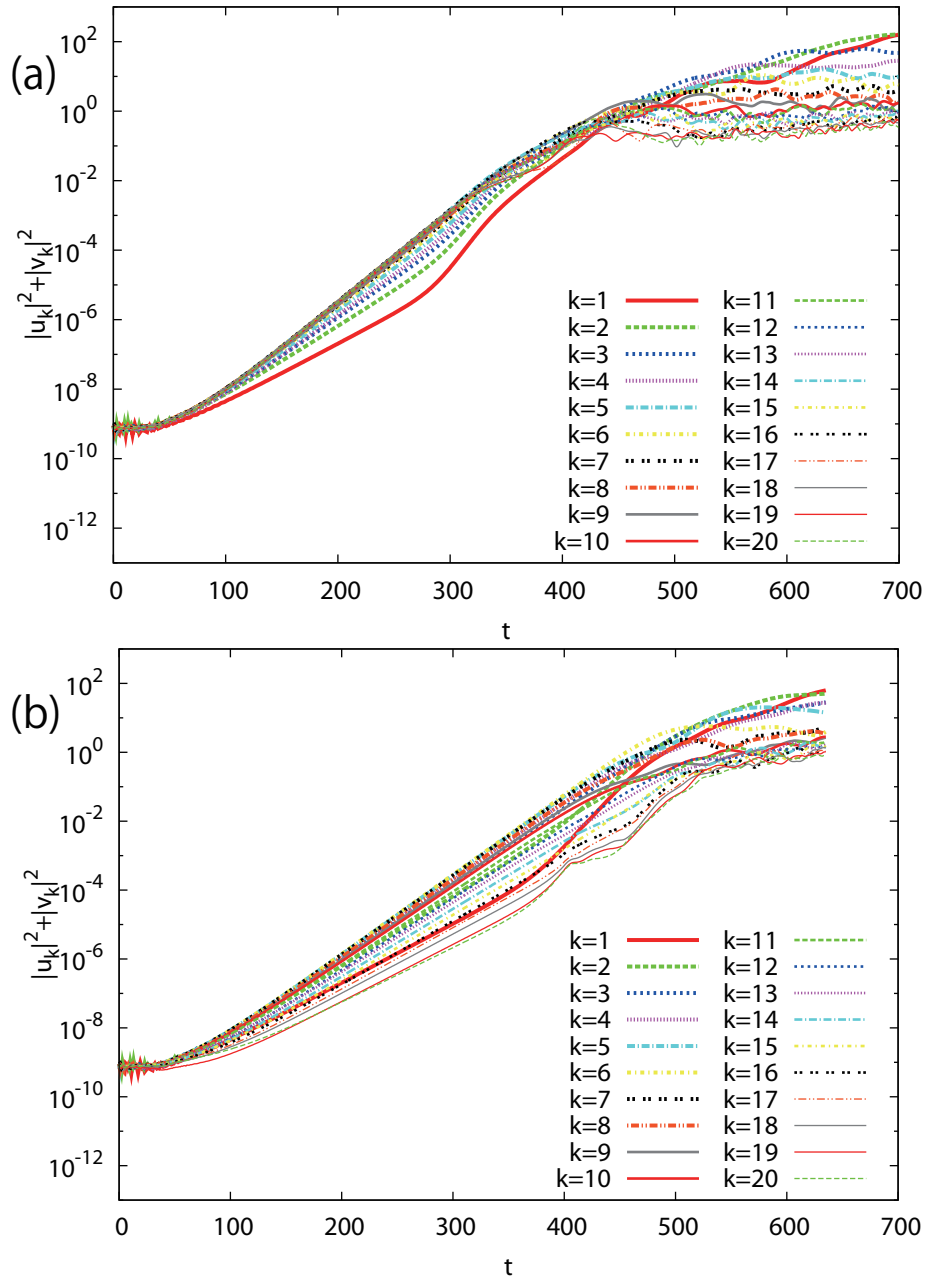
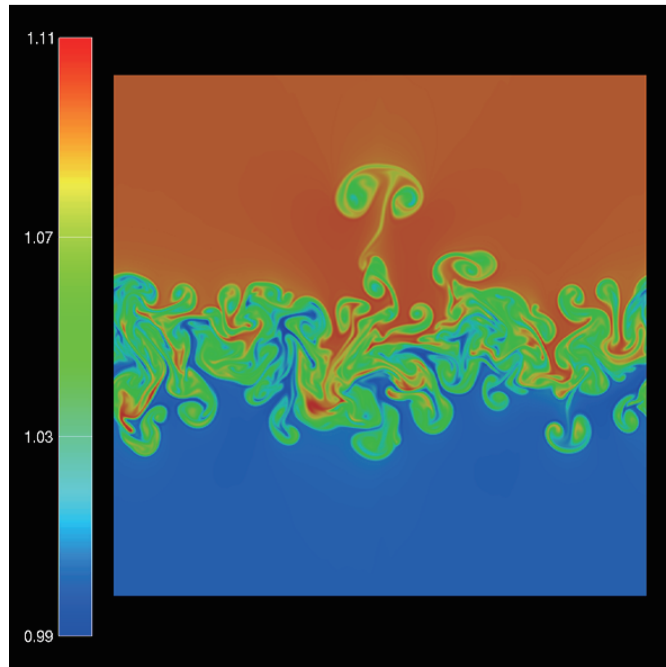


図 5.10 エネルギースペクトルの (a) MHD, (b) Hall+Gyro の比較



(a)



(b)

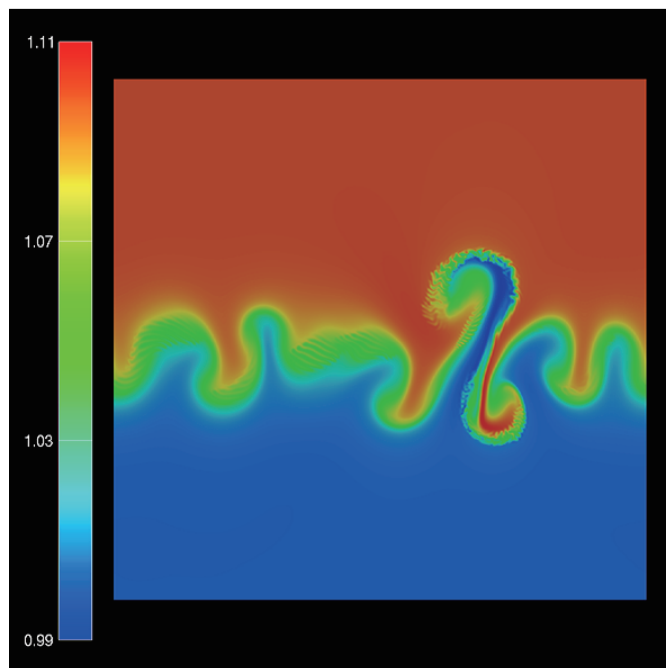
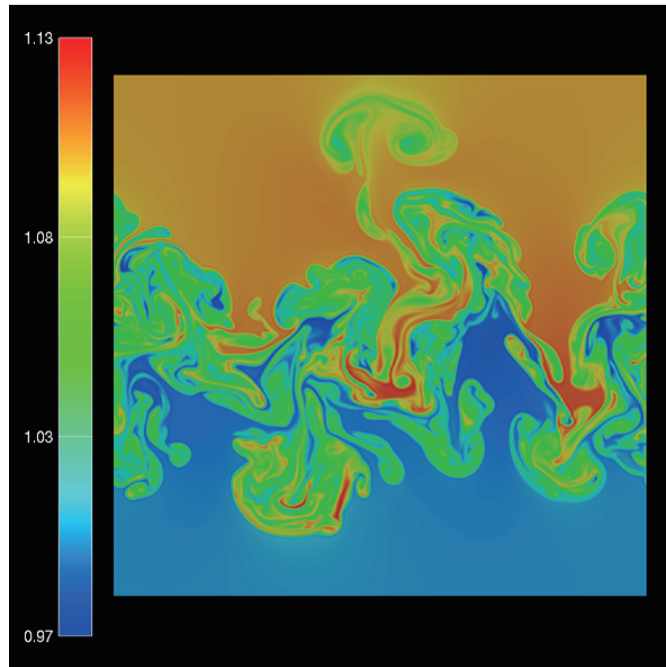


図 5.11  $t=500$  での密度場の (a) MHD, (b) Hall+Gyro の比較

(a)



(b)

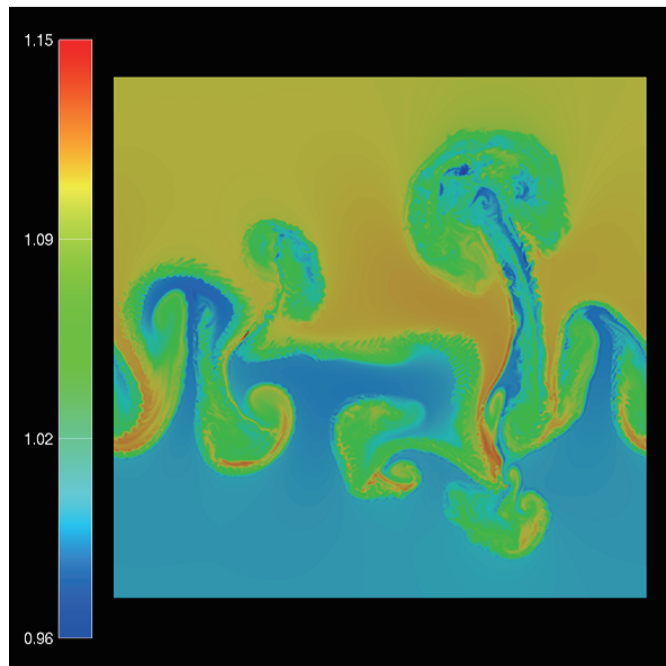


図 5.12  $t=600$  での密度場の (a) MHD, (b) Hall+Gyro の比較

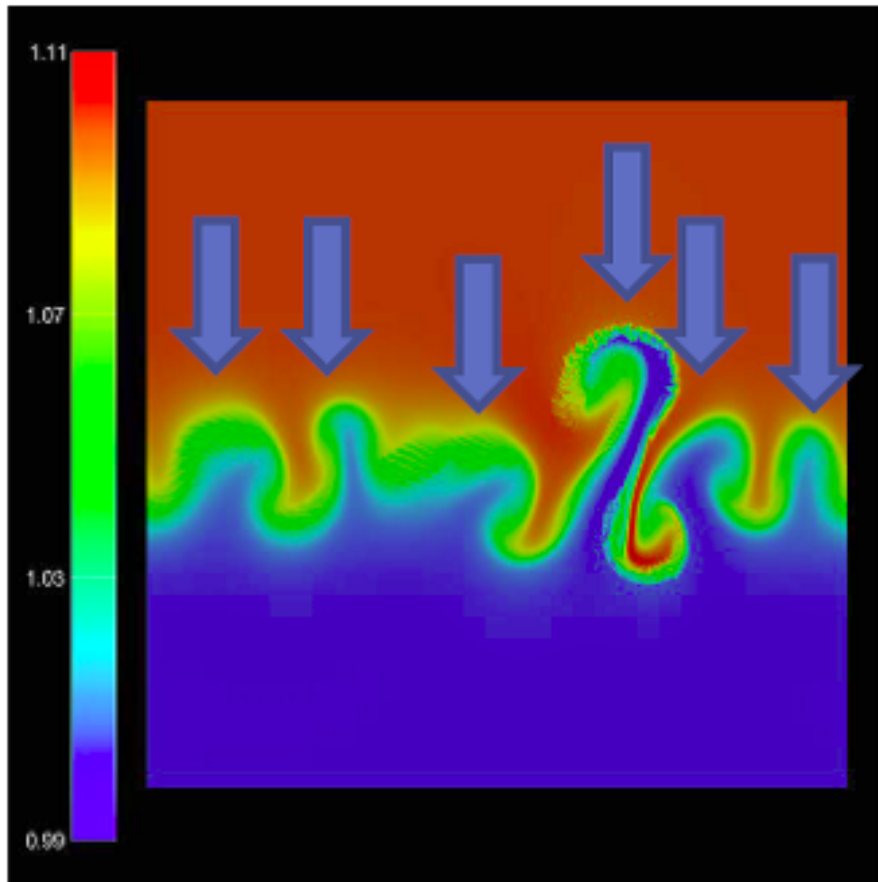


図 5.13 密度場の構造形成

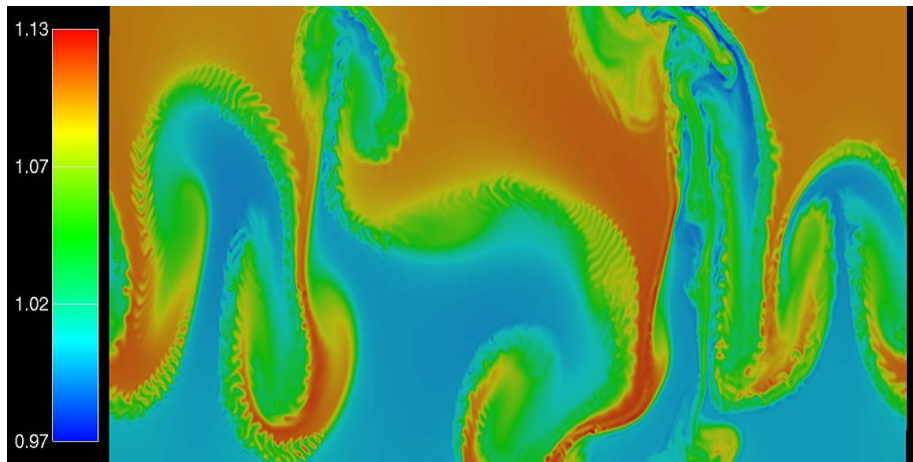


図 5.14 二次不安定性が発生している領域の拡大図

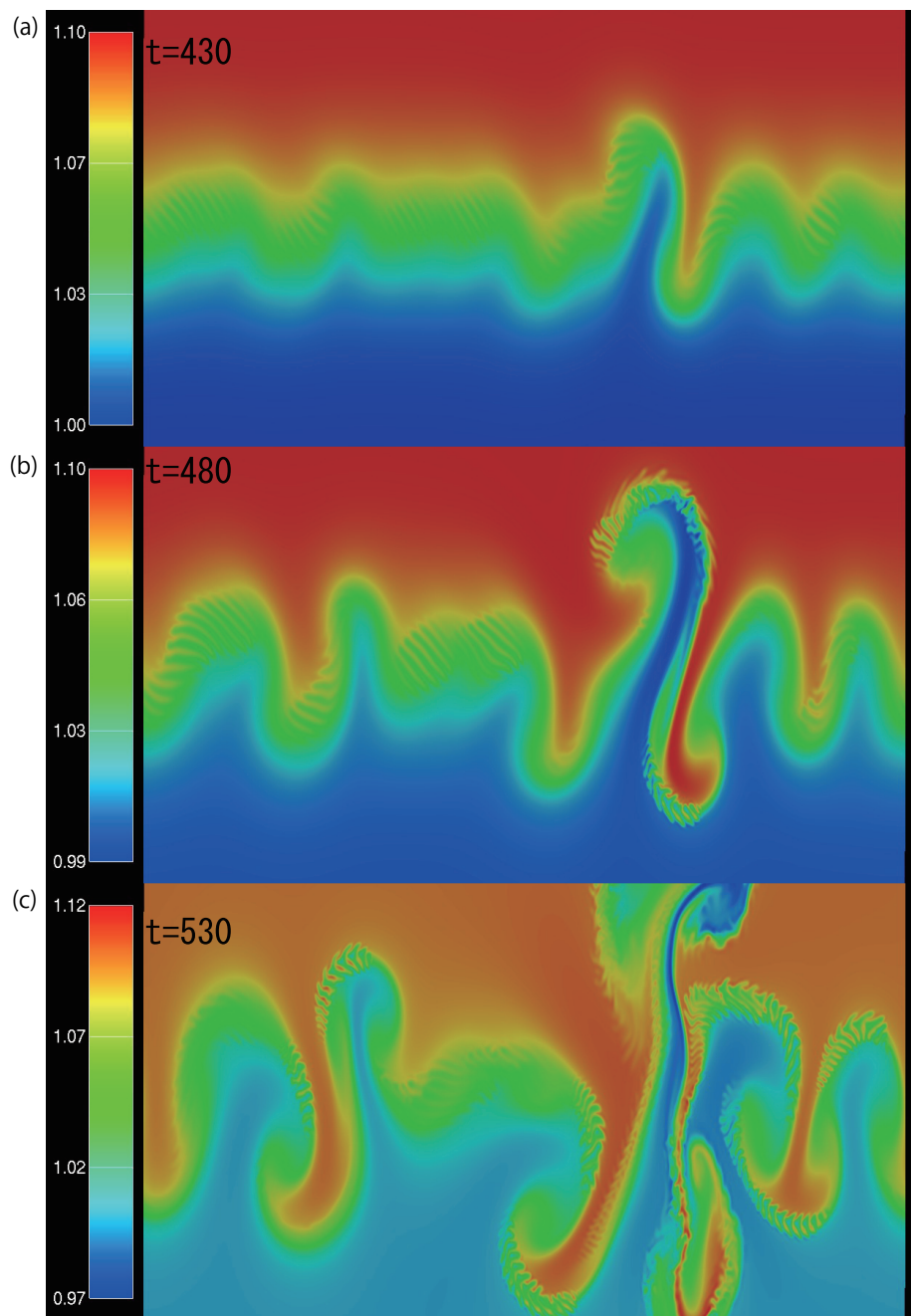


図 5.15 (a)  $t=430$ , (b)  $t=480$ , (c)  $t=530$  における二次不安定性の密度プロット

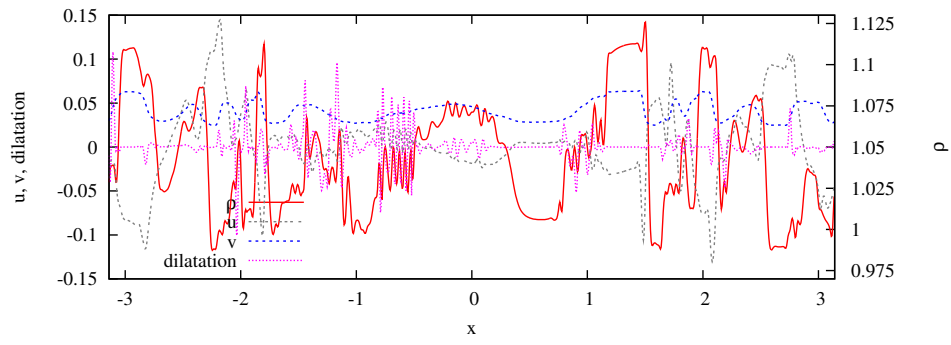


図 5.16 二次的な不安定性が発生している領域での速度場及び密度場解析

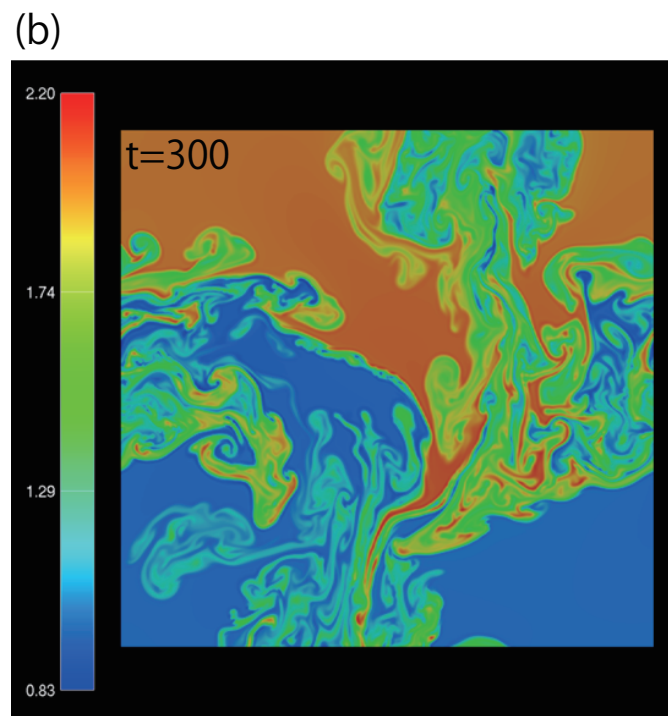
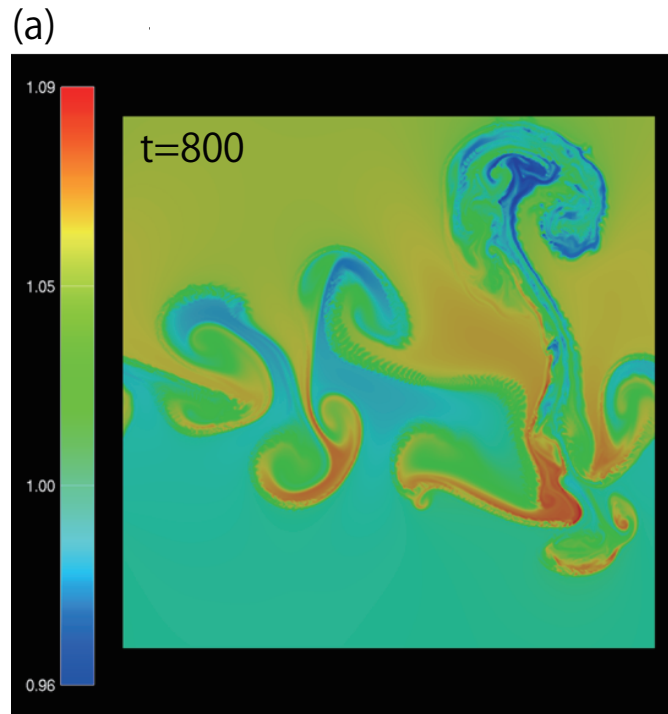


図 5.17 密度比 (a)  $\rho_2/\rho_1 = 1.05$ , (b)  $\rho_2/\rho_1 = 2.0$  の場合の密度場プロット

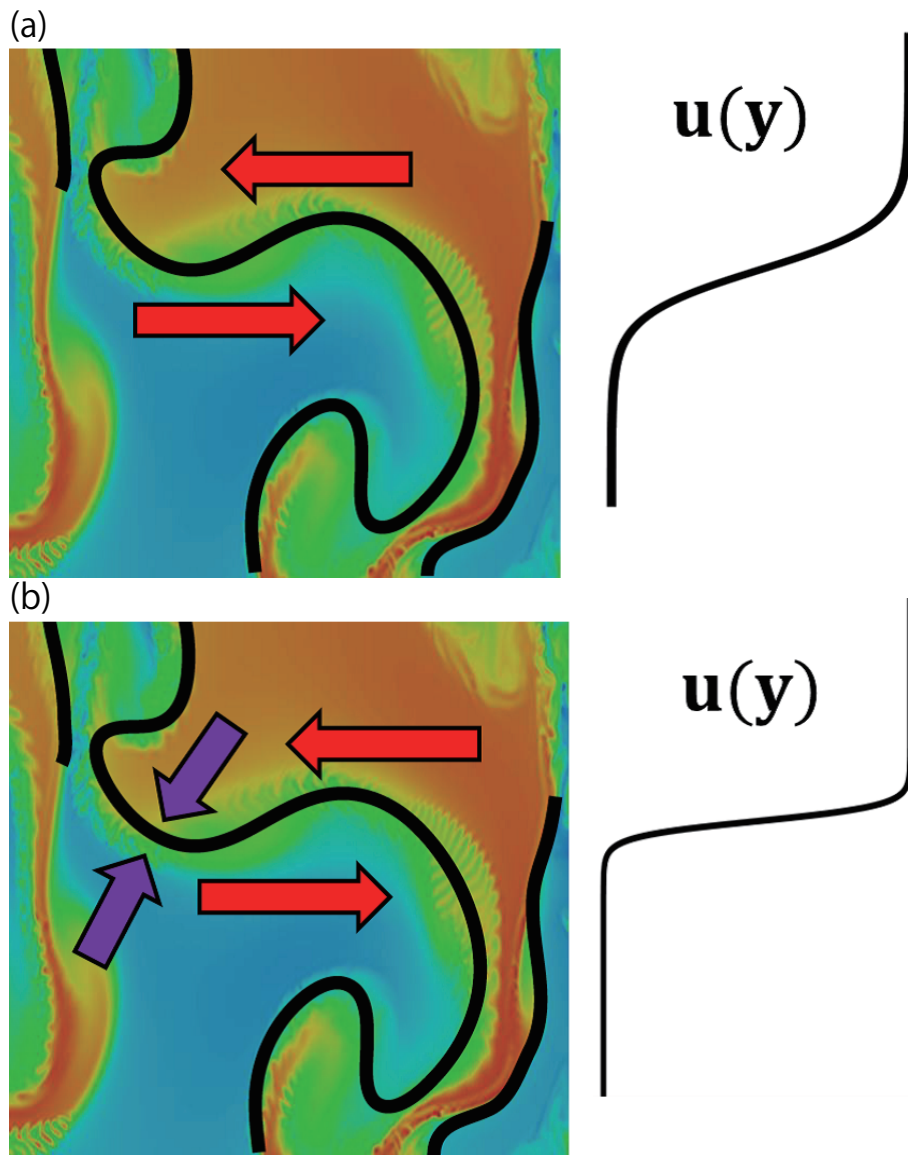


図 5.18 平坦化領域における (a) 速度シアの発生, (b) ジャイロ粘性によるシア層の急峻化



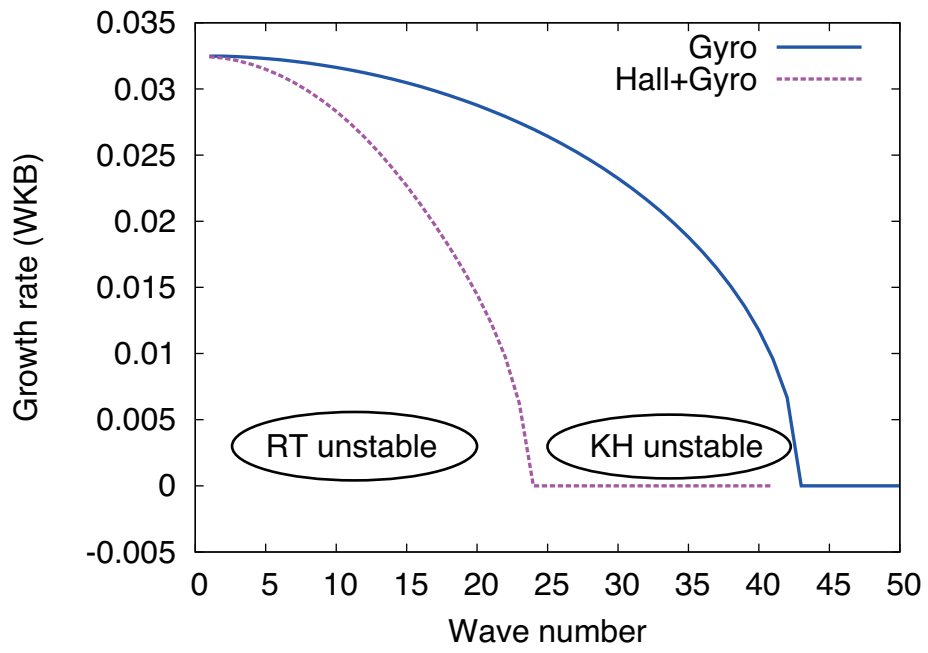


図 5.19 不安定性の現れる波数領域

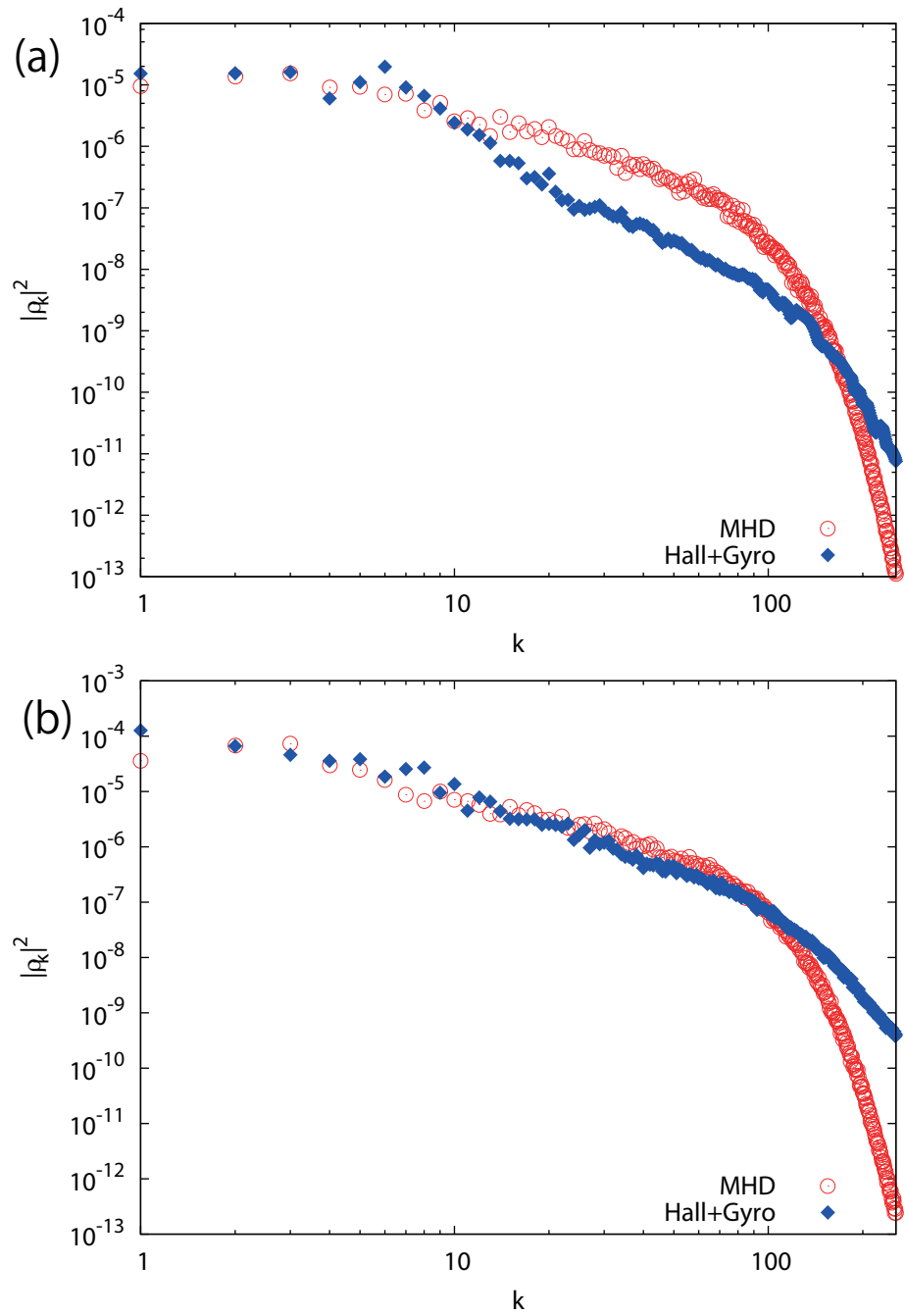


図 5.20 (a)  $t=500$ , (b)  $t=600$  での密度スペクトルの波数依存性

## 6 研究総括

第 6.1 節では、本研究の主題である RT 不安定性に対する Hall 項、ジャイロ粘性の影響について総括する。第 6.2 節では、この基礎物理研究の立場から見た、トラスプラズマシミュレーション研究への展望を述べる。

### 6.1 本研究課題の総括

本節では、本研究の先行研究に対する優位性及び本研究により明らかになった事柄について、線形段階、非線形段階それぞれの観点からまとめていきたい。最初に本研究の先行研究に対する優位性についてまとめる。第一に、本研究では高い数値解像度で非線形シミュレーションを行っている。そのため、これまでの先行研究では十分に解析が行われてこなかった非線形段階での現象について詳細な解析を行っている。第二に、先行研究では  $\beta$  値等のパラメータの違いについて十分議論されてきていない。本研究では広範なパラメータランを行うことで様々なパラメータの違いによる影響について詳細な解析を行っている。

#### 6.1.1 本研究により明らかとなった事柄

本研究により明らかになった事柄について、線形段階、非線形段階それぞれの観点からまとめる。

第一に、線形段階における微視的効果の影響についてまとめる。第 4 章でシミュレーションに用いた平衡 1 では、RT 不安定性の線形成長率の波数依存性に対して、Hall+Gyro の場合に高波数モードの線形成長率が大きく低下することが明らかとなった。一方で、Hall 項及びジャイロ粘性単体のみを加えた場合には、線形成長率は Hall+Gyro の場合ほどは変化が生じない結果が得られた。従って平衡 1 に対しては、Hall 項及びジャイロ粘性が同時に存在することが、高波数モードの成長率の減少に対しては重要であることが明らかとなった。また、この平衡では反磁性ドリフトが不安定モードの成長率と比べて極めて微弱であった。第 5 章で非線形シミュレーションを行った平衡 2 では、Hall,Gyro においても成長率が大きく変化した。とりわけジャイロ粘性は、高波数モードの成長率を完全に安定化する結果が得られた。しかしながら、平衡 2 においても Hall+Gyro の場合には成長率が大きく減少し、ジャイロ粘性のみを加えた場合よりも低い波数で完全安定化する結果が得られた。従って Hall,Gyro の場合には圧力勾配の分布の違いで高波数モードが異なる振る舞いを示すが、Hall+Gyro の場合には圧力勾配の分布の違いに関わらず高波数モードに対する強い安定化効果を示す事になる。平衡 2 では、平衡 1 と異なり、反磁性効果による実周波数が成長率とほぼ同程度の大きさで発生することが特徴であり、以下にまとめる非線形段階において、ドリフトによる密度場の構造の変化が見られる。

次に、非線形段階における微視的効果の影響についてまとめる。平衡 1, 2 共に、Hall+Gyro の場合には、高波数モードの成長率が低下していることを反映し、有限振幅をもつ高波数モード間の非線形相互作用の組み合わせが限定されること、その結果として低波数モードの線形成長が MHD

の場合よりも長時間続き、低波数モードが支配的となる構造が形成されることが明らかとなった。特に Hall+Gyro の場合には乱流的な乱れを伴わない整然且つ急峻な密度勾配と、その周辺に極めて微細な構造が現れる事、このような構造は Hall,Gyro の場合には現れない事が本研究により初めて示された。急峻な密度勾配の存在は、拡張 MHD モデルを用いて非線形段階まで高精度に解析を行う場合には、一流体 MHD モデルを用いる場合よりも十分な波数空間 (高い空間解像度) を用意する必要があることを示唆している。平衡 2 においても、Hall+Gyro の場合には、低波数モードが支配的な構造が形成されるだけでなく、二次的な KH 不安定性が界面に発生すること、そしてこのような二次不安定性は、Hall 項あるいはジャイロ粘性の一方だけでは発生しないことが明らかとなった。この二次的不安定性はマッシュルーム構造が巻き込む界面でも発生するため、マッシュルーム構造の中心部にまで影響を及ぼす。とりわけ平衡 2 のような安定性限界に近いコア部でのプロファイルに対しては二次不安定性が非線形成長に対して大きく影響しているものと考えられる。本研究により得られた成果についてまとめると以下の 3 点となる。

- ・ Hall 項及びジャイロ粘性を同時に加えることで、圧力勾配の分布の違いに関わらず、高波数モードの成長率は大きく減少する。
- ・ 急峻な圧力勾配を持つ平衡では、Hall 項及びジャイロ粘性を同時に加えることで非線形段階において二次的不安定性が発生し、構造形成にも影響を与えている。不安定性が十分に発達した後の乱流場の様相は、Hall 項及びジャイロ粘性を同時に加えた場合と他の場合で大きく異なる。
- ・ Hall 項及びジャイロ粘性を同時に加える場合には、急峻な密度勾配、速度勾配が発生するため、より広い波数空間 (又は数値解像度) を用意する必要がある。より微細なスケールでは電子の効果が支配的になる事を念頭に置いても、Hall 項とジャイロ粘性を加えるだけで流体スケールの現象にこれだけの変化が現れる事は、今後の RT 不安定性の研究において重要な意味を持っていると考えられる。

## 6.2 本研究と核融合プラズマシミュレーション

本研究は RT 不安定性の線形及び非線形成長に対する Hall 項及びジャイロ粘性といった非理想 MHD 効果の影響を解明するものである。RT 不安定性は、第 1 章で述べたように、核融合プラズマの圧力駆動型不安定性、バルーニング不安定性とも関連する現象である [20]。バルーニング不安定性はトロイダル方向に対して最も不安定となっている。核融合プラズマのポロイダル断面の一部に着目すると、圧力駆動型不安定性の駆動源となっている圧力勾配及び曲率効果の一部を一様重力としてモデル化することで RT 不安定性と類推することが可能である。(図 6.1 参照)

本論文の研究結果から、拡張 MHD モデルを用いた高波数モードを高精度で表現する解析は核融合プラズマでも必要であると考えられる。大型ヘリカル装置 (LHD) では、圧力駆動型不安定性が発生すると考えられる内寄せ配位の実験では、5% 以上の高い  $\beta$  値が得られている。従って、実験結果は圧力駆動型不安定性には何らかの抑制・飽和機構が存在する事を示唆している。これまでも実験結果を理論的に解明するために一流体モデルを用いた解析が行われているが、実験結果を

十分に説明する結果は得られていない。実験結果を十分に再現できていない事例として Miura et al[56] 及び Sato[58] の事例を挙げる。

Sakakibara et al による LHD 内寄せ配位での実験 [55] では、ある有理面での不安定性が存在する間は  $\beta$  値の上昇が制限されプラズマが不安定となるが、プラズマの崩壊までは至らない結果が得られている。Miura and Nakajima[56] は一流体モデルを用いて実験と類似の初期平衡プロファイルによる非線形シミュレーションを行った。しかしながらシミュレーションでは、高波数モードが早く成長しプラズマを不安定にした後に、遅れて成長してきた低波数モードによりプラズマコア部が崩壊してしまう結果となった。この論文では中程度の（あるいはより短い）波長のモードに対しては一流体モデルによる解析では十分に安定化されないことが指摘されている。

Sakakibara et al による別の実験 [57] では、プラズマ中心部では磁気井戸、周辺部では磁気丘となる、周辺部で MHD 不安定性が発生すると予測される磁場配位で実験が行われた。予測通り、周辺部で圧力勾配駆動型不安定性と考えられる MHD 不安定性が観測されたが、先の実験とは異なり中心部まで不安定性が影響を与えずに 4.8 % の高い  $\beta$  値が得られる結果が得られている。この実験結果を数値シミュレーションで示すために、Sato[58] は一流体モデルを用いて、プラズマ中心部では磁気井戸、周辺部では磁気丘となる磁場配位で数値シミュレーションを行った。このシミュレーションにおいても、前述したシミュレーション研究と同様に、周辺部で発生した MHD 不安定性が中心部にまで影響しプラズマコア部が崩壊してしまう結果となった。このように、一流体モデルを用いた数値シミュレーションでは、LHD における実験結果を十分に再現出来ていないのが現状である。一流体 MHD モデルで圧力駆動型不安定性を上手く説明出来ていない理由として、圧力駆動型不安定性の高波数モードに対しては、一流体 MHD モデルでは考慮していない Hall 項及びジャイロ粘性等の微視的効果とその成長に大きく影響することが指摘されている。従って、一流体 MHD モデルにこれらの微視的効果を取り入れた拡張 MHD モデルを用いた 3 次元数値シミュレーションを行う必要があるものと考えられる。

本研究を上記のようなトラスプラズマに応用した場合には二次元の場合に比べて状況が複雑化することが容易に想像出来る。バルーニング不安定性に応用した場合には高波数モードの固有関数が動径方向に重なり合うことが予想される。一流体 MHD モデルに対してジャイロ粘性を取り入れた場合には、イオン温度勾配駆動型 (ITG) モードが不安定化することが知られている。また、2 次元から 3 次元へと次元が増えることで非線形相互作用の組み合わせが増加し、形状効果（トロイダルカップリングなど）も起きると考えられる。しかしながら、以下で示されるような本研究で明らかとなった基礎的な特性のいくつかは 3 次元の現象でも現れるものと考えられる。(いずれも、Hall 項及びジャイロ粘性を同時に加える事を考える。)

- ・ Hall 項及びジャイロ粘性が同時に存在することによる、高波数モードの成長率の大きな減少。
- ・ 高波数モードの安定化が低波数モードの成長に及ぼす影響。(低波数モードの線形段階の長期化)。
- ・ 密度変化が小さい安定性限界付近における、不安定性の発生する界面近傍での急峻な密度勾配の形成及び二次不安定性 (KH 型不安定性) の成長。
- ・ 急峻な密度勾配、速度シア層が発生する事に伴う、広い波数空間 (高い数値解像度) を確保する

必要性。

この様な影響を明らかにするには、高波数モードを高精度で表現する必要があり、これにいくつかの困難が伴う事は第 1 章で述べた通りである。この論文では使わなかったが、核融合プラズマにおける拡張 MHD モデルを用いて高波数モードまで精度良く解析するための適応するための数値シミュレーションコードの開発を行った。このコード開発プロジェクトの企画書の概要については、付録 B にまとめられている。この論文の発展として、この様な一般化座標系を用いた数値シミュレーションにより、核融合プラズマの交換型モードなどに対する Hall 項、ジャイロ粘性の影響を調べる事は、MHD に対する非理想的効果の解明のために有効であると考えられる。

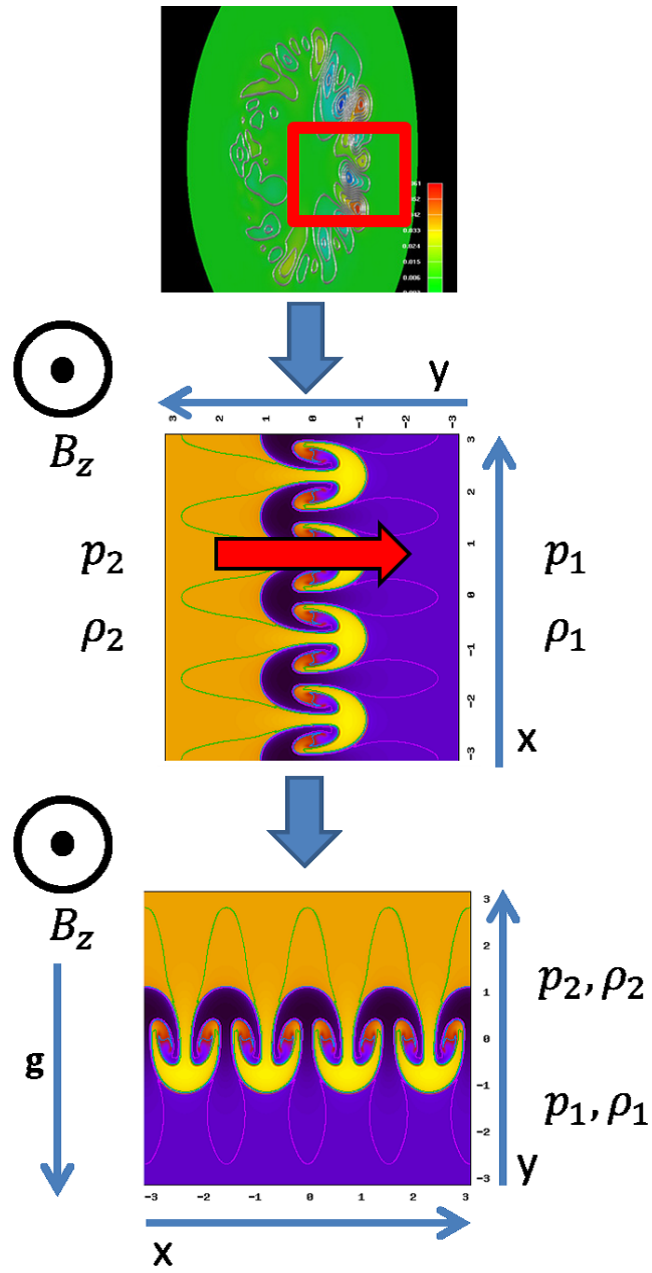


図 6.1 圧力駆動型不安定性と RT 不安定性の類似性

## 謝辞

本研究を遂行し、学位論文をまとめるに当たり、多くの助言・御指導を頂きました、主任指導教員である核融合科学研究所 三浦英昭准教授に心から感謝申し上げます。流体の数値シミュレーションについて基礎的な内容から私に懇切丁寧に指導して頂きましてありがとうございました。不安定性の線形解析手法についてご指導頂いた指導教員である核融合科学研究所 伊藤淳助教に感謝申し上げます。研究内容や陰解法について数多くの助言を頂きました、佐藤雅彦助教に感謝申し上げます。審査委員として多くの助言・叱咤激励を頂きました、核融合科学研究所 榎原悟教授、核融合科学研究所 藤堂泰教授、岡山理科大学 荒木圭典教授、日本原子力研究開発機構 相羽信行博士には深く感謝致します。プラズマシミュレータでのプログラムの並列化について相談に乗って頂きました、株式会社日立製作所のエンジニアの皆様には感謝を申し上げます。また、研究を進めるに当たって私生活面でも多くの助言・手助けを頂きました、同室の羽鳥智栄君、朝比祐一君、Pianpanit Theerasarn 君をはじめとする核融合科学研究所の学生の皆様、本当にありがとうございました。



## 付録 A 線形安定性解析

第5章では、WKB近似による線形解析を行った。式(5.8)に現れる係数は、具体的には以下のような表現をとる：

$$\begin{aligned}
 A_1(x; \omega, k) = & \frac{\beta}{2} \gamma \bar{p}_0 + \bar{B}_0^2 + \frac{\delta}{4} (1 - \gamma) \tau \beta \frac{d_i}{L} \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{\bar{p}_0 \bar{V}'_0}{\bar{B}_0} \\
 & + \lambda \bar{k} \frac{d_i}{L} \frac{V_{Ac}}{V_*} \frac{1}{\bar{n}_0 \bar{B}_0} \frac{\bar{B}_0^2 + \frac{\delta}{4} \tau \beta \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\bar{p}_0 \bar{V}'_0}{\bar{B}_0}}{\Omega_0 - \lambda \bar{k} \frac{d_i}{L} \frac{V_{Ac}}{V_*} \frac{\bar{n}'_0}{\bar{n}_0^2} \bar{B}_0} \\
 & \times \left[ \bar{B}_0^2 \left( \frac{\bar{n}'_0}{\bar{n}_0} - \frac{\bar{B}'_0}{\bar{B}_0} \right) + \frac{\beta}{2} (1 - \tau) \left( \frac{\bar{n}'_0}{\bar{n}_0} \gamma \bar{p}_0 - \bar{p}'_0 \right) \right] \quad (A.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_1(x; \omega, k) = & \frac{\beta}{2} \gamma \left( \bar{p}'_0 + \frac{k \bar{V}'_0}{\Omega_0} \bar{p}_0 \right) \left( 1 - \frac{\delta}{2} \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\tau \bar{V}'_0}{\bar{B}_0} \right) + 2 \bar{B}_0 \bar{B}'_0 \\
 & + \frac{k \bar{V}'_0}{\Omega_0} \left( \bar{B}_0^2 + \frac{\delta}{4} \tau \beta \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\bar{p}_0 \bar{V}'_0}{\bar{B}_0} \right) \\
 & + \frac{\delta}{4} \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\tau \beta}{\bar{B}_0} \left[ \left( \frac{\bar{B}'_0}{\bar{B}_0} \bar{V}'_0 - \bar{V}''_0 \right) \gamma \bar{p}_0 + \bar{p}'_0 \bar{V}'_0 + 2 \bar{p}_0 \bar{V}''_0 - \frac{\bar{B}'_0}{\bar{B}_0} \bar{p}_0 \bar{V}'_0 \right] \\
 & + \lambda \bar{k} \frac{d_i}{L} \frac{V_{Ac}}{V_*} \frac{1}{\bar{n}_0 \bar{B}_0} \frac{1}{\Omega_0 - \lambda \bar{k} \frac{d_i}{L} \frac{V_{Ac}}{V_*} \frac{\bar{n}'_0}{\bar{n}_0^2} \bar{B}_0} \left\{ \left( \bar{B}_0^2 + \frac{\delta}{4} \tau \beta \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\bar{p}_0 \bar{V}'_0}{\bar{B}_0} \right) \right. \\
 & \times \left\{ \frac{\beta}{2} \gamma (1 - \tau) \frac{1}{\bar{n}_0} \left[ \left( -\frac{2 \bar{n}'_0}{\bar{n}_0} - \frac{\bar{B}'_0}{\bar{B}_0} + \frac{k \bar{V}'_0}{\Omega_0} \right) \bar{n}'_0 \bar{p}_0 + \bar{n}''_0 \bar{p}_0 + \bar{n}'_0 \bar{p}'_0 \right] \right. \\
 & - \bar{B}_0 \left( \bar{B}_0'' + \frac{k \bar{V}'_0}{\Omega_0} \bar{B}'_0 \right) + \frac{\beta}{2} (1 - \tau) \left[ \left( \frac{\bar{n}'_0}{\bar{n}_0} + \frac{\bar{B}'_0}{\bar{B}_0} - \frac{k \bar{V}'_0}{\Omega_0} \right) \bar{p}'_0 - \bar{p}''_0 \right] \\
 & \left. \left. + \frac{\bar{B}_0^2}{\bar{n}_0} \left[ \bar{n}'_0 \left( -\frac{2 \bar{n}'_0}{\bar{n}_0} + \frac{2 \bar{B}'_0}{\bar{B}_0} + \frac{k \bar{V}'_0}{\Omega_0} \right) + \bar{n}''_0 \right] \right\} \right. \\
 & + \left\{ \frac{\bar{n}'_0}{\bar{n}_0} \left[ \frac{\beta}{2} \gamma (1 - \tau) \bar{p}_0 + \bar{B}_0^2 \right] - \bar{B}_0 \bar{B}'_0 - \frac{\beta}{2} (1 - \tau) \bar{p}'_0 \right\} \\
 & \times \left[ 2 \bar{B}_0 \bar{B}'_0 + \frac{k \bar{V}'_0}{\Omega_0} \left( \bar{B}_0^2 + \frac{\delta}{4} \tau \beta \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\bar{p}_0 \bar{V}'_0}{\bar{B}_0} \right) \right. \\
 & + \frac{\delta}{4} \tau \beta \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{1}{\bar{B}_0} \left( \bar{p}'_0 \bar{V}'_0 + \bar{p}_0 \bar{V}''_0 - \frac{\bar{B}'_0}{\bar{B}_0} \bar{p}_0 \bar{V}'_0 \right) \\
 & + \lambda \bar{k} \frac{d_i}{L} \frac{V_{Ac}}{V_*} \frac{1}{\bar{n}_0^2} \frac{\bar{B}_0^2 + \frac{\delta}{4} \tau \beta \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\bar{p}_0 \bar{V}'_0}{\bar{B}_0}}{\Omega_0 - \lambda \bar{k} \frac{d_i}{L} \frac{V_{Ac}}{V_*} \frac{\bar{n}'_0}{\bar{n}_0^2} \bar{B}_0} \\
 & \left. \left. \times \left( \frac{k \bar{V}'_0}{\Omega_0} \bar{n}'_0 \bar{B}_0 + \bar{n}''_0 \bar{B}_0 + \bar{n}'_0 \bar{B}'_0 - \frac{2 \bar{n}'_0{}^2}{\bar{n}_0} \bar{B}_0 \right) \right] \right\} \quad (A.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1(x; \omega, k) = & \frac{V_*^2}{V_{Ac}^2} \bar{n}_0 \Omega_0^2 + \frac{\delta}{4} \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \tau \beta \frac{k \Omega_0}{\bar{B}_0} \left( \bar{p}'_0 - \frac{\bar{B}'_0}{\bar{B}_0} \bar{p}_0 \right) \\
& + \frac{\beta}{2} \left( \bar{p}''_0 + \frac{k \bar{V}'_0}{\Omega_0} \bar{p}'_0 \right) \left( 1 - \frac{\delta}{2} \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\tau \bar{V}'_0}{\bar{B}_0} \right) \\
& + \frac{\delta}{4} \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \tau \beta \frac{\bar{p}'_0}{\bar{B}_0} \left( \frac{\bar{B}'_0}{\bar{B}_0} \bar{V}'_0 - \bar{V}''_0 \right) - \frac{Lg}{V_{Ac}^2} \bar{n}'_0 \\
& + \frac{1}{\bar{B}_0} \left( \bar{B}_0'' - \frac{\bar{B}_0'^2}{\bar{B}_0} \right) \left( \bar{B}_0^2 + \frac{\delta}{4} \tau \beta \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\bar{p}_0 \bar{V}'_0}{\bar{B}_0} \right) \\
& + \frac{\bar{B}'_0}{\bar{B}_0} \left[ \frac{k \bar{V}'_0}{\Omega_0} \left( \bar{B}_0^2 + \frac{\delta}{4} \tau \beta \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\bar{p}_0 \bar{V}'_0}{\bar{B}_0} \right) + 2 \bar{B}_0 \bar{B}'_0 \right. \\
& \left. + \frac{\delta}{4} \tau \beta \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{1}{\bar{B}_0} \left( \bar{p}'_0 \bar{V}'_0 + \bar{p}_0 \bar{V}''_0 - \frac{\bar{B}'_0}{\bar{B}_0} \bar{p}_0 \bar{V}'_0 \right) \right] \tag{A.3}
\end{aligned}$$

$$D_1(x; \omega, k) = \frac{\delta}{4} \tau \beta \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\bar{p}_0}{\bar{B}_0} \Omega_0 \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
E_1(x; \omega, k) = & -\frac{\beta}{2} k \gamma \bar{p}_0 \left( 1 - \frac{\delta}{2} \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\tau \bar{V}'_0}{\bar{B}_0} \right) + \frac{\delta}{4} \tau \beta \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\Omega_0}{\bar{B}_0} \left( \bar{p}'_0 - \frac{\bar{B}'_0}{\bar{B}_0} \bar{p}_0 \right) \\
& - k \left( \bar{B}_0^2 + \frac{\delta}{4} \tau \beta \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\bar{p}_0 \bar{V}'_0}{\bar{B}_0} \right) \\
& - \lambda \bar{k}^2 \frac{V_{Ac}}{V_*} \frac{d_i}{L} \frac{1}{\bar{n}_0 \bar{B}_0} \frac{\bar{B}_0^2 + \frac{\delta}{4} \tau \beta \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\bar{p}_0 \bar{V}'_0}{\bar{B}_0}}{\Omega_0 - \lambda \bar{k} \frac{d_i}{L} \frac{V_{Ac}}{V_*} \frac{\bar{n}'_0}{\bar{n}_0^2} \bar{B}_0} \\
& \times \left[ \bar{B}_0^2 \left( \frac{\bar{n}'_0}{\bar{n}_0} - \frac{\bar{B}'_0}{\bar{B}_0} \right) + \frac{\beta}{2} (1 - \tau) \left( \frac{\bar{n}'_0}{\bar{n}_0} \gamma \bar{p}_0 - \bar{p}'_0 \right) \right] \tag{A.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1(x; \omega, k) = & -\frac{\beta}{2}\gamma \left( \bar{p}'_0 + \frac{k\bar{V}'_0}{\Omega_0} \bar{p}_0 \right) \left( 1 - \frac{\delta}{2} \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\tau \bar{V}'_0}{\bar{B}_0} \right) \\
& + \frac{\delta}{4} \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \tau \beta \frac{\bar{p}_0}{\bar{B}_0} \left[ -k\Omega_0 + \gamma \left( \bar{V}'_0 - \frac{\bar{B}'_0}{\bar{B}_0} \bar{V}'_0 \right) \right] + \frac{Lg}{V_{Ac}^2} \bar{n}_0 \\
& - \frac{k\bar{V}'_0}{\Omega_0} \left( \bar{B}_0^2 + \frac{\delta}{4} \tau \beta \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\bar{p}_0 \bar{V}'_0}{\bar{B}_0} \right) \\
& - \left[ 2\bar{B}_0 \bar{B}'_0 + \frac{\delta}{4} \tau \beta \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{1}{\bar{B}_0} \left( \bar{p}'_0 \bar{V}'_0 + \bar{p}_0 \bar{V}''_0 - \frac{\bar{B}'_0}{\bar{B}_0} \bar{p}_0 \bar{V}'_0 \right) \right] \\
& - \lambda \bar{k} \frac{V_{Ac}}{V_*} \frac{d_i}{L} \frac{1}{\bar{n}_0 \bar{B}_0} \frac{1}{\Omega_0 - \lambda \bar{k} \frac{d_i}{L} \frac{V_{Ac}}{V_*} \frac{\bar{n}'_0}{\bar{n}_0^2} \bar{B}_0} \left\{ \left[ \left( \bar{B}_0^2 + \frac{\delta}{4} \tau \beta \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\bar{p}_0 \bar{V}'_0}{\bar{B}_0} \right) \right. \right. \\
& \times \left. \left( -\frac{\bar{n}'_0}{\bar{n}_0} + \frac{2k\bar{V}'_0}{\Omega_0} + \lambda \bar{k} \frac{V_{Ac}}{V_*} \frac{d_i}{L} \frac{\bar{B}_0}{\bar{n}_0^2} \frac{k\bar{V}'_0 \bar{n}'_0 + \bar{n}'_0 \frac{\bar{B}'_0}{\bar{B}_0} + \bar{n}''_0 - \frac{2\bar{n}_0'^2}{\bar{n}_0}}{\Omega_0 - \lambda \bar{k} \frac{d_i}{L} \frac{V_{Ac}}{V_*} \frac{\bar{n}'_0}{\bar{n}_0^2} \bar{B}_0} \right) \right. \\
& + \bar{B}_0 \bar{B}'_0 + \frac{\delta}{4} \tau \beta \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{1}{\bar{B}_0} \left( \bar{p}'_0 \bar{V}'_0 + \bar{p}_0 \bar{V}''_0 - \frac{2\bar{B}'_0}{\bar{B}_0} \bar{p}_0 \bar{V}'_0 \right) \\
& \times \left[ \bar{B}_0^2 \left( \frac{\bar{n}'_0}{\bar{n}_0} - \frac{\bar{B}'_0}{\bar{B}_0} \right) + \frac{\beta}{2} (1 - \tau) \left( \frac{\bar{n}'_0}{\bar{n}_0} \gamma \bar{p}_0 - \bar{p}'_0 \right) \right] \\
& + \left( \bar{B}_0^2 + \frac{\delta}{4} \tau \beta \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\bar{p}_0 \bar{V}'_0}{\bar{B}_0} \right) \left\{ \bar{B}_0 \bar{B}'_0 \left( \frac{2\bar{n}'_0}{\bar{n}_0} - \frac{\bar{B}'_0}{\bar{B}_0} \right) - \bar{B}_0 \bar{B}''_0 \right. \\
& \left. + \frac{\bar{B}_0^2}{\bar{n}_0} \left( \bar{n}''_0 - \frac{\bar{n}_0'^2}{\bar{n}_0} \right) + \frac{\beta}{2} (1 - \tau) \left[ \frac{\gamma \bar{p}_0}{\bar{n}_0} \left( \bar{n}''_0 - \frac{\bar{n}_0'^2}{\bar{n}_0} \right) + \frac{\bar{n}'_0}{\bar{n}_0} \gamma \bar{p}'_0 - \bar{p}''_0 \right] \right\} \quad (A.6)
\end{aligned}$$

$$A_2(x; \omega, k) = \frac{\delta}{4} \tau \beta \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\bar{p}_0}{\bar{B}_0} \Omega_0 \quad (A.7)$$

$$\begin{aligned}
B_2(x; \omega, k) = & \frac{\delta}{4} \tau \beta \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\Omega_0}{\bar{B}_0} \left( \bar{p}'_0 - \frac{\bar{B}'_0}{\bar{B}_0} \bar{p}_0 \right) + \frac{\beta}{2} k \gamma \bar{p}_0 \left( 1 + \frac{\delta}{2} \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\tau \bar{V}'_0}{\bar{B}_0} \right) \\
& + k \left( \bar{B}_0^2 - \frac{\delta}{4} \tau \beta \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\bar{p}_0 \bar{V}'_0}{\bar{B}_0} \right) \\
& + \lambda \bar{k}^2 \frac{d_i}{L} \frac{V_{Ac}}{V_*} \frac{1}{\bar{n}_0 \bar{B}_0} \frac{\bar{B}_0^2 - \frac{\delta}{4} \tau \beta \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\bar{p}_0 \bar{V}'_0}{\bar{B}_0}}{\Omega_0 - \lambda \bar{k} \frac{d_i}{L} \frac{V_{Ac}}{V_*} \frac{\bar{n}'_0}{\bar{n}_0^2} \bar{B}_0} \\
& \times \left[ \bar{B}_0^2 \left( \frac{\bar{n}'_0}{\bar{n}_0} - \frac{\bar{B}'_0}{\bar{B}_0} \right) + \frac{\beta}{2} (1 - \tau) \left( \frac{\bar{n}'_0}{\bar{n}_0} \gamma \bar{p}_0 - \bar{p}'_0 \right) \right] \quad (A.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2(x; \omega, k) = & \frac{V_*^2}{V_{Ac}^2} \bar{n}_0 \bar{V}'_0 \Omega_0 - \frac{\delta}{4} \tau \beta \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\bar{p}_0}{\bar{B}_0} \bar{k}^2 \Omega_0 \\
& + \frac{\beta}{2} \bar{k} \bar{p}'_0 \left( 1 + \frac{\delta}{2} \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\tau \bar{V}'_0}{\bar{B}_0} \right) + \bar{k} \frac{\bar{B}'_0}{\bar{B}_0} \left( \bar{B}_0^2 - \frac{\delta}{4} \tau \beta \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\bar{p}_0 \bar{V}'_0}{\bar{B}_0} \right) \quad (A.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(x; \omega, k) &= \frac{V_*^2}{V_{Ac}^2} \bar{n}_0 \Omega_0^2 + \frac{\delta}{4} \tau \beta \bar{k} \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\Omega_0}{\bar{B}_0} \left( \bar{p}'_0 - \frac{\bar{B}'_0}{\bar{B}_0} \bar{p}_0 \right) \\
&\quad - \frac{\beta}{2} \bar{k}^2 \gamma \bar{p}_0 \left( 1 + \frac{\delta}{2} \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\tau \bar{V}'_0}{\bar{B}_0} \right) - \bar{k}^2 \left( \bar{B}_0^2 - \frac{\delta}{4} \tau \beta \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\bar{p}_0 \bar{V}'_0}{\bar{B}_0} \right) \\
&\quad - \lambda \bar{k}^3 \frac{d_i}{L} \frac{V_{Ac}}{V_*} \frac{1}{\bar{n}_0 \bar{B}_0} \frac{\bar{B}_0^2 - \frac{\delta}{4} \tau \beta \frac{V_*}{V_{Ac}} \frac{d_i}{L} \frac{\bar{p}_0 \bar{V}'_0}{\bar{B}_0}}{\Omega_0 - \lambda \bar{k} \frac{d_i}{L} \frac{V_{Ac}}{V_*} \frac{\bar{n}'_0}{\bar{n}_0^2} \bar{B}_0} \\
&\quad \times \left[ \bar{B}_0^2 \left( \frac{\bar{n}'_0}{\bar{n}_0} - \frac{\bar{B}'_0}{\bar{B}_0} \right) + \frac{\beta}{2} (1 - \tau) \left( \frac{\bar{n}'_0}{\bar{n}_0} \gamma \bar{p}_0 - \bar{p}'_0 \right) \right] \tag{A.10}
\end{aligned}$$

$$\Omega_0 = \omega - \bar{k} \bar{V}_0$$

ここで以下の無次元化及び上付きの' は物理量の y 方向への微分である。

$$\mathbf{B} \equiv B_* \bar{\mathbf{B}}, \quad n \equiv n_* \bar{n}, \quad p \equiv p_* \bar{p}, \quad \mathbf{v} \equiv V_{Ac} \bar{\mathbf{v}}, \quad x \equiv L \bar{x}, \quad \omega = (V_*/L) \bar{\omega}, \quad k = \bar{k}/L$$

これらの係数では以下の物理量を用いて表現されている。

$$\beta = \frac{2p_*}{B_*^2/\mu_0}, \quad V_{Ac} = \frac{B_*}{\sqrt{\mu_0 n_* m_i}}, \quad d_i = \sqrt{\frac{m_i}{\mu_0 n_* e^2}}$$

又、線形解析では以下で表されるプロファイルを仮定している。

$$\mathbf{g} = g \mathbf{e}_y, \tag{A.11}$$

$$g = \text{const.} \tag{A.12}$$

$$\mathbf{B}_0 = B_0(y) \mathbf{e}_z, \tag{A.13}$$

$$n_0 = n_0(y), \tag{A.14}$$

$$p_0 = p_0(y), \tag{A.15}$$

$$\mathbf{v}_0 = V_0(y) \mathbf{e}_x, \tag{A.16}$$

$$p_{i0} = \tau p_0, \tag{A.17}$$

$$p_{e0} = (1 - \tau) p_0. \tag{A.18}$$

## 付録 B 一般化座標系を用いた拡張 MHD コードの開発

### B.1 背景

磁場閉じ込め核融合のトラスプラズマに現れる交換型不安定性等の圧力駆動型電磁流体力学 (MHD) 不安定性は、装置の性能を左右する重要な物理現象である。圧力駆動型不安定性が顕著に表れる例としては、トカマク装置で報告されている Edge Localized Mode (ELM) 現象 [65, 66] や、核融合科学研究所の大型ヘリカル装置 (LHD) における交換型・バルーニング不安定性 [55, 56, 57, 58] などが挙げられる。ELM は、プラズマ中心部から周辺部へのエネルギー及び粒子の準周期的な吐き出し現象である。吐き出されたエネルギーはダイバータへと向かうため、ダイバータへの熱負荷が増大することが報告されている。高性能なプラズマの生成・維持や炉工学的な熱負荷の低減の観点からも ELM の制御及び成長機構の解明は喫緊の課題となっている。実験及び理論解析により、Type-I ELM と呼ばれる、振幅が大きく多くのエネルギーを吐き出す ELM は、トロイダルモード数  $n$  が 3~20 程度のピーリング・バルーニング不安定性がトリガーとなり発生していることが明らかとなっている。そのため、ピーリング・バルーニング不安定の数値シミュレーションが精力的に行われている。他方、LHD における圧力駆動型不安定性は、LHD における高  $\beta$  値の実現状況に鑑みて、振幅が十分に大きくなる前に飽和していると考えられる。その飽和機構の理解は十分ではなく、また、今後さらに高  $\beta$  を目指す上で調べるべきことは多い。さらに、トカマク型装置の ELM 現象と LHD におけるバルーニング不安定性について、共通の物理的性質の理解を進める必要がある。

圧力駆動型不安定性の研究には、これまで一流体 MHD モデル (以下、一流体モデル) が主に用いられてきた。一流体モデルを用いた圧力駆動型不安定性の線形解析では高波数モードほど成長率が高くなるが、一流体モデルでは有限ラーマー半径 (FLR) 効果や二流体効果といった微視的效果が無視されている。このため、高波数モードの解析モデルとしては一流体モデルでは不十分であることが知られており、一流体モデルに微視的效果を取り入れた拡張 MHD モデルを採用する必要がある [22, 23, 24, 40, 25, 26, 27, 28]。拡張 MHD モデルを採用した 3 次元シミュレーションコードは盛んに開発が進められており、現時点ではトカマク型の装置について JOREK[35]、M3D[36]、NIMROD[37]、XTOR-2F[61] コードなどが、ヘリカル型の装置については MINOS[62]、MIPS[63] コードが挙げられる。これらのコードでは空間的表現にスペクトル法、有限要素法もしくは有限差分法が採用されている。トカマク型のコードはトカマク型装置に特化した仕様となっており、トカマク型とヘリカル型を同一のコードを用いて研究するには、大掛かりなコード改良が必要になる。他方、ヘリカル型装置用のコード MINOS、MIPS は磁気面に沿った座標を採用していないため、ELM のように大密度勾配領域における高波数の不安定性を高精度でシミュレーションするためには、他のコード以上に高い数値解像度 (格子点数) が要求される。これは、二流体効果に伴って現れる分散性波動と、これによる厳しい時間ステップ制限などを考えると、相当困難な事となる。このため、トカマク型とヘリカル型のプラズマに共通する物理、特に ELM や圧力駆動型不安定性の

高波数モードに対する微視的効果の影響について詳細に解析を行うためには、2つの系に同じように使う事が可能で、かつ、磁気面に沿った格子を使用できるシミュレーションコードを開発することが有効であると考えられる。

本プロジェクトは、トラスプラズマにおける ELM や圧力駆動型不安定性の線形・非線形成長に対する微視的効果の影響を明らかにするために、一般化座標系と差分法を用いた 3次元拡張 MHD シミュレーションコード開発を行うものである。従来のトカマク型の 3次元シミュレーションコードではフーリエ分解によるスペクトル法と有限要素法の組み合わせが主流であるのに対し、トカマク型・ヘリカル型の装置形状に対する柔軟性とシミュレーションコードの高並列性を同時に確保するために、差分法を採用した新しいコードを開発する。本プロジェクト企画提案者の博士論文研究は、3次元シミュレーションでは十分に調べきれない微細な現象や様々なパラメータに対する依存性を調べるために、Rayleigh-Taylor 不安定性（これは圧力駆動型不安定性と同様の性質をもつ）に対する二流体効果、FLR 効果の 2次元シミュレーションを行うものであり、本プロジェクトはこの研究の 3次元トラスプラズマへの展開の一環と位置付けられる。博士論文研究では、二流体効果と FLR 効果の組み合わせが高波数の線形不安定モードに対して大きな安定化をもたらすこと、この安定化が遠因となって Kelvin-Helmholtz 型不安定性が 2次不安定性として発生し、場の乱れなどの性質を大きく変えることなどを明らかにした。この研究を核融合のトラスプラズマ 3次元シミュレーション研究に発展させ、トカマク型・ヘリカル型共通の物理課題としての、不安定性に対する微視的効果の解明に取り組むことを考えている。この研究に使用するためのシミュレーションコードをここで開発するものである。

## B.2 目的

本プロジェクトの目的は、トラスプラズマにおける ELM や圧力駆動型不安定性の線形・非線形成長に対する微視的効果の影響を明らかにする研究手段として、一般化座標系を用いた 3次元拡張 MHD シミュレーションコード開発を行うものである。一般化座標系と差分法を用いる事により、トカマク型・ヘリカル型の両方に使用できる柔軟性をもたせるとともに、高並列性も実現する。また、二流体効果、FLR 効果に伴って発生する分散性波動による厳しい時間刻み制限を緩和させるために、陰的手法も使用可能な構造とする。本プロジェクトで開発されたコードは、共同研究者等によって、今後の 3次元トラスプラズマの数値シミュレーション研究に使用される。本プロジェクトの達成目標は以下の 2点である。

(1) トカマク型・ヘリカル型の両装置形状に適用可能な、一般化座標系を用いた非線形拡張 MHD シミュレーションコードを開発する。

(2) 拡張 MHD シミュレーションコードの動作検証として、中空円環トラスでの交換型モードシミュレーション、トカマク装置の実形状に合わせた ELM の非線形シミュレーション、ヘリカル装置形状に合わせたバルーニングモードシミュレーションを実施し、線形解析結果、既報のシミュ

レーション結果及び実験結果と比較する。これにより、(1) で開発した拡張 MHD シミュレーションコードが、トカマク型、ヘリカル型を含むトーラスプラズマについて物理的に妥当なシミュレーション結果を出す事、従ってトカマク型・ヘリカル型に共通する圧力駆動型不安定性に対する微視的效果の研究に使用可能であることを確認する。

この2点を達成し、ここで開発するシミュレーションコードを、トカマク型・ヘリカル型共通の物理課題としての、不安定性に対する微視的效果の解明の研究に役立てる事が、このプロジェクトの最終目標となる。

### B.3 プロジェクト体制

本プロジェクトは拡張 MHD シミュレーションコードの開発を行うプロジェクトである。このプロジェクトでは、プロジェクト提案者（後藤）の他に、高度な技術をもったメンバーを雇用する形でコード開発を進める（表 1 参照）。このコード開発プロジェクトは、コードの基本モジュール開発からコード検証まで4年間を想定する。コード開発拠点は核融合科学研究所とし、成果物（シミュレーションコード）は、共同研究者全員が使用できるものとする。コード開発及び検証のための数値シミュレーションには、核融合科学研究所のスーパーコンピュータ「プラズマシミュレータ」、国際核融合エネルギー研究センターのスーパーコンピュータ「ヘリオス」の利用を想定し、このために必要な申請は毎年度、企画提案者が行うものとする。

### B.4 一般化座標系を用いた拡張 MHD 方程式の表現

本プロジェクトで開発するシミュレーションコードでは、プラズマの形状に沿った格子を生成し、この格子を利用して拡張 MHD 方程式を差分法で解く。このため、拡張 MHD 方程式は一般化座標系で表現する [43]。ELM など局在化した現象が発生するエッジ領域近傍（図 B.1 参照）に格子点を集中して生成することで、微視的效果が与える影響について線形/非線形両段階において詳細に解析が可能となる。一般化座標系  $(\xi, \eta, \zeta)$  と実空間でのトーラス形状との対応は図 B.2 の通りである。

本プロジェクトで採用する拡張 MHD 方程式を以下に示す。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}), \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) = -\nabla \cdot \left[ \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \mathbf{I} \left( p + \frac{B^2}{2} \right) - \mathbf{B} \mathbf{B} + \delta \mathbf{\Pi}^{gv} \right], \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_t}{\partial t} = & -\nabla \cdot \left[ \left( E_t + p + \frac{B^2}{2} \right) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} + \delta (\mathbf{v} \cdot \mathbf{\Pi}^{gv}) \right], \\ & -c \mathbf{B} \cdot \left[ \nabla \times \left\{ \frac{1}{\rho} (\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p_e) \right\} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times (-\mathbf{v}_e \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{v}_e) + \epsilon \frac{\nabla \rho \times \nabla p_e}{\rho^2}, \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{\Pi}_{gv} = \frac{p_i}{4} [\mathbf{b} \times \mathbf{W} \cdot (\mathbf{I} + 3\mathbf{b}\mathbf{b}) + \text{transpose}], \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{W} = \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T - \frac{2}{3} \mathbf{I} (\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v} - \frac{\epsilon}{\rho} \mathbf{J}, \quad (\text{B.7})$$

$$E_T = \frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{B^2}{2}. \quad (\text{B.8})$$

ここで、 $\rho, \mathbf{v}, \mathbf{B}, \mathbf{v}_e, p_e$  は質量密度、速度、磁場、電子速度、電子圧力を表している。又、 $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B, \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$  は単位磁場ベクトル、電流密度である。

本プロジェクトにおいては、保存量の保存性の向上と、直交座標系から一般化座標系への変換の見通しの良さを確保するため、出来る限り保存形で表現を行っている。前者はシミュレーションにおいて数値発散を起こりにくくする効果をもたらし、後者はシミュレーションコードの保守管理を容易にする。直交座標系と一般化座標系での空間微分の関係は以下のように表すことが出来る。

$$\partial_x \equiv J \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi_x}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_x}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\zeta_x}{J} \right) \right\}, \quad (\text{B.9})$$

$$\partial_y \equiv J \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi_y}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_y}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\zeta_y}{J} \right) \right\}, \quad (\text{B.10})$$

$$\partial_z \equiv J \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi_z}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_z}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\zeta_z}{J} \right) \right\}. \quad (\text{B.11})$$

ここで  $J$  は Jacobian であり、

$$\frac{1}{J} \equiv x_\xi (y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) + x_\eta (y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta) + x_\zeta (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi), \quad (\text{B.12})$$

である。又、 $(x_i)_k \equiv \partial x_i / \partial k (x_i = x, y, z, k = \xi, \eta, \zeta)$  である。

保存形で表現可能な方程式系では、直交座標系から一般化座標系へ変換を行っても保存形の形式で書くことが可能である。一流体 MHD 方程式についてベクトル形式を用いて一直角座標上で表現すると、以下のように表される。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad (\text{B.13})$$



ここで

$$Q = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e, B_x, B_y, B_z]^T, \quad (\text{B.14})$$

$$E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u u + p + B^2/2 - B_x B_x \\ \rho u v - B_x B_y \\ \rho u w - B_x B_z \\ (e + p + B^2/2) u \\ 0 \\ u B_y - v B_x \\ u B_z - w B_x \end{bmatrix}, \quad (\text{B.15})$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v v + p + B^2/2 - B_y B_y \\ \rho v w - B_y B_z \\ (e + p + B^2/2) v \\ v B_x - u B_y \\ 0 \\ v B_z - w B_y \end{bmatrix}, \quad (\text{B.16})$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho w w + p + B^2/2 - B_z B_z \\ \rho v w - B_y B_z \\ \rho u w - B_x B_z \\ (e + p + B^2/2) w \\ w B_x - u B_z \\ w B_y - v B_z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.17})$$

である。これを一般化座標系へ変換すると、以下のように表現される。

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} = 0, \quad (\text{B.18})$$

ここで

$$\hat{Q} = \frac{1}{J} [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e, B_x, B_y, B_z]^T, \quad (\text{B.19})$$

$$\hat{E} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x(p + B^2/2) - B_x B_\xi \\ \rho v U + \xi_y(p + B^2/2) - B_y B_\xi \\ \rho w U + \xi_z(p + B^2/2) - B_z B_\xi \\ (e + p + B^2/2) U - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) B_\xi \\ B_x U - u B_\xi \\ B_y U - v B_\xi \\ B_z U - w B_\xi \end{bmatrix}, \quad (\text{B.20})$$

$$\hat{F} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x(p + B^2/2) - B_x B_\eta \\ \rho v V + \eta_y(p + B^2/2) - B_y B_\eta \\ \rho w V + \eta_z(p + B^2/2) - B_z B_\eta \\ (e + p + B^2/2) V - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) B_\eta \\ B_x V - u B_\eta \\ B_y V - v B_\eta \\ B_z V - w B_\eta \end{bmatrix}, \quad (\text{B.21})$$

$$\hat{G} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho W \\ \rho u W + \zeta_x(p + B^2/2) - B_x B_\zeta \\ \rho v W + \zeta_y(p + B^2/2) - B_y B_\zeta \\ \rho w W + \zeta_z(p + B^2/2) - B_z B_\zeta \\ (e + p + B^2/2) W - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) B_\zeta \\ B_x W - u B_\zeta \\ B_y W - v B_\zeta \\ B_z W - w B_\zeta \end{bmatrix}, \quad (\text{B.22})$$

であり、

$$U = \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w, \quad (\text{B.23})$$

$$V = \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w, \quad (\text{B.24})$$

$$W = \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w, \quad (\text{B.25})$$

$$B_\xi = \xi_x B_x + \xi_y B_y + \xi_z B_z \quad (\text{B.26})$$

$$B_\eta = \eta_x B_x + \eta_y B_y + \eta_z B_z \quad (\text{B.27})$$

$$B_\zeta = \zeta_x B_x + \zeta_y B_y + \zeta_z B_z \quad (\text{B.28})$$

$$(\text{B.29})$$

はベクトルの反変成分である。ジャイロ粘性テンソル及び二流体項についても直交座標系での表現を一般化座標系に変換して表現を行う。なお、二流体項は保存形式では表現できないため、上記とは別に表現する。

## B.5 実施計画

### B.5.1 数値シミュレーションコードの基本仕様

シミュレーションコードが満たすべき基本仕様は以下の通りである。ただし、使用する計算手法の詳細については、別途文献を例示していない限り、文献 [43, 67] を参照のこと。

(1) 方程式系：一般化座標、保存形式で記述された拡張 MHD 方程式、式 (B.1)-(B.27) を用いる。格子は通常格子 (所謂 regular grid) を想定する。各格子点の座標は格子生成モジュールを通じて与えられ、メトリックは解析的に、もしくは格子データの微分として与える。

(2) 空間解像度と領域分割：トカマク装置において ELM が発生する領域の目安として、安全係数  $q = m/n = 4$  を考える。ここで  $m, n$  はポロイダルモード数、トロイダルモード数である。この時に確保すべき波数空間を概算すると、少なくとも線形段階では ( $n = 20, m = 80$ )、非線形段階では ( $n = 50, m = 200$ ) 程度の波数空間は確保する必要がある。格子点数  $N$  で表現可能な波数は、3 次の非線形方程式の場合、エイリアシング誤差を考慮すると  $N/4$  である。従って、最低でもポロイダル方向に ( $4 \times 200$ ) 点・トロイダル方向に ( $4 \times 50$ ) 点の格子点数を確保しなければ、ELM の解析に必要な波数を表現することが出来ない。径方向にも同程度の格子点数 (800 点) は確保する必要があるものと考えられる。必要となるメモリ容量は

$8\text{byte} \times 800 \times 800 \times 200 \times (8 \text{ 変数} + \text{作業変数})$

となり、最低でも数百 GB 程度が必要となるものと考えられる。さらに、本論文で行われた 2 次元拡張 MHD シミュレーションと同程度の空間解像度で 3 次元シミュレーションを行う場合には、格子点数を各方向について数倍程度増加したシミュレーションコード (3 次元格子点数では 100 倍程度増加) を行う必要があるものと考えられる。そのため、MPI による領域分割が必要不可欠である。最大で 16384 個程度への領域分割を想定した、3 次元領域分割機能を実装する。

(3) 空間微分の近似：4 次精度の中心差分法を採用する。空間微分を表現するサブルーチンは、一階微分、二階微分作用素の他、ベクトル形式での微分作用素 (勾配  $\nabla$ 、発散  $\nabla \cdot$ 、回転  $\nabla \times$ ) を与えるものとする。

4 次精度中心差分による一階微分を一次元問題の場合について例示すると、関数  $f(x)$  の  $i$  番目の格子点上での値  $f_i$  を用いて、

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12\Delta x} + O(\Delta x^4), \quad (\text{B.30})$$

と表される。ここで  $\Delta x$  は格子点間の間隔である。

また、シミュレーションを安定化させるために、拡張 MHD 方程式 (B.1)-(B.4) の右辺に超粘性を導入する。関数  $f$  の 4 次精度の超粘性は

$$\mu \left( \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right) = \mu \frac{f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{\Delta x^4}, \quad (\text{B.31})$$

と表される。ここで  $\mu$  は超粘性係数である。

本プロジェクトでは、スイッチにより移流項の計算を Kawamura-Kuwahara(KK) スキーム [50] に切り替えられるように開発を行う。KK スキームは 3 次精度の風上差分であり、一次元の場合、流体速度  $c$  で場の関数  $f$  が移流される移流項は

$$\begin{aligned} c \frac{\partial f}{\partial x} &\approx \begin{cases} c \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 9f_i - 10f_{i-1} + 2f_{i-2}}{6\Delta x} & (c > 0) \\ -c \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 9f_i - 10f_{i-1} + 2f_{i-2}}{6\Delta x} & (c < 0) \end{cases} \\ &= c \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12\Delta x} + 3|c| \frac{f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{12\Delta x}, \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

と表される。実際のコードでは、拡張 MHD 方程式の速度ベクトル場の 3 つの成分 ( $u, v, w$ ) について、このような演算を行う。

(4) 時間発展スキーム：陽解法および陰解法の両者を選択できる構造とする。

陽解法は時間について 4 次精度の Runge-Kutta-Gill(RKG) 法を主に使用するが、計算量や主記憶容量を節約して計算できるように、3 次精度の低容量 Runge-Kutta 法も用意し、シミュレーション時にスイッチで切替可能とする。

陰解法には、半陰解法の一つである一般化された Crank-Nicholson 法 ( $\theta$  スキーム) を用いる。このスキームを一次元移流方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (\text{B.33})$$

に用いると、

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + c \left[ \theta \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} + (1 - \theta) \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} \right] = 0, \quad (\text{B.34})$$

と表される。ここで、 $f_i^n$  は  $n$  ステップ目の時間における、 $i$  番目の格子での関数  $f$  の値を表す。上付きの添え字  $n + 1$  は、この陰解法によって、既知のデータ (上付き添え字  $n$ ) に基づいて求めるべき解を表す。 $\theta$  は陽解法と陰解法の重みをコントロールするパラメータで、 $\theta = 1/2$  の場合は Crank-Nicholson スキーム、 $\theta = 1$  の場合は完全陰解法と呼ばれる。 $\theta$  スキームでは、この式を未来の時刻での関数値  $f_i^{n+1}$  についての連立方程式とみなして解を求める必要がある。このスキームを実装するにあたっては、このような一次元移流方程式とは異なり三次元格子 ( $i, j, k$ ) で表現された 8 変数ベクトル場についての大規模疎行列連立一次方程式の解を求めることになる。この行列解法には GMRES 法 [64] を用いる。

## B.6 シミュレーションコードの構成

本プロジェクトで開発を行う数値シミュレーションコードの主な構成要素を表 B.2 に示す。言語は Fortran90 を基本とするが、必要に応じて C 言語で記述された公開プログラムを利用する。シミュレーションコードの機能ごとにモジュールを作成する。ここで開発するモジュールとそのモジュールが提供する機能 (サブルーチン群) は表 B.2 の通りである。

## B.7 シミュレーションコードの動作検証

シミュレーションコードの動作検証には、3種類のシミュレーションを行う。

(1) 中空円環トラスでの交換型不安定性のシミュレーションを実施する。線形成長に対する線形成長率、線形固有関数の再現に関する検証を通じて、主に線形成長が理論と同様の結果を与える事を確認する。また、数値不安定性に対する安定性、保存量の保存性の確認を行う。

(2) トカマク装置 (JT60U を想定) 実形状での Type-I ELM のシミュレーションを実施する。理論・実験ともに精査が行われている（従って、シミュレーションによって再現の可能性が高い）磁気プロファイル・平衡を用いて非線形シミュレーションを実施し、既報の理論及び実験結果と同様の結果が得られる事を確認する。

(3) ヘリカル型装置 LHD に関するバルーニング不安定性のシミュレーションを実施し、既存の2つのシミュレーションコード (MINOS, MIPS) との比較を行う。この検証により、トカマク型装置形状だけではなく、ヘリカル装置形状に柔軟に対応できる一般化座標を利用したシミュレーションコードの有用性を実証する。

これらの作業は、次節の作業工程では中空円環トラス、ELM、バルーニング不安定性各工程の「シミュレーション及び物理解析・動作検証」に含まれるものとする。また、次節の工程表3に見るとおり、陰解法モジュールが利用可能になるのは第2年目(2017年度)末である。(1)では陽的解法によるシミュレーションのみを想定する。(2)、(3)では陰的解法によるシミュレーションに対する検証が主であるが、適宜陽的解法と対比し、陰解法の緩和法の収束に関する検証も行うものとする。

## B.8 作業スケジュール

本プロジェクトでは、主に電子メールを用いて情報の共有を行っていくが、隔月でテレビ会議システム等を用いて開発状況について意見交換を行う。以下は、表3の作業工程表に基づいた開発工程の概略である。

1年目(2015年度)

各モジュールの仕様に沿って、企画提案者(以下、後藤)及びAが拡張MHDシミュレーションコードの開発作業を開始する。Bは中空円環トラスでの初期平衡の検討及び実装に着手する。C、Dに作業は発生しない。各担当者の作業内容と、外部雇用者の作業期間は以下の通りである。

後藤：中心差分モジュール、RKG モジュール、拡張 MHD モジュール、物理解析モジュールの作成

A: 並列化及び MPI 通信モジュール作成 (6 ヶ月)

B: 中空円環トーラスでの初期平衡の検討、同実装、同線形解析 (各 3 ヶ月、計 9 ヶ月)

C: なし (雇用せず)

D: なし (雇用せず)

以上により、外部雇用者による作業量は 15 人月である。

2 年目 (2016 年度)

後藤及び A が拡張 MHD シミュレーションコードの 2015 年度開発部分を用いて、中空円環トーラスでのシミュレーション及び物理解析・動作検証を進める。C は後藤と協力して、ELM に関して理論・実験ともに精査が行われている (従って、シミュレーションによって再現の可能性が高い) 平衡の検討を行い、B がこの平衡の実装作業及び線形解析を行う。後藤、A、C は第 4 四半期に ELM のシミュレーション及び物理解析に着手する。D は格子形成モジュール及び陰解法モジュール作成を行う。

各員の担当内容及び外部雇用者の作業期間は以下の通りである。

後藤：中空円環トーラスのシミュレーション及び物理解析・動作検証 (A と協力)、ELM 初期平衡の検討 (C と協力)、ELM のシミュレーション及び物理解析・動作検証 (A,C と協力)

A: 円環状トーラスでのシミュレーション及び物理解析・動作検証 (9 ヶ月)、ELM のシミュレーション及び物理解析・動作検証 (3 ヶ月)

B: ELM 初期平衡の実装、ELM の線形解析 (各 3 か月)

C: ELM 初期平衡の検討 (3 ヶ月)、ELM のシミュレーション及び物理解析・動作検証 (3 ヶ月)

D: 格子生成及び陰解法モジュール開発 (各 6 ヶ月)

以上により、外部雇用者による作業量は 36 人月である。

3 年目 (2017 年度)

後藤および A、C は、前年度に引き続き、ELM シミュレーションおよび物理解析・動作検証を実施する。また、第 3 四半期に、後藤は A とともにバルーニング不安定性の初期平衡の検討を行う。B はこれを受けて、第 4 四半期にバルーニング不安定性の初期平衡の実装を行う。D は、コードの最適化及び高速化を行う。

各員の担当内容及び作業期間は以下の通りである。

後藤：ELM シミュレーション及び物理解析・動作検証、バルーニング不安定性の初期平衡の検討  
A: ELM シミュレーション及び物理解析・動作検証 (6 ヶ月)、バルーニング不安定性の初期平衡の検討 (3 ヶ月)  
B: バルーニング不安定性の初期平衡の実装 (3 ヶ月)、  
C: ELM シミュレーション及び物理解析・動作検証 (6 ヶ月)  
D: 計算コードの最適化及び高速化 (12 ヶ月)

以上により、外部雇用者による作業量は 30 人月である。

#### 4 年目 (2018 年度)

ヘリカル型装置におけるバルーニング不安定性のシミュレーション及び既存コード (MINOS, MIPS) とのシミュレーション結果の比較を行う。後藤及び A はバルーニング不安定性のシミュレーション及び物理解析・動作検証 (MIPS, MINOS コードによるシミュレーションも含む) を行う。B はここで開発したコードと MIPS、MINOS の結果との比較解析を行う。C については雇用が発生しない。D はコードの最適化及び高速化を実施する。2019 年 3 月に成果のとりまとめを行い、プロジェクトの完了とする。

各員の担当内容及び作業期間は以下の通りである。

後藤：バルーニング不安定性のシミュレーション、シミュレーション結果の物理解析・動作検証、研究成果取りまとめ

A: バルーニング不安定性のシミュレーション及び物理解析・動作検証 (9 ヶ月)  
B: MIPS, MINOS との比較 (3 ヶ月)  
C: なし (雇用せず)  
D: 計算コードの最適化及び高速化 (12 ヶ月)

以上により、外部雇用者による作業量は 24 人月である。

#### 各年度共通

各年度、各担当における「シミュレーション及び物理解析・動作検証」には、「シミュレーションコードの動作検証」に述べた検証 (1)-(3) を含むものとする。これらの検証において、いくつかの誤動作が発見される可能性がある。この誤動作の原因解明、修正は工程表には明記していないが、プロジェクト提案者 (後藤) が A と協力して作業にあたるものとする。このため、新たな外部雇用の必要は生じない。

また、Dが行う最適化及び高速化は、四半期ごとに後藤および他の担当者のコードに反映されるものとする。Dが行う作業は、プラズマシミュレータとヘリオスそれぞれについて異なる場合がある。これについては、プリプロセッサによって適宜使い分けられるようにする。

## B.9 予算計画

プロジェクト期間4年間の予算計画は以下の通りである。

物品費: 500 万円

人件費: 8,400 万円

合計予算額: 8,900 万円

この内訳は下記の通りである。

### B.9.1 物品（設備）購入

本プロジェクトを遂行するに当たり、大量のシミュレーションコード結果を保存する共有アクセス可能な大容量ストレージ及び解析・可視化用ワークステーションの購入費を確保する。可視化ソフトウェアとしては AVS Express 及び Paraview を想定している。

設備内容 可視化解析用ワークステーション・RAID サーバー式 × 1、500 万円

ワークステーション仕様概要:

CPU: Intel Xeon E5-2643v3(3.4GHz)×2CPU (12Core)

計算アクセラレータ: Intel Xeon Phi7120A (16GB, 1.238GHz, 61core) ×2 枚

メモリー: 256GB (16GB×16 枚)DDR4-2133 ECC REG

HDD: 2TB×1 本 (3.5inch SATA6G)

RAID サーバ仕様概要:

CPU: Intel Xeon E5-1620v3(3.50GHz)×1CPU (4 コア)

HDD 3TB×36 本 (SATA)、RAID カード搭載

## B.10 人件費

本プロジェクトでは、高度な技術力を持つ外部メンバーを最大4名雇用する計画である。Aは核融合を含む流体シミュレーションコードに通じている人材であること、B、Cは線形解析など核融合に高度に特化した人材であること、特にBは平衡の安定性や線形解析に、Cは実験に通じている事が求められる。Dは格子形成およびシミュレーションコードの最適化についての技術をもって



いることが要求される。これら専門の技術者を、専門会社を通じて専従するための人件費を確保する。この人件費は、1人月80万円を想定する。

1年目 80万円(月額)×15人月 = 1,200万円

2年目 80万円(月額)×36人月 = 2,880万円

3年目 80万円(月額)×30人月 = 2,400万円

4年目 80万円(月額)×24人月 = 1,920万円

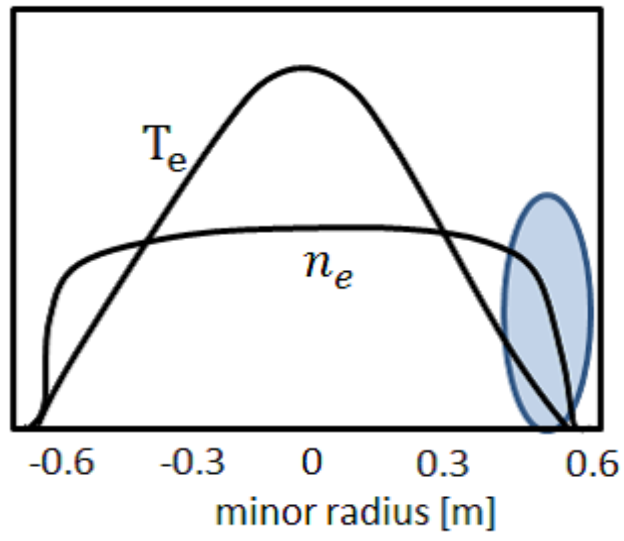
計 8,400万円

表 2 作業分担表

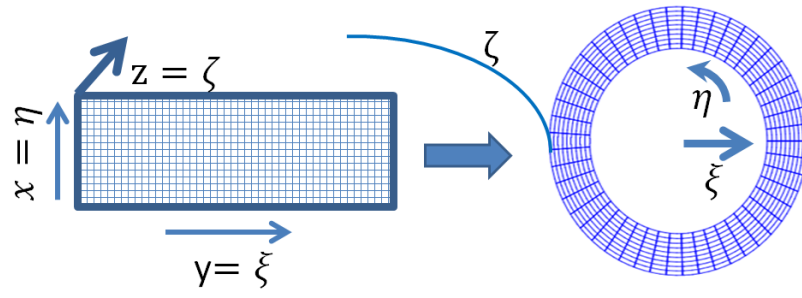
研究者	役割
後藤涼輔	研究総括； 拡張 MHD シミュレーションコードの各モジュール開発、各初期平衡の検討、シミュレーション実施および物理解析・動作検証、研究成果の取りまとめ
A	拡張 MHD シミュレーションコードの各モジュール開発、バルーニング不安定性の初期平衡の検討、シミュレーション実施及び物理解析・動作検証
B	円環トーラスの初期平衡の検討及び実装、バルーニング不安定性の初期平衡の実装、バルーニング不安定性の MINOS, MIPS との比較、線形解析の実施
C	ELM の実験に対応した初期平衡の検討、ELM シミュレーションの実施及び物理解析・動作検証
D	格子形成モジュール、陰解法モジュールの開発及びコードの最適化・高速化

表 3 開発するモジュールとそのモジュールが提供する機能。

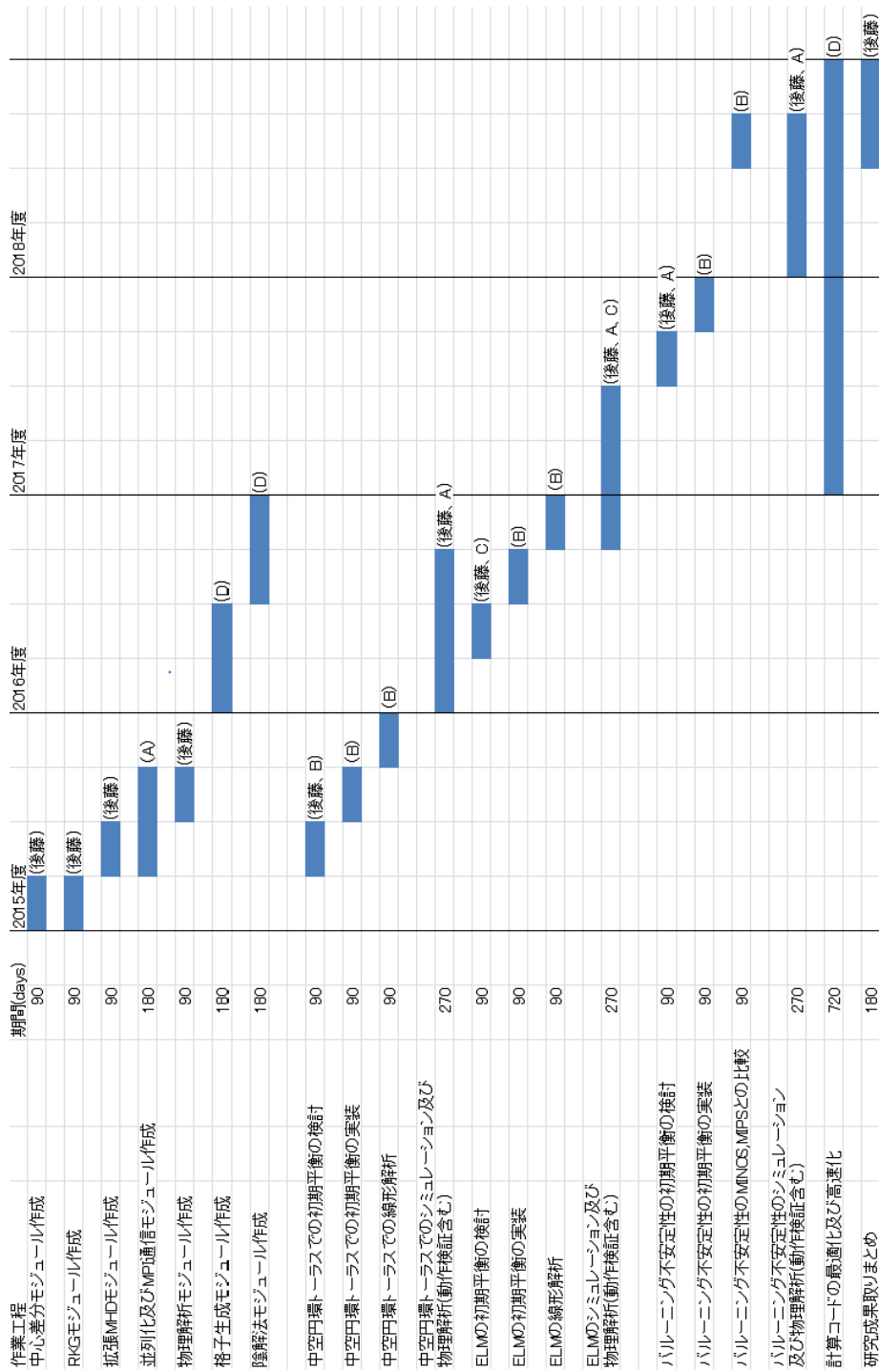
モジュール	モジュールが提供する機能
中心差分モジュール	方程式 (B.1)-(B.27) に現れる空間微分を 4 次精度中心差分法で近似するサブルーチンを、一階微分、二階微分、勾配、発散、回転等の微分オペレータの形式で提供する。
RKG モジュール	陽解法 (Runge-Kutta-Gill, RKG 法など) のサブルーチン群を提供する。陽解法使用時に、拡張 MHD モジュールや他のモジュール群を使用して計算を行うプログラムの主要部分も、作業工程としてはここに含む。
拡張 MHD モジュール	拡張 MHD 方程式の変数群、メトリック、作業変数等を Fortran 90 の配列形式で提供する。また、方程式 (B.1)-(B.27) の右辺の計算を行うサブルーチンを提供する。KK スキームに関わるサブルーチンや、格子情報 (下記の格子生成モジュールが提供) からメトリックを計算するサブルーチンもここに含まれる。
並列化・MPI 通信モジュール	領域分割による並列化を行うための諸サブルーチンおよび MPI 通信に関わるサブルーチンを提供する。他のサブルーチンでは MPI 通信は露わには使用しない。
物理解析・動作検証モジュール	拡張 MHD 方程式 (B.1)-(B.27) の変数から、各変数の平均等の統計量、フーリエスペクトルなど物理的特性を調べるためのサブルーチン群を提供する。ただし、高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform, FFT) については、公開された FFT コード <code>fftw</code> [68] を使用するため、ここには含まれない。
格子生成モジュール	トカマク型・ヘリカル型などの装置形状に合わせた計算格子を生成するためのサブルーチン群を提供する。
陰解法モジュール	陰解法 ( $\theta$ スキーム) のためのサブルーチン群一式を提供する。たとえば $\theta$ スキームのための係数行列の生成サブルーチンなどはここに含まれる。但し、連立一次方程式の反復解法に用いるコードは公開されたサブルーチンライブラリー <code>Scalapack</code> [69] の利用を想定するため、ここには含まれない。陰解法使用時に、拡張 MHD モジュールや他のモジュール群を使用して計算を行うプログラムの主要部分も、作業工程としてはここに含む。



図付録 B.1 トーラスプラズマの温度  $T_e$ 、数密度分布  $n_e$  とプラズマエッジ近傍（灰色に塗った部分）



図付録 B.2 直交座標系  $(x, y, z)$  から一般化座標系  $(\xi, \eta, \zeta)$  への変換の様式図



図付録 B.3 作業工程表。括弧内は担当者

## 参考文献

- [1] Lord Rayleigh, *Phil. Mag.* **16**, 50-8 (1883).
- [2] G. I. Taylor, *Proc. Roy. Soc. London A* **201**, 192-6 (1950).
- [3] *Magnetohydrodynamic Turbulence*, Cambridge University Press.
- [4] 神部勉、P. G. ドレイジン、*流体力学 安定性と乱流* (東京大学出版会).
- [5] N. Vladimirova and M. Chertkov, *Phys. Fluids* **21**, 015102 (2009).
- [6] U. Alon et al., *Phys. Rev. Lett.* **74**, 534 (1995).
- [7] M. B. Schneider, G. Dimonte and B. Remington, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3507 (1998).
- [8] D. L. Youngs, *Physica D* **12**, 32 (1984).
- [9] J. D. Kilkenny et al., *Phys. Plasmas* **1**, 1379 (1994).
- [10] P. RAMAPRABHU and M. J. ANDREWS, *J. Fluid Mech.* **502**, 233 (2004).
- [11] S. I. Abarzhi and K. R. Sreenivasan, *Royal Soc. Phil. Trans. A.* **368**, 1809 (2010).
- [12] M. Chertkov, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 115001 (2003)
- [13] K. Kadau et al., *Proc. Natl. Acad. Sci.* **101**, 5851 (2004).
- [14] W. Dzwiniel and D. A. Yuen, *J. Modern Physics C.* **12**, 91 (2001).
- [15] W. H. Cabot and A. W. Cook, *Nature Physics* **2**, 562 (2006).
- [16] P. C. Duffel and A. I. Macfadyen, *Astrophys. J. Lett.* **791**, L1 (2014).
- [17] <http://www.thp.uni-duisburg.de/kaiindex.1.html>
- [18] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford University Press (1961).
- [19] <http://hubblesite.org/newscenter/archive/releases/2005/37/>
- [20] D. Biskamp, *Nonlinear Magnetohydrodynamics* (Cambridge University Press).
- [21] K. Yamazaki, *核融合研究* **54**, 5 (1985).
- [22] Rosenbluth et al, *Nucl. Fusion Suppl. Pt. 1*, 143 (1962).
- [23] B. Lehnert, *Phys. Rev. Lett.* **7**, 440 (1961).
- [24] K. V. Roberts and J. B. Taylor, *Phys. Rev. Lett.* **8**, 197 (1962)
- [25] D. Winske, *Phys. Plasmas* **3**, 3966 (1996).
- [26] J. D. Huba, *Phys. Plasmas* **3**, 2523 (1996).
- [27] D. D. Schnack *et al.*, *Phys. Plasmas* **13**, 058103 (2006).
- [28] N. Nakajima *et al.*, *プラズマ・核融合学会誌* **85** 105 (2009).
- [29] S. Chapman and C. G. Cowling, *The Mathematical Theory of Nonuniform Gases* (Cambridge University Press), New York (1952).
- [30] W. B. Thompson, *Reports on Progress in Physics* (The Physical Society, London), **24**, 363 (1961).
- [31] P. Zhu, A. Bhattacharjee, and K. Germaschewski, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 065001 (2006).

- [32] P.W. Xi *et al.*, Nucl. Fusion **53**, 113020 (2013).
- [33] X. Q. Xu *et al.*, 2010 Phys. Rev. Lett. **105**, 175005 (2010).
- [34] N. M. Ferraro and S. C. Jardin, Phys. Plasmas **13**, 092101 (2006).
- [35] Huysmans *et al.*, Plasma Phys Control Fusion **51**, 124012 (2009).
- [36] Park *et al.*, Phys. Plasmas **6** 1796 (1999).
- [37] C.R. Sovinec *et al.*, J. Comput. Phys. **195**, 355 (2004).
- [38] S. Ohsaki and S. M. Mahajan, Phys. Plasmas **11**, 898 (2004).
- [39] T. E. Evans, *et al.*, nature physics **2**, 419 (2006).
- [40] S. I. Braginskii, in M.A. Leontovich (Ed.), Reviews of Plasma Physics, **1**, p. 205 Consultants Bureau, New York, (1965).
- [41] <http://homepages.cae.wisc.edu/callen/NE903.86.pdf>
- [42] R. D. Hazeltine and J. D. Meiss, Plasma Confinement, Frontiers in Physics (Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1992).
- [43] 藤井孝蔵、流体力学の数値計算法 (東京大学出版会)
- [44] 石岡圭一、スペクトル法による数値計算入門 (東京大学出版会)
- [45] 木田重雄、柳瀬眞一郎、乱流力学 (朝倉書店)
- [46] 桑原邦郎、河村哲也、流体計算と差分法 (朝倉書店)
- [47] 数値流体力学編集会編、圧縮性流体解析 (東京大学出版会)
- [48] S. Mahajan and H. Miura, J. Plasma Physics **75**, 145 (2009).
- [49] S. Gill, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **47**, 96 (1951).
- [50] T. Kawamura and K. Kuwahara, AIAA paper, 84-0340 (1984).
- [51] R. Goto *et al.*, Plasma Fusion Res. **9**, 1403076 (2014).
- [52] P.G. Drazin and W.H.Reid, Hydrodynamic Stability, Cambridge Mathematical Library (1981).
- [53] W. Horton, Turbulent Transport in Magnetized Plasmas (World Scientific).
- [54] D. D. Schnack, Lectures in Magnetohydrodynamics (Springer).
- [55] S. Sakakibara *et al.*, Fusion Sci. Technol. **58**, 176 (2010).
- [56] H. Miura and N. Nakajima, Nucl. Fusion **50**, 054006 (2010).
- [57] S. Sakakibara *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **50**, 124014 (2008).
- [58] M. Sato, 24th Fusion Energy Conference, TH/P3-25 (2012).
- [59] H. Zohm, Plasma Phys. Control. Fusion **38**, 105 (1996).
- [60] P.B. Snyder *et al.*, Phys. Plasmas **9**, 2037 (2002).
- [61] H. Lütjens and J. Luciani, J. Comput. Phys. **229**, 8130 (2010).
- [62] H. Miura, T. Hayashi and T. Sato, Phys. Plasmas **8**, 4870 (2001).
- [63] Y. Todo *et al.*, Plasma Fusion Res. **5**, S2062 (2010).
- [64] Y. Saad and M.H. Schultz, SIAM J. Sci. Statist. Comput. **7**, 856 (1986).
- [65] H. Zohm, Plasma Phys. Control. Fusion **38**, 105 (1996).



- [66] P.B. Snyder et al., Phys. Plasmas **9**, 2037 (2002).
- [67] W.H.Press et al., Numerical Recipes in Fortran 77: The art of Scientific Computing, Cambridge University Press (1992).
- [68] <http://www.fft.w.org/>
- [69] <http://www.netlib.org/scalapack/>