

PF リングにおける可変偏光アンジュレータの開  
発研究

土屋 公央

博士（工学）

平成27年度  
(2015)

博士学位論文

PF リングにおける  
可変偏光アンジュレータの開発研究

土屋 公央

総合研究大学院大学  
高エネルギー加速器科学研究科  
加速器科学専攻

2015 年度

第1章. 序論	1
第2章. アンジュレータ放射理論の一般論	4
2-1. 動く電荷の作る電磁場	4
2-2. 放射電場成分と全放射パワー	5
[2-2-1]. 電磁場のエネルギーとポインティングベクトル	5
[2-2-2]. 放射エネルギーと放射電場の関係	6
2-3. 放射電場とスペクトル表式	7
[2-3-1]. 遠方場近似 (Jackson 表式)	9
[2-3-2]. Wann-Kim 表式	9
[2-3-3]. Chubar 表式	10
2-4. 有限長さの光源からの放射	12
2-5. 多数の電子による放射	13
[2-5-1] 多数の電子からの放射 (一般論)	13
[2-5-2] 自発放射成分	14
2-6. アンジュレータのスペクトル関数	15
[2-6-1] 軌道が有限の周期性を持つ場合のスペクトル	16
[2-6-2] フーリエ級数による展開	17
2-7. アンジュレータ内での電子軌道	19
[2-7-1] アンジュレータ内部での電子の運動方程式と一般的な解法	20
[2-7-2] アンジュレータ磁場の中での軌道 (プラナー型)	21
[2-7-3] アンジュレータ磁場の中での軌道 (まとめ)	23
2-8. アンジュレータのスペクトル表式	24
[2-8-1] アンジュレータスペクトルの積分表示	26
[2-8-2] アンジュレータスペクトルの Bessel 関数表示	27
[2-8-3] アンジュレータ放射スペクトルの特性パラメータ	30
2-9. アンジュレータ放射パワー角度分布	32
2-10. 放射光計算コードの開発	33
第3章. 可変偏光アンジュレータの型式と磁場分布	41
3-1. 可変偏光アンジュレータの種類と特性	41
3-2. APPLE-II 型 EPU の磁場分布	45
[3-2-1] Symmetric mode の磁場分布	46
[3-2-2] Anti-symmetric mode の磁場分布	47
3-3. 6 列型 EPU の磁場分布	48
[3-3-1] 6 列型 EPU の偏光状態と磁場分布	48

[3-3-2] 6 列型 EPU 磁場の強度と特性	50
第 4 章. PF リングの可変偏光アンジュレータ	52
4-1. PF リングにおける APPLE-II 型 EPU	53
[4-1-1] U#16-1 及び U#16-2	53
[4-1-2] U#13	55
4-2. PF リングにおける 6 列型 EPU	58
[4-2-1] U#02-2	58
[4-2-2] U#28	62
第 5 章. PF リングにおける EPU 磁場調整法の開発	65
5-1. 磁場調整の手法と初期磁石配列について	65
5-2. 磁場測定システム	66
[5-2-1] 磁場測定用長尺ベンチ	66
[5-2-2] Hall 素子の選別と校正	67
[5-2-3] 磁場データ収集システム	68
5-3. 2 重移動平均法によるノイズ除去法	69
5-4. EPU 磁石初期配列の最適化	70
[5-4-1] 個別磁石の磁場測定	70
[5-4-2] 磁石配列の最適化	74
[5-4-3] 磁石研磨工程の改良	77
5-5. PF における EPU の磁場調整	80
[5-5-1] EPU 磁場分布測定と磁場調整	80
[5-5-2] 位相エラーの測定	84
[5-5-3] APPLE-II 型 EPU の位相調整	87
5-6. フリップコイルによる多極磁場成分の測定と調整	88
第 6 章 PF リングにおける APPLE-II 型 EPU の運転	96
6-1. APPLE-II 型 EPU の運転方法	96
6-2. APU- $\rho$ モード運転でのスペクトル特性	98
[6-2-1] 軸外における APU- $\rho$ モードでの磁場分布	98
[6-2-2] APU- $\rho$ モードでのスペクトル解析	101
6-3. APU- $\sigma$ モードでの運転	102
6-4. 偏光スイッチング運転の現状と課題	106
第 7 章 結論	109

(謝辞)	110
(参考文献)	111
(Appendix)	114
<b>Appendix.2-1</b> 動く電荷の作る電磁場 (リエナール・ヴィーヘルト表式)	114
<b>Appendix.2-2</b> 動く電荷の作る電磁場 (ヘヴィサイド・ファインマン表式)	120
<b>Appendix.2-3</b> 放射電場の書き換え	124
<b>Appendix.2-4</b> 放射の全パワーについて	125
<b>Appendix.2-5</b> 放射スペクトルの Chubar 表式について	132
<b>Appendix.2-6</b> コヒーレント放射の例	134
<b>Appendix.2-7</b> 奇数周期のアンジュレータスペクトル関数	136
<b>Appendix.2-8</b> アンジュレータ磁場中での軌道 (z 成分)	138
<b>Appendix.2-9</b> アンジュレータスペクトルの積分表示	142
<b>Appendix.2-10</b> プラナー型アンジュレータスペクトルの Bessel 関数表示	146
<b>Appendix.2-11</b> 楕円型アンジュレータスペクトルの Bessel 関数表示	150
<b>Appendix.2-12</b> アンジュレータ放射パワーの角度分布	154
<b>Appendix.3-1</b> APPLE-II 型 EPU の磁場分布	160
<b>Appendix.3-2</b> 6 列型 EPU の磁場分布	162
<b>Appendix.5-1</b> アンジュレータ内での電子の位相	166
<b>Appendix.5-2</b> 位相によるアンジュレータスペクトル強度の低下	168
<b>Appendix.5-3</b> U#16-2 の skew-Q 成分の見積もりと補正電磁石	170
<b>Appendix.6-1</b> APU- $\rho$ モードでの APPLE-II 型 EPU の磁場分布	173
<b>Appendix.6-2</b> APU- $\rho$ モードでの APPLE-II 型 EPU の磁場分布 (軸外)	175
<b>Appendix.6-3</b> 軸外磁場分布の Anti-symmetric mode への影響	180
<b>Appendix.6-4</b> 軸外磁場分布の Symmetric mode への影響	181
<b>Appendix.6-5</b> APU- $\sigma$ モードでの APPLE-II 型 EPU の磁場分布	183

## 第1章 序論

電子エネルギー2.5GeVの電子蓄積リングであるPFリングでは、ここ数年に渡って5台の可変偏光アンジュレータ：EPU(elliptically-polarizing undulator)が建設されて、ユーザー実験への利用が行われている。本論文では、筆者がこれまで行ってきたPFリングでの可変偏光アンジュレータの開発研究について論述していく。まず初めに、これまでの建設の経緯について説明し、研究内容を述べる。

PFリングでは、2005年に直線部増強を目的とした改造が行われた。これによって既存の直線部は長さが伸長され、さらに、4本の1.4m短直線部が新たに創られた。この短直線部では、垂直方向のベータ関数を0.4mまで絞ることで20mm以下の周期長を持ち、最小ギャップ4mmを実現する短周期アンジュレータがこの10年の間に4台導入されてユーザー実験に供されている。これによって10keV領域のX線の利用がPFリングにおいて可能となった。一方、長さの延長された既存直線部は、B01-02とB15-16の2本が長さ8.9mの長直線部であり、残りの8本が4.8mの長さを持っている。改造によって新たに生じたスペースを最大限に生かすために、BL02、BL13、BL16、BL28では、電子物性用アンジュレータの更新計画が進められてきた。

B15-16直線部では、VUVからSX領域の光源として高速スイッチング可変偏光アンジュレータの開発が行われてきた。これは2台のAPPLE(Advanced Planar Polarized Light Emitter)-II型のEPUをタンデムに配置し、電子ビームをバンブ軌道で切り替えることで、10Hz以上の速い偏光状態の切り替えを行うものである。この2台のEPUは56mmの周期長を持ち、それぞれU#16-1、U#16-2と呼ばれる。アンジュレータのカバーする光子エネルギー領域は、基本波で200~1000eVであり、利用可能な偏光モードは円偏光(左右)及び直線偏光(垂直/水平または $\pm 45^\circ$ )である。この計画の最初の段階として2007年度においては、光源を構成する2台のアンジュレータのうち1台目(U#16-1)の開発・建設を行われ、並行してキッカー電磁石システムの開発と真空システムの整備を進められた。U#16-1及びキッカーシステムは2008年3月にPFリングに設置され、U#16-1の1台での運転が先行して開始された。引き続き、2台目のEPUであるU#16-2の建設が2009年度に行われ、2010年夏にPFリングに設置されて、運用が開始された。その後、速い偏光切り替えのためのマシンスタディが繰り返されて、2012年5月から10Hzでの偏光切り替え運転が実現した。

BL02では、既存のプラナー型アンジュレータ(U#02：周期長60mm、周期数60)を延長された直線部の下流に移動して、上流側に周期長160mmの可変偏光アンジュレータ(U#02-2)を新たに建設した。U#02-2は磁石列を6列持ったEPUであり、中央部の磁石列が垂直磁場を、また、両サイド部の磁石列は水平磁場を発生し、これらの位相を組み合わせることで多様な偏光状態を実現する。この2台のアンジュレータ放射光を排他的に利用することで、30eVから2keVまでの広い波長範囲の放射光を1本のビームラインで利用す

ることができる。この U#02-2 は 2013 年に磁場調整・磁場測定を行い、2014 年の 3 月に PF リングに設置された。

BL13 と BL28 では、それまで運用されていた挿入光源である多極ウイグラー MPW#13 および楕円多極ウイグラー EMPW#28 をそれぞれ新しい可変偏光アンジュレータ U#13、U#28 へ更新した。U#13 は周期長 76mm を持つ APPLE-II 型の EPU であり、U#28 は U#02-2 と同じ周期長 160mm を持った長さ違いの 6 列型 EPU である。これら 2 台の本体の製作が 2013 年度に行われ、2014 年内に実施した磁場調整・磁場測定の後、2015 年 2 月に同時に PF リングへ設置された。これらの EPU は各偏光モードの調整を順次行い、ユーザー運転での利用が順調に開始されている。

これらの EPU の建設に当たり、私は U#16-1 及び U#16-2 において、磁場調整と磁場測定を担当し、PF 独自の可変偏光アンジュレータ磁場調整法の開発研究を行った。また、実際の運用において重要となる制御方法の確立と改良に取り組んだ。ここでの研究結果を基に、U#02-2、U#13、U#28 の 3 台の EPU を設計し、開発した磁場調整法を適用することで良好な結果を得た。

第 2 章では、可変偏光アンジュレータの開発において必須である放射光発生理論の一般論を述べる。放射光スペクトルの計算には、加速器内を運動する電子の作る放射電場のフーリエ成分を求めることが必要であるが、実際の数値計算を実行するためには計算に適した様々な近似が用いられている。この内、現在の放射光施設においてもよく使用される代表的な 3 つのスペクトル表示について詳細な比較検討を行う。ここで得られた結果は、第 4 章で述べる可変偏光アンジュレータの設計や第 6 章のスペクトル解析の基礎となるものであり、本章の内容に基づき各種計算コードの開発を行い放射光計算を行っている。実際の可変偏光アンジュレータの設計・運用時に必要となるアンジュレータスペクトル、放射パワー分布、偏光度等の計算手法について述べ、本研究で開発された計算コードについて記述する。

第 3 章では、可変偏光アンジュレータの変遷を概観し、PF リングにおいて採用されている APPLE-II 型 EPU と 6 列型 EPU の磁場分布の特徴を述べる。APPLE-II 型 EPU は、現在世界中の多くの放射光施設において標準的な EPU として採用されており、PF でも 3 台の APPLE-II 型 EPU (U#16-1,U#16-2,U#13) が導入されている。また、PF で採用した 6 列型 EPU(U#02-2,U#28)では、6 列の磁石列すべてに駆動軸を設けて、これらの位相を自由に制御することで、従来では出来なかった水平垂直線偏光、左右円偏光、及び左右楕円偏光の切り替えを実現している。

第 4 章では、PF リングにおいて建設された可変偏光アンジュレータの特徴と設計仕様について述べる。PF リングにおいて建設された EPU は真空紫外域から軟 X 線領域の放射光源であるが、各々の電子物性ビームラインにおける研究内容と特性により、要求される性能はそれぞれ異なっている。この多様な要件を満たすために、PF リングでは、APPLE-II 型と 6 列型の 2 種類の EPU を使い分けている。ここでは、PF リングで建設された個別の可変偏

光アンジュレータの設計指針、パラメータや放射特性について詳述する。

第5章は本論文の中心課題である、PFリングにおける可変偏光アンジュレータの磁場調整法の開発研究、磁場測定システムの開発と測定結果について記述する。アンジュレータでは、永久磁石が多数使用されるが、個別磁石の磁場強度や磁化角度等の磁場特性は少ないとはいえ、ばらつきをもっている。このためアンジュレータ磁気回路を構成したとき得られる磁場分布は、理想的な場合と異なっている。必要とされる放射光源性能を満たすためには、理想磁場分布からのずれを十分小さくするための磁場調整作業が必要である。可変偏光アンジュレータでは、通常のプロナー型アンジュレータよりも多数の永久磁石が使用される上に、磁石列配置を複雑に制御することで様々な偏光状態を作り出すために、その磁場調整手順も複雑となる。また、磁場調整及び磁場測定に要する時間も膨大となる。この問題を解決するために EPU の建設において、最適な磁石配列をあらかじめ求める手法を実用化した。ここでは、個別測定した各磁石の磁場分布を重ね合わせることで最適な磁石配列を計算し、良好な初期磁場分布を得ることに成功した。これによって磁場調整に要する時間を大幅に短縮した。

第6章では、PFリングにおける APPLE-II 型可変偏光アンジュレータの制御方法の詳細について述べる。特に U#16-1 及び U#16-2 では、高速偏光切替え実験のために 10Hz で電子軌道をキッカー電磁石でスイッチングする必要がある。この際に BL16 以外での電子ビーム軌道の変動に伴う光軸の変位を最小限に抑えるように、補正電磁石システムでフィードフォワード補正している。このスイッチング運転中においても U#16-1 及び U#16-2 では、様々な偏光モードの切替えや光子エネルギー調整を行う必要があるが、この時に追加的な軌道変動を与えることを可能な限り避ける事が重要となる。このために U#16-1 及び U#16-2 では、通常 of APPLE-II 型 EPU の運転方法と異なり、磁石列 Gap 間隔を一定に保ったまま、磁石列間の位相のみを変えることで偏光状態と光子エネルギーを制御する APU (adjustable phase undulator) モードでの運転を導入した。この APU モードでの運転の特徴と PF リングでの問題点を述べる。さらに、はこの問題の原因究明として、第2章で述べたスペクトル解析コードによる U#16-1 のスペクトル解析を行い、問題解決に向けた APU モードの改良運転法の導入と運用結果について記述する。

第7章では、これまでのまとめを行い PF リングでの可変偏光アンジュレータアンジュレータの開発研究を総括する。

## 第2章. アンジュレータ放射理論の一般論

本章では、アンジュレータ放射特性に関する一般論を扱い、実際の EPU 開発に必要なとなるスペクトル、角度分布等の諸公式を導出する。高エネルギー電子からの放射の研究は 1940 年代終わりから始まり、偏向電磁石からのシンクロトロン放射光を取り扱うことが主眼であった[1-2]。その後、磁石を周期的に配置したアンジュレータの開発が進み、アンジュレータ放射の解析手法として様々な放射理論が研究されてきた[3-7]。ここでは、現在の放射光施設で良く使われている 3 つの手法を取り上げて、相互間の関係性とアンジュレータ放射の一般論を述べる。さらに、本章の内容に基づき開発した、様々な放射光計算コードについて記述する。ここで得られた結果は、EPU の設計や EPU スペクトル解析の基礎となるものである。

### 2-1. 動く電荷の作る電磁場

一つの電子による遅延ポテンシャルはリエナール・ヴィーヒェルト (Lienard-Wiechert) ポテンシャルで表される[8]。

$$\phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\chi(t')} \quad , \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \cdot \frac{\mathbf{v}(t')}{\chi(t')} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{\mathbf{v}(t')}{\chi(t')} \quad (2-1.1)$$

$$\text{ここで } \chi(t') = R(t') - \{\mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{v}(t')\} / c \quad (2-1.2)$$

とおいた。R は電子から観測点までの距離で

$$R(t') = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

ここで t' は遅延時間であり観測者の実時間は t で表す。一つの電子が任意の運動をするときに作る電磁場は(2-1.1)を使い、

$$\mathbf{E}(t) = -\nabla\phi - \frac{d\mathbf{A}}{dt} \quad (2-1.3)$$

から求めることが出来る。動く電荷の作る電磁場の表し方として次の 2 通りが有名であり、放射光を扱うにはどちらも重要である。

(1) リエナール・ヴィーヒェルト表式

$$\mathbf{E}(t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(1-\beta^2)(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})}{R^2(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} + \frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{cR(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} \right]_{t'} = \mathbf{E}_v(t) + \mathbf{E}_a(t) \quad (2-1.4)$$

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E}(t) \quad (2-1.5)$$

ここで、 $\mathbf{v}$  を電子速度としたとき  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ 、 $\mathbf{n}$  は電子から観測者への単位ベクトルである。(2-1.4)の内、電子の速度に依存する電場と加速に依存する電場を分けて書いておく。

$$\text{Velocity Fields : } \quad \mathbf{E}_v(t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(1-\beta^2)(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})}{R^2(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} \right]_{t'} \quad (2-1.6)$$

$$\text{Acceleration Fields : } \quad \mathbf{E}_a(t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{cR(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} \right]_{t'} \quad (2-1.7)$$

(2) ヘヴィサイド・ファインマン (Heaviside-Feynman) 表式

$$\mathbf{E}(t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{n}(t')}{R(t')^2} + \frac{R(t')}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{n}(t')}{R(t')^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2(\mathbf{n}(t'))}{dt^2} \right]_{t'} \quad (2-1.8)$$

(1) の導出は Appendix.2-1 に詳しく記す。また、(1) と (2) の 2 種類の電場表式が同等であることは、(2-1.8)内の時間微分を実行することで示すことが出来る (Appendix.2-2)。また、放射スペクトルを計算する際に役立つ次式の導出を Appendix.2-3 に付ける。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_a(t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{cR(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} \right]_{t'} \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})} \left[ \frac{d}{dt'} \left( \frac{\mathbf{n} \times \{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}\}}{Rc(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})} \right) + \left\{ 1 - \frac{1-\beta^2}{(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2} \right\} \frac{\mathbf{n} \times \{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}\}}{R^2} + \left\{ (1+\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}) - \frac{1-\beta^2}{(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})} \right\} \frac{\mathbf{n}}{R^2} \right] \end{aligned} \quad (2-1.9)$$

## 2-2. 放射電場成分と全放射パワー

### [2-2-1]. 電磁場のエネルギーとポインティングベクトル

電磁場のエネルギーの流れを表すポインティングベクトルは任意の空間で成り立つ電磁場のエネルギー保存則にあらわれて、

$$\frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} \right) dV + \int_S (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_V (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) dV = 0$$

一つの電子の場合では、電子の位置を原点にとり距離  $R$  だけ離れた球体を考えた時、第一項がこの球体に貯められた電磁場エネルギーの時間変化であり、第二項が球面から外に流れ出すエネルギーの流れを、そして第三項が電子のエネルギー損失を表している。無限遠

方での観測者に対して第一項は0となり

$$\int_S (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) dS = -\int_V (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) dV$$

このエネルギー損失が放射によって失われていると考えれば、電子が全立体角に放射する単位時間あたりのエネルギーの流れは、

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{S} d^3x = \int_S (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (2-2.1)$$

ここで  $\mathbf{S}$  は Poynting Vector であり、 $\mathbf{S}(t) = \mathbf{E}(t) \times \mathbf{H}(t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}(t) \times \mathbf{B}(t)$  である。

すると観測者の単位時間、単位立体角（面積  $R_0^2 d\Omega$ ）あたりに流れ出るエネルギーは、

$$\frac{d}{d\Omega} \left( \frac{dW}{dt} \right) = R_0^2 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \quad (2-2.2)$$

電子の作る電磁場の場合、

$$\mathbf{S}(t) = \frac{1}{\mu_0 c} \mathbf{E}(t) \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}(t)) = \frac{1}{\mu_0 c} \left\{ |\mathbf{E}(t)|^2 \mathbf{n} - (\mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{E}(t) \right\} \quad \text{であるから}$$

$$\frac{d}{d\Omega} \left( \frac{dW}{dt} \right) = \frac{R^2}{\mu_0 c} \left\{ |\mathbf{E}(t)|^2 \mathbf{n} - (\mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{E}(t) \right\} \cdot \mathbf{n} = \frac{R^2}{\mu_0 c} \left\{ |\mathbf{E}(t)|^2 - (\mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{n})^2 \right\} \quad (2-2.3)$$

ここで通常の場合、(2-1.6)の  $\mathbf{E}_v(t)$  は距離の2乗に反比例し0に近づくので輻射成分として

落とし、十分遠方で観測する場合は  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_a(t)$  を使って

$$\frac{d}{d\Omega} \left( \frac{dW}{dt} \right) = \frac{R_0^2}{\mu_0 c} |\mathbf{E}_a(t)|^2 = \varepsilon_0 c R_0^2 |\mathbf{E}_a(t)|^2 \quad (2-2.4)$$

### [2-2-2]. 放射エネルギーと放射電場の関係

相対論によれば放射の全パワーはローレンツ不変量であり、電子が単位時間あたりに放

$$\text{射するパワーは} \quad P(t') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{m^2 c^3} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^2 \left\{ \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt'} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{dE}{dt'} \right)^2 \right\} \quad (2-2.5)$$

または、

$$P(t') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c} \left[ \frac{1}{(1-\beta^2)^3} \left\{ \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \right\} \right]_{ret} \quad (2-2.6)$$

となる[1]。これを正しいとすれば、(2-2.4)を立体角で積分し(2-2.6)と比較すれば、両者は一致するはずである。これを判定基準とし電子の作る電場のうち放射成分を選別することが可能である。実際に積分を実行すると両者は一致し、(2-1.7)の $\mathbf{E}_a(t)$ が放射電場であると考えられる。この積分の詳細と、(2-2.5)から(2-2.6)の導出は Appendix .2-4 に示す。

### 2-3. 放射電場とスペクトル表式

点電荷が単位時間加速されたときに、観測点の無限小の立体角を通り抜ける放射電磁波のエネルギー量（ローレンツ不変量）は

$$\frac{d}{d\Omega} \left( \frac{dW}{dt} \right) = \frac{R_0^2}{\mu_0 c} |\mathbf{E}_a(t)|^2 = \epsilon_0 c R_0^2 |\mathbf{E}_a(t)|^2 \quad (2-3.1)$$

であり、これを放射光と定義する。実際の観測点には電荷が通過する際の電子の速度が光速に近いために電磁パルスも感知される場合もあるが、ここでは、求めたい電場成分は、(2-3.1)に現れる放射電場成分であるとして、それ以外の場合を考える必要が出たときは、別途考慮するという立場を取る。一つの電子が無限遠方からやってきて放射を行い、また、無限遠方に去っていくと考えると観測位置での単位立体角を通過するエネルギーは(2-3.1)式より

$$\frac{dW}{d\Omega} = \epsilon_0 c R_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{E}_a(t)|^2 dt$$

ここで、 $\mathbf{E}_a(t)$ をフーリエ展開すると、

$$\mathbf{E}_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_\omega \exp(-i\omega t) d\omega$$

$$\mathbf{E}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_a(t) \exp(i\omega t) dt$$

すると

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\Omega} &= \epsilon_0 c R_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{E}_a(t)|^2 dt = \epsilon_0 c R_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_a(t) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_\omega \exp(-i\omega t) d\omega \right\} dt \\ &= \frac{\epsilon_0 c R_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_\omega \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_a(t) \exp(-i\omega t) dt \right\} d\omega = \frac{\epsilon_0 c R_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_\omega \{ \mathbf{E}_{-\omega} \} d\omega \\ &= \frac{\epsilon_0 c R_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_\omega \mathbf{E}_\omega^* d\omega = \frac{\epsilon_0 c R_0^2}{2\pi} 2 \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{E}_\omega|^2 d\omega = \frac{\epsilon_0 c R_0^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{E}_\omega|^2 d\omega \end{aligned}$$

これより、

電子が一回通過する際に観測者が受ける放射の全パワースペクトルは、単位立体角あたり

$$\frac{d}{d\omega} \left( \frac{dP}{d\Omega} \right)_{total} = \frac{\varepsilon_0 c R_0^2}{\pi} |\mathbf{E}_\omega|^2 \quad (2-3.2)$$

で表される。ここで

$$\mathbf{E}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_a(t) \exp(i\omega t) dt = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{cR(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \right]_{t'} \exp \left\{ i\omega \left( t' + \frac{R(t')}{c} \right) \right\} dt' \quad (2-3.3)$$

ここで(2-3.3)の放射光パワーから光子数への換算を行っておく。

ここで  $\mathbf{E}_\omega$  を (後に取り扱う K.J.Kim の表式に合わせるために) 次のように書き直し

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{R_0}{R} \cdot \frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \right]_{t'} \exp \left\{ i\omega \left( t' + \frac{R(t')}{c} \right) \right\} dt' \quad (2-3.4)$$

すると単位立体あたりの光子数 ( $\Delta\omega$ , I(A) あたり) への換算は、

$$\begin{aligned} \frac{dN_{photon}}{d\Omega} &= \frac{d}{d\omega} \left( \frac{dP}{d\Omega} \right)_{total} \cdot \Delta\omega \cdot \frac{I(A)}{e} \cdot \frac{1}{\hbar\omega} \quad (\text{photons/sec/A/rad}^2) \\ &= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c} \cdot |\mathbf{A}_\omega|^2 \cdot \Delta\omega \cdot \frac{I(A)}{e} \cdot \frac{1}{\hbar\omega} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \cdot |\mathbf{A}_\omega|^2 \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega} \cdot \frac{I(A)}{e} \end{aligned} \quad (2-3.5)$$

ここで  $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} = \alpha \cong \frac{1}{137}$  : 微細構造定数となっている。ここで(2-3.5)は電流つまり電子

数に比例した形となっている。これはあくまで長い時間平均の結果であり、多くの電子からの放射についての詳細は2.6節で述べる。

放射光スペクトルの計算には、原理的には(2-3.4)または(2-3.5)を数値積分すれば得られるはずだが、この形は精密な数値積分に極めて不向きな形をしているため、何らかの近似によって扱いやすい表式に変えてから計算を実行する。このためによく使われる代表的な放射スペクトル  $\mathbf{E}_\omega$  の近似表式を3つ選び記載する。

### [2-3-1]. 遠方場近似 (Jackson 表式)

観測地点が光源より十分に遠方であるという近似の元に、 $R(t')$ ,  $\mathbf{n}$  とともに時間的に一

定であると仮定する。すると、 $R(t') = R_0$  ,  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0$  と書けて、

$$\frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} = \frac{d}{dt'} \left[ \frac{\mathbf{n} \times \{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}\}}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right] \quad \text{を使い、部分積分することで(2-3.3)は、}$$

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{-ie\omega}{4\pi\epsilon_0 c R_0} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \boldsymbol{\beta}(t'))] \exp\{i\omega(t' - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}(t')/c)\} dt' \quad (2-3.6)$$

この(2-20)式は放射光の計算では、これまで多く使われている。(特に円軌道放射) これは著名な Jackson の電磁気学の教科書で解説されているので、ここでは、Jackson 表式の名称を付ける。([8]Chapter 14-5)

### [2-3-2]. Wann-Kim 表式

ヘヴィサイド・ファインマン (Heaviside-Feynman) 電磁場表式を用いて、Wann は文献[9]で、Jackson 表式によく似た簡便なスペクトル近似表式を導いた。また、この表式は K-J.Kim によってもよく使われているので、これを Wann-Kim 表式と呼ぶことにする。これは実質的に(2-1.9)式から、R の二乗に反比例する項を落としたもので

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \left[ \frac{d}{dt'} \left( \frac{\mathbf{n} \times \{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}\}}{Rc(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right) \right] \exp(i\omega t) dt \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{n} \times \{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}\}}{Rc(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right) \right] \exp(i\omega t) dt \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[ \left( \frac{\mathbf{n} \times \{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}\}}{Rc(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right) \exp(i\omega t) \right]_{-\infty}^{\infty} - i\omega \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\mathbf{n} \times \{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}\}}{Rc(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right) \exp(i\omega t) dt \right\} \\ &= -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{i\omega}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\mathbf{n} \times \{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}\}}{R(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right) \exp(i\omega t) dt \\ &= -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{i\omega}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mathbf{n} \times \{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}\})}{R} \exp\left(i\omega \left( t' + \frac{R(t')}{c} \right)\right) dt' \end{aligned} \quad (2-3.7)$$

### [2-3-3]. Chubar 表式

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{i\omega}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R(t')} \left[ \boldsymbol{\beta}(t') - \left\{ 1 + \frac{ic}{\omega R(t')} \right\} \mathbf{n}(t') \right] \exp\left\{ i\omega \left( t' + \frac{R(t')}{c} \right) \right\} dt' \quad (2-3.8)$$

これは文献[10]において、Chubar によって採用した表式で、現在の多くの放射光施設において放射光スペクトル計算の基本式として使われているために詳しく導出し考察する。電場をフーリエ展開して、

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_\omega \exp(-i\omega t) dt \quad (2-3.9)$$

この電場： $\mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}$  に対応するベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルを

$\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}, \phi_\omega e^{-i\omega t}$  と書けば、これらは(2-1.1)のポテンシャルであり、次の関係を満たす。

$$\phi_\omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R(t')} \exp\left\{i\omega\left(t' + \frac{R(t')}{c}\right)\right\} dt' \quad (2-3.10)$$

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{R(t')} \exp\left\{i\omega\left(t' + \frac{R(t')}{c}\right)\right\} dt' \quad (2-3.11)$$

この(2-3.10)、(2-3.11)のフーリエ成分も  $\mathbf{E}(t) = -\nabla\phi - \frac{d\mathbf{A}}{dt}$  (2-1.3)

を満たすと考えれば

$$\mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t} = -\nabla(\phi_\omega e^{-i\omega t}) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}) = -(\nabla\phi_\omega) e^{-i\omega t} + i\omega\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}$$

よって、  $\mathbf{E}_\omega = -\nabla\phi_\omega + i\omega\mathbf{A}_\omega$  (2-3.12)

ここで、 $\mathbf{E}_\omega$  を求めるために  $\nabla\phi_\omega$  を計算していく。まず始めに、 $\frac{\partial\phi_\omega}{\partial x}$  を計算する。

$$\frac{\partial\phi_\omega}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{R(t')} \exp\left\{\frac{i\omega R(t')}{c}\right\} \right] \cdot e^{i\omega t'} dt'$$

この積分中の微分は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{R(t')} \exp\left\{\frac{i\omega R(t')}{c}\right\} \right] &= \frac{1}{R(t')^2} \left[ R(t') \frac{\partial}{\partial x} \left( \exp\left\{\frac{i\omega R(t')}{c}\right\} \right) - \left( \frac{\partial R(t')}{\partial x} \right) \exp\left\{\frac{i\omega R(t')}{c}\right\} \right] \\ &= \frac{1}{R(t')^2} \left[ \frac{i\omega R(t')}{c} - 1 \right] \left( \frac{\partial R(t')}{\partial x} \right) \exp\left\{\frac{i\omega R(t')}{c}\right\} \\ &= \frac{i\omega}{c} \cdot \frac{1}{R(t')} \cdot \left\{ 1 + \frac{ic}{\omega R(t')} \right\} \exp\left\{\frac{i\omega R(t')}{c}\right\} \cdot \left( \frac{\partial R(t')}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

となるので、

$$\frac{\partial R(t')}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial R(t')}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial R(t')}{\partial z} \mathbf{k} = \nabla R(t') = \frac{\mathbf{R}(t')}{R(t')} = \mathbf{n}(t') \quad \text{に注意すれば、}$$

$$\nabla\phi_\omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\omega}{cR(t')} \cdot \left\{ 1 + \frac{ic}{\omega R(t')} \right\} \exp \left\{ i\omega \left( t' + \frac{R(t')}{c} \right) \right\} \mathbf{n}(t') dt' \quad (2-3.13)$$

(2-3.11)及び(2-3.13)を(2-3.12)に代入すれば、

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{i\omega}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R(t')} \left[ \boldsymbol{\beta}(t') - \left\{ 1 + \frac{ic}{\omega R(t')} \right\} \mathbf{n}(t') \right] \exp \left\{ i\omega \left( t' + \frac{R(t')}{c} \right) \right\} dt'$$

となり、(2-3.8)の Chubar 表式が得られる。

以上の導出仮定を見れば、Chubar 表式では、本論文で定義した放射スペクトル電場(2-17)

$$\mathbf{E}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_a(t) \exp(i\omega t) dt$$

の代わりに  $\mathbf{E}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{E}_v(t) + \mathbf{E}_a(t)] \exp(i\omega t) dt$  を考えている事がわかる。これは観測点での全電場のフーリエ成分である。つまり(2-1.4)式を直接フーリエ変換すると、(2-3.8)の Chubar 表式が得られるはずである。(2-1.4)式の直接フーリエ変換を求めることは一見困難に思われるが、(2-1.9)の関係式を使うことで実行可能である。これによって両者が一致することを Appendix 2-5 に記す。

この(2-3.8)式内で  $\frac{c}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi}$  であるので、 $\frac{ic}{\omega R(t')} = \frac{i\lambda}{2\pi R(t')}$  は、放射光の波長と光源-観測

者間の距離の比になっているため問題なく無視できる量であり、このことに注意すると、

$$\mathbf{E}_\omega \approx \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{i\omega}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R(t')} [\boldsymbol{\beta}(t') - \mathbf{n}(t')] \exp \left\{ i\omega \left( t' + \frac{R(t')}{c} \right) \right\} dt'$$

さらに、 $-\mathbf{n}(t') \times (\mathbf{n}(t') \times \boldsymbol{\beta}(t')) = \boldsymbol{\beta}(t') - (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) \mathbf{n}(t') \approx \boldsymbol{\beta}(t') - \mathbf{n}(t')$  と見れば、

(2-3.7)の Wann-Kim 表式と(2-3.8)の Chubar 表式は、ともによく似ており、元々の式(2-3.3)の近似となっていることが判る。Chubar 表式は観測点での放射電場のフーリエ成分としては、余分な等速運動からの電場成分を含んだ近似表式として理解すべきである。しかし求めるものが観測点での全ての電場のフーリエ成分である場合は正確な表示であることに注意する。

ここでは、以上3種類のスペクトル表式の内、無限遠でのスペクトル計算には[2-3-1]節の遠方場近似を適応し、近距離でのスペクトル計算には[2-3-2]節の Kim-Wang 表式を採用する。

## 2-4. 有限長さの光源からの放射

これまで述べた一般的な放射理論を有限の長さのみ加速度運動を行う光源に Kim-Wang

表式を適用することを試みる。一定の速度で飛来する電子が時刻  $t_1 \leq t \leq t_2$  で区間でのみ磁場による加速度運動を行い、その後、また一定速で飛び去るものとする。すると(2-29)式は

$$\mathbf{E}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_a(t) \exp(i\omega t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{cR(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right]_{t'} \exp(i\omega t) dt \quad (2-4.1)$$

となる。有限長さから放射では、Kim-Wang 表式は(2-3-7)の導出過程を見れば、

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left( \frac{\mathbf{n} \times \{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}\}}{Rc(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right) \exp(i\omega t) \right]_{-t_1}^{t_2} - \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{i\omega}{c} \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\mathbf{n} \times \{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}\}}{R(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right) \exp(i\omega t) dt \quad (2-4.2)$$

この第1項はアンジュレータ遷移放射 (TUR) と呼ばれ K-J.Kim によって研究されている [11]。TUR は低い周波数領域で重要であり、GeV 領域の電子エネルギーをもつ放射光施設では、赤外線の光源として注目される。しかしシンクロトロン放射で重要となる短い波長領域では、無視できる成分である。ここでは、アンジュレータ放射の検討を主眼とするため TUR 部分を落として考える。すると

$$\mathbf{E}_\omega = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{i\omega}{c} \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\mathbf{n} \times \{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}\}}{R(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right) \exp(i\omega t) dt \quad (2-4.3)$$

これに遠方場近似すると  $R(t') = R_0$  ,  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0$  (一定) を適用すると、

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{-ie\omega}{4\pi\epsilon_0 c R_0} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \boldsymbol{\beta}(t')) \right] \exp\{i\omega(t' - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}(t')/c)\} dt' \quad (2-4.4)$$

となる。実際の放射光スペクトル計算の基本式として(2-4.3)及び(2-4.4)を使用する。

## 2-5. 多数の電子による放射

多数の電子からの放射を考える際に、電子のビーム内で位相相関を持たない通常の自発放射と電子の分布形状が意味を持つコヒーレント放射 (CSR) との違いについて考える。

### [2-5-1] 多数の電子からの放射 (一般論)

一つの電子が出す放射光のスペクトル表式として遠方場近似を使った場合、無限遠方で、

$$\frac{d}{d\omega} \left( \frac{dP}{d\Omega} \right)_1 = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \mathbf{n} \times \{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}\} \right]_{t'} \exp\left\{ i\omega \left( t' - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c} \right) \right\} dt' \right|^2 \quad (2-5.1)$$

多電子系では、

$$e\boldsymbol{\beta} \exp\left\{-i\frac{\omega}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}\right\} \Rightarrow \sum_{j=1}^N e_j \boldsymbol{\beta}_j \exp\left\{-i\frac{\omega}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_j\right\} \quad (2-5.2)$$

ここで、N個の電子をもつビームがz軸のみに分布している場合を考え、各電子が放射エリア内で等速に動くことと仮定する[2,8]。この電子の分布関数を  $f(z)$  とし、電子の分布している

区間Lをk等分すれば、

$$\sum_{j=1}^k f(z_j) \cdot \Delta z = N \quad , \quad \Delta z = L/k \quad , \quad z_j = j \cdot \Delta z \quad (2-5.3)$$

ここでj番目の区間にある電荷量は、 $e_j = f(z_j) \cdot \Delta z \cdot e$  であり、

$$\boldsymbol{\beta}_j(t') = \boldsymbol{\beta}_1\left(t' - \frac{j \cdot \Delta z}{\langle v_z \rangle}\right) = \boldsymbol{\beta}_1(t' - j\Delta t') \quad , \quad r_j(t') = r_1(t' - j\Delta t') \quad ; \quad \Delta t' = \Delta z / \langle v_z \rangle \quad (2-5.4)$$

すると、j番目の区間からの放射を考えた場合、(2-5.1)の積分部に電荷量を掛けたものを  $I_j$

として次式のように表す。

$$\begin{aligned} I_j &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \mathbf{n} \times \left\{ \mathbf{n} \times e_j \boldsymbol{\beta}_j \right\} \right]_{t'} \exp\left\{i\omega\left(t' - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_j}{c}\right)\right\} dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \mathbf{n} \times \left\{ \mathbf{n} \times \left( f(z_j) \cdot \Delta z \cdot e \boldsymbol{\beta}_1(t' - j\Delta t') \right) \right\} \right]_{t'} \exp\left\{i\omega\left(t' - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_1(t' - j\Delta t')}{c}\right)\right\} dt' \end{aligned}$$

ここで  $u = t' - \Delta t' j$  と変数変換すれば、

$$\begin{aligned} I_j &= f(z_j) \cdot \Delta z \cdot e \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \mathbf{n} \times \left\{ \mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}_1(u) \right\} \right] \exp\left\{i\omega(u + j\Delta t' - \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_1(u)/c)\right\} du \\ &= e \cdot f(z_j) \cdot \Delta z \cdot \exp(i\omega j\Delta z / \langle v_z \rangle) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \mathbf{n} \times \left\{ \mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}_1(t') \right\} \right]_{t'} \exp\left\{i\omega(u - \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_1(t')/c)\right\} dt' \end{aligned}$$

これより、(2-5.1)をN個の電子の場合に直すと

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\omega} \left( \frac{dP}{d\Omega} \right)_N \\ &= \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \sum_{j=1}^k f(z_j) \cdot \exp\left(i\omega \frac{z_j}{\langle v_z \rangle}\right) \Delta z \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \mathbf{n} \times \left\{ \mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}_1(t') \right\} \right]_{t'} \exp\left\{i\omega\left(t' - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_1(t')}{c}\right)\right\} dt' \right|^2 \\ &= \left| \sum_{j=1}^k f(z_j) \cdot \exp\left(i\omega \frac{z_j}{\langle v_z \rangle}\right) \Delta z \right|^2 \cdot \frac{d}{d\omega} \left( \frac{dP}{d\Omega} \right)_1 \end{aligned}$$

ここで区間分割数kを無限大にして積分形で表すと、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k f(z_j) \cdot \exp\left(i\omega \frac{z_j}{\langle v_z \rangle}\right) \Delta z = \int_{z_{in}}^{z_{out}} f(z) \exp\left(\frac{i\omega z}{\langle v_z \rangle}\right) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \exp\left(i \cdot \frac{2\pi z}{\lambda \langle \beta_z \rangle}\right) dz$$

これより、N 個の電子による放射は、

$$\frac{d}{d\omega} \left( \frac{dP}{d\Omega} \right)_N = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \exp\left(i \cdot \frac{2\pi z}{\lambda \langle \beta_z \rangle}\right) dz \right|^2 \cdot \frac{d}{d\omega} \left( \frac{dP}{d\Omega} \right)_1 \quad (2-5.5)$$

となる。通常は  $\langle \beta_z \rangle \sim \beta \sim 1$  として、

$$\frac{d}{d\omega} \left( \frac{dP}{d\Omega} \right)_N = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \exp\left(i \cdot \frac{2\pi z}{\lambda}\right) dz \right|^2 \cdot \frac{d}{d\omega} \left( \frac{dP}{d\Omega} \right)_1 \quad (2-5.6)$$

このうち、

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \exp\left(i \cdot \frac{2\pi z}{\lambda}\right) dz \right|^2 \quad (2-5.7)$$

はコヒーレント放射による強度増加分を表し CSR などの論文でよく使われる。ここで

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \exp\left(i \cdot \frac{2\pi z}{\lambda}\right) dz \quad (2-5.8)$$

は形状因子である。

この例として、電子ビームが矩形バンチの場合[2]とガウス分布形状の場合[12]の結果を Appendix .2-6 に記す。

### [2-5-2] 自発放射成分

これまでの例では、電子ビームのバンチ長程度の波長帯では CSR が発生するが、実際に放射光で扱う光の波長はバンチ長よりも極端に短くなる。そのため各電子間の位相関係はない場合を想定して(2-5.7)を再考する。この場合、

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \exp\left(i \cdot \frac{2\pi z}{\lambda}\right) dz \right|^2 &= \left| \sum_{j=1}^N \exp\left(i \cdot \frac{2\pi z_j}{\lambda}\right) \right|^2 \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left\{ \cos(\kappa z_j) + i \sin(\kappa z_j) \right\} \cdot \left\{ \cos(\kappa z_k) + i \sin(\kappa z_k) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left\{ \cos(\kappa(z_j - z_k)) + i \sin(\kappa(z_j - z_k)) \right\} \\ &= N + \sum_{j \neq k} \cos(\kappa(z_j - z_k)) \end{aligned} \quad (2-5.9)$$

と書けるが、この平均値は  $N$  である。これが自発放射成分であり、短期的に（瞬間的に）ゆらぐことはあっても長く観測すれば平均的にここに落ち着くということである。通常の放射光計算では、ひとつの電子による放射強度に電子数（または電流）を書けたものをトータルの放射強度として(2-3.5)を計算する。

## 2-6. アンジュレータのスペクトル関数

アンジュレータのスペクトル特性の内、もっとも特徴的な性質は高い干渉性を持っていることである。この磁石列の周期性に起因するアンジュレータスペクトル関数について調べていく。周期数  $N_u$  のアンジュレータ放射のスペクトル関数として次の2つの形がよく使われるので、これらの由来と関係性について議論することを本章の目的とする。

$$(1) \quad S_N = \left[ \frac{\sin \{N_u \pi \omega / \omega_1(\theta)\}}{N_u \sin \{\pi \omega / \omega_1(\theta)\}} \right]^2 : \left( \frac{\sin N_u x}{N_u \sin x} \right)^2 \text{の形}$$

$$(2) \quad S_N = \left[ \frac{\sin \{N_u \pi (\omega / \omega_1(\theta) - n)\}}{N_u \pi (\omega / \omega_1(\theta) - n)} \right]^2 : \left( \frac{\sin N_u x}{N_u x} \right)^2 \text{の形}$$

任意の電子軌道から放射される光子数について、再度(2-3.4)と(2-3.5)を記すと

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{R_0}{R} \cdot \frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \right]_{t'} \exp \left\{ i\omega \left( t' + \frac{R(t')}{c} \right) \right\} dt' \quad (2-3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\text{photon}}}{d\Omega} &= \frac{d}{d\omega} \left( \frac{dP}{d\Omega} \right)_{\text{total}} \cdot \Delta\omega \cdot \frac{I(A)}{e} \cdot \frac{1}{\hbar\omega} \quad (\text{photons/sec/A/rad}^2) \\ &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c} \cdot |\mathbf{A}_\omega|^2 \cdot \Delta\omega \cdot \frac{I(A)}{e} \cdot \frac{1}{\hbar\omega} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \cdot |\mathbf{A}_\omega|^2 \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega} \cdot \frac{I(A)}{e} \end{aligned} \quad (2-3.5)$$

ここで電子軌道がアンジュレータ放射のように周期 ( $T$ )、周期数  $N_u$  の周期性を持つ場合の (2-3.4) を求めていく。

[2-6-1] 軌道が有限の周期性を持つ場合のスペクトル

$$\text{まず放射電場に対応して} \quad \mathbf{a}(t) = \frac{R_0}{R} \cdot \frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \quad (2-6.1)$$

とすれば,

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(t+T) = \mathbf{a}(t+2T) = \mathbf{a}(t+3T) = \dots = \mathbf{a}(t+N_u T) \text{ である。すると (2-3.4)}$$

を観測者時間で書き直して

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{N_u T} \mathbf{a}(t) \exp(i\omega t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^T \mathbf{a}(t) \exp(i\omega t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_T^{2T} \mathbf{a}(t) \exp(i\omega t) dt + \dots + \frac{1}{2\pi} \int_{N_u T}^{N_u T} \mathbf{a}(t) \exp(i\omega t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^T \mathbf{a}(t) \exp(i\omega t) dt \{1 + \exp(i\omega T) + \exp(2i\omega T) + \dots + \exp((N_u - 1)i\omega T)\} \\
&= \frac{1 - \exp(iN_u \omega T)}{1 - \exp(i\omega T)} \frac{1}{2\pi} \int_0^T \mathbf{a}(t) \exp(i\omega t) dt
\end{aligned}$$

ここで  $\mathbf{a}_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \mathbf{a}(t) \exp(i\omega t) dt$  とすれば、 $\mathbf{A}_\omega = \frac{1 - \exp(iN_u \omega T)}{1 - \exp(i\omega T)} \mathbf{a}_\omega$  (2-6.2)

そして

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}_\omega|^2 &= \mathbf{A}_\omega \cdot \mathbf{A}_\omega^* \\
&= |\mathbf{a}_\omega|^2 \cdot \frac{1 - \exp(iN_u \omega T)}{1 - \exp(i\omega T)} \cdot \frac{1 - \exp(-iN_u \omega T)}{1 - \exp(-i\omega T)} \\
&= |\mathbf{a}_\omega|^2 \cdot \frac{2 - \exp(iN_u \omega T) - \exp(-iN_u \omega T)}{2 - \exp(i\omega T) - \exp(-i\omega T)} \\
&= |\mathbf{a}_\omega|^2 \cdot \frac{1 - \cos(N_u \omega T)}{1 - \cos(\omega T)} \\
&= |\mathbf{a}_\omega|^2 \cdot \frac{\sin^2(N_u \omega T/2)}{\sin^2(\omega T/2)} = N_u^2 |\mathbf{a}_\omega|^2 \cdot \left[ \frac{\sin(N_u \omega T/2)}{N_u \sin(\omega T/2)} \right]^2
\end{aligned} \tag{2-6.3}$$

観測者が受ける一周期あたりの基本角周波数を  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  とすれば

$$|\mathbf{A}_\omega|^2 = N_u^2 |\mathbf{a}_\omega|^2 \cdot \left[ \frac{\sin(\pi N_u \omega / \omega_1)}{N_u \sin(\pi \omega / \omega_1)} \right]^2 \tag{2-6.4}$$

これがアンジュレータ放射のスペクトル特性を決める式となる。ここで電子軌道に依存する  $\mathbf{a}_\omega$  の形よりの周期性を持っていることの方が重要である。単に通常のアンジュレータで

は、サイン型磁場の中での一周期分の軌道が  $\mathbf{a}_\omega$  を決めていただけであり、別の軌道を描か

せてもスペクトルとしては似たものとなる。（ $\mathbf{a}_\omega$  は偏光特性や高調波に重要である。）

ここで寄り道してアンジュレータの周期数を奇数周期に限定すると(2-6.2)は実数形式で書けることが判る。(Appendix .2-7)

$$\mathbf{A}_\omega = \mathbf{a}_\omega \frac{\sin(N_u \omega T/2)}{\sin(\omega T/2)} \quad : \text{奇数周期の場合} \quad (2-6.5)$$

### [2-6-2]フーリエ級数による展開

これまでのスペクトルを求めるためにフーリエ変換を使ってきた。しかしアンジュレータのように周期性がある場合はフーリエ級数に展開して、アンジュレータ放射光のn次光近傍の様子を解析することが良く行われる。特にアンジュレータ放射のベッセル関数表示の為に重要である。そこでフーリエ級数を使ったやり方をここで紹介し、これまでの結果と比較する。元に戻って単位立体角を通して去っていく放射電磁波のエネルギーは(2-3.1)から

$$\frac{d}{d\Omega} \left( \frac{dW}{dt} \right) = \frac{R_0^2}{\mu_0 c} |\mathbf{E}_a(t)|^2 = \varepsilon_0 c R_0^2 |\mathbf{E}_a(t)|^2$$

ここで新たに記号を変えて

$$\mathbf{F}(t) = \frac{R_0}{R} \cdot \frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \quad (2-6.6)$$

とすれば  $\frac{d}{d\Omega} \left( \frac{dW}{dt} \right) = \varepsilon_0 c |\mathbf{F}(t)|^2$

運動が観測者から見て周期 T を持つとき、フーリエ級数で展開できて

$$\mathbf{F}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_k \exp(-ik\omega_1 t) \quad (2-6.7)$$

ただし、 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$

$$\mathbf{F}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{F}(t) \exp(ik\omega_1 t) dt \quad (2-6.8)$$

これは無限周期のアンジュレータの場合で、積分は一周期で行っている。実際に有限長さのアンジュレータの場合では、アンジュレータの長さ分のステップ関数がかかったものを考えて、

$$\hat{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{F}(t) \cdot G(t) \quad \text{とおく。}$$

ここで、 $G(t)=1; -N_u T/2 \leq t \leq N_u T/2$   
 $G(t)=0; t \leq -N_u T/2, N_u T/2 \leq t$  である。

この  $\hat{\mathbf{F}}(t)$  のスペクトル分解を求めるために、再度フーリエ展開すると、

$$\hat{\mathbf{F}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{F}}_{\omega} \exp(-i\omega t) d\omega$$

$$\hat{\mathbf{F}}_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{F}}(t) \exp(i\omega t) dt$$

すると、(2-3.2)と同じく、

$$\frac{d}{d\omega} \left( \frac{dP}{d\Omega} \right)_{total} = \frac{\varepsilon_0 c}{\pi} |\hat{\mathbf{F}}_{\omega}|^2 \quad (2-6.9)$$

この式中の  $\hat{\mathbf{F}}_{\omega}$  を求めると、

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_{\omega} &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{F}}(t) \exp(i\omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(t) \cdot G(t) \exp(i\omega t) dt \\ &= \int_{-N_u T/2}^{N_u T/2} \mathbf{F}(t) \exp(i\omega t) dt = \int_{-N_u T/2}^{N_u T/2} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_k \exp(-ik\omega_1 t) \right\} \exp(i\omega t) dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_k \int_{-N_u T/2}^{N_u T/2} \exp\{i(\omega - k\omega_1)t\} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_k \frac{\exp\{i(\omega - k\omega_1)N_u T/2\} - \exp\{-i(\omega - k\omega_1)N_u T/2\}}{i(\omega - k\omega_1)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_k \frac{2 \sin\{(\omega - k\omega_1)N_u T/2\}}{(\omega - k\omega_1)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_k \frac{2 \sin\{\pi N_u (\omega/\omega_1 - k)\}}{\omega_1 (\omega/\omega_1 - k)} \end{aligned} \quad (2-6.10)$$

実際の光強度を求めるとき、(2-6.9)より  $\hat{\mathbf{F}}_{\omega}$  の2乗を求めるが、(2-6.10)から無限和の2乗が

出てくる。これは、通常は各次数のピークが十分離れているとしてクロスタームは落とし、

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{d\omega} \left( \frac{dP}{d\Omega} \right)_{total} \right]_k &= \frac{4\varepsilon_0 c}{\pi} |\mathbf{F}_k|^2 \left[ \frac{\sin\{\pi N_u (\omega/\omega_1 - k)\}}{\omega_1 (\omega/\omega_1 - k)} \right]^2 \\ &= \frac{4\pi\varepsilon_0 c}{\omega_1^2} \cdot N_u^2 |\mathbf{F}_k|^2 \left[ \frac{\sin\{\pi N_u (\omega/\omega_1 - k)\}}{\pi N_u (\omega/\omega_1 - k)} \right]^2 \end{aligned} \quad (2-6.11)$$

ところで、(2-6.10)を次のように書き換える。

$$\hat{\mathbf{F}}_{\omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_k \frac{2 \sin\{\pi N_u (\omega/\omega_1 - k)\}}{\omega_1 (\omega/\omega_1 - k)} = \int_{-N_u T/2}^{N_u T/2} \mathbf{F}(t) \exp(i\omega t) dt = 2\pi \mathbf{A}_{\omega} \quad (2-6.12)$$

今、奇数周期のアンジュレータを考えれば、(2-6.5), (2-6.10)から

$$\mathbf{A}_\omega = N_u \mathbf{a}_\omega \cdot \frac{\sin(N_u \omega T/2)}{N_u \sin(\omega T/2)} = \frac{N_u}{\omega_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_k \frac{\sin\{\pi N_u (\omega/\omega_1 - k)\}}{\pi N_u (\omega/\omega_1 - k)}$$

これより

$$\mathbf{a}_\omega \cdot \frac{\sin(N_u \omega T/2)}{N_u \sin(\omega T/2)} = \frac{1}{\omega_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_k \frac{\sin\{\pi N_u (\omega/\omega_1 - k)\}}{\pi N_u (\omega/\omega_1 - k)} \quad (2-6.13)$$

光強度は(2-6.13)の2乗に比例して (2乗すると複素数形式でも同じ結果になり)

$$|\mathbf{a}_\omega|^2 \cdot \left\{ \frac{\sin(N_u \omega T/2)}{N_u \sin(\omega T/2)} \right\}^2 = \frac{1}{\omega_1^2} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_k \frac{\sin\{\pi N_u (\omega/\omega_1 - k)\}}{\pi N_u (\omega/\omega_1 - k)} \right]^2 \quad (2-6.14)$$

これが当初の目的であった2種類のスペクトル関数の関係である。左辺は1周期の数値積分のみでスペクトルを求める場合に使い、右辺はk次光近傍をベッセル関数表示するとき使用される。特に $\omega = k\omega_1(\theta)$ では、ベッセル関数表示の結果とK-J.Kimによる積分表示の結果[13]は一致するが、実際につきあわせて確認するときに混乱するので注意を要する。

## 2-7. アンジュレータ内での電子軌道

アンジュレータ放射を求める際に、アンジュレータ磁場中での電子の運動を求めることが必要となる。実際の磁場中での厳密な軌道計算は数値計算に頼ることになるが、解析計算のためには近似的な磁場とそこでの軌道(近似式)を用いる。ここでは、アンジュレータ内の軌道計算方法について議論する。

### [2-7-1] アンジュレータ内部での電子の運動方程式と一般的な解法

まず一般的な磁場  $\mathbf{B} = (B_x(z), B_y(z), B_z(z))$  中での電子の運動を考える。

初期条件として  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ ,  $(v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}) = (0, 0, v)$  とする。

すると運動方程式  $\dot{\mathbf{p}} = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  は、

$$\begin{cases} m\gamma \dot{v}_x = -e(v_y B_z - v_z B_y) \\ m\gamma \dot{v}_y = -e(v_z B_x - v_x B_z) \\ m\gamma \dot{v}_z = -e(v_x B_y - v_y B_x) \end{cases} \quad (2-7.1)$$

一般的な3次元磁場が与えられたときは、(2-7.1)の微分方程式を数値的に解く。例えばRunge-Kutta法(4次)がよく用いられる。

アンジュレータの中心軸近傍で $B_z=0$ と見なせる場合では、

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt'} = \frac{e}{m\gamma} v_z B_y(z) \\ \frac{dv_y}{dt'} = -\frac{e}{m\gamma} v_z B_x(z) \\ \frac{dv_z}{dt'} = -\frac{e}{m\gamma} (v_x B_y - v_y B_x) \end{cases} \quad (2-7.2)$$

ここで、アンジュレータ磁場が  $z$  の関数で表されることに注意すると、(2-7.2)の第一式で

$$\frac{dv_x}{dt'} = \frac{dv_x}{dz} \cdot \frac{dz}{dt'} = \frac{dv_x}{dz} \cdot v_z \quad \text{であるから、} \quad \frac{dv_x}{dz} = \frac{e}{m\gamma} v_z B_y(z)$$

$$\text{これより、} \quad v_x = \frac{e}{m\gamma} \int_0^{z(t')} B_y(u) du \equiv f(z) \quad (2-7.3)$$

$$\text{同様に、} \quad v_y = \frac{e}{m\gamma} \int_0^{z(t')} B_x(u) du \equiv g(z) \quad (2-7.4)$$

これより水平方向の速度は直交する磁場成分の一次積分に比例することが判る。

$v_z$  に関しては、 $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$  (一定) より、

$$v_z = \frac{dz}{dt'} = \sqrt{v^2 - (v_x^2 + v_y^2)} = \sqrt{v^2 - (f(z)^2 + g(z)^2)} \quad (2-7.5)$$

この右辺は  $z$  のみの関数なので、変数分離できて

$$t'(z) = \int_0^z \frac{du}{v_z} = \int_0^z \frac{du}{\sqrt{v^2 - (f(u)^2 + g(u)^2)}} \quad (2-7.6)$$

また、(2-7.5)から、

$$v_x = \frac{dx}{dt'} = \frac{dx}{dz} \cdot \frac{dz}{dt'} = f(z) \text{ より} \quad \frac{dx}{dz} = \frac{f(z)}{v_z} = \frac{f(z)}{\sqrt{v^2 - (f(z)^2 + g(z)^2)}}$$

$$\text{これより、} \quad x(z) = \int_0^z \frac{f(u)}{\sqrt{v^2 - (f(u)^2 + g(u)^2)}} du \quad (2-7.7)$$

$$\text{同様に、} \quad y(z) = \int_0^z \frac{g(u)}{\sqrt{v^2 - (f(u)^2 + g(u)^2)}} du \quad (2-7.8)$$

(注) (2-7.7)及び(2-7.8)の分子は  $\sqrt{v^2 - (f(z)^2 + g(z)^2)} = v_z = \beta_z c$

であり、 $\beta_z \approx 1$  と見なせる高エネルギーの電子では、例えば(2-7.7)は

$$x(z) \approx \int_0^z \frac{f(u)}{c} du = \frac{e}{mc\gamma} \int_0^z \left\{ \int_0^u B_y(s) ds \right\} du \quad (2-7.9)$$

となり、磁場の 2 次積分に比例することが判る。通常(2-7.9)をもって軌道として問題なく、実際の磁場測定時の軌道計算ではこれを使っている。

ここでは、より厳密な軌道算出手順を考えたいので以上をまとめて

- ① (2-7.6)を逆に解くこと（数値的に）で  $t'$  に対する  $z(t')$  を決める。
- ② (2-7.7)(2-7.8)からを求め。
- ③  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  は(2-7.3)(2-7.4)(2-7.5)から求める。

以上の手順で電子の速度と位置（軌道）が計算できる。

### [2-7-2] アンジュレータ磁場の中での軌道（プラナー型）

ここでは、プラナー型アンジュレータ磁場

$$\mathbf{B} = \left( 0, B_{y0} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_u} z\right), 0 \right) \quad (2-7.10)$$

の中での電子の運動を考える。計算の結果得られる電子軌道には近似が含まれるが、この精度についても合わせて述べていく。

このとき運動方程式は

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt'} = \frac{e}{m\gamma} v_z B_{y0} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_u} z\right) \\ \frac{dv_y}{dt'} = 0 \\ \frac{dv_z}{dt'} = -\frac{e}{m\gamma} v_x B_{y0} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_u} z\right) \end{cases} \quad (2-7.11)$$

であり y 方向（垂直方向）の振動はない。 :  $v_y = 0, y = 0$

まず(8.3)より  $v_x = \frac{e}{m\gamma} \cdot \frac{\lambda_u}{2\pi} B_{y0} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_u} z\right)$  となるが

(8.3)より  $K = \frac{eB_{y0}\lambda_u}{2\pi mc} = 93.37 B_{y0}(\text{T}) \cdot \lambda_u(\text{m}), \psi_0 = \frac{K}{\gamma}$  とおくと

$$v_x = c\Psi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_u} z\right) \quad (2-7.12)$$

次に(2-7.5)より  $v_z = \sqrt{v^2 - \left\{c\Psi_0 B_{y0} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_u} z\right)\right\}^2} = v \sqrt{1 - \frac{c^2 \Psi_0^2 B_{y0}^2}{v^2} \sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda_u} z\right)}$

となるが  $|x| \ll 1$  のとき  $\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \dots$  で展開し、 $\Psi_0$  の 4 乗以上の

項を落とすと

$$v_z \approx v \left\{ 1 - \left(\frac{c}{v}\right)^2 \frac{\Psi_0^2}{2} \sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda_u} z\right) \right\} = v \left\{ 1 - \left(\frac{c}{v}\right)^2 \frac{\Psi_0^2}{4} \left\{ 1 - \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda_u} z\right) \right\} \right\}$$

ここで  $\left(\frac{c}{v}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Psi_0^2}{4}\right) = \frac{1}{1 - 1/\gamma^2} \left(\frac{\Psi_0^2}{4}\right) \approx \left(1 + \frac{1}{\gamma^2}\right) \cdot \left(\frac{K^2}{4\gamma^2}\right) \approx \frac{K^2}{4\gamma^2} = \frac{\Psi_0^2}{4}$  とし、

$$v_z \approx v \cdot \left(1 - \frac{\Psi_0^2}{4}\right) + v \cdot \frac{\Psi_0^2}{4} \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda_u} z\right) \quad (2-7.13)$$

(2-7.13)の内、 $\langle v_z \rangle = v \cdot \left(1 - \frac{\Psi_0^2}{4}\right)$  は平均的な  $z$  方向の速度である。

通常は、(2-7.12) (2-7.13)において、 $\frac{2\pi}{\lambda_u} z = \frac{2\pi}{\lambda_u} \langle v_z \rangle t' \equiv \omega_0 t'$  (2-7.14)

と近似して時間積分を行い、 $x, z$  を  $t'$  の関数として求めるのが普通である。つまり

$$z = \langle v_z \rangle t' + \langle v_z \rangle \cdot \frac{\Psi_0^2}{8\omega_0} \sin(2\omega_0 t') \approx \langle v_z \rangle t' + v \cdot \frac{\Psi_0^2}{8\omega_0} \sin(2\omega_0 t') \quad (2-7.15)$$

このような近似をして良い理由、つまり(2-7.14) の近似の精度については Appendix.2-8 で詳しく述べる。この結果から(2-7.14)は(2-7.13)と同じく  $\Psi_0$  の 4 乗 ( $1/\gamma$  の 4 乗) 以上を落と

した精度の良い近似であることが判り、通常の場合では問題なく使用できることになる。

これより (2-7.12)から

$$\begin{aligned}
v_x &= c\psi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_u}\langle v_z \rangle t' + v \cdot \frac{2\pi}{\lambda_u} \frac{\psi_0^2}{8\omega_0} \sin(2\omega_0 t')\right) = c\psi_0 \sin\left(\omega_0 t' + \frac{v}{\langle v_z \rangle} \cdot \frac{\psi_0^2}{8} \sin(2\omega_0 t')\right) \\
&\approx c\psi_0 \left[ \sin(\omega_0 t') \cos\left\{\frac{\psi_0^2}{8} \sin(2\omega_0 t')\right\} + \cos(\omega_0 t') \sin\left\{\frac{\psi_0^2}{8} \sin(2\omega_0 t')\right\} \right] \\
&\approx c\psi_0 \left[ \sin(\omega_0 t') + \frac{\psi_0^2}{8} \sin(2\omega_0 t') \cos(\omega_0 t') \right] = c\psi_0 \left[ \sin(\omega_0 t') + \frac{\psi_0^2}{4} \sin(\omega_0 t') \cos^2(\omega_0 t') \right]
\end{aligned}$$

これより

$$x = c\psi_0 \left[ \frac{-1}{\omega_0} \cos(\omega_0 t') + \frac{\psi_0^2}{4} \cdot \frac{-1}{\omega_0} \frac{\cos^3(\omega_0 t')}{3} \right] = \frac{-c\psi_0}{\omega_0} \left[ \cos(\omega_0 t') + \frac{\psi_0^2}{12} \cos^3(\omega_0 t') \right]$$

となるが通常、 $\psi_0$  の 2 乗の項を落として

$$x \approx \frac{-c\psi_0}{\omega_0} \cos(\omega_0 t') \approx \frac{-v\psi_0}{\omega_0} \cos(\omega_0 t') \quad (2-7.16)$$

これは  $1/\gamma$  の 2 乗程度の近似であり、 $z$  方向の軌道よりも精度が悪いことに注意する。

### [2-7-3] アンジュレータ磁場の中での軌道 (まとめ)

ここでは、代表的なアンジュレータ磁場中で電子軌道をまとめる。

#### (1) プラナー型

$$\text{アンジュレータ磁場: } \mathbf{B} = \left( 0, B_{y0} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_u} z\right), 0 \right)$$

$$\text{速度: } \boldsymbol{\beta} = \left( \psi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_u} z\right), 0, \beta \cdot \left(1 - \frac{\psi_0^2}{4}\right) + \beta \cdot \frac{\psi_0^2}{4} \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda_u} z\right) \right)$$

$$\text{座標: } \mathbf{r} = \left( \frac{-v\psi_0}{\omega_0} \cos(\omega_0 t'), 0, v \cdot \left(1 - \frac{\psi_0^2}{4}\right) t' + v \cdot \frac{\psi_0^2}{8\omega_0} \sin(2\omega_0 t') \right)$$

#### (2) 楕円型

$$\text{アンジュレータ磁場: } \mathbf{B} = \left( B_{x0} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_u} z\right), B_{y0} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_u} z\right), 0 \right)$$

速度:

$$\boldsymbol{\beta} = \left( \psi_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_u} z\right), \psi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_u} z\right), \beta \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{4\gamma^2} (K_x^2 + K_y^2) \right\} + \beta \cdot \frac{1}{4\gamma^2} (K_x^2 - K_y^2) \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda_u} z\right) \right)$$

$$\text{座標 : } \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \frac{vK_y}{\omega_0\gamma} \sin(\omega_0 t'), \\ \frac{-vK_x}{\omega_0\gamma} \cos(\omega_0 t'), \\ \frac{v}{4\gamma^2} (K_x^2 + K_y^2) t' + \frac{v}{4\gamma^2} (K_x^2 - K_y^2) \beta \cdot \frac{1}{2\omega_0} \sin(2\omega_0 t') \end{pmatrix}$$

ここで  $\langle v_z \rangle = \frac{v}{4\gamma^2} (K_x^2 + K_y^2)$  であり  $\omega_0 = \frac{2\pi}{\lambda_u} \langle v_z \rangle$  である。

$$(3) \text{ ヘリカル型 : } \mathbf{B} = \left( B_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_u} z\right), B_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_u} z\right), 0 \right)$$

$$\text{速度 : } \boldsymbol{\beta} = \left( \psi_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_u} z\right), \psi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_u} z\right), \beta \cdot \left\{ 1 - \frac{\psi_0}{2} \right\} \right) \quad \text{ただし } \psi_0 = \frac{K_x}{\gamma} = \frac{K_y}{\gamma} = \frac{K}{\gamma}$$

$$\text{座標 : } \mathbf{r} = \left( \frac{v\psi_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t'), \frac{-v\psi_0}{\omega_0} \cos(\omega_0 t'), v \cdot \left( 1 - \frac{\psi_0^2}{2} \right) t' \right)$$

## 2-8. アンジュレータのスペクトル表式

[2-7-3]で求めたアンジュレータ磁場の中での軌道を使えば、アンジュレータスペクトルが計算できる。ここでは、アンジュレータ長よりも十分離れた観測点での軸上近傍でのアンジュレータ放射スペクトル表式を求める。

本章で最終的に求めるのは、(2-3.5)の単位立体角、単位周波数あたりの光子数である。

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{R_0}{R} \cdot \frac{\mathbf{n} \times \{ (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \}}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \right]_{t'} \exp \left\{ i\omega \left( t' + \frac{R(t')}{c} \right) \right\} dt' \quad (2-3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\text{photon}}}{d\Omega} &= \frac{d}{d\omega} \left( \frac{dP}{d\Omega} \right)_{\text{total}} \cdot \Delta\omega \cdot \frac{I(A)}{e} \cdot \frac{1}{\hbar\omega} \quad (\text{photons/sec/A/rad}^2) \\ &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c} \cdot |\mathbf{A}_\omega|^2 \cdot \Delta\omega \cdot \frac{I(A)}{e} \cdot \frac{1}{\hbar\omega} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \cdot |\mathbf{A}_\omega|^2 \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega} \cdot \frac{I(A)}{e} \end{aligned} \quad (2-3.5)$$

遠方場近似が成立する場合、(2-3.4)は次式のように書き直せる。

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{\omega}{4\pi} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \boldsymbol{\beta}(t')) \right] \exp \left\{ i\omega(t' - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}(t')/c) \right\} dt' \quad (2-8.1)$$

アンジュレータ 1 周期あたりの放射のフーリエ成分を

$$\mathbf{a}_\omega = \frac{\omega}{4\pi} \int_0^T \left[ \mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \boldsymbol{\beta}(t')) \right] \exp \left\{ i\omega(t' - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}(t')/c) \right\} dt' \quad (2-8.2)$$

と書けば、N 周期のアンジュレータの場合、(2-6.4)より

$$|\mathbf{A}_\omega|^2 = N_u^2 |\mathbf{a}_\omega|^2 \cdot \left[ \frac{\sin(\pi N_u \omega / \omega_1)}{N_u \sin(\pi \omega / \omega_1)} \right]^2$$

アンジュレータ内での電子軌道： $\boldsymbol{\beta}(t'), \mathbf{r}(t')$ を使い、(2-8.2)を数値積分することでスペクトルを求めることが出来る。また、電子の単位ベクトルは下図のように $\theta, \phi$ をとると $\mathbf{n}_0 = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ である。

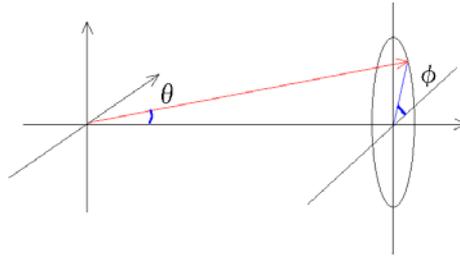


図 2-1 角度 $\theta, \phi$ の定義

これを K-J.Kim は、文献[13]でプラナー型アンジュレータについてまとめている。[2-8-1]では、この表式に準拠してプラナー型アンジュレータについて記した後に、楕円型アンジュレータスペクトルに対しても適応する。さらに、アンジュレータの各次数のピーク近傍では遠方場近似のもとに、ベッセル関数による表示が可能である。このアンジュレータのピークスペクトル特性を知ることはアンジュレータの仕様設計においても重要事項である。[2-8-2]では、ベッセル関数による表示をプラナー型と楕円型アンジュレータスペクトルに対して記し、様々なアンジュレータ放射特性について述べる。

#### [2-8-1] アンジュレータスペクトルの積分表示

下図のように $\phi, \psi$ をとり $\mathbf{n}_0$ に直交した単位ベクトル $\mathbf{e}_\sigma, \mathbf{e}_\pi$ をとる。 $(\mathbf{e}_\sigma$ は水平面内)

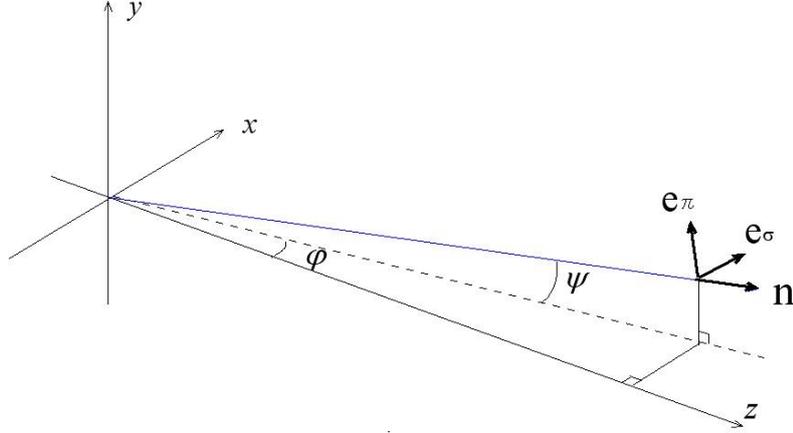


図 2-2 単位ベクトル  $\mathbf{e}_\sigma$ ,  $\mathbf{e}_\pi$  の方向と角度  $\varphi$ ,  $\psi$  の定義

$$\text{すると } \begin{cases} \mathbf{n} = (\sin \varphi, \sin \psi, \cos \varphi \cos \psi) \approx \left( \varphi, \psi, 1 - \frac{1}{2}(\varphi^2 + \psi^2) \right) \\ \mathbf{e}_\sigma = \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z \sin \varphi \approx \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z \varphi \\ \mathbf{e}_\pi = \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z \sin \psi \approx \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z \psi \end{cases} \quad (2-8.3)$$

このように(2-8.2)の電場成分を  $\sigma$  成分と  $\pi$  成分に分けて、プラナー型と楕円型アンジュレータスペクトルを次にまとめる。(楕円型での導出を Appendix.2-9 に示す。)

(1) プラナー型アンジュレータの場合

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\text{photon}}}{d\Omega} &= \frac{d}{d\omega} \left( \frac{dP}{d\Omega} \right)_{\text{total}} \cdot \Delta\omega \cdot \frac{I(A)}{e} \cdot \frac{1}{\hbar\omega} \quad (\text{photons/sec/rad}^2) \\ &= \left\{ \frac{\omega}{\omega_1(0)} \right\}^2 \cdot \frac{N_u^2 K_y^2 \gamma^2}{1 + K_y^2/2} \left\{ (B_p)_\sigma^2 + (B_p)_\pi^2 \right\} \left[ \frac{\sin \{ \pi N_u (\omega/\omega_1(\theta)) \}}{N_u \sin \{ \pi (\omega/\omega_1(\theta)) \}} \right]^2 \cdot \alpha \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{I(A)}{e} \end{aligned} \quad (2-8.4)$$

$$(B_p)_{\sigma, \pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} \gamma\varphi/K_y - \cos(u) \\ \gamma\psi/K_y \end{pmatrix} \exp \left\{ i \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} u - p \sin(u) + q \sin(2u) \right\} du \quad (2-8.5)$$

$$p = \frac{2\omega}{\omega_1(0)} \cdot \frac{\varphi\gamma K}{1 + K^2/2} \quad q = \frac{\omega}{4\omega_1(0)} \cdot \frac{K^2}{1 + K^2/2} \quad (2-8.6)$$

ここで、 $\varphi = \sin \theta \cos \phi$ 、 $\Psi = \sin \theta \sin \phi$  である。また  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$  は構造微細定数であり、

$\alpha \approx \frac{1}{137}$  である。

(2) 楕円型アンジュレータの場合

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\text{photon}}}{d\Omega} &= \frac{d}{d\omega} \left( \frac{dP}{d\Omega}_{\text{total}} \right) \cdot \Delta\omega \cdot \frac{I(A)}{e} \cdot \frac{1}{\hbar\omega} \quad (\text{photons/sec/rad}^2) \\ &= \left\{ \frac{\omega}{\omega_1(0)} \right\}^2 \cdot \frac{N_u^2 \gamma^2}{1 + (K_x^2 + K_y^2)/2} \left\{ (B_E)_\sigma^2 + (B_E)_\pi^2 \right\} \left[ \frac{\sin \{ \pi N_u (\omega/\omega_1(\theta)) \}}{N_u \sin \{ \pi (\omega/\omega_1(\theta)) \}} \right]^2 \cdot \alpha \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{I(A)}{e} \end{aligned} \quad (2-8.6)$$

$$(B_E)_{\sigma, \pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \begin{array}{l} \gamma\varphi - K_y \cos(u) \\ \gamma\Psi - K_x \sin(u) \end{array} \right) \exp \left\{ i \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} u - p_1 \sin(u) + p_2 \cos(u) + q \sin(2u) \right\} du \quad (2-8.7)$$

$$p_1 = \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} A = \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \cdot \frac{\beta\omega_1(\theta)}{\omega_0} \cdot \frac{K_y}{\gamma} \sin \theta \cos \phi \approx \frac{\omega}{\omega_1(0)} \cdot \frac{2K_y \gamma \theta \cos \phi}{1 + (K_x^2 + K_y^2)/2} \quad (2-8.8)$$

$$p_2 = \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} B = \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \cdot \frac{\beta\omega_1(\theta)}{\omega_0} \cdot \frac{K_x}{\gamma} \sin \theta \sin \phi \approx \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \cdot \frac{2K_x \gamma \theta \sin \phi}{1 + (K_x^2/2 + K_y^2/2)} \quad (2-8.9)$$

$$q = \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} X = \frac{-\omega}{\omega_1(\theta)} \frac{\omega_1(\theta)}{c} \frac{(K_x^2 - K_y^2)}{8\gamma^2 \omega_0} \cos \theta \sin(2\omega_0 t') \approx \frac{1}{4} \cdot \frac{K_y^2 - K_x^2}{1 + (K_x^2/2 + K_y^2/2)} \cdot \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \quad (2-8.10)$$

## [2-8-2] アンジュレータスペクトルの Bessel 関数表示

アンジュレータ放射光の k 次光スペクトルは整数次 Bessel 関数の重ね合わせとして表現される。通常のプラナー型アンジュレータのスペクトルの Bessel 関数表示は Alferov や Kitamura によって文献[4, 14-15]で研究されている。さらに、円偏光の場合は Kincade によって文献[5]で、楕円偏光の場合は Yamamoto によって文献[16]で研究されている。このスペクトルの Bessel 関数表示は、各次数のピーク波長において正確であり、[2-8-1]の積分結果に一致する。

アンジュレータ放射の k 次光近傍のスペクトルとして(2-6.11)から出発する。

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{d\omega} \left( \frac{dP}{d\Omega} \right)_{total} \right]_{\mathbf{k}} &= \frac{4\epsilon_0 c}{\pi} |\mathbf{F}_{\mathbf{k}}|^2 \left[ \frac{\sin \{ \pi N_u (\omega/\omega_1 - k) \}}{\omega_1 (\omega/\omega_1 - k)} \right]^2 \\ &= \frac{4\pi\epsilon_0 c}{\omega_1^2} \cdot N_u^2 |\mathbf{F}_{\mathbf{k}}|^2 \left[ \frac{\sin \{ \pi N_u (\omega/\omega_1 - k) \}}{\pi N_u (\omega/\omega_1 - k)} \right]^2 \end{aligned} \quad (2-6.11)$$

ここで  $\mathbf{F}_{\mathbf{k}}$  は遠方場近似のもとでの Jackson 表示を採用して

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mathbf{k}} &= \frac{iek\omega_1}{4\pi\epsilon_0 c T} \int_0^{T'} [\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \boldsymbol{\beta}(t'))] \exp \{ ik\omega_1 (t' - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}(t')/c) \} dt' \\ &= \frac{iek\omega_1}{4\pi\epsilon_0 c T} \mathbf{n}_0 \times [\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}] \end{aligned} \quad (2-8.11)$$

を求めることでスペクトル計算が出来る。ここで

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{k}} = \int_0^{T'} \boldsymbol{\beta}(t') \exp \{ ik\omega_1 (t' - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}(t')/c) \} dt' \quad (2-8.12)$$

とした。

(1) プラナー型アンジュレータのスペクトル[4, 14-15]

この詳細な計算は Appendix. 2-10 にまとめ、ここでは、結果のみ記す。プラナー型アンジュレータのスペクトルの  $k$  次光に対応して

$$\frac{d^2 P_n}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c} \cdot (f_x^2 + f_y^2) \cdot N_u^2 \gamma^2 \quad (\text{J/sec/rad}^2/\text{electron}) \quad (2-8.13)$$

$$\text{ここで } f_x(\gamma\theta, \phi) = \xi \cdot [2S_0 \gamma\theta \cos \phi - K(S_1 + S_{-1})] \cdot \frac{\sin \{ N_u \pi (\omega/\omega_1(\theta)) \}}{\{ N_u \pi (\omega/\omega_1(\theta)) - n \}} \quad (2-8.14)$$

$$f_y(\gamma\theta, \phi) = \xi \cdot 2S_0 \gamma\theta \sin \phi \cdot \frac{\sin \{ N_u \pi (\omega/\omega_1(\theta)) \}}{\{ N_u \pi (\omega/\omega_1(\theta)) - n \}} \quad (2-8.15)$$

であり、

$$S_q = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_{n+2p+q}(X) \cdot J_p(Y), \quad X = 2K\xi\gamma\theta, \quad Y = K^2\xi/4 \quad (2-8.16)$$

$$\xi = \frac{k}{1 + (\gamma\theta)^2 + K^2/2} \quad (2-8.17)$$

$$\omega_1(\theta) = \frac{4\pi c \gamma^2 / \lambda_u}{1 + (\gamma\theta)^2 + K^2/2} \quad (2-8.18)$$

実用的な単位では、

$$\frac{dN_{photon}}{d\Omega} = \frac{d}{d\omega} \left( \frac{dP}{d\Omega}_{total} \right) \cdot \Delta\omega \cdot \frac{I(A)}{e} \cdot \frac{1}{\hbar\omega} \quad (\text{photons/sec/rad}^2) \quad (2-8.19)$$

$$= 1.74426 \times 10^{14} I(A) N_u^2 E_{GeV}^2 (f_x^2 + f_y^2) \quad (\text{photons/sec/mrad}^2 / 0.1\% \text{b.w.})$$

ここで軸上観測の場合を考えると ( $\theta = 0$ )  $[\mathbf{F}_k]_{\perp} = \mathbf{0}$  となり水平偏光成分のみであるこ

とが判る。また、 $S_{\pm 1} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p \left( \frac{k}{2} \cdot \frac{K^2/2}{1+K^2/2} \right) J_{2p+k\pm 1}(0)$  となるが、

$J_0(0) = 1$ ,  $J_k(0) = 0$  ( $k \geq 1$ ) であるため、 $2p = -(k \pm 1)$  のときのみ 0 でない値を取れるの

で、 $k$  は奇数と限定されて、軸上では偶数次光は消える。また、各奇数次数に対して

$$S_{\pm 1} = J_{\frac{k\pm 1}{2}} \left( \frac{k}{2} \cdot \frac{K^2/2}{1+K^2/2} \right) \quad \text{であり}$$

$$S_1 + S_{-1} = J_{\frac{k+1}{2}} \left( \frac{k}{2} \cdot \frac{K^2/2}{1+K^2/2} \right) + J_{\frac{k-1}{2}} \left( \frac{k}{2} \cdot \frac{K^2/2}{1+K^2/2} \right) = J_{\frac{k-1}{2}} \left( \frac{k}{2} \cdot \frac{K^2/2}{1+K^2/2} \right) - J_{\frac{k+1}{2}} \left( \frac{k}{2} \cdot \frac{K^2/2}{1+K^2/2} \right)$$

となる。最終的に軸上での  $k$  次光強度は

$$\left[ \frac{d}{d\omega} \left( \frac{dP}{d\Omega}_{total} \right) \right]_k = \frac{e^2 k^2 N_u^2 \gamma^4 \{-\psi_0(S_1 + S_{-1})\}^2}{4\pi\epsilon_0 c \{1 + K^2/2\}^2} \quad (2-8.20)$$

$$= \frac{e^2 k^2}{4\pi\epsilon_0 c} \cdot \frac{N_u^2 \gamma^2 K^2}{\{1 + K^2/2\}^2} \left[ J_{\frac{k-1}{2}} \left( \frac{k}{2} \cdot \frac{K^2/2}{1+K^2/2} \right) - J_{\frac{k+1}{2}} \left( \frac{k}{2} \cdot \frac{K^2/2}{1+K^2/2} \right) \right]^2$$

これを実用上の軸上光子数に換算して

$$\frac{dN_{photon}}{d\Omega} = 1.74426 \times 10^{14} I(A) \frac{N_u^2 E_{GeV}^2 k^2 K^2}{\{1 + K^2/2\}^2} \left[ J_{\frac{k-1}{2}} \left( \frac{k}{2} \cdot \frac{K^2/2}{1+K^2/2} \right) - J_{\frac{k+1}{2}} \left( \frac{k}{2} \cdot \frac{K^2/2}{1+K^2/2} \right) \right]^2 \quad (\text{photons/sec/mrad}^2 / 0.1\% \text{b.w.}) \quad (2-8.21)$$

## (2) 楕円型アンジュレータ

楕円偏光の場合の Bessel 関数表示は Yamamoto によって文献[16]で研究された。この結果の詳細な導出は Appendix 2-11 にまとめ、ここでは結果のみ記す。

楕円型アンジュレータのスペクトルの  $k$  次光をまとめて

$$\left[ \frac{d}{d\omega} \left( \frac{dP}{d\Omega} \right)_{total} \right]_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi\epsilon_0 c}{\omega_1^2} \cdot N_u^2 |\mathbf{F}_{\mathbf{k}}|^2 \left[ \frac{\sin \{ \pi N_u (\omega/\omega_1 - k) \}}{\pi N_u (\omega/\omega_1 - k)} \right]^2 \quad (2-6.11)$$

に対して

$$\begin{cases} [\mathbf{F}_{\mathbf{k}}]_{\parallel} = \frac{iek\omega_1}{4\pi\epsilon_0 c T} \{-Q_{kx} + Q_{kz} \theta \cos \phi\} = \frac{iek\omega_1^2}{8\pi^2 \epsilon_0 \gamma c} \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \{2S_0 \gamma \theta \cos \phi - K_y (S_1 + S_{-1})\} \\ [\mathbf{F}_{\mathbf{k}}]_{\perp} = \frac{iek\omega_1}{4\pi\epsilon_0 c T} \{-Q_{ky} + Q_{kz} \theta \sin \phi\} = \frac{iek\omega_1^2}{8\pi^2 \epsilon_0 \gamma c} \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \{2S_0 \gamma \theta \sin \phi - iK_x (S_1 - S_{-1})\} \end{cases} \quad (2-8.22)$$

ここで、

$$S_q = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_{n+2p+q}(X) \cdot J_p(Y), \quad X = 2\xi\gamma\theta \sqrt{K_x^2 \cos^2 \phi + K_y^2 \sin^2 \phi}, \quad Y = (K_y^2 - K_x^2)\xi/4$$

$$\xi = \frac{k}{1 + (\gamma\theta)^2 + K_x^2/2 + K_y^2/2}, \quad \omega_1(\theta) = \frac{4\pi c \gamma^2 / \lambda_u}{1 + (\gamma\theta)^2 + K_x^2/2 + K_y^2/2} \quad (2-8.23)$$

である。さらに、

$$f_x(\gamma\theta, \phi) = \xi \cdot [2S_0 \gamma \theta \cos \phi - K_y (S_1 + S_{-1})] \cdot \frac{\sin \{ N_u \pi (\omega / \omega_1(\theta)) \}}{\{ N_u \pi (\omega / \omega_1(\theta)) - n \}} \quad (2-8.24)$$

$$f_y(\gamma\theta, \phi) = \xi \cdot [2S_0 \gamma \theta \sin \phi - iK_x (S_1 - S_{-1})] \cdot \frac{\sin \{ N_u \pi (\omega / \omega_1(\theta)) \}}{\{ N_u \pi (\omega / \omega_1(\theta)) - n \}} \quad (2-8.25)$$

とおけば、

$$\frac{d^2 P_n}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c} \cdot (f_x^2 + f_y^2) \cdot N_u^2 \gamma^2 \quad (\text{J/sec/rad}^2/\text{electron}) \quad (2-8.26)$$

実用上の放射光計算に利用するためにバンド幅  $\Delta\omega$  あたりの光子数に換算すれば、

$$\frac{dN_{photon}}{d\Omega} = 1.74426 \times 10^{14} I(A) N_u^2 E_{GeV}^2 (f_x^2 + f_y^2) \quad (\text{photons/sec/mrad}^2 / 0.1\% \text{b.w.}) \quad (2-8.27)$$

となる。

### [2-8-3] アンジュレータ放射スペクトルの特性パラメータ

本節では、アンジュレータ放射の特性を表す諸量についてまとめる[17-18]。

#### (1) アンジュレータ放射の光源サイズと角度発散

アンジュレータ放射光の光源サイズと角度発散は、1つの電子が出す放射光が持つ自然光源サイズや自然角度広がり、電子ビームサイズと角度広がりのコンボリューションとな

る。自然角度広がりにはアンジュレータスペクトル関数(2-6.4)をガウス分布で近似することで得られ、

$$\text{自然角度広がり： } \sigma_{r'} = \sqrt{\frac{\lambda}{2N_u \lambda_u}} \quad (2-8.28)$$

$$\text{これと光のエミッタンス： } \sigma_r \cdot \sigma_{r'} = \frac{\lambda}{4\pi} \quad \text{から自然光源サイズは、} \sigma_r = \frac{\sqrt{2N_u \lambda_u \lambda}}{4\pi} \quad (2-8.29)$$

一方、電子ビームのサイズと角度広がり、 $\varepsilon$ をエミッタンス、 $\alpha, \beta$ をツイスパラメータ、 $\eta$ を分散関数、 $\Delta\gamma/\gamma$ を相対エネルギー広がりとするれば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sqrt{\beta_x \varepsilon_x + (\Delta\gamma/\gamma)^2 \eta^2}, \quad \sigma_y = \sqrt{\beta_y \varepsilon_y} \\ \sigma_{x'} &= \sqrt{\frac{(1+\alpha_x^2)\varepsilon_x}{\beta_x} + (\Delta\gamma/\gamma)^2 \eta'^2}, \quad \sigma_{y'} = \sqrt{\frac{(1+\alpha_y^2)\varepsilon_y}{\beta_y}} \end{aligned} \right\} \quad (2-8.30)$$

これよりアンジュレータ放射光の光源サイズと角度発散は、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_x &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_r^2}, \quad \Sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_r^2} \\ \Sigma_{x'} &= \sqrt{\sigma_{x'}^2 + \sigma_{r'}^2}, \quad \Sigma_{y'} = \sqrt{\sigma_{y'}^2 + \sigma_{r'}^2} \end{aligned} \right\} \quad (2-8.31)$$

## (2) 光束と輝度

アンジュレータ放射光の性能はアンジュレータ本体の性能と電子ビームのエミッタンスによって決まる。この時目安として使われる量が、輝度、光束密度、全光束である。電子ビームのエミッタンスがゼロの時、軸上の単位立体角にある周波数の光が放射される強度（光子数）はプレーナ型アンジュレータスペクトルの場合、(2-8.21)で与えられた。そこで現実の電子ビームからの放射の場合、軸上における各高調波のピーク値は近似的に

$$D = \frac{\sigma_{r'}^2}{\Sigma_x \Sigma_{y'}} \left( \frac{dN_{\text{photon}}}{d\Omega} \right)_0 \quad (2-8.32)$$

と表される。これを光束密度（Flux Density）と呼ぶ。

これをアンジュレータ放射光の光源サイズで割ったものを輝度（Brilliance）と呼び、

$$B = \frac{D}{2\pi \Sigma_x \Sigma_y} \quad (2-8.33)$$

また、放射される全光子数：全光束（Flux）は近似的に

$$F = 2\pi \sigma_{r'}^2 D \quad (2-8.34)$$

で表される。逆に全光束を基準に、光束密度と輝度を表すと

$$D = \frac{F}{2\pi\Sigma_x\Sigma_{y'}} , B = \frac{D}{2\pi\Sigma_x\Sigma_y} = \frac{F}{4\pi^2\Sigma_x\Sigma_y\Sigma_{x'}\Sigma_{y'}} \quad (2-8.35)$$

と表される。さらに、回折限界の光との比を表した Coherent fraction (Transverse coherence) は、

$$\zeta = \frac{(\lambda/4\pi)^2}{\Sigma_x\Sigma_y\Sigma_{x'}\Sigma_{y'}} \quad (2-8.36)$$

で定義される。

### (3) 偏光度

アンジュレータ放射光の直線偏光度と円偏光度は、それぞれ次のように定義される。

$$\text{直線偏光度} : P_L = \frac{S_{xx} - S_{yy}}{S_{xx} + S_{yy}} \quad (2-8.37)$$

$$\text{円偏光度} : P_C = \frac{i(S_{xy} - S_{yx})}{S_{xx} + S_{yy}} \quad (2-8.38)$$

ここで

$$S_{xx,yy} = \int_0^\infty u du \int_{-\pi}^\pi d\alpha f_{x,y}(u, \alpha) \exp \left\{ \frac{-(u \cos \alpha - \gamma\theta \cos \phi)^2}{2\gamma^2 \sigma_x^2} + \frac{-(u \sin \alpha - \gamma\theta \sin \phi)^2}{2\gamma^2 \sigma_y^2} \right\} \quad (2-8.39)$$

また、楕円型アンジュレータの楕円軸比は

$$\left| E_y / E_x \right| = \frac{K_x}{K_y} \cdot \frac{J_{\frac{n-1}{2}}(Y_0) + J_{\frac{n+1}{2}}(Y_0)}{J_{\frac{n-1}{2}}(Y_0) - J_{\frac{n+1}{2}}(Y_0)} \quad (2-8.40)$$

## 2.9 アンジュレータ放射パワー角度分布

この詳細な導出と計算は Appendix. 2-12 にまとめ、ここでは、結果のみ記す。座標変数は [2-8-1] で定義したものと同一である。

### (1) プラナー型アンジュレータの放射パワー分布

プラナー型アンジュレータ放射パワーの角度分布の研究は、K-J.Kim により文献[19]で行われた。

$$\begin{pmatrix} \frac{dP_\sigma}{d\Omega} \\ \frac{dP_\pi}{d\Omega} \end{pmatrix} = N_u \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 c} \cdot \gamma^4 \omega_0 \cdot \frac{I}{e} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K_y^2}{\pi} \cdot \frac{\sin^2 \xi}{D^5} \begin{pmatrix} (1+X^2-Y^2)^2 \\ 4X^2Y^2 \end{pmatrix} d\xi \quad (2-9.1)$$

$$\text{ここで } X = -\gamma\psi, \quad Y = K_y \cos(\omega_0 t') - \gamma\varphi, \quad D = 1 + X^2 + Y^2 \quad (2-9.2)$$

である。全パワーの角度分布は、

$$\frac{dP}{d\Omega} = N_u \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 c} \gamma^4 \omega_0 K_y^2 \cdot \frac{I}{e} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \xi \left[ \frac{1}{D^3} - \frac{4Y^2}{D^5} \right] d\xi \quad (2-9.3)$$

## (2) 楕円型アンジュレータの放射パワー分布

楕円型アンジュレータの放射パワー角度分布はKEKのS.Yamamotoにより導出された[20]。  
楕円アンジュレータの場合、

$$\begin{pmatrix} \frac{dP_\sigma}{d\Omega} \\ \frac{dP_\pi}{d\Omega} \end{pmatrix} = N_u \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 c} \cdot \gamma^4 \omega_0 \cdot \frac{I}{e} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{D^5} \begin{pmatrix} \left[ -K_y(1+X^2-Y^2) \sin \xi + 2K_x XY \cos \xi \right]^2 \\ \left[ -K_x(1+X^2-Y^2) \cos \xi + 2K_y XY \sin \xi \right]^2 \end{pmatrix} dt' \quad (2-9.4)$$

$$\text{ここで } X = K_x \sin(\omega_0 t') - \gamma\psi, \quad Y = K_y \cos(\omega_0 t') - \gamma\varphi, \quad D = 1 + X^2 + Y^2 \quad (2-9.5)$$

である。また、全放射パワーの角分布は

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{8\gamma^4 \omega_0^2}{4\pi c} \cdot \frac{IN_u}{e\omega_0} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{D^3} (K_y^2 \sin^2 \xi + K_x^2 \cos^2 \xi) - \frac{1}{D^5} \left\{ 4(K_y \sin \xi Y - K_x \cos \xi X)^2 \right\} \right] d\xi \\ &= \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 c} \gamma^4 \omega_0 (K_x^2 + K_y^2) \cdot \frac{IN_u}{e} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{L_y^2 \sin^2 \xi + L_x^2 \cos^2 \xi}{D^3} - \frac{4(L_y \sin \xi Y - L_x \cos \xi X)^2}{D^5} \right] d\xi \end{aligned} \quad (2-9.6)$$

$$\text{と表せる。ここで } L_{x,y} = \frac{K_{x,y}}{\sqrt{K_x^2 + K_y^2}} \quad (2-9.7)$$

である。以下、(2-9.6)式を Yamamoto の式と呼ぶ。

## 2-10.放射光計算コードの開発

アンジュレータからの放射スペクトルの実際の計算のために、これまでに述べたスペクトル表式を用いて各種の計算コードを Visual Basic で開発した。これらのコードは PF における EPU 設計のために使用されている。ここでは、開発した計算プログラムをとりあげて、その計算方法について述べるとともに計算例を紹介する。開発した計算プログラムの結果検証には、Spring8 で開発された汎用計算コード：SPECTRA[21]を使用した。SPECTRA や ESRF で開発された SRW[22]などは定評がある放射光計算コードであるが、本件研究においては PF 独自のアンジュレータの放射光計算や EPU 開発にあたって直面した PF リング固有の問題などを解決するために、自前の計算プログラムを作成して解析を行った。

### (1) 軸上での光束、光束密度、輝度

軸上での光束、光束密度、輝度の近似値の計算はアンジュレータ性能の検討によく使用される。これらの計算には (2-8.27)から (2-8.35)式を使用している。周期数の非常に多いアンジュレータを検討する場合は、電子ビームのエネルギー広がり効果を考慮することが需要である。本プログラムでは、エネルギー広がり効果を調べるための積分精度を調整できるようにしている。入力画面の例を図 2-3 に示す。

The screenshot shows the input interface for a synchrotron radiation calculation program. The interface is divided into two main panels. The left panel contains input fields for various parameters such as wavelength ( $\lambda$ ), number of undulators (Nu), bending radius (L), bending field ( $B_y$ ,  $B_x$ ), and electron beam parameters ( $K_y$ ,  $K_x$ ). It also displays calculated results like energy (E), brilliance, flux density, flux, total power, coherent fraction, and CF(3rd). The right panel contains input fields for energy (E), photon energy ( $\gamma$ ), current (I), emittance, coupling, energy spread, and beam size parameters ( $\beta_x$ ,  $\alpha_x$ ,  $\beta_y$ ,  $\alpha_y$ ,  $\eta$ ,  $\eta'$ ). A '終了' (End) button is located at the bottom right.

図 2-3 軸上での光束、光束密度、輝度の計算プログラム入力画面

計算例を図 2-4 に示す。ここでは、Gap を変えた際の各高調波のピーク位置の軌跡を示している。

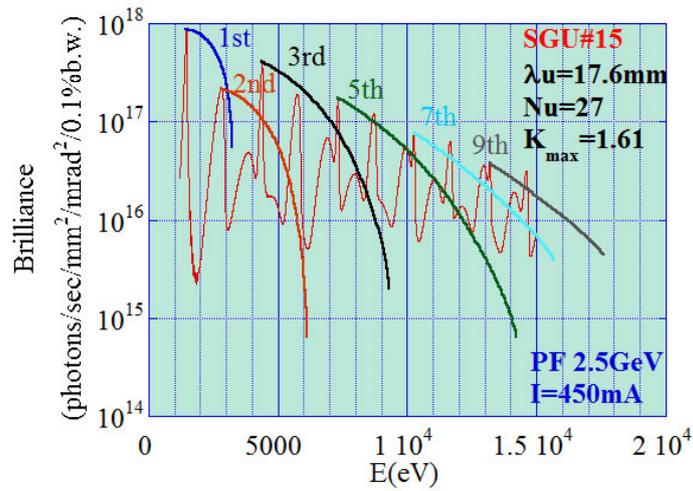


図 2-4 PF-SGU#15 の計算スペクトル例。赤線で示したのは  $K=1.61$  でのスペクトルで (3) で述べる手法で計算されている。

(2) EPU からの放射パワーの角度分布

PF の EPU では、ビームライン光学素子に対する熱負荷の検討は重要である。特に磁場の強い楕円偏光モードでの放射パワーの角度分布はビームライン設計に不可欠である。ここでは、計算例として、U#13 の楕円モード (周期長 76mm、周期数 47、最大磁場 0.7T) を載せる (図 2-5)。これらの計算には (2-9.6), (2-9.7) 式を使用している。横軸は水平・垂直方向の角度 (rad)、縦軸はパワー (kW/mrad<sup>2</sup>) である。

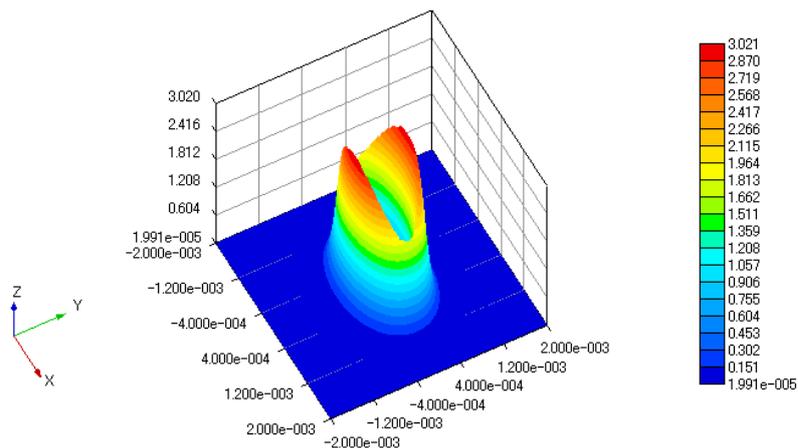


図 2-5 U#13 の楕円モードの放射パワーの角度分布

(3) アンジュレータスペクトル計算 (光束密度)

電子ビームの角度広がりコンボリューションして軸上での光束密度を計算する。これ

らの計算には、(2-8.13)から(2-8.27)式を使用している。例として、AR-NW # 12 (周期長 40mm, 周期数 95, 最大磁場 0.8T) スペクトル計算を用いる。NW#12 は、通常のプラナー型アンジュレータ以外に XAFS 実験のためにテーパー型アンジュレータとしても使用できる。これは上下流のアンジュレータ Gap に最大 2mm の差を設けて磁石列にテーパーを付けるものである。この計算例を図 2-6 に示す。左側はプラナー型、左側は 2mm のテーパーを付けた場合のスペクトルである。3 次光ピークは完全につぶれて広いエネルギー領域でテーパー型アンジュレータの特徴であるスペクトルの白色化が実現している。

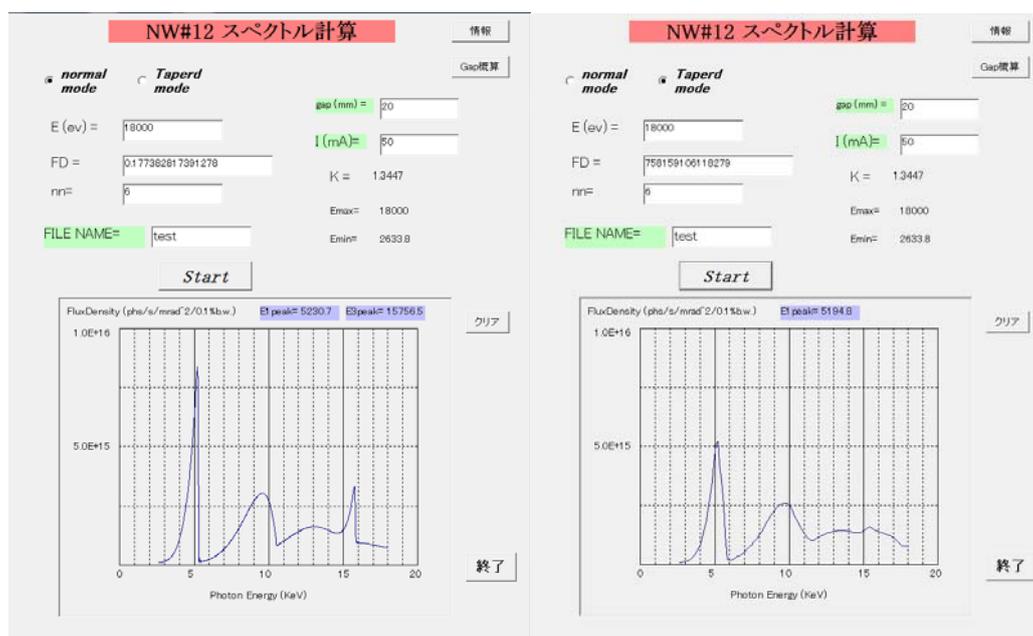


図 2-6 AR-NW # 12 の計算スペクトル (光束密度)

計算結果の検証のために SPECTRA による結果と比較した (図 2-7)。青線が本プログラムの結果で、赤線が SPECTRA による結果である。計算例として PF-U#02 を用いた。両者の差を比較するために 1 次光と 3 次光近傍を拡大した図を付けている。

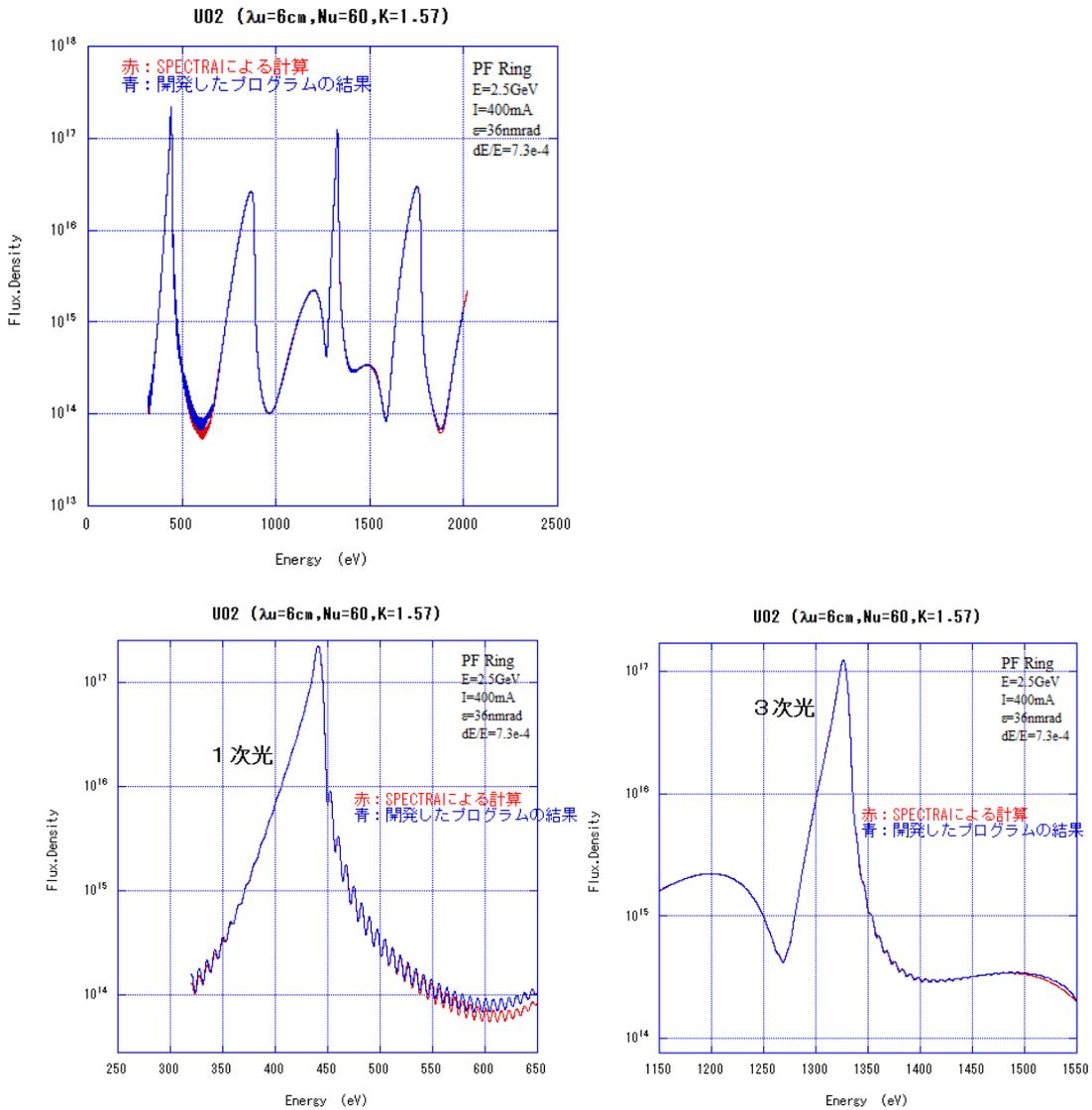


図 2-7 PF-U #02 の計算スペクトル：計算結果の検証

#### (4) アンジュレータスペクトル計算（実効光束）

実際にビームラインで放射光を測定する場合、スリットで入射光を制限している。このスリット幅を通過する実効的な光速を計算する。この計算には、(2-8.13)から(2-8.27)式を使用している。計算上の特徴として、ビームラインの取り込み角を考慮して、この角度内で光束密度を数値積分した実効光束を計算している。図 2-8 に計算例を示す。左側は PF-SGU#17、右側は PF-SGU#03 の例である。ビームラインの性能評価のために実測された光強度（青丸）の分布とよく合っていることがわかる。

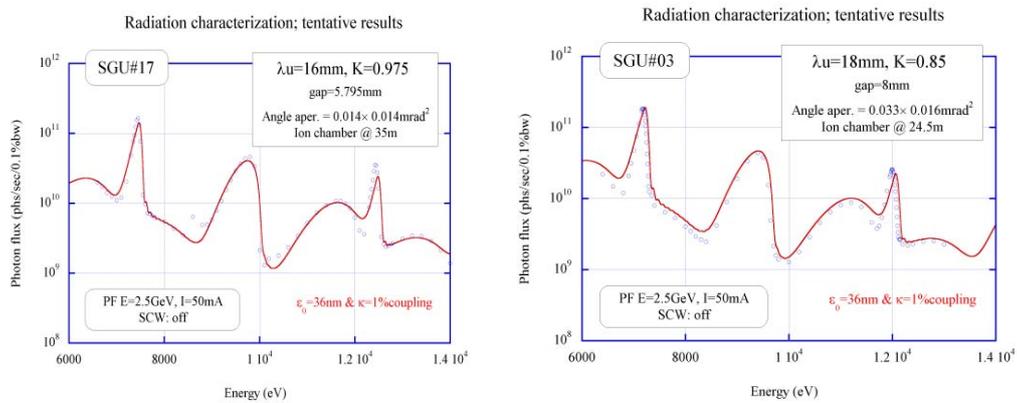


図 2-8 SGU#17 及び SGU#03 の実効光子数の計算例

(5) 実測磁場を使ったスペクトル計算 (FFT)

磁場測定のパフォーマンス評価のために、測定した磁場分布から直接、放射スペクトルを求めて、理想的な場合と比較する。この計算には、(2-6.8)、(2-8.11)式を使用している。実際に測定したアンジュレータ磁場から電子軌道を求めて、これを直接に(2-8.11)式に入れて計算する。計算には FFT アルゴリズムを使用することで、計算時間の短縮を図っている。この計算例を図 2-9 に示す。図 2-9 左側は、理想的な軌道からの FFT で求めた一電子の放射スペクトル（赤線）と青丸で示したアンジュレータピーク値 (2-8.13) との比較である。計算は軸外し観測 ( $\theta = 0.01 \text{ mrad}$ ) の場合に行っている。図 2-9 右側は、実際に測定した磁場から計算した U#16 のスペクトル計算例である。この計算は実際の磁場分布のスペクトル性能を直に表すので、磁場調整結果の評価に重要である。図 2-10 には PF-SGU#03 の磁場調整後の実測磁場分布によるスペクトル（青）と理想的な場合(赤)との比較である。

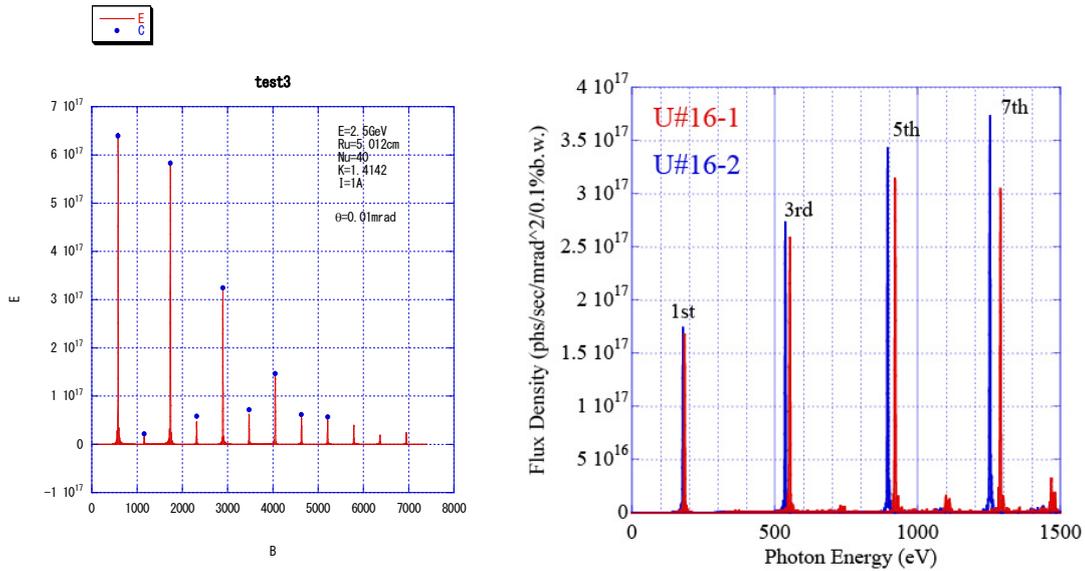


図 2-9 実際に測定した磁場から計算したのスペクトル計算

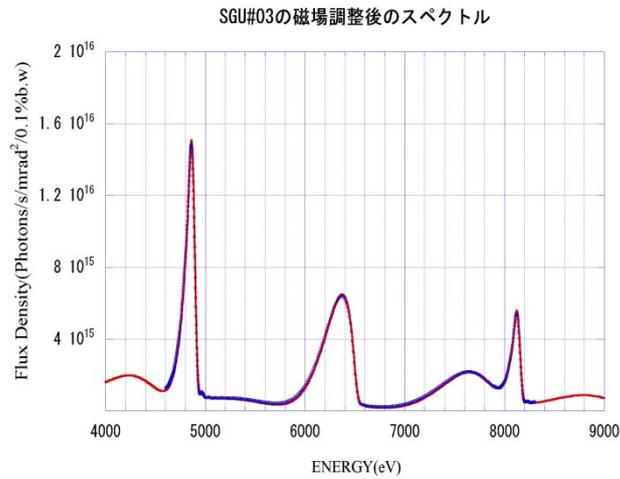


図 2-10 PF-SGU#03 の磁場調整後の実測磁場分布によるスペクトル

#### (6) PF における APPLE-II 型 EPU の APU モードスペクトルの解析

PF の APPLE-II 型 EPU である U#16 では、導入当初、上下の磁石列ペアの位相を動かして放射光の光子エネルギーを制御する APU- $\sigma$ モードでの運転を数年に渡って行ってきた。実際に BL16 でのスペクトル測定の結果、APU- $\sigma$ モードによる複雑な磁場分布からの放射は、PF リングの電子ビームの大きな水平方向サイズの影響を強く受けることが判明した。これを解明するために上述した(1)から(5)の手法を動員して、APU- $\sigma$ モード磁場分布からの

放射光スペクトル解析のための計算を行った。この内容については第6章で詳しく記述し、ここでは、計算例のみ載せる(図2-11)。この例では、U#16の、Gapと位相を同時に制御する通常の円偏光モードのスペクトルと上下磁石列ペアをスライドするAPU- $\sigma$ モードからの円偏光スペクトルをビームラインのスリット幅を変えながら計算したものである。この計算結果と実際のスペクトル測定結果を比較することで、APU- $\sigma$ モードのスペクトル強度の低下がPFリングの電子ビームの水平方向サイズに起因することを解明した。

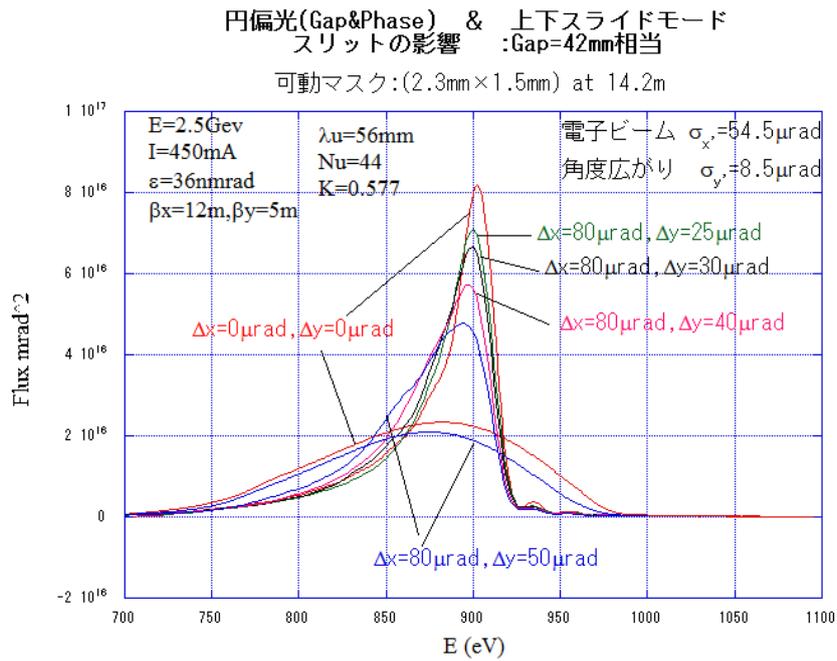


図 2-11 APU- $\sigma$ モード磁場分布からの放射光スペクトル解析

### 第3章 可変偏光アンジュレータの型式と磁場分布

PFリングにおいては3台のAPPLE-II型EPU(U#16-1,U#16-2,U#13)と2台の6列型EPU(U#02-2,U#28)が導入されている。本章では、EPUの種類と変遷について述べた後、PFで導入しているAPPLE-II型EPUと6列型EPUの磁場分布特性について詳しく述べる。

#### 3-1 可変偏光アンジュレータの種類と特性

挿入光源としてのアンジュレータは元々、水平直線偏光を持ったプラナー型として発展してきた。それ以外の偏光、特に円偏光を実現するために、電子ビームを螺旋運動させて円偏光を持った放射光を発生させたのは、文献[23]の、FEL実験のために開発された2重らせん超伝導コイルを使ったものが始まりであった。

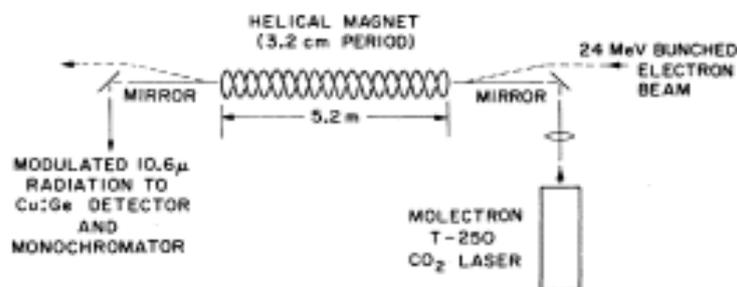


図 3-1 初めての円偏光発生挿入光源の概念図 (文献[23]より)

その後、様々な偏光を利用するための研究・開発が行われてきた[24-30]。この中でK.Halbachによる、永久磁石のみからなる磁気回路[24]をもったアンジュレータ(ハルバッハ型アンジュレータ)が登場すると、水平・垂直磁場を重ね合わせることで偏光状態を制御する可変偏光アンジュレータ(EPU: elliptically polarizing undulator)の開発が始まった。K-J. Kimは偏光状態の速い切替えを可能にするEPUとして、crossed undulatorを提案している[6]。これは水平偏光アンジュレータと垂直偏光アンジュレータを2台直列に並べて、その間の位相を調節することで偏光状態を変えるものである。しかし、このタイプのアンジュレータ放射は、電子ビームのエミッタンスの影響を強く受けるために、十分な低エミッタンスの電子蓄積リングに限定されてしまう問題点がある。

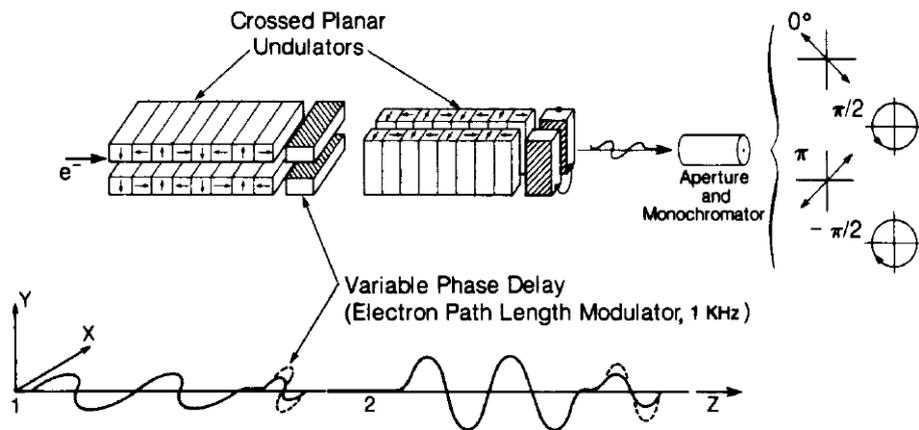


Figure 4.12 Schematic of a pair of crossed undulators, which could be used to produce variably polarized radiation.

図 3-2 crossed undulator の概念図 (文献[6]より)

KEK においても、永久磁石を用いた 2 対の磁石列を直交して配置した 2 台の挿入光源：PF-EMPW#28 と AR-NW#1 が挿入光源グループ(S.Yamamoto, H.Kitamura)を中心に開発され [16, 28-29]、大強度放射光源として利用されてきた(図 3-1)。これは垂直磁場と水平磁場を直交する 2 対の磁石列によって独立に発生させて、その位相を変えて重ね合わせることで偏光状態を制御する EPU として重要な進歩であった。

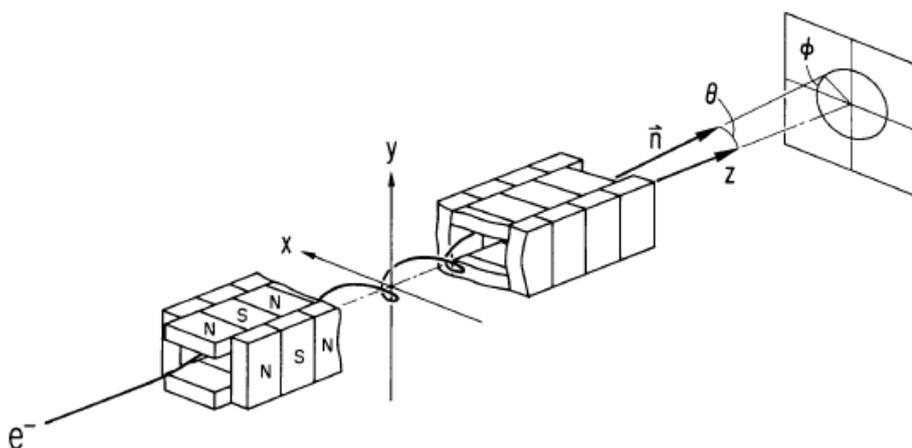


図 3-1 楕円多極ウイグラー (EMPW) の概念図 (文献[28]より)

この EMPW の直交する 2 対の磁石列の内、水平磁場を電磁石によって発生することで偏光状態を速く切り替える事が可能な EPU も開発された[30]。

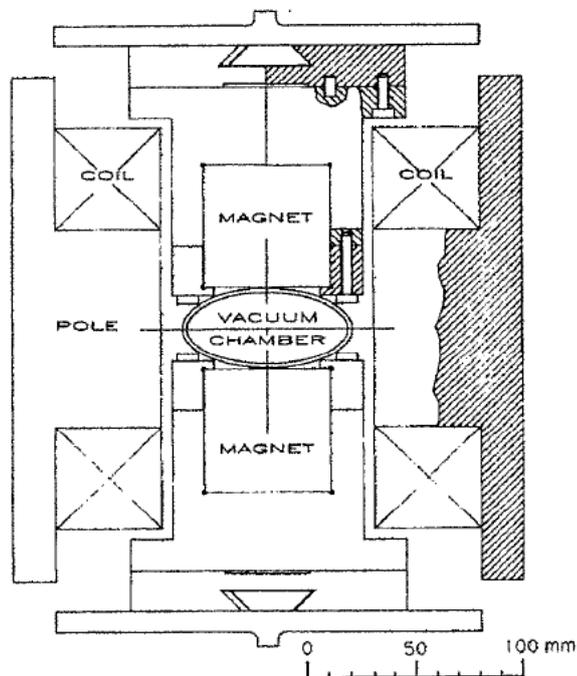


FIG. 6. Conceptual design of an electromagnetic elliptical wiggler.

図 3-3 電磁石による EMPW の概念図 (文献[30]より)

しかし、これらの直交する 2 つの磁石列を持った EPU は、水平 Gap 間に水平方向に幅広な真空チャンバーを入れる必要があり、発生できる水平磁場強度を強くすることが困難であり、10cm 以上の長い周期長を必要として、使用できる円偏光光子エネルギー域が制限される問題があった。これを解決するために磁石列を対向する 2 次元平面内にも配置した EPU が提案・開発されてきた[31-34]。この最初の例である HELIOS 型 EPU では、図 3-4 に示すように、下側に水平偏光磁気回路（垂直磁場）を上側に垂直偏光磁気回路（水平磁場）を配置したもので、上下の磁石列間の位相を調整することで、偏光状態を変えることができる。しかし、発生できる磁場が水平・垂直方向ともに弱く、その磁場分布の一様性も悪い問題点があった。

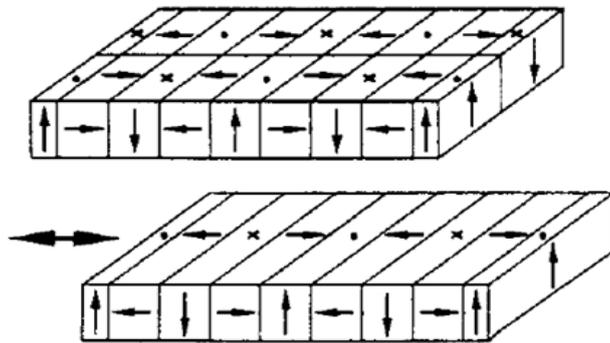


図 3-4 HELIOS 型 EPU の磁石配置 (文献[35]より)

これらの磁石列をプラナー配置にした EPU の内、APPLE -II 型 EPU[33]は強い水平磁場の発生が可能で、広い光子エネルギー領域でチューニングできる特性を持っているため、現在世界中の多くの放射光施設において EPU として採用されている (図 3-5)。

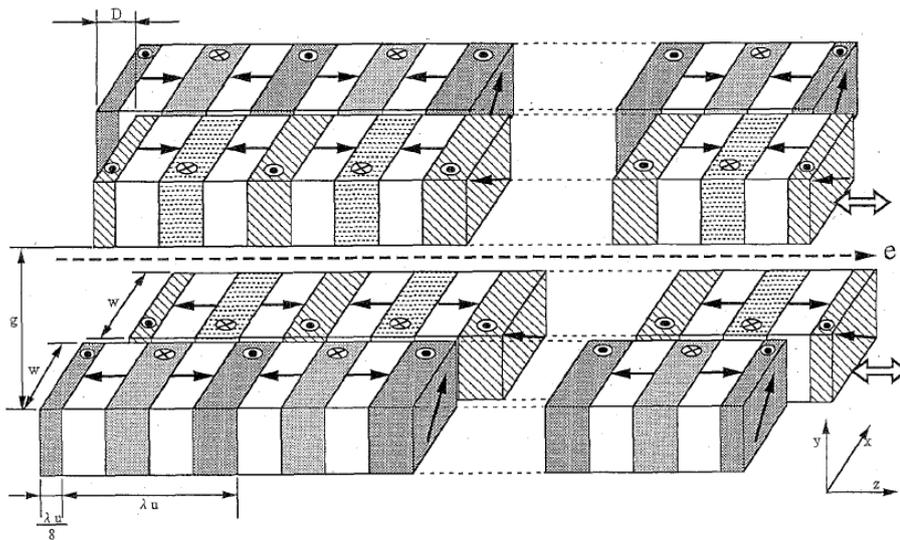
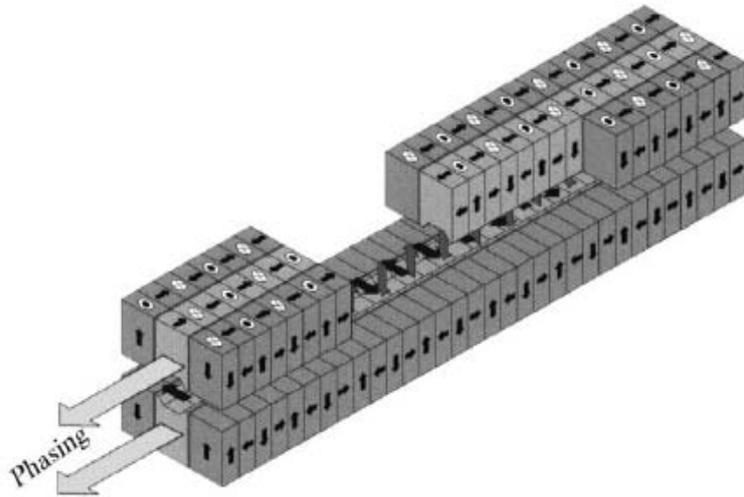


図 3-5 APPLE -II 型 EPU の概念図 (文献[33]より)

また、円偏光の高速切替え実験の為に SPring-8 で開発された、6 列型の helical undulator[34]は、APPLE -II 型より水平磁場が弱いが、水平方向磁場分布の一様性に優れている (図 3-6)。SPring-8 では、6 列の中央磁石列を動かすことで helical undulator として使用しているが、6 列の磁石列を全て動かすことで、様々な偏光状態を生み出すことが出来る。



**Figure 2**  
Schematic diagram of the SPring-8 helical undulator.

図 3-6 SPring-8 helical undulator の概念図 (文献[34]より)

以下では、PF リングで採用した APPLE-II 型と 6 列型の 2 種類の EPU の磁場分布特性について詳しく述べる[36]。

### 3-2 APPLE-II 型 EPU の磁場分布

永久磁石のみで構成される APPLE-II 型 EPU の磁場分布は 4 つの磁石列が作る垂直・水平の正弦波磁場を  $z$  軸上で重ね合わせる事で表現できる。図 3-7 のように座標軸をとり APPLE-II 型 EPU の 4 つの磁石列を下流側から見たとき右上から反時計回りに  $i=1,2,3,4$  とする。電子の進行方向を  $Z$  軸とし、 $X$  方向の磁場を水平磁場、 $Y$  方向を垂直磁場と定義する。また、磁石の磁化方向が  $X, Y$  方向に着磁されたものを縦磁化磁石、そして磁化方向が  $Z$  方向に着磁されたものを横磁化磁石と呼ぶ事にする。

また、各軸の  $z$  軸方向の位相を  $\theta_i$  とする。位相 0 の位置で通常のプラナー型アンジュレータ配置をとるものとする。このとき各磁石列は  $z$  軸上に水平・垂直磁場をつくるが、1 つの磁石列が作る縦横のピーク磁場をそれぞれ  $B_{y0}$ ,  $B_{x0}$  とすると 4 列の磁石列が  $z$  軸上に作る磁場分布は磁場の単純な重ね合わせとして次のように表わせる。

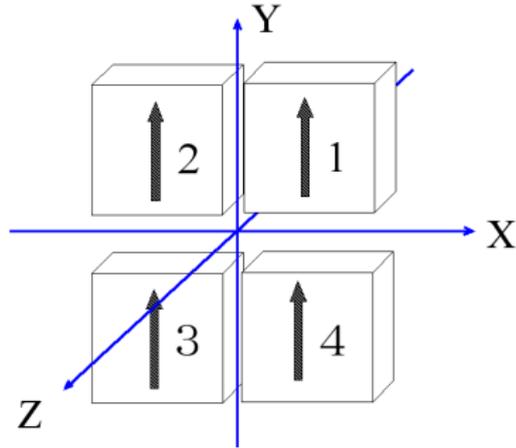


図 3-7 APPLE-II 型 EPU 磁石列指標

$$B_y(z) = B_{y0} \cos(kz + \theta_1) + B_{y0} \cos(kz + \theta_2) + B_{y0} \cos(kz + \theta_3) + B_{y0} \cos(kz + \theta_4)$$

$$B_x(z) = B_{x0} \cos(kz + \theta_1) - B_{x0} \cos(kz + \theta_2) + B_{x0} \cos(kz + \theta_3) - B_{x0} \cos(kz + \theta_4)$$

PF の APPLE-II 型 EPU の特徴は、4 列の磁石列位相を独立に駆動することである。これにより、EPU として代表的な(a)Symmetric modeに加えて、(b)Anti-symmetric mode も実現する。これ以降、EPU として使う際の位相差を EPU phase と呼び  $\phi$  で表す。

### [3-2-1] Symmetric mode の磁場分布

Symmetric mode は APPLE-II 型 EPU の主な運転モードであり、水平・垂直直線偏光、左右円偏光、左右楕円偏光を実現する。この Symmetric mode では、図 3-8 に示すように、斜めに対向する磁石列を対としたとき、互いの磁石列対を逆方向に動かす。この時の位相量として、 $\theta_1 = \theta_3 = \phi/2$ ,  $\theta_2 = \theta_4 = -\phi/2$  と置くことで、

$$B_y(z) = 4B_{y0} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos(kz), B_x(z) = -4B_{x0} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin(kz) \quad (3-2.1)$$

と表すことが出来る(Appendix.3-1)。式(3-1)から判るように  $\phi = 2 \tan^{-1}(B_{y0} / B_{x0})$  のとき、

円偏光磁場を発生する。

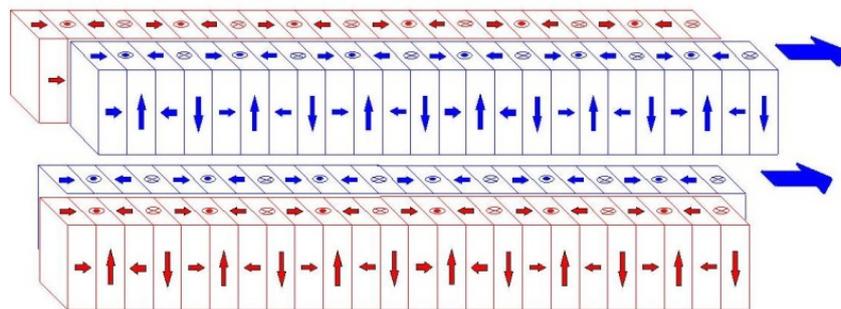


図 3-8. APPLE-II 型 EPU Symmetric mode 磁石列配置

[3-2-2] Anti-symmetric mode の磁場分布

APPLE-II 型 EPU の Anti-symmetric mode は任意の角度を持った直線偏光モードを発生させるもので、図 3-9 のような磁石列配置をとる。この場合の位相関係は

$$\theta_1 = -\theta_3 = \phi, \theta_2 = \theta_4 = 0$$

であり、磁場分布としては次のようになる(Appendix. 3-1)。

$$B_y(z) = 4B_{y0} \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos(kz), B_x(z) = -4B_{x0} \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos(kz) \quad (3-2.2)$$

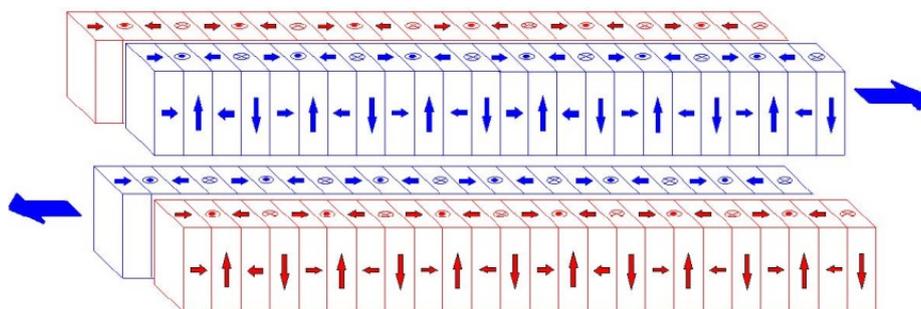


図 3-9. APPLE-II 型 EPU Anti-symmetric mode 磁石列配置

これより PF の APPLE-II 型 EPU としては、Symmetric mode と Anti-symmetric mode を使い分けることで以下の運転モードを実施することが可能である。

- 1.円偏光 (Bx/By=1) : Right/Left
- 2.楕円偏光 (Bx/By=1/2) : Right/Left
- 3.直線偏光 : Horizontal/Vertical
- 4.直線偏光 (Bx/By=1) : 45° /135°
- 5.任意角度での直線偏光

### 3-3. 6列型 EPU の磁場分布

周期長 160mm の EPU である U#02-2 と U#28 に対しては、EPU の方式として 6 列型方式を採用した。これは SPring-8 helical undulator[34] と同じ磁石配列を持っている。中央部の上下磁石列が垂直磁場を生成し、両サイドの磁石列が水平磁場を生成する。SPring-8 helical undulator では、中央部上下磁石列対を同時に z 軸方向に動かすことで水平・垂直サイン型磁場の位相を変えて、左右円偏光を実現する。PF で採用した 6 列型 EPU では、6 列の磁石列すべてに駆動軸を設けて、これらの位相を自由に制御することで、SPring-8 helical undulator では出来なかった水平垂直線偏光、左右円偏光、及び左右楕円偏光を実現した。

#### [3-3-1] 6 列型 EPU の偏光状態と磁場分布

6 列型 EPU の水平磁場を発生する 4 つの磁石列は、両サイドをペアとして動かし、上下のペア間の位相を変える。この両サイド磁石列ペアの位相量を上下に対応して  $XU$ 、 $YU$  とする。これに対して、垂直磁場は中央部上下磁石列間の位相を変えて磁場強度を制御する。この中央部磁石列の位相を上下に対応して  $YU$ 、 $YD$  とおく。すると 6 列型 EPU の z 軸方向の磁場分布は次式で表される[32]。

$$B_y = B_{y0} \sin \left\{ \frac{\pi}{\lambda_u} (YU - YD) \right\} \sin \left\{ \frac{2\pi}{\lambda_u} z + \frac{\pi}{\lambda_u} (YU + YD) \right\} \quad (3-3.1)$$

$$B_x = B_{x0} \sin \left\{ \frac{\pi}{\lambda_u} (XU - XD) \right\} \sin \left\{ \frac{2\pi}{\lambda_u} z + \frac{\pi}{\lambda_u} (XU + XD) \right\} \quad (3-3.2)$$

また、各軸が任意な動きをする場合の磁場分布については Appendix. 3-2 に記す。

#### (1) 初期位置

6 列型 EPU の磁石列の初期位置として、 $XU = XD = 0$ 、 $YU = YD = 0$  とする (図 3-10)。

この時、垂直・水平磁場ともに打ち消しあって 0 となる状態である。

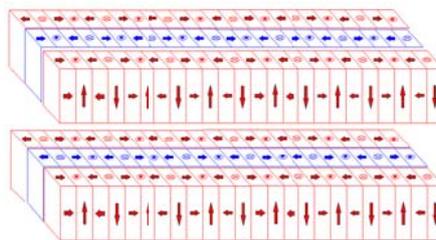


図 3-10 6 列型 EPU の磁石配列 (初期位置)

#### (2) 水平偏光配置

6 列型 EPU の磁石列の水平偏光配置では、磁石列位相として

$XU = XD = 0, YU = -YD = \frac{\lambda_u}{4}$  とする (図 3-11)。すると水平磁場は打消し、垂直磁場のみとなり、  
 $B_y = B_{y0} \sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda_u} z\right\}, B_x = 0$  (3-3.3)

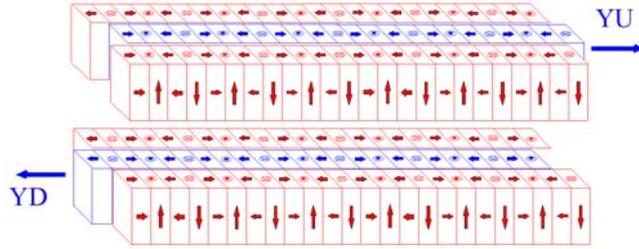


図 3-11 6 列型 EPU の水平偏光配置 (垂直磁場)

(3) 垂直偏光配置

6 列型 EPU の磁石列の垂直偏光配置では、磁石列位相として、  
 $XU = -XD = \frac{\lambda_u}{4}, YU = YD = 0$  とする (図 3-12)。すると垂直磁場は打消し、水平磁場のみとなり、  
 $B_y = 0, B_x = B_{x0} \sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda_u} z\right\}$  (3-3.4)

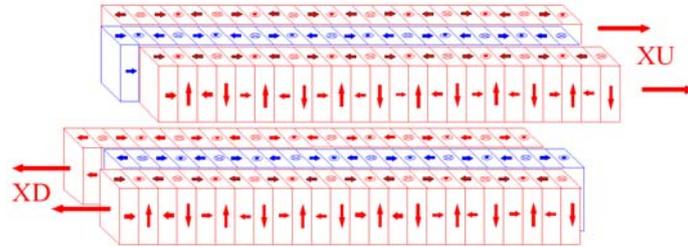


図 3-12 6 列型 EPU の垂直偏光配置 (水平磁場)

(4) 円偏光配置

6 列型 EPU の磁石列の円偏光配置では、磁石列位相として  
 $XU = 0, XD = \pm \frac{\lambda_u}{2}, YU = -YD = \frac{\lambda_u}{4}$  とする (図 3-13)。

すると

$$B_y = B_{y0} \sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda_u} z\right\}, B_x = \mp B_{x0} \cos\left\{\frac{2\pi}{\lambda_u} z\right\} \quad (3-3.5)$$

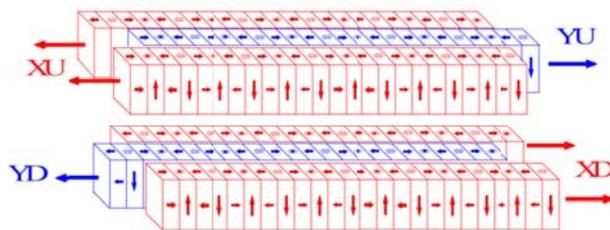


図 3-13 6 列型 EPU の円偏光配置

これより PF の 6 列型 EPU としては、以下の運転モードを実施することが可能である。

- 1.円偏光 ( $B_x/B_y=1$ ) : Right/Left
- 2.楕円偏光 ( $B_x/B_y=1/2$ ) : Right/Left
- 3.直線偏光 : Horizontal/Vertical

また、実際の運転モードとしては予定されていないが、 $\pm 45^\circ$  直線偏光と任意角度での直線偏光も実現可能である。

### [3-3-2] 6 列型 EPU 磁場の強度と特性

APPLE-II 型 EPU に比べて 6 列型 EPU では、水平磁場を生成する磁石列の間隔が離れているため、垂直磁場に比べて水平磁場が弱くなり、縦横同じ強さを持った磁場を必要とする円偏光配置の場合では、周期長 100mm 以下で実用的な磁場強度を得ることが困難である。その反面、水平磁場分布の水平方向均一度が APPLE-II 型 EPU より良好な特性を持っている。長周期の APPLE-II 型 EPU では、電子軌道の振幅が大きくなり電子軌道に沿った動的な積分磁場の水平依存性も大きくなるため、電子ビームに与える多極磁場エラーも大きくなると考えられる。そのため U#02-2 及び U#28 では 6 列型 EPU を採用した。U#02-2 及び U#28 は共に 160mm の長い周期長を持ち、かつ必要とされる水平・垂直最大磁場がともに 0.33T と十分小さなものであるために、6 列型 EPU の設計が十分可能である。

図 3-14 では、実際に磁気回路モデルをつくり磁場計算した例を示す。水平・垂直磁場をともに 0.33T にした場合の円偏光配置での磁場分布である。各偏光モードについても同様の磁場計算を行い、6 列型 EPU としての実現性を確認した。

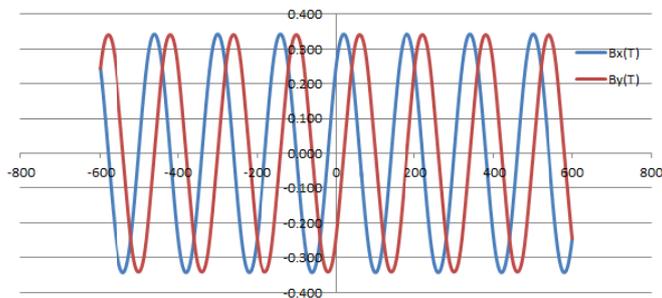


図 3-14 6 列型 EPU の磁場計算例

また、磁場計算した APPLE-II 型 EPU、6 列型 EPU の水平方向の水平磁場均一性を図 3-15 に比較する。計算には APPLE-II 型 EPU として PF-U#13、6 列型 EPU として PF-U#28 の磁石パラメータを使っている。6 列型 EPU では、水平磁場の水平方向の均一性が良くなっているのが判る。6 列型 EPU では、この水平方向均一度を磁石形状やサイズの選定によって調整できることも一つのメリットである。

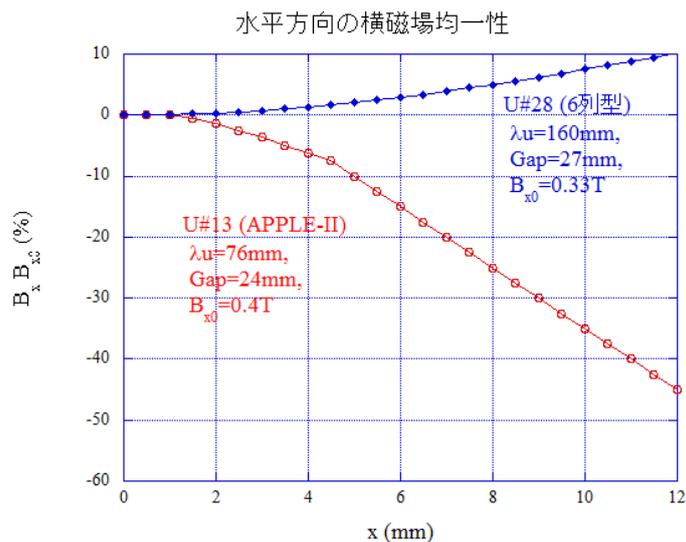


図 3-15 EPU の水平磁場の水平分布一様性の比較

最後に 6 列型 EPU の上記以外の活用法について追記する。6 列型 EPU を短周期化する場合、水平磁場を生成する磁石列の間隔が離れているために、強い水平磁場を得ることが出来ない点が最大の問題となる。このため、垂直磁場と水平磁場の最大値が異なる楕円偏光アンジュレータとして使用できる。この場合、円偏光の使用が出来ないが、実験に必要な円偏光度が 80%程度の場合には十分使用可能である。また、現在、全世界の放射光施設で建設・設計されている超低エミッタンス蓄積リングでは、許されるアンジュレータ真空チャンバーの垂直方向のサイズが 10mm 程度のとなるため、現状で最小 Gap が 27mm である PF6 列型 EPU に比べて半分以下の Gap の使用が可能となる。この場合は十分に強い水平磁場の発生が可能となるため、6 列型 EPU の円偏光利用も可能になると考えられる。もう一つの活用法は、6 列型 EPU では、垂直磁場と水平磁場を独立に発生・消去が可能のため、アンジュレータの周期長を垂直磁場と水平磁場で変えて、これを排他的に使用することで、1 台のアンジュレータで 2 種類の周期長を切り替えるマルチアンジュレータとして利用することが出来る。これは 1 本のビームラインで幅広いエネルギー領域を利用する要請がある場合に有用な光源候補となる。この形式のマルチアンジュレータに関しては NEOMAX エンジニアリング(株)と共同特許を取得している[37]。

## 第4章 PF リングの可変偏光アンジュレータ

PF リングでは、2006 年度に直線部増強の改造が行われた[38]。これは低エミッタンスを保ち光軸不変のまま、直線部の新設&既設直線部を拡張するものである。この改造によって長さの延長された既存直線部は、B01-02 と B15-16 の 2 本が長さ 8.9m の長直線部であり残りの 8 本が 4.8m の長さを持っている。また、新設された 4 本の 1.4m 短直線部では、周期長 20mm 以下で、最小ギャップ 4mm を実現する短周期アンジュレータがこの 10 年の間に 4 台導入されてユーザー実験に供されている[39-40]。長直線部では、改造によって新たに生じたスペースを最大限に生かすために、BL02、BL13、BL16、BL28 では、電子物性用アンジュレータの更新が徐々に行われてきた。これによって 5 台の EPU が PF リングに設置されて、運用が始まっている。これらの EPU の内、APPLE-II 型 EPU が U#16-1、U#16-2、U#13 の 3 台であり、U#02-2 と U#28 の 2 台が 6 列型 EPU である。図 4-1 には PF リングの概略図中にアンジュレータの更新を行った場所を示している。

ここでは、PF で行われたアンジュレータ更新計画の内容と各 EPU の特性について記す。

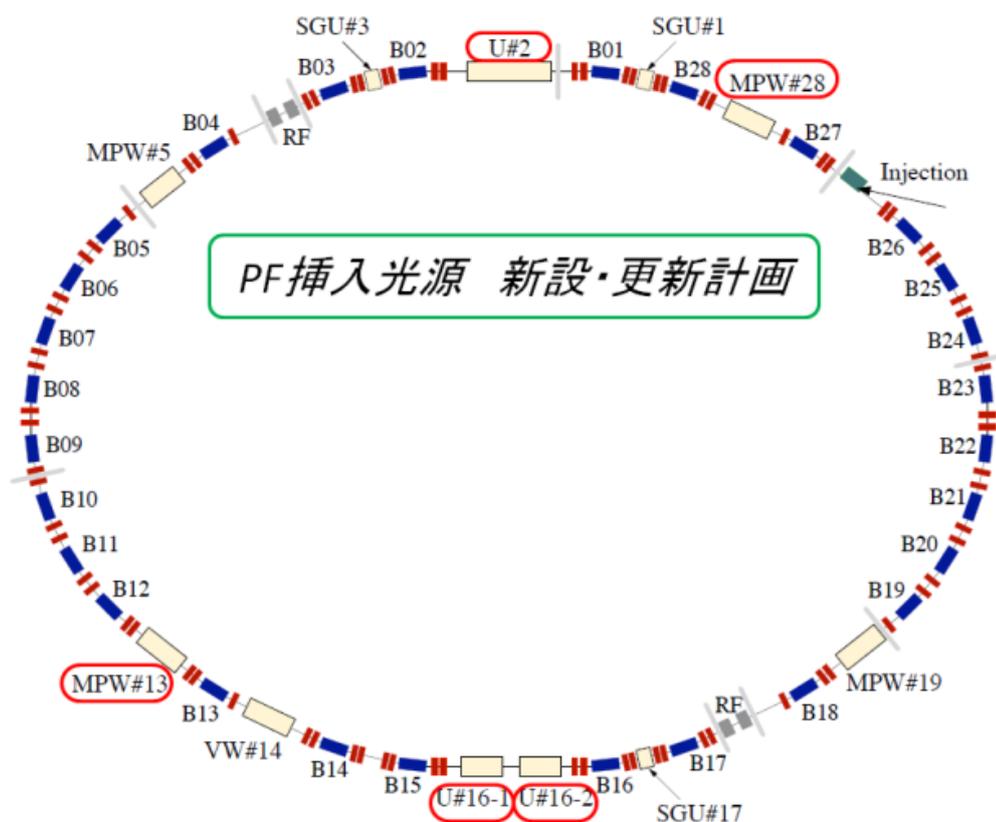


図 4-1 PF で更新されたアンジュレータ設置場所

#### 4-1. PF リングにおける APPLE-II 型 EPU

##### [4-1-1] U#16-1 及び U#16-2

直線部の長さを 8.9m に拡張された BL15-16 直線部では、VUV から SX 領域の光源として高速スイッチング用の EPU の開発が、2007 年より当時の挿入光源グループ(S.Yamamoto, K.Tsuchiya, M.Sasaki)によって始められた[41-43]。偏光状態の高速スイッチング方法としては、3-1 で述べた crossed undulator[6]や電磁石型 EMPW[30]の他に、直線部にタンデムに置かれた 2 台の EPU 使い、シケイン電磁石で電子軌道を折曲げて、放射光を切り分ける方法[44]や、キッカー電磁石による電子バンプ軌道の切り替えで振り分ける方法[34]がある。PF では、キッカー電磁石によって電子バンプ軌道を切り替える方法を採用している。これにより、10Hz 以上の速い偏光状態の切り替えを行う。この 2 台の EPU は、それぞれ U#16-1, U#16-2 と呼ばれる。アンジュレータのカバーする光子エネルギー領域は、基本波で 200~1000eV である。EPU の方式としては、APPLE-II 型が採用されている。これにより、円偏光（左右）及び直線偏光（垂直/水平または $\pm 45^\circ$ ）の切り替えを行うことができる。また、U#16-1 及び U#16-2 は Gap に加えて 4 列の磁石列を全て独立に動かすことができるように設計されているため[41]、通常の EPU だけではなく、磁石列間の位相を変えることで光子エネルギーを制御する APU(adjustable phase undulator)[ 45-48]としての使用（後述の APU  $\rho$  モードおよび APU  $\sigma$  モードを含む）も可能である。これにより運転の自由度が著しく高まっている。この 2 台のアンジュレータの設計については[41]で詳しく述べられている。

高速偏光切り替え光源の実現のために、PF-2.5GeV リングの B15-16 直線部に 2 台の同一 EPU を縦列配置し、その両脇と間に 5 台のキッカー電磁石を配置する。アンジュレータを互いに異なる偏光状態に設定した上で、キッカー電磁石システムによりバンプ軌道を切り替えることで 10Hz 以上の高速偏光切り替えを行う。この方式の模式図を図 4-2 に示す。このキッカー電磁石の最大磁場は 1600Gauss で、最大蹴り角は 2.4mrad である[49-50]。バンプ軌道の制御のために、B15-16 直線部には 5 台の高速ビームモニターを設置し、これらの信号を高速 BPM(Libera Brilliance)で読み取ることで、turn by turn 測定を実現する。読み取りの周波数は 25kHz である。

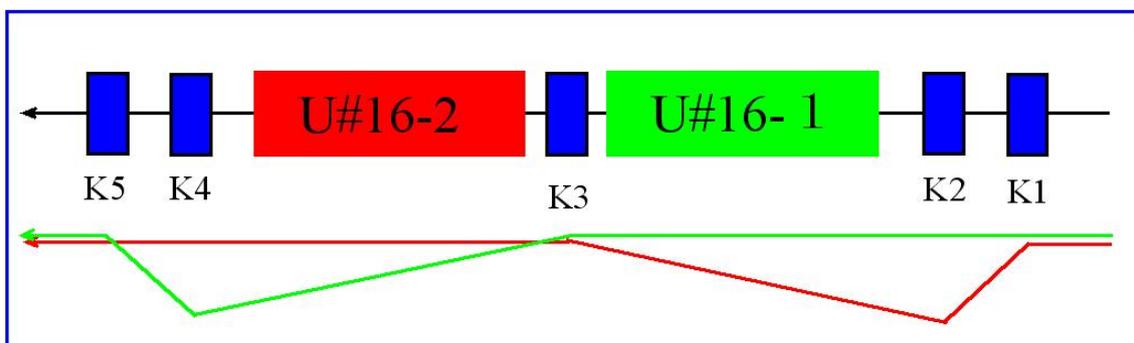


図 4-2 B15-16 直線部高速偏光切り替え光源の構成

U#16-1 及び U#16-2 は 2.5GeV PF ring において、1 次光で 200 から 1000eV の広い光子エネルギー領域をカバーする必要がある。このため周期長は 56mm であり、その周期数は 44 である。磁石材料としては Nd-Fe-B 合金を採用し、 $B_r=12.5\text{kG}$ 、 $iH_c=25.0\text{kOe}$  である。(NEOMAX 38VH manufactured by NEOMAX Co. Ltd.) その後 PF リングで建設された全ての EPU で同じ磁石材料を使用している。通常の Planar 配置で最大垂直磁場 6000Gauss を得るために、個々の磁石サイズは  $40\times 40\times 14\text{mm}$  であり、最小ギャップは 21mm である。U#16-1 及び U#16-2 の主なパラメータを表 4-1 に載せる。

表 4-1 U#16-1 及び U#16-2 のパラメータ

Period length	Number of period	Minimum Gap	Maximum Bx	Maximum By	Maximum Kx	Maximum Ky
56mm	44	21mm	3800Gauss	6000Gauss	2	3.1

表 4-1 のパラメータによる U#16-1 及び U#16-2 計算スペクトルを図 4-3 に示す。これは楕円偏光モードでの放射光輝度を表したもので、Gap を変えた際の各高調波のピーク位置の軌跡を示している。以下では、同種の計算スペクトルグラフに対して同じ意味で表すものとする。

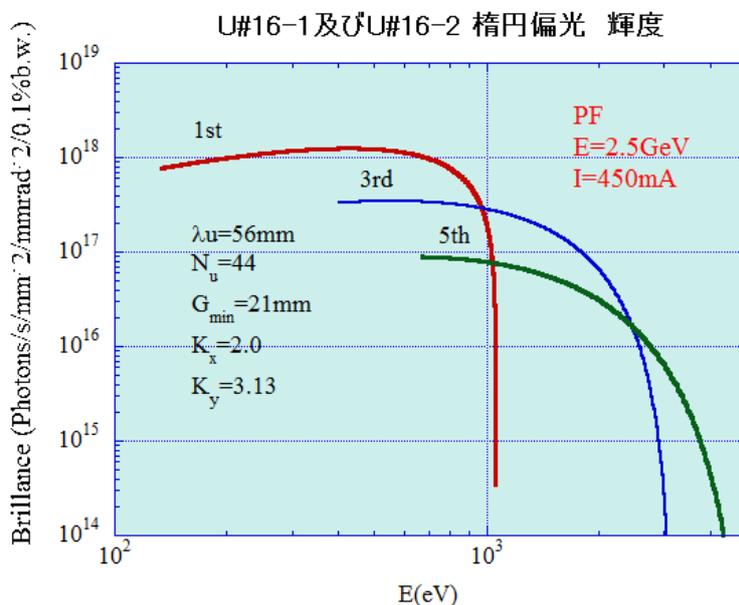


図 4-3 U#16-1 及び U#16-2 計算スペクトル

この高速偏光切り替え光源の建設は数年間にわたって行われた。最初の段階として 2007 年度においては光源を構成する 2 台の EPU のうち 1 台目(U#16-1)が建設され、並行してキッカー電磁石システムの開発と真空システムの整備が行われた。U#16-1 及びキッカーシス

テムは 2008 年 3 月に PF リングに設置され、U#16-1 は 1 台での運転が開始された。U#16-2 の建設は 2009 年度に行われ、2010 年夏に PF リングに設置された (図 4-4)。その後、高速偏光切り替えのマシスタディが継続されて行われ、2012 年の 4 月から高速偏光切り替えのユーザー運転が開始された[51]。この U#16-1 及び U#16-2 の PF での運転方法については第 6 章で詳しく述べる。



図 4-4 PF リングに設置された U#16-1 及び U#16-2。写真の奥側 (リング上流側) が U#16-1 であり、手前側 (リング下流側) が U#16-2 である。

#### [4-1-2] U#13

BL13 では、それまで運用されていた挿入光源である多極ウイグラー MPW#13 を新しい可変偏光アンジュレータ U#13 へ更新した[36]。U#13 は周期長 76mm を持つ APPLE-II 型の EPU であり、目標光子エネルギー範囲は 50 eV から 1.5 keV まであり、高エネルギー領域はアンジュレータの高次光を使ってカバーする。U#13 更新のための概略図を図 4-5 に示す。

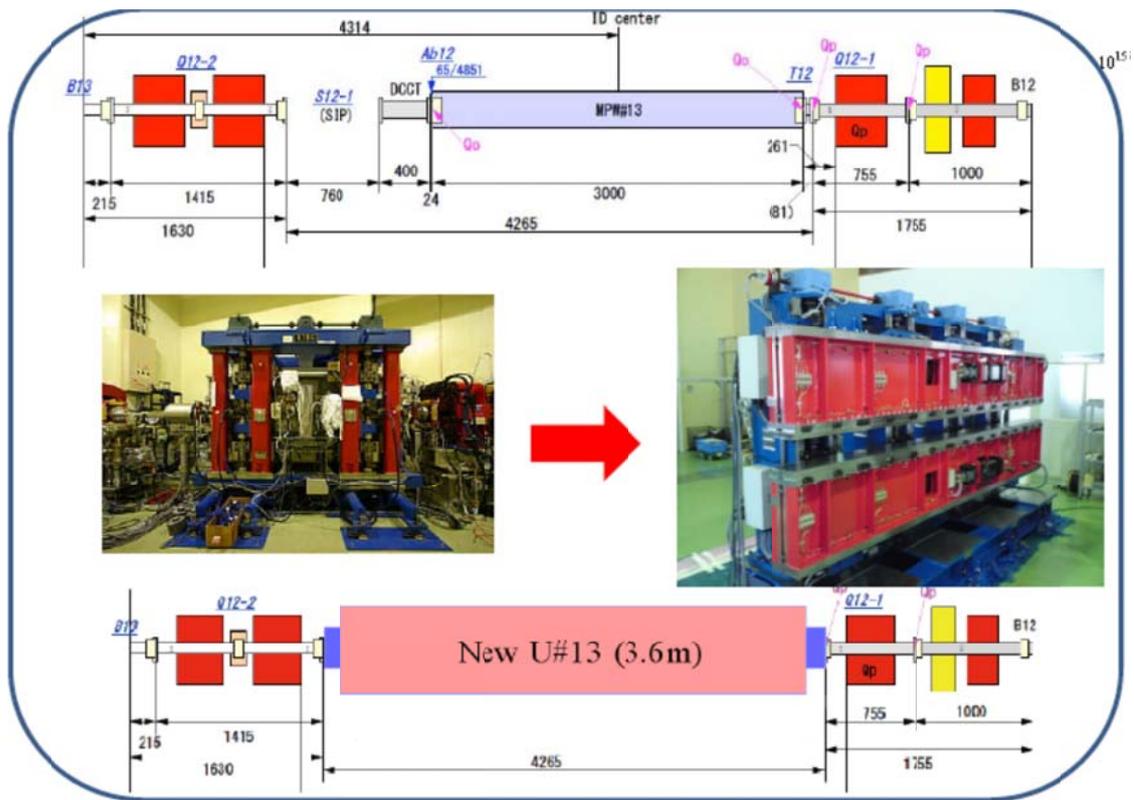


図 4-5 BL13 のアンジュレータ更新の概略図

U#13 は直線部の長さを最大限に利用した EPU である。この EPU の基本パラメータを表 4-2 に示す。

表 4-2 U#13 のパラメータ

Period length	Number of period	Minimum Gap	Maximum Bx	Maximum By	Maximum Kx	Maximum Ky
76mm	47	23mm	5100Gauss	7450Gauss	3.62	5.29

表 4-2 のパラメータによる U#13 の計算スペクトルを図 4-6 に示す。図は直線偏光の場合の放射光輝度を示している。U#13 では、磁場を強くし、楕円偏光モード ( $B_x/B_y=1/2$ ) を使うことで高次光を発生させて、1.5keV までの放射光利用を行う。また、100eV 以下の低エネルギー領域では、同じく楕円偏光モードを使うことで、放射光の放射パワー分布の主成分をビーム軸外に追い出し、ビームラインコンポーネントの熱負荷対策とすることを考えている。このために U#13 の放射パワーの各分布を計算した。これを図 4-7 に示す。

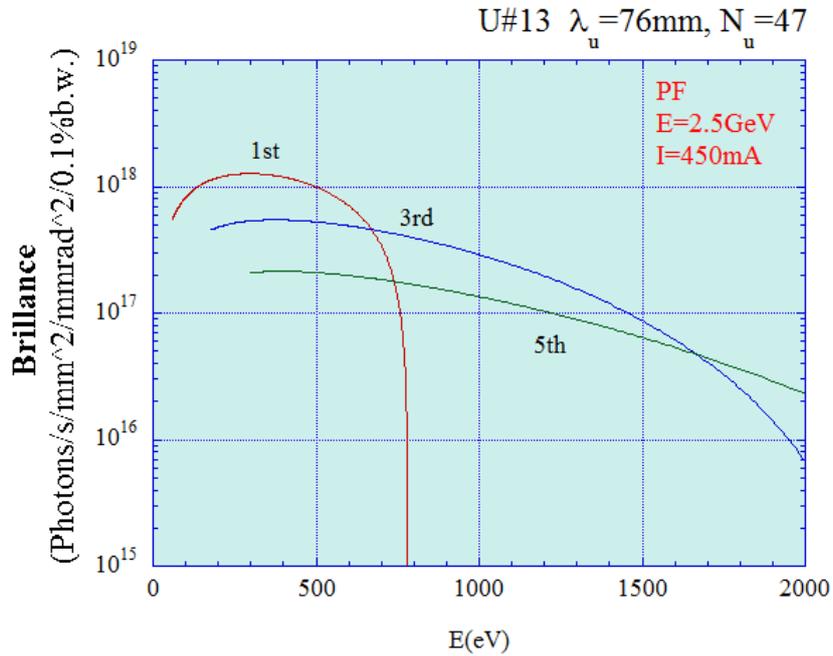


図 4-6 U#13 の計算スペクトル

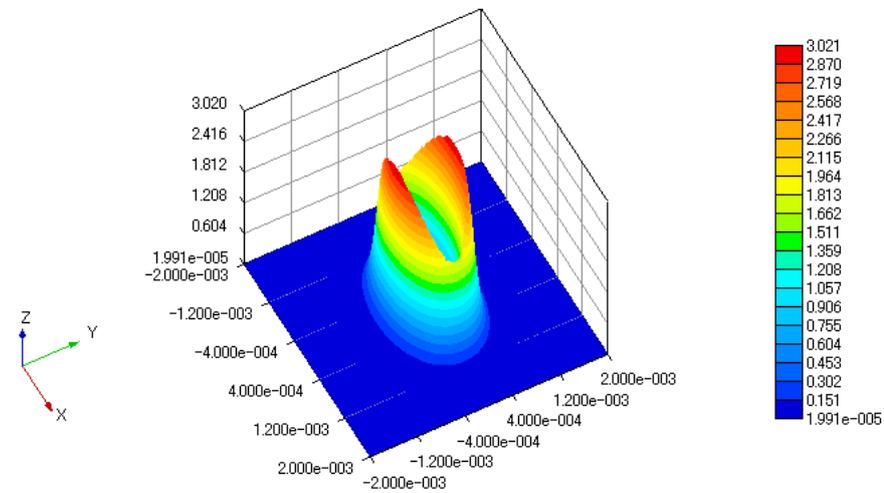


図 4-7 U#13 楕円偏光モードでの放射パワーの角度分布。横軸は水平・垂直方向の角度 (rad)、縦軸はパワー (kW/mrad<sup>2</sup>) である。これによって BL13 では、放射光取り込み角度と熱負荷を検討している。

U#13 の設計と建設は U#28 と並行して行われた。これら 2 台の EPU 本体の製作が 2013 年度に行われ、2014 年内に実施した磁場調整・磁場測定の後、2015 年 2 月に同時に PF リングへ設置された(図 4-8)。ユーザー運転に向けた U#13 の偏光モードの調整スタディは

2015年6月中に全て完了して、水平・垂直線偏光、左右円偏光及び左右楕円偏光の利用実験が開始されている。U#13の運転方法はU#16-1及びU#16-2の経験を踏まえて、同じ方式をとっている。これに関しては第6章にまとめている。



図 4-8 PF リングに設置された U#13

#### 4-2. PF リングにおける 6 列型 EPU

PF で導入された 6 列型 EPU である U#02-2 と U#28 は、光子エネルギー 30eV までの低エネルギー VUV 光を利用するために設計された。2.5GeV-PF リングにおいて、アンジュレータ 1 次光で 30eV の放射光を得るために、U#02-2 と U#28 の周期長としてどちらも 160mm を採用した。これは EPU の周期長としてはかなり長く、アンジュレータ内部での電子の水平軌道の最大振幅は、U#16-1 及び U#16-2 の場合と比べて 5 倍以上の大きさになる。また、PF リングの電子ビームの水平方向サイズは U#02-2 で  $\sigma = 640\mu\text{m}$  と大きい。このため EPU のタイプとして、水平磁場の水平方向の磁場均一度が高い 6 列型を採用した。U#02-2 と U#28 は同じ周期長で、同じ磁石形状をもつ長さ違いの EPU である。

PF で開発した 6 列型 EPU は第 3 章で述べたように、SPring-8 helical undulator と同じ磁石配列を持つてはいるが、6 列の磁石列を独立に制御することで、水平・垂直線偏光、左右円偏光、及び左右楕円偏光を実現した 6 列型 EPU として初めての試みである。

##### [4-2-1] U#02-2

ビームライン BL02 では、光子エネルギー 400 eV から 2 keV に渡る、軟 X 線アンジュレータ : U#02 (周期長 60mm、周期数 60) が長らく使われてきた。B01-02 直線部が直線部増強によって 8.9m に延長されたことに伴い、BL02 では新しい VUV 領域の EPU を直線部に追加して、30eV から 2 keV の広範囲を 1 本のビームラインで利用するビームライン更新計画が立てられた。これは既存の U#02 を直線部下流側に移動して、上流側に新たに 30eV か

ら 300eV の様々な偏光状態を持った光子エネルギーを発生する EPU (U#02-2) を新設するものである。この計画は PF と日立中央研究所との共同研究で行われた。この BL02 用光源更新計画の概略図を図 4-9 に示す。

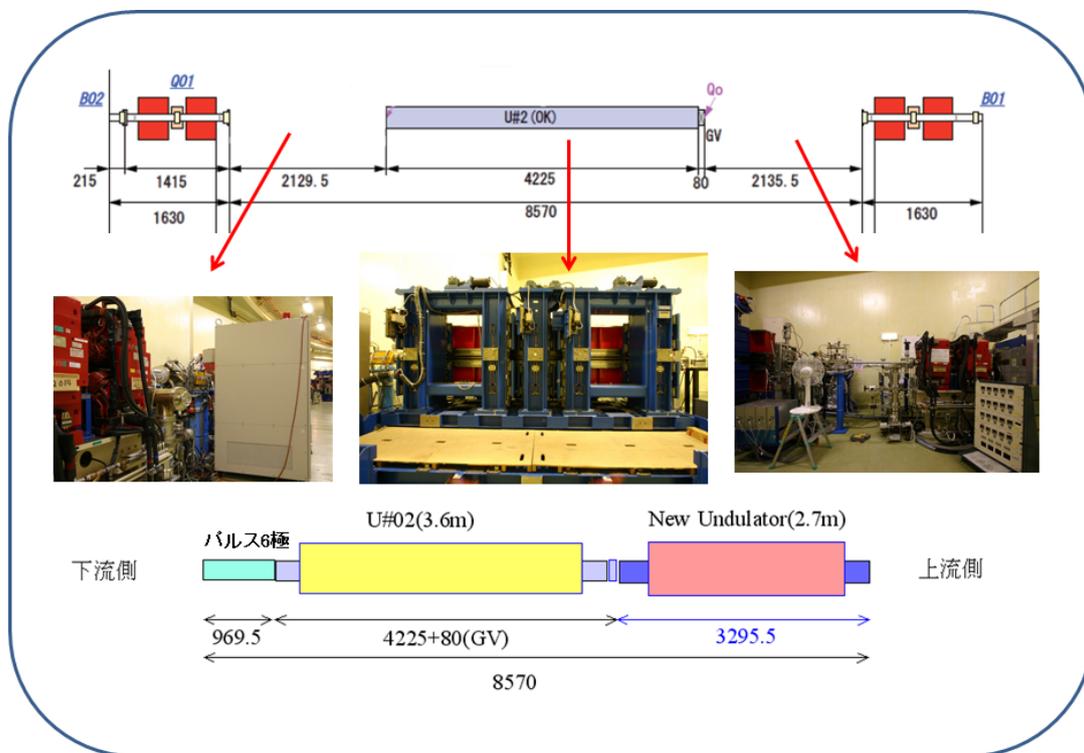


図 4-9 BL02 の光源更新計画の概略図

B01-02 直線部の最下流には入射用のパルス 6 極電磁石を移設するために、U#02-2 の長さは 3.3m 以下に制限される。この EPU の基本パラメータを表 4-3 に示す。

表 4-3 U#02-2 のパラメータ

Period length	Number of period	Minimum Gap	Maximum Bx	Maximum By	Maximum Kx	Maximum Ky
160mm	17	27mm	3300Gauss	3300Gauss	4.93	4.93

表 4-3 のパラメータによる U#02-2 の計算スペクトルを図 4-10 に示す。図は直線偏光の場合の放射光輝度を示し、既存のアンジュレータ U#02 のスペクトル輝度を合わせて表示する。

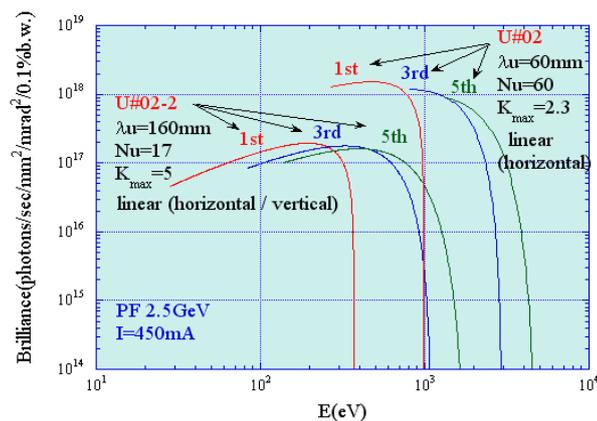


図 4-10 U#02 及び U#02-2 の計算スペクトル

EPU として 6 列型を採用した場合、中央の磁石列が垂直磁場を作り、両サイド磁石列が水平磁場をつくる。6 列型 EPU の実用上の運用にとっては、これらの垂直磁場と水平磁場の強さを、全 Gap 範囲でできるだけ同じにすることが重要である。円偏光または楕円偏光モードで使用するとき、磁場の縦横比が Gap に依存しなければ磁石列の位相を調整する必要はない。しかし実際の磁石列では、磁場の縦横比は Gap に依存して少し変化する。U#02-2 では、必要とされる円偏光度が 95%以上であるために、この条件を満たすように中央部と両サイド部の磁石寸法を磁場計算によって調整した。このときの水平・垂直磁場の Gap 依存性を図 4-11 に、円偏光度を図 4-12 に示す。全 Gap 範囲において円偏光度 98.5%以上となり、ビームラインに必要な円偏光度の要件を満たしている。

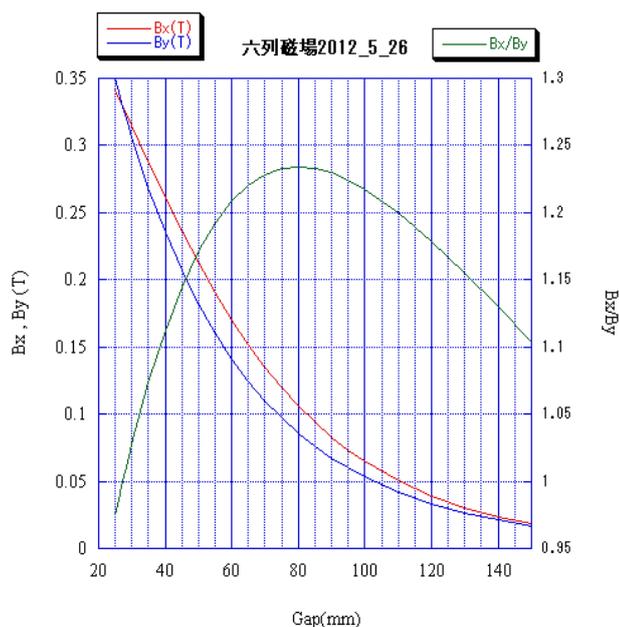


図 4-11 磁場計算の結果（水平・垂直磁場強度と比）

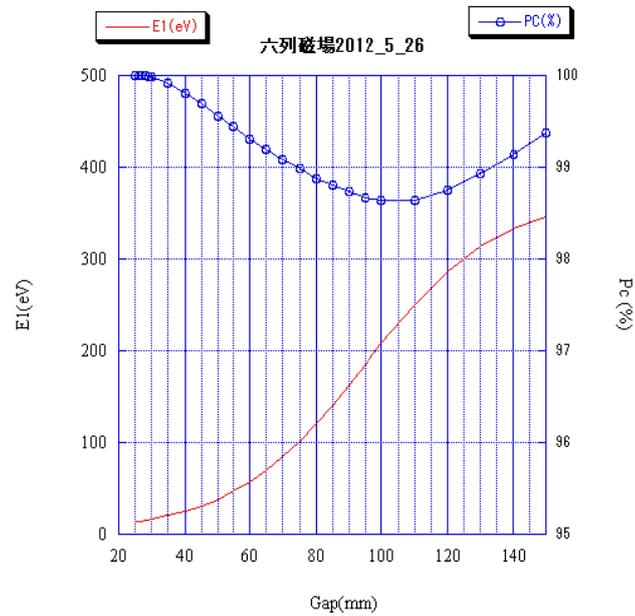


図 4-12 円偏光度（計算値）と 1 次光のエネルギー

このように設計された磁石を実際の EPU 架台に組み込んだ写真が図 4-13 である。上下中央部の磁石列を取付け、磁場調整後に両サイド部の磁石列を取り付けている。両サイド部磁石列を取付けた後は、中央部の磁石は外せない構造になっているため、磁場調整の手順には細心の注意を要する。

U#02 の下流側への移設工事と U#02-2 の設置作業は、2014 年 3 月の同時期に行われた。（図 4-13）U#02-2 の立ち上げ調整は 2014 年の 5 月から行われて、PF リングの秋季運転からは、全ての偏光モードでのユーザー運転が開始されている[36]。

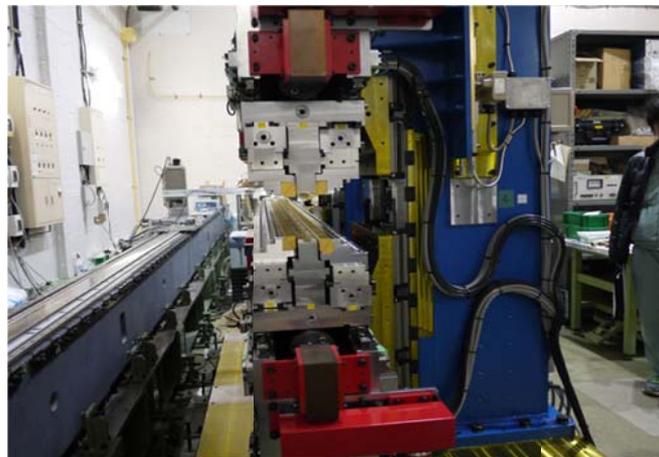


図 4-13 6 列型 EPU 磁石の取付け後の磁石列



図 4-14 下流側に移設された U#02 と PF リングに新設された U#02-2

#### [4-2-2] U#28

BL28 では、それまで運用されていた挿入光源である楕円多極ウイグラーEMPW#28 を、新しい可変偏光アンジュレータ U#28 へ更新した。U#28 は U#02-2 と同じく周期長 160mm の 6 列型 EPU であり、EPU の全長が異なっている。目標光子エネルギー範囲は 30 eV から 300eV であり、これを EPU の 1 次光でカバーする。このアンジュレータ更新のための概略図を図 4-15 に示す。リングの運転に必要なコンポーネントであるキッカー電磁石 K4 を除いた直線部を全て U#28 が占める。U#28 の周期長は、それまでの EMPW#28 と同じ 160mm である。両者の最大の違いは、U#28 では、全長が伸びて周期数が 12 から 22 と増えたことと、EMPW#28 では不可能であった垂直偏光モードが新たに加わったことである。このアンジュレータ更新によって変わる特徴を表すために、U#28 と EMPW#28 計算スペクトルを図 4-16 に示す。また、U#28 の基本パラメータを表 4-4 にまとめる。

表 4-4 U#28 のパラメータ

Period length	Number of period	Minimum Gap	Maximum Bx	Maximum By	Maximum Kx	Maximum Ky
160mm	22	27mm	3300Gauss	3300Gauss	4.93	4.93

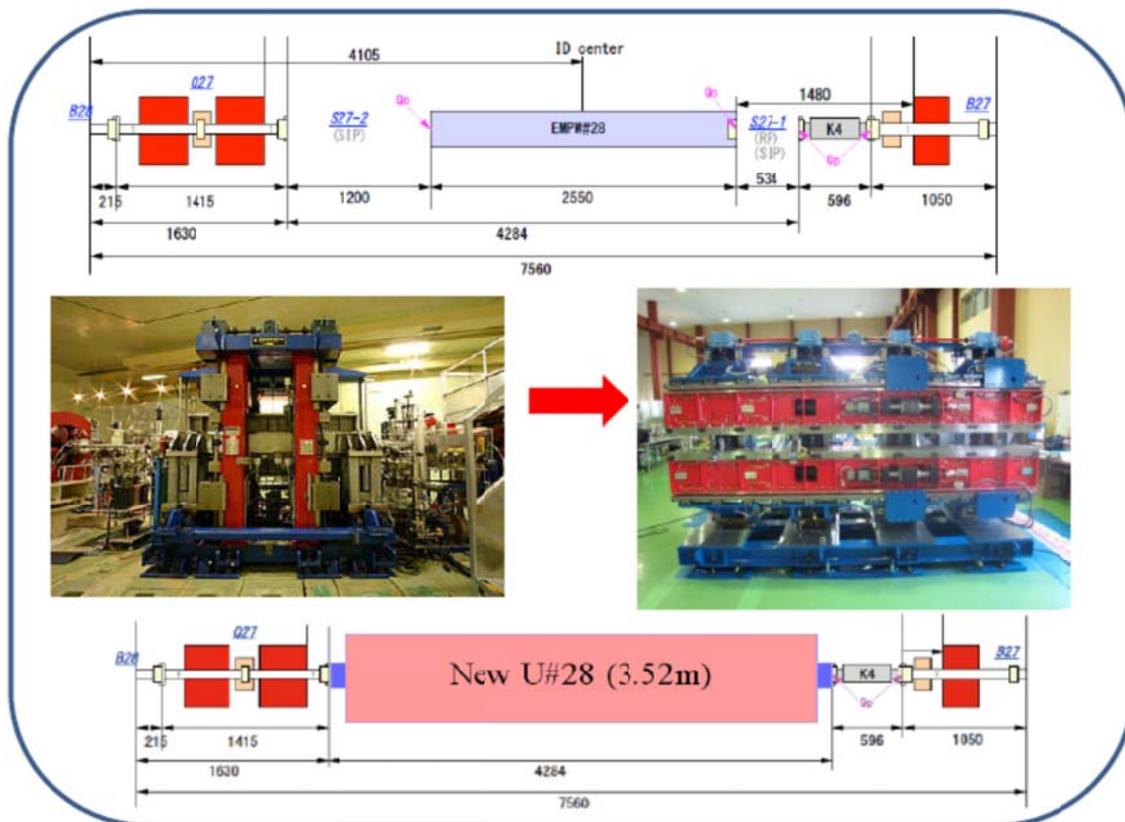


図 4-15 BL28 のアンジュレータ更新の概略図

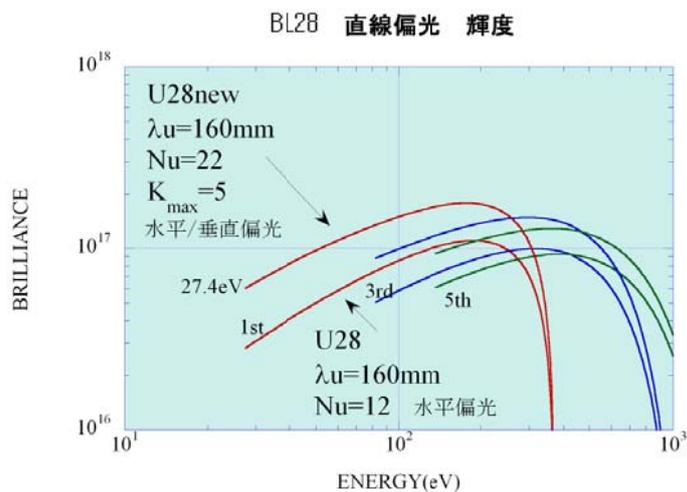


図 4-16 U#28 と EMPW#28 の計算スペクトル比較

U#28 の磁場調整と磁場測定は、2014 年の夏に完了した。PF リングへの設置は 2015 年 2 月に U#13 と同時に行われた。設置後の U#28 の写真を図 4-17 に示す。U#28 のユーザー運転に向けた調整スタディは U#13 と並行して実施され、全ての偏光モードでの利用実験が開

始されている[36]。



図 4-17 PF リングに設置された U#28

## 第5章 PF リングにおける EPU 磁場調整法の開発

本章では、本論分の中心課題である、PF リングにおける EPU の磁場調整法の開発研究について記述する。はじめにアンジュレータ磁場調整の目的とこれまでの調整法について概観し、アンジュレータ磁石の初期配列について述べる。次に Hall 素子による磁場測定システムの詳細と本研究で開発した EPU 磁場調整法と、その適応結果について記述する。さらに、多極磁場成分のフリップコイルによる測定と調整について述べる。

### 5-1. 磁場調整の手法と初期磁石配列について

現在の放射光施設にとって、永久磁石を使った挿入光源であるアンジュレータは高輝度光源とし必須のデバイスである。アンジュレータの性能は、その使用する Gap 域の全域に渡って良好な磁場分布を持っていることで決まり、理想的な磁場分布からの誤差がスペクトル性能の低下や電子ビームへの影響を与える原因となる。実際にアンジュレータに使用される永久磁石では、磁場強度、磁化角度、磁場分布などに優れたものが選別して使用されるが、完全な均一性は望めない。アンジュレータの磁場調整の目的は、現実の磁場分布を理想的な磁場分布に近づけることで、放射スペクトル性能の向上と電子ビームへの影響の低減を目指すものである。精密な磁場測定によって得られたアンジュレータ磁場分布から、各磁極でのピーク磁場や電子ビームの蹴り角を一様にし、[5-4-2]節で後述する位相エラーを小さくするための様々な磁場調整法が開発されている。この磁場調整方法としては、磁石同士の入替と磁石底面に補正磁石チップを追加する方法 [28,52-53]、磁石の高さ方向の位置を少し変えることで磁場強度を調整する方法や、強磁性体シムを磁石表面に張り付ける磁場調整する shimming 法[54]などが、有効な手段として広く使われている。このうち、磁石の位置調整や shimming 法は、位相エラーや磁場分布を系統的に調整できる利点を持つが、磁石の高さや表面のシムによって、磁石列表面の均一性を損ない、実効的に最小 Gap が大きくなる欠点がある。これに対して、磁石の入れ替え法は試行錯誤による面があるが、磁石列表面の一様性を保つことができる。

PF では、80 年代後半に挿入光源の開発が行われて、磁石同士の入替と補正磁石チップを追加する方法が挿入光源グループ (H.Kitamura, S.Yamamoto) を中心に開発された[28,52-53]。磁場調整の指針としては、各磁極での電子ビームの蹴り角を一様にする手法が採用されてきた。各磁極での電子ビームの蹴り角は半周期毎の積分磁場に比例するので、半周期毎の積分磁場を一様にするよう磁場調整を行っている[28,52-53]。アンジュレータの磁場分布の内、j 番目の半周期の積分磁場は垂直磁場の場合、次式で定義される。

$$I_j = \left| \int_{j\lambda/2}^{(j+1)\lambda/2} B_y(z) dz \right| \quad (5-1.1)$$

この手法により、2000 年以降に PF 及び PF-AR リングで建設された真空封止型アンジュレータ[39-40,55-56]の磁場調整の実績では、磁場調整後の半周期毎の積分磁場の平均値から

のずれは標準偏差の平均値で約 0.2%である。

この磁場調整では、上述の磁石交換とチップ磁石の挿入を行う磁場調整法が使われているが、このためには精密な磁場測定と調整を必要な磁場分布性能を達成するまで繰り返し行う必要がある。この手法を EPU の磁場調整に使う場合、EPU では磁石列数が多く通常のプラナー型アンジュレータよりも多数の永久磁石が使用される上に、磁石サイズも真空封止型アンジュレータより大きいため、磁石交換による磁場調整には多くの時間と労力が必要となる。さらに、EPU では、磁石列配置を複雑に制御することで様々な偏光状態を作り出すために、測定すべき磁場分布の組み合わせ数も多くなるため、磁場調整及び磁場測定に要する時間も膨大となる。この調整時間の短縮と労力軽減は、短期間で複数台の EPU を建設する上で重要な課題となる。このためには、磁石列の初期状態における磁場分布が出来るだけ良好なものであることが望ましい。この磁石の初期配列を最適化する試みは、これまでも多く行われてきた[28,57-61]。この磁石配列の最適化を行う上での指標として、磁石表面の磁場強度や磁化角度、磁場分布の積分値などが使われている。また、別の指標として個別磁石のビーム軸方向の磁場分布を測定し、重ね合わせる事で初期磁場分布を求めることが考えられる。これは、永久磁石のみから構成されるハルバッハ型アンジュレータにおいて可能な手段である。このような試みは Diviacco らによって初めて行われた[61]。ここでは、短いアンジュレータに対して磁場の重ね合わせによる予測が実測磁場とあっていると報告されており、磁場の重ね合わせが有効であることを示した点で重要である。しかしそこで得られた初期磁場分布の性能は、我々の目的の為には不十分であり必要とされる要請を満たしていない。また、全ての磁石の磁場分布を測定するためには非常に多くの時間を要し、長いアンジュレータに対して適応が困難であるという問題点があった。そこで私は、個別磁石の磁場分布を重ね合わせる手法を発展させ、磁場調整を行う前の初期状態で、半周期毎の磁場積分のばらつきが 0.2%以下になることを目標とした、実用的な方法を U#16-2 と U#02-2 の建設を通して開発した [62]。

## 5-2. 磁場測定システム

永久磁石の詳細な磁場分布測定には Hall 素子を用いることが一般的である。この Hall 素子を使った精密磁場測定法は簡便であるが、非常に多くの磁石を持った長いアンジュレータでは、測定に要する時間が長くなることが問題点である。特に多くの偏光状態と運転モードをもつ EPU では、必要とされる測定回数も通常のプラナー型アンジュレータに比べて 10 倍に及ぶことがある。このため十分な測定精度を持ちつつ、実用的な時間で測定可能な Hall 素子磁場測定システムの開発が U#16-1 の建設に先立って、挿入光源グループ (S.Yamamoto, K.Tsuchiya, H.Sasaki, T.Shioya) によって行われた[41,43]。この精密磁場測定システムは、本研究で開発した EPU 磁場調整法を実現する上で必須の重要な装置である。

### [5-2-1] 磁場測定用長尺ベンチ

磁場測定ベンチとしては、大理石を使った長尺ベンチの上にリニアモーター駆動の移動テーブルを配したものを使用する。このベンチの有効測定長 10mで花崗岩 (granite) のテーブルの上にリニアガイドで支持された z ステージと x ステージを搭載している。この z ステージはリニアモーターで駆動され、最大速度は 1m/s である。ステージの水平・鉛直方向の平行度はともに $\pm 20 \mu\text{m}$ 以内であり、リニアスケール (分解能  $1 \mu\text{m}$ ) によって位置を読み出す。リニアスケールはレーザー測長器で校正されている。この長尺測定ベンチは U#16-1 の建設に先立って、挿入光源グループ (S.Yamamoto, K.Tsuchiya, H.Sasaki, T.Shioya) によって開発された[41,43]。

### [5-2-2] Hall 素子の選別と校正

上記磁場測定システムでは、U#16-1 の垂直磁場と水平磁場を精度良く測定するために Hall 素子を使った精密磁場センサを 2 つ使用されている。2 台の Hall 素子センサは個別に NMR によって校正されており、銅製のマイクロオープンを持ったホルダーによって  $30 \pm 0.01^\circ\text{C}$  以内で温度制御される[28,52-53]。

U#02-2、U#13,U#28 の EPU 開発に際しては、私は Hall 素子の選別と Hall 素子ホルダーについて以下のような改良を行った。使用した Hall 素子は AREPOC 社製で、 $100 \mu\text{m}$  角の有効感受エリアを持ち、樹脂のホルダー内にマウントされている。しかし Hall 素子がマウントされている樹脂製ケース内で若干傾いていることが判った。この Hall 素子のケース内での傾きを調べるために、同種の素子を多数準備して角度特性の評価試験を行った (図 5-1)。AREPOC 社製のホール素子を各種合わせて 24 個準備し、基準磁石内部で角度測定を行った。この結果を図 5-2 に示す。素子の回転方向は図の A,B の 2 方向で行った。

この測定により、散布図に示した角度特性の分布結果を得た。このうち A、B の両方向で  $0.5$  度以内のものを 4 個選択して、それぞれを NMR によって磁場校正した。上記の手順で素子を準備・使用することで磁場測定の精度向上を計っている。

さらに、磁場中を移動しながら磁場測定を行うために渦電流の影響を避けるために、従来の銅製マイクロオープンから電気絶縁性が高く熱伝導率が良好な窒化アルミニウム製へと変更した。

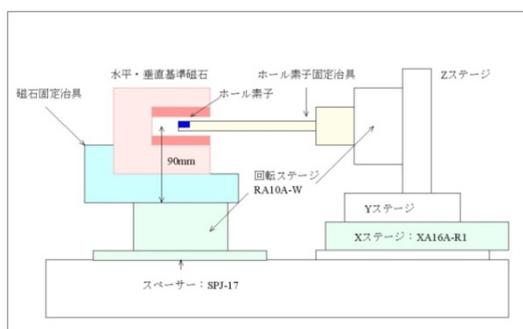


図 5-1 Hall 素子角度特性評価試験。左側は Hall 素子角度測定中の写真である。右側は Hall 素子角度測定概念図を表している。

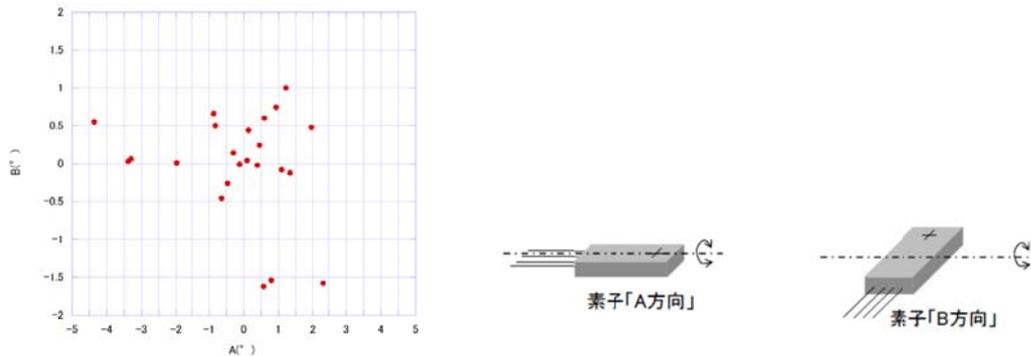


図 5-2 Hall 素子角度特性評価試験の結果

### [5-2-3] 磁場データ収集システム

上記磁場測定ベンチの開発と同時に Hall 素子データの収集システムが開発された。磁場測定で使用する 2 個の Hall 素子は、ビーム軸方向の移動テーブル上に固定され、水平・垂直磁場を独立に検出する。これらの Hall 素子はそれぞれ、水平・垂直ステージを組み合わせた位置調整機構に設置されて、2 軸スイベルステージによって独立に角度調整が可能となっている

ホール素子電圧データの読み出しには、PXI5922(National Instruments, Co.)を採用した。PXI5922 は 2ch の ADC ボードで 24bit の分解能を持つ。これを 50kS/sec で使用している。このとき Hall 素子の移動速度は 5.33mm/sec である。PXI 計測システムは LabVIEW で制御されて収集されたデータは全て直接 HDD に保存される。このときリニアスケールの位置情報も PXI5922 に同期した 16bitADC で磁場信号に同期して保存する。保存されたデータはノイズ除去のために平均操作を行い最終的に 100  $\mu$ m ステップ毎の磁場データに変換する。この磁場データ収集システムの概略図を図 5-3 に示す。

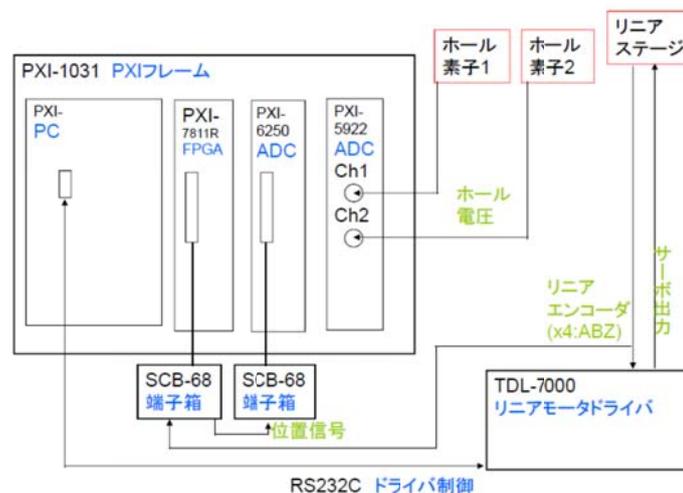


図 5-3 磁場データ収集システムの概略図

### 5-3. 2重移動平均法によるノイズ除去法

この Hall 素子システムは、リニアモータにより 5.33 mm/s の一定速度で移動しながら 50 kS/s のサンプリングレートでデータ収集を行う。この場合、データは 0.1 $\mu$ m ステップで収集され、全長 3m のアンジュレータの磁場測定では 750MB のデータ量となる。このうち Hall 素子の電圧信号にはノイズ成分が含まれ、特に 50Hz の電源周波数に同期したノイズを除去することは精密な磁場解析には必須である。このために私は、移動平均を 2 重に行うノイズ除去方法 (2 重移動平均法) を考案して採用した[62]。通常の移動平均をとった場合に、効果的にノイズを落とすために移動平均の時間幅を大きくすると信号波形自身が減衰するが、この 2 重移動平均法では、これを補償し波形の減衰を防ぐことができる。一般の信号関数を  $f(x)$  とし、その移動平均  $g(x)$  を考える。

$$g(x) = \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t) dt = \frac{1}{2\delta} [F(x+\delta) - F(x-\delta)] \quad (5-3.1)$$

ここで  $\delta$  は時間窓幅の半分であり、 $F(x) = \int f(x) dx$  は  $f(x)$  の原始関数である。

ここで十分小さな  $\delta$  に対して移動平均  $g(x)$  を  $\delta$  で級数展開すると

$$g(x) \approx F'(x) + \frac{\delta^2}{6} F'''(x) = f(x) + \frac{\delta^2}{6} f''(x) \quad (5-3.2)$$

この結果に対して再度移動平均  $h(x)$  をとると、同様にして

$$h(x) = \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} g(t) dt \approx \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \left[ f(t) + \frac{\delta^2}{6} f''(t) \right] dt = g(x) + \frac{\delta^2}{6} f''(x) + \dots \quad (5-3.3)$$

これより  $\delta$  の 2 次以上の高次項を落とすと、次の簡単な関係式が得られる。

$$f(x) \approx 2g(x) - h(x) \quad (5-3.4)$$

これによってノイズ成分を除去しつつ、減衰のない元の信号関数を求めることができる。

図 5-4 に 2 重移動平均法の実施例を示す。ここでは、電源周波数 5 周期分 (5PLC ; power line cycle) に相当する時間窓で移動平均を行っており、5.33 mm/s と 16 mm/s の 2 種類の測定速度に対する結果を比較している。青線は(5-3.4)式に従った 2 重移動平均法の結果であり赤線で示した生データからノイズ成分のみを取り除いていることが分かる。一方、緑線で示した通常の移動平均では信号波形の劣化が見られ、これは素子の移動速度が増えるとともに減衰量も増すことが分かる。これに対して 2 重移動平均法の結果は両者とも良好であり、測定速度 16mm/s の場合でも十分有効に使用できる。現在の磁場測定では、通常 5.33m/s の測定速度を採用しているが、将来的により速い速度での磁場測定にも役立つ手法である。本方法は簡単であるが、実際の磁場測定速度を決める大きな要因である電源周波数ノイズの除去に有効な手段である。

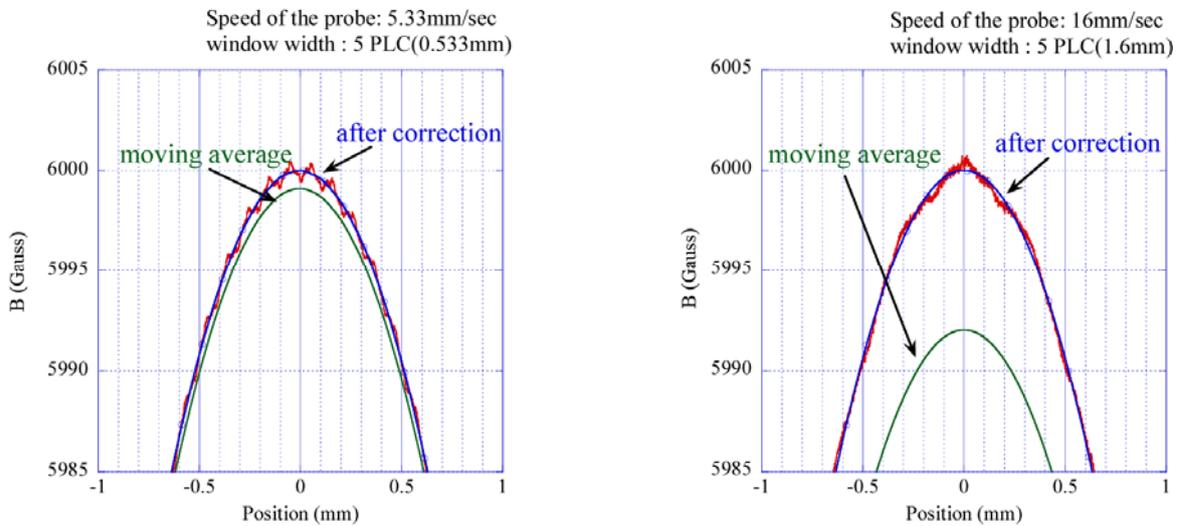


図 5-4 2重移動平均法によるノイズ除去の効果

Hall 素子の移動速度を変えた場合の測定磁場データを図 5-4 に示す。左側は移動速度 5.33mm、右側は移動速度 16mm/s の場合を比較している。通常の移動平均（緑線）では、移動速度とともに信号強度がなまってしまいが、2重移動平均法を適用した結果（青線）では、生データに含まれるノイズ成分だけを除去していることが判る。

#### 5-4. EPU 磁石初期配列の最適化

PF の U#16-2 の建設に先立ち、私は上記の挿入光源グループによって開発された磁場測定システムを使って、磁石列の初期配列最適化方法の開発に取り組んだ。まず初めに各 EPU の単体磁石に対して電子ビーム進行方向（z 軸）の磁場分布測定を全数行った。これによって得られた磁場分布を重ね合わせ仮想的なアンジュレータ磁場分布を構築する。それをアニーリング(simulated annealing)法で磁石の入れ替えを計算機上で行い、最適化を行った。

##### [5-4-1] 個別磁石の磁場測定

個別磁石の z 軸方法の磁場分布測定は図 5-5 に示すセットアップで行った。この図では、U#16-2 の場合の測定例を示している。磁場測定には(5-2-3)で述べた 2 次元 Hall 素子を用いて水平・垂直磁場を同時に取り込む。一つの単体磁石測定に要するデータ量は 140 MB である。EPU で使用される磁石数はハルバッハ型プラナーアンジュレータの 2 倍であり、U#16-2 では、予備磁石を含めて 740 個になる。U#16-2 の磁石サイズは 40 mm×40 mm で厚みが 14mm である。各磁石は SUS316 で作られたホルダーに接着剤とクランプによって固定されている。この磁石の模式図を図 5-6 に示す。

APPLE-II 型 EPU である U#16-2 では、水平方向の磁石列間隔を、z 軸を対称軸として 1mm

となるように配置している。各磁石はホルダーに設けられた基準面を使って磁石列取り付けベースに固定される。個別磁石の磁場分布を重ね合わせ、初期磁場配列を決定するためには、各磁石の水平方向の位置が一様であることが前提条件になる。このため磁石を個別磁石の磁場測定に先立ち、磁石ホルダー基準面から水平方向磁石表面までの距離（図 5-6 の L）のばらつきを、レーザー距離計を用いて測定した。この結果を図 5-7 に示す。測定の結果、L のばらつきは標準偏差で  $17\mu\text{m}$  であった。このばらつきは、磁石及びホルダーの加工精度（ $\pm 10\mu\text{m}$ ）と接着剤の厚さのばらつきの重ねあわせとして現れるものであり、合理的なものである。このばらつきは初期磁石配列決定後に行う実際のアンジュレータ磁場測定時に誤差の要因となるものであるが、簡単な磁場調整で補正できる。これによって個別磁石が設計精度を保って製作されていることが検証された。

個別磁石の磁場測定では、Hall 素子は磁石表面から  $10.5\text{mm}$  の高さに調整されている。これは U#16-2 の最小 Gap である  $21\text{mm}$  に相当する。測定距離は  $\pm 300\text{mm}$  であり、実際の z 軸方向の磁石厚  $14\text{mm}$  に対してかなり大きい。この測定距離は磁石外に染み出す磁場成分が十分に減衰する位置を測定して決めたものであり、実際に個別磁石の磁場を重ね合わせる際に考慮すべき長さとなる。アンジュレータ内のある点での磁場を重ね合わせるには、U#16-2 の場合  $\pm 300\text{mm}$  である。この距離は磁石寸法によって異なるため、周期長が異なる場合は事前に決める必要がある。図 5-8 に U#16-2 個別磁石の磁場測定結果例を示す。ここでは、縦磁化磁石と横磁化磁石の垂直磁場分布を表している。横軸の原点は磁石の厚み方向の中心である。測定した磁石数は U#16-2 の場合 740 個である。これらの測定結果を解析したところ、縦磁化磁石の磁場中心位置は水平・垂直磁場ともに  $\pm 0.3\text{mm}$  ずれていることが判明した（図 5-9）。どの縦磁化磁石に対しても、水平・垂直磁場が同じ方向に同量だけ磁場中心位置がずれている。それに対して横磁化磁石では、磁場中心は磁石中心に一致している。この縦磁化磁石の磁場中心が 2 つのグループに分かれていることは、磁場中心のずれが磁石の製作過程で系統的に生じて磁石ホルダーへの接着時にランダムに取り付けられた結果と考えられる。この現象の原因追求と改良方法については[5-4-3]で後述する。このように縦磁化磁石に磁場中心位置の z 軸方向のずれがある場合では、この効果を考慮せずに実際の磁石列に組み込んだとき、縦磁化磁石の磁場中心が規定の位置からランダムにずれてしまうことになる。これはアンジュレータ磁場分布の特性を劣化させる大きな要因となる。特にアンジュレータ放射光の性能に大きな影響を及ぼす位相エラーを劣化させると考えられる。ここでは、縦磁化磁石に対して、その磁場中心のずれ方向を一定となるように配置することで解決している。これより個別磁石の z 方向磁場分布を  $100\mu\text{m}$  の位置分解能で測定することは、良好なアンジュレータ磁石の初期配列を求める上で非常に重要であると言える。



図 5-5 単体磁石ブロックの磁場分布測定の設定アップ

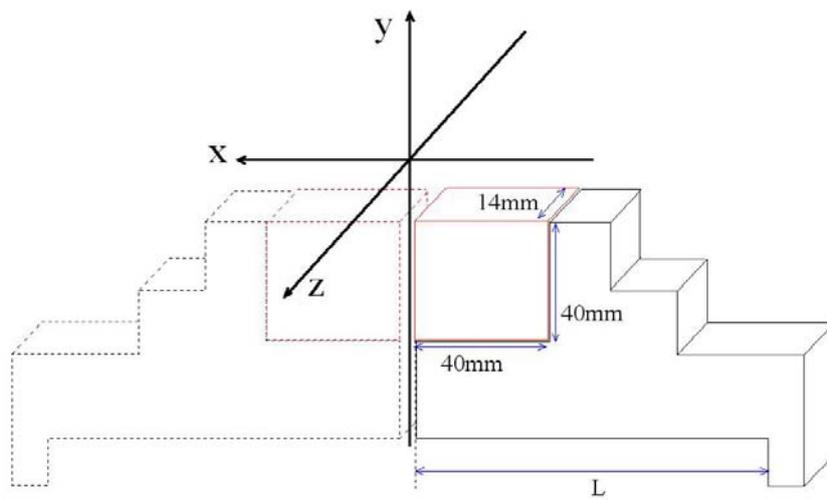


図 5-6 U#16-2 の磁石ホルダー形状概略図

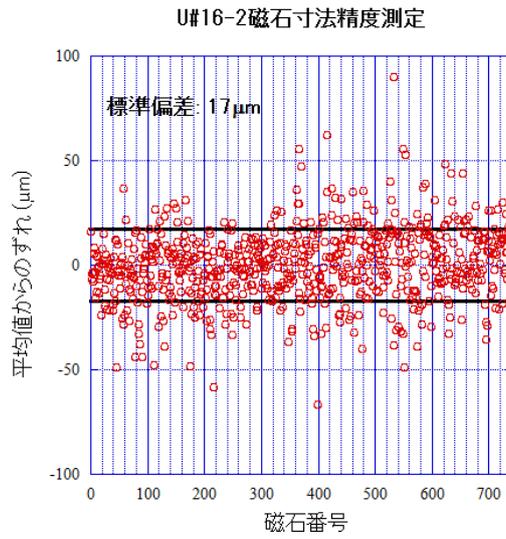


図 5-7 U#16-2 の磁石ホルダー寸法測定の結果

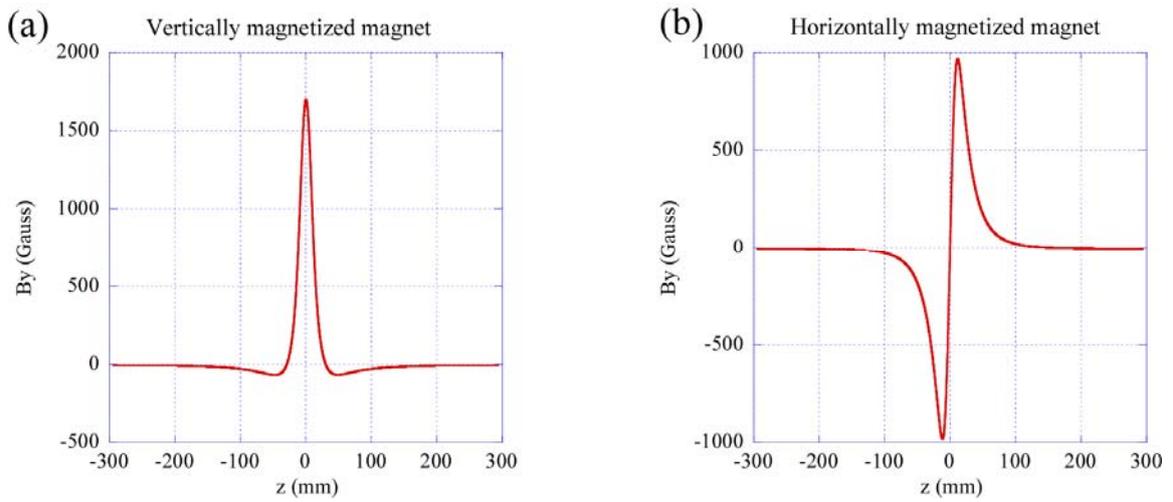


図 5-8 U#16-2 単体磁石の z 軸方向磁場分布測定例 (a)縦磁化磁石 (b)横磁化磁石

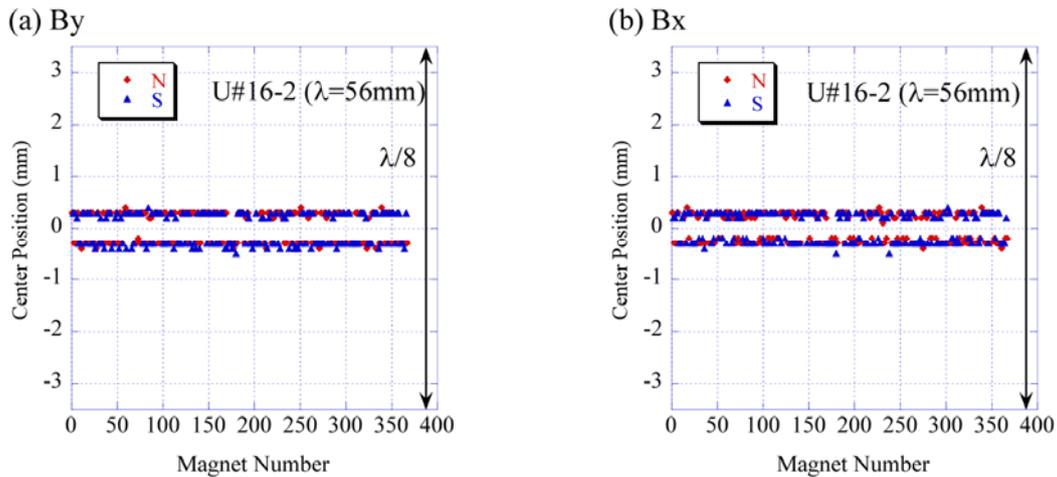


図 5-9 縦磁化磁石の磁場中心位置のばらつき (a) 垂直磁場 (b)水平磁場

#### [5-4-2]. 磁石配列の最適化

磁石配列の最適化プロセス設計の最大の目的は、磁石の EPU 架台に組み付け後に行う磁場調整作業を質量ともに可能な限り軽減することである。これにより多くの偏光運転モードをもつ EPU の建設・調整を迅速に、かつ簡便に行うことが可能となる。

磁石列初期配置の最適化計算には、個別磁石の磁場分布を計算機上で重ね合わせ、アンジュレータ磁場を仮想的に生成し、このアンジュレータ磁場を解析する。この磁場解析とランダムに抽出された 2 個の磁石間の仮想的な入替え交換をアニーリング(simulated annealing)法によって繰り返し行い、良好な初期配列を探索する。

しかし通常行われる表面磁場や磁化角度データ等の比較的少量のデータを使った最適化法と異なり、個別磁石の全数測定によって取得した磁場分布データの総量は非常に大きいために、単純に磁場の重ね合わせを繰り返すと所要計算時間が膨大になってしまう。そこで計算時間の短縮化のために個別磁石の磁場特性を直接使い計算できる、アンジュレータ内部での磁場局所的均一性を重視して最適化法の設計を行った。このために磁石列初期配列の最適化の指標として各半周期毎の 1 次磁場積分を採用した。これは次式で定義される。

$$S = \sum_{j=1}^{2N} (I_j)^2, \quad I_j = \left| \int_{j\lambda/2}^{(j+1)\lambda/2} B_y(z) dz \right| \quad (5-4.1)$$

これ以外の指標として考えられる 2 次積分磁場、位相エラー、または多極磁場成分などは磁石組み付け後の磁場測定の結果に応じて適宜調整する方針を採った。実際、1 次磁場積分を最適化した場合、アンジュレータ磁場調整において最も時間と労力を費やす磁石間の交換調整作業を省くことが出来て、上述のそれ以外指標については、各磁石の微細な位置調整や調整用チップ磁石の挿入などの手法で対応可能である。特に周期長が長く磁石寸法が大きな U#02-2 と U#28 の場合では、磁石間の吸引反発力が大きく磁石の交換作業は困難さを増す。この磁石交換作業を省略することが本手法の眼目となる。

予めすべての個別磁石の磁場分布をアンジュレータの半周期に相当する区分に分けて、1次積分磁場を計算しておく。図 5-10 では、U#02-2 の場合の例を示している。実測した磁場分布は磁石寸法よりも大きくしみ出すが、この磁場が十分に減衰する領域まで1次積分磁場の影響を考慮して磁場の重ね合わせを計算する。U#02-2 の場合、周期長は 160mm なので個別磁石の磁場分布を 80mm 幅の区画に分け、縦磁化磁石は 5 区画分を、横磁化磁石に関しては 4 区画分に分割して 1 次積分磁場データを作成する。

図 5-11 では、U#02-2 の場合の磁場の重ね合わせ領域を示している。赤く色付けした位置での半周期毎の磁場積分値の重ね合わせのためには左右 9 個分の磁石からの寄与を考慮する。各半周期毎の 1 次磁場積分を求めるには、隣接及び上下対向する 18 個の磁場データを重ね合わせる。U#28 の場合も周期長が U#02-2 と等しいため磁場の区間分割と重ね合わせ領域は同じである。

一方、U#16-2 の場合は、周期長は 56mm なので個別磁石の磁場分布を 28mm 幅の区画に分け、縦磁化磁石は 15 区画分を、横磁化磁石に関しては 14 区画分に分割する。磁場の重ね合わせには上下の磁石列を合わせて 56 個の磁石データを重ね合わせている。同様に U#13 の場合では、縦磁化磁石は 9 区画分を、横磁化磁石に関しては 8 区画分に分割して、左右 17 個、上下合わせて 34 個のデータを足し合わせて磁場積分値の重ね合わせを行っている。

シミュレーション中に仮想的に 2 個の磁石を交換した場合は、その都度すべての半周期積分磁場を再計算して分散値を小さくする組み合わせを探していく。また、分散の計算を行うために、計算中は同じアンジュレータが周期的に連続して並ぶ状況を考慮して端部近傍での積分磁場を重ね合わせている。また、U#16-2 のように縦磁化磁石に磁場中心位置にズレがある場合は、シミュレーションの過程を通じて、このズレの方向を一定に保つ条件を縦磁化磁石に課している。これは実際の磁石配列を良好にする上で良いだけでなく位相エラーの低減につながるポイントである。

最適化の実施例を図 5-12 に示す。ここでは、U#16-2 と U#02-2 の中央部（垂直磁場）に関する結果を表しており、赤線は磁石配列をランダムに選んだ場合を表し、青線は最適化計算後の結果を表している。最適化後の分散値を一桁以上改善できることを示している。U#16-2 以降に建設した EPU にはすべてこの磁石配列法を適応して磁石初期配列を決めている。このように決めた配列で磁石を並べた EPU の実際の磁場測定結果は[5-5-1]でまとめる。

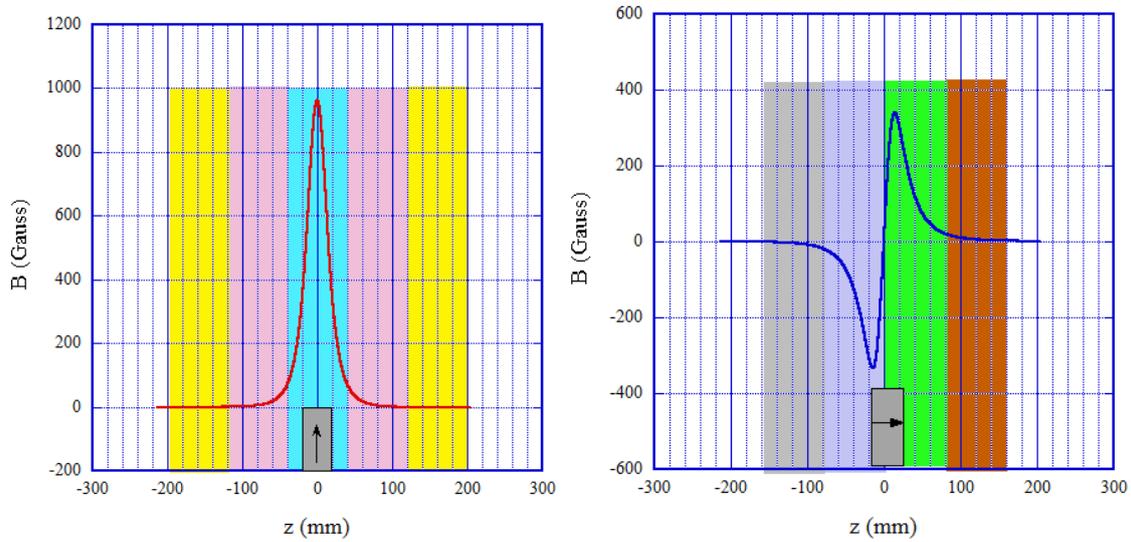


図 5-10 磁場分布の重ね合わせのための区間分け

この図では、U#02-2（周期長 160mm）の中央列用の磁場分布データを示している。半周期毎に色付けした区間での積分磁場を予め求めておき、最適化計算時に使用する。縦磁化極（左図）は 5 区間、横磁化極は 4 区間に分割する。

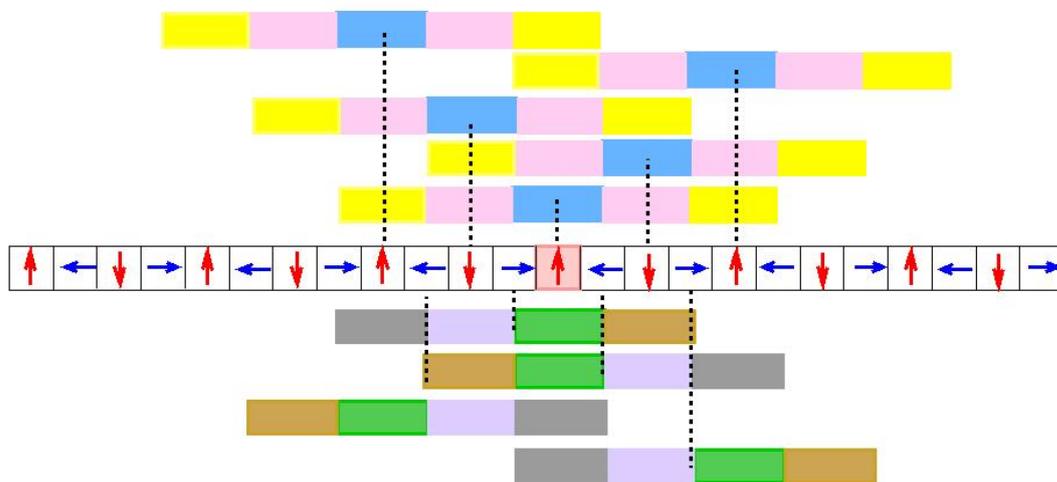


図 5-11 磁場を重ね合わせる範囲（U#02-2 の場合）

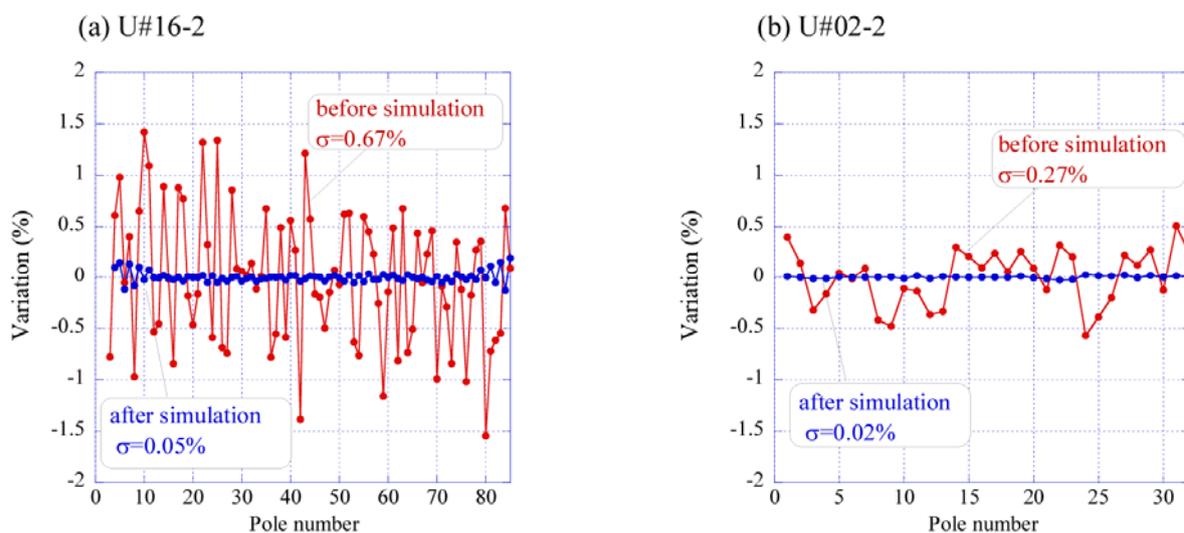


図 5-12 初期配列最適化の結果。各半周期毎の 1 次積分磁場の分散を示している。(a) は U#16-2、(b)は U#02-2 の結果である。図中の赤丸は初期配列としてランダムに磁石を配置した場合であり、青丸は最適化計算後の結果である。

#### [5-4-3] 磁石研磨工程の改良

U#02-2 と U#28 の 2 台の EPU は、長さは異なるがどちらも 6 列型でアンジュレータパラメータも等しい。このため使用する磁石は共通であり両者の必要数を同時に製作した。ここでは、U#02-2 と U#28 の磁石製造に先立ち、U#16-2 の製作時に判明した縦磁化磁石の z 軸方向磁場中心のずれを是正するための開発を行った。アンジュレータに使用される磁石は実際の磁石寸法より大きな素材を用意し、プレス後に焼結して磁石素材を作る。図 5-13 にプレス方向と印加磁場方向を示す。この磁石素材ブロックから磁場均一度の高い中心部を切り出す研磨加工を行い、必要な磁石サイズを得る。しかし焼結後の磁石素材ブロックは下図 5-14 のように熱変形によって少し湾曲しており、ここから磁石を切り出す際に中心ずれを起こすのではないかと推測した。このテストのために厚さ 12 mm の素材ブロックを 10 個用意して、着磁後に磁場分布を測定して磁場中心位置を測定した。測定の結果、10 個のテスト磁石全てに対して磁場中心は磁石基準面からの設計値 6mm からどれも 0.2~0.25mm ずれており、そのずれる方向もみな同じであることが判明した (図 5-15 参照)。

そこで 6.2mm を磁場中心と決め、基準面からの研磨寸法 d を変えながら磁石の寸法中心と磁場中心が一致する d を探した。一度良好な研磨寸法が決まれば、磁場中心のずれの方向と大きさが均一なため磁石の寸法中心と磁場中心を一致させることに成功した。

同様の手法を U#02-2 と U#28 の磁石素材に対して行った。研磨前の素材ブロックの寸法は 43 mm×42 mm×49 mm であり、ここから 30 mm×30 mm×40 mm の磁石寸法で切り出す。研磨加工された磁石は着磁後に磁石ホルダーに取付けられる。この磁石すべてに対して z 軸方向の磁場分布測定を行い、磁場中心の計測を行った結果を図 5-16 に示す。U#16-2 の縦

磁化極では、2つのグループに分離していた磁場中心位置が磁石寸法中心に一致したことわかる。これは今後のアンジュレータ磁石加工時に配慮すべき重要な結果である。

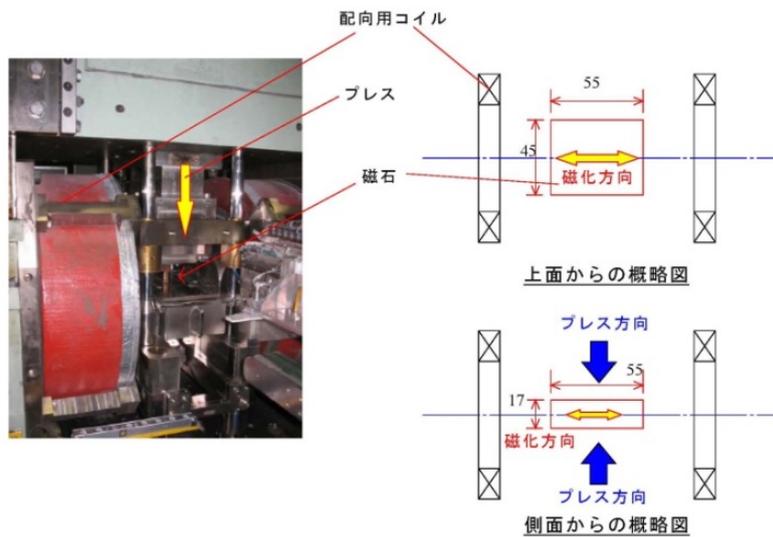


図 5-13 プレス工程の磁石配置図

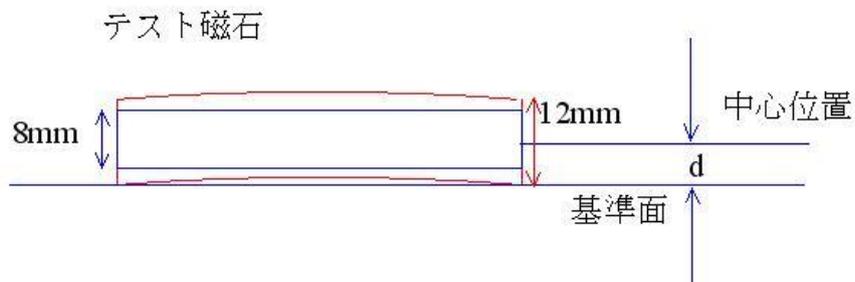


図 5-14 焼結後の磁石ブロック概観図

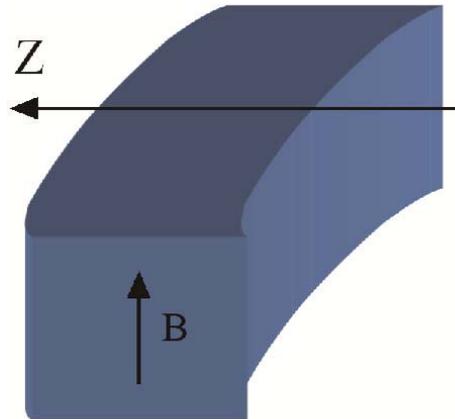


図 5-15 研磨前の縦磁化磁石ブロックの概略図（湾曲の程度は誇張して描いている）

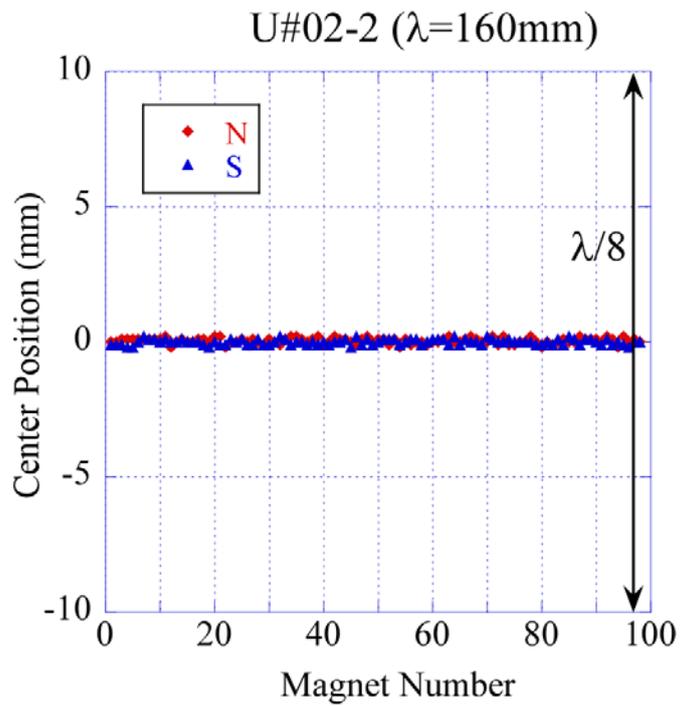


図 5-16 研磨工程の改良後に製作した U#02-2 の磁場中心の分布

## 5-5. PFにおけるEPUの磁場調整

### [5-5-1] EPU磁場分布測定と磁場調整

U#16-2以降にPFで建設されたEPUでは、全て磁石列の初期配列を上述の方法で最適化した。この配列に従ってEPUに取り付けられた磁石の磁場測定と調整を5-1で述べた磁場測定システムを使って、それぞれのEPUに行った。磁場測定中のU#16-2の写真を図5-17に示す。



図 5-17 磁場測定中のU#16-2

初期状態での最適化の効果を示すためにU#16-2とU#02-2中央部の水平偏光モードでの半周期毎の1次積分磁場の分布を図5-18に示す。どちらもそれぞれのEPUの最小ギャップで測定は行った。U#16-2のデータには、本方法を使用しなかったU#16-1の初期状態のデータを比較している。各磁極での積分磁場と平均値の比のばらつきを示している。このとき標準偏差はU#16-2の場合0.2%で、0.52%であったU#16-1の半分以下に抑えることが出来た。また、U#02-2中央部では、標準偏差0.1%とU#16-2の更に半分となっている。これは個別磁石の磁場分布を重ね合わせて初期配列を最適化法の有効性を実測磁場において示している。さらに、U#16-1とU#16-2の初期状態（何も磁場調整を加えていない状態）での磁場分布の性能を調べるために、測定磁場分布から予想される放射スペクトルを計算して図5-19に比較する（第2章2-10節(5)参照）。たしかにアンジュレータスペクトルの各高調波でU#16-2の放射光強度が増しており、本方法の有効性を示している。

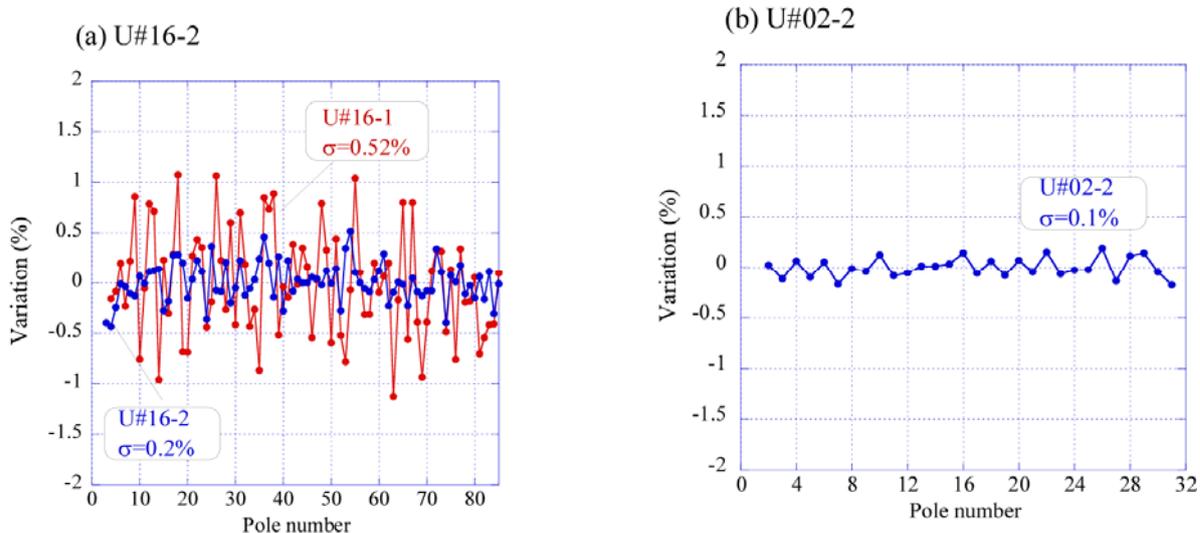


図 5-18 最適化した磁石配列で測定した積分磁場の半周期毎の分布。(a)では U#16-2 と U#16-1 の場合を比較している。(b)では U#02-2 の結果を示す。

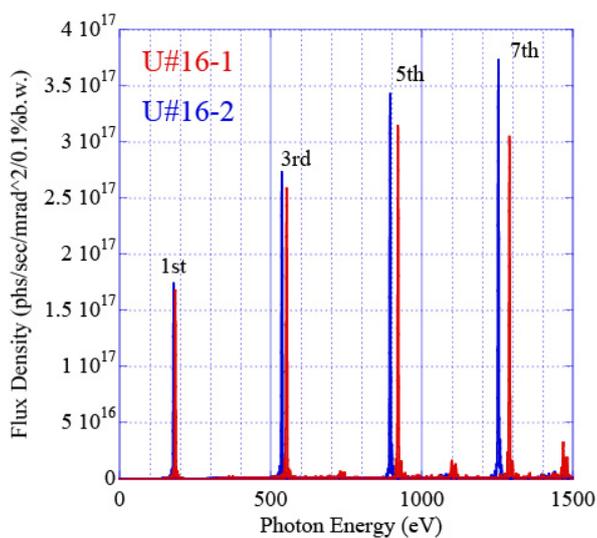


図 5-19 初期状態で測定した磁場分布から計算される一電子のアンジュレータスペクトル U#16-1 と U#16-2 の結果を比較している。

U#16-2 の磁場調整では、磁石の水平方向の位置を  $20 \mu\text{m}$  厚の銅製シムを使って調整し、垂直磁場の微調整を行った。これは図 5-6 の距離  $L$  をシムの厚さで調整することに相当する。また、6 列型 EPU の垂直磁場の微調整は、磁石の垂直方向の位置を磁石ホルダー底面にシムを挿入することで行った。最終的に U#16-2 の積分磁場分布の標準偏差は 0.16%まで改善できたが U#02-2 の初期状態には及んでいない。これは U#02-2 の磁石製造工程で実施した縦磁化磁石研磨法の改良の有用性を示している。同様の手法で U#28 と U#13 の磁場調整も

実施した。U#02-2 と U#28 の 6 列型 EPU の水平磁場の微調整は U#16-2 と同じく磁石の水平方向の位置をシムによって調整することで行った。磁場調整後の実測磁場によって計算された電子軌道の比較例を示す（図 5-20 及び図 5-21）。

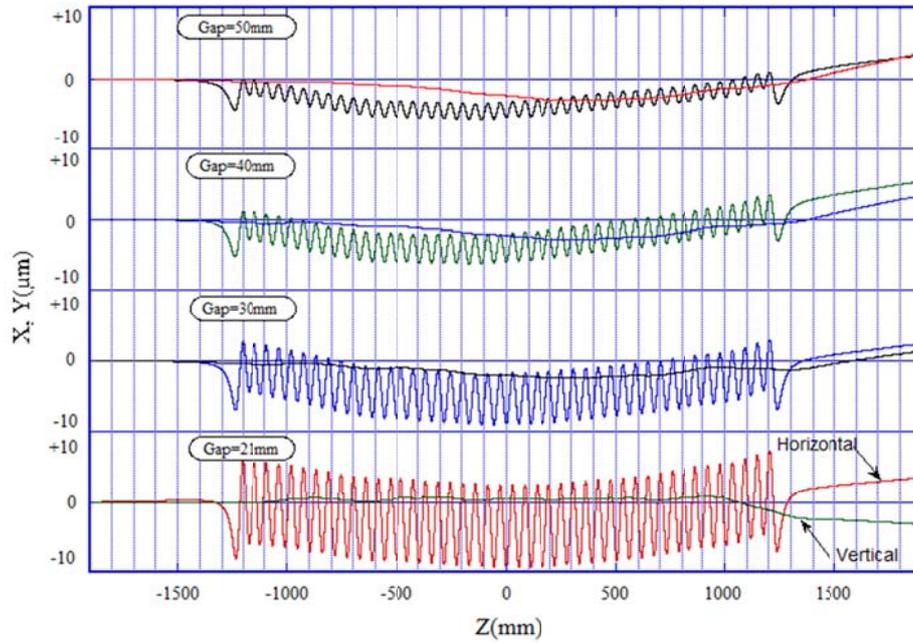


図 5-20(a) U#16-2 の磁場中での電子軌道の Gap 依存性（水平直線偏光モード）

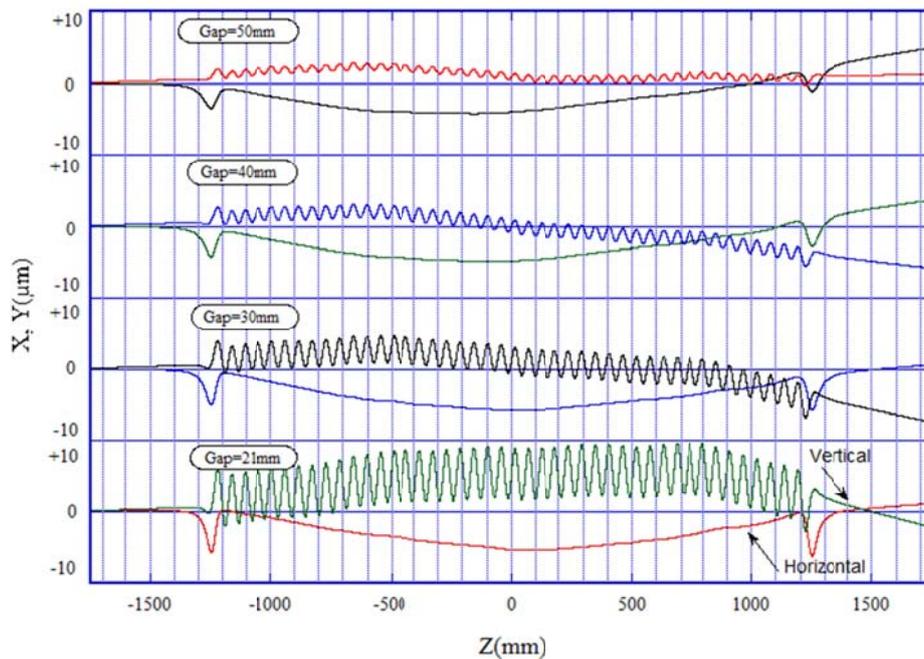


図 5-20(b) U#16-2 の磁場中での電子軌道の Gap 依存性（垂直直線偏光モード）

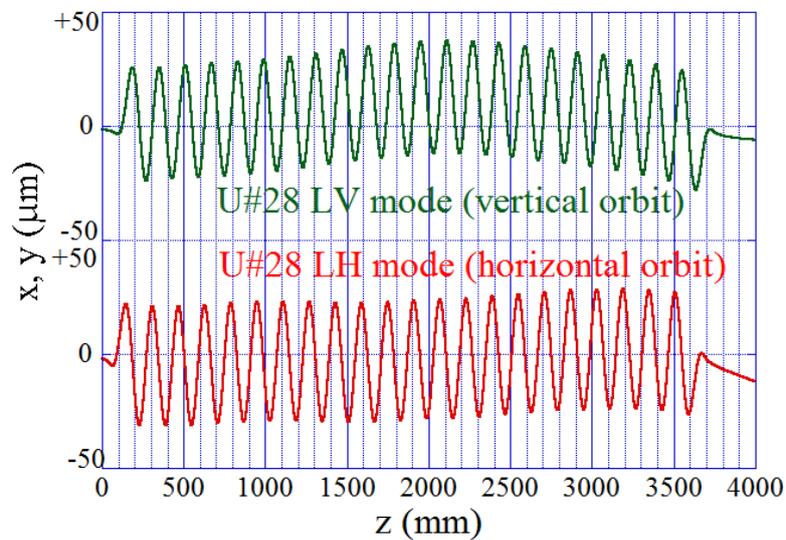


図 5-21 U#02-2 の磁場中での電子軌道 Gap=2mm での水平・垂直直線偏光モード

最後に磁場調整の結果を表 5-1 にまとめる。実際に測定した磁場から各半周期毎の積分磁場と平均値の比を求め、その分布の標準偏差を示している。PF で開発した EPU に対して上述の初期配列最適化法を 6 回適応した結果、初期状態での標準偏差は平均値で 0.20% であり目標を達成している。ここで U#02-2 と U#28 の水平磁場の初期分布が 0.3% と少し大きくなっている。この理由として、ほかの場合では、磁石を磁石ホルダーに接着した状態で個別磁石の磁場測定を行ったのに対して、この場合は磁石単体での測定になりホルダーの寸法誤差が最適化計算に含まれなかったと考えられる。また、磁石交換作業を行わない磁場分布の微調整のみで最終的な平均標準偏差として 0.11% を達成できた。これは EPU の建設するにあたり、本方法が実際的な有効性を持っていることを示している。これによって、EPU の磁場調整に要する時間を大幅に短縮し、APPLE-II 型 EPU よりも軸数が多い 6 列型 EPU の実現に貢献した。また、その後 PF で建設した U#13 と U#28 の初期磁石配列の最適化にも応用し、今後の PF における EPU 磁場調整の手法を確立した。

表 5-1 磁場調整前後の半周期毎の積分磁場の平均値からのずれ(標準偏差)

ID	U#16-2 (垂直磁場)	U#02-2 (垂直磁場)	U#02-2 (水平磁場)	U#13 (垂直磁場)	U#28 (垂直磁場)	U#28 (水平磁場)	平均値
初期配列(%)	0.20	0.11	0.30	0.19	0.09	0.31	0.20
磁場調整後(%)	0.10	0.08	0.20	0.08	0.09	0.10	0.11

### [5-5-2] 位相エラーの測定

アンジュレータ磁場の位相エラーと放射光強度との間には強い相関があり（文献[63]）、位相エラーはアンジュレータの磁場性能を表す重要な指標としてよく使われているとくに電子がアンジュレータの各周期を進む際に、アンジュレータ内での電子の位相と放射光の位相と大きなずれが生じる場合（位相エラーが大きい場合）、高次光の放射強度が大幅に損なわれることがある。そこで位相エラーと放射強度についての簡単な説明をした後、実際の計算方法とその結果を示す。

ある波長の放射光に対するアンジュレータ内での電子の位相は

$$\phi(z) = \frac{2\pi}{\lambda} \left\{ \frac{z}{2\gamma^2} + \frac{1}{2} \int_0^z \left( x'(z')^2 + y'(z')^2 \right) dz' \right\} \quad (5-5.1)$$

と書ける(Appedix.5-1)。

ここで  $x'(z) = \frac{e}{mc\gamma} \int_0^z B_y(z') dz'$  ,  $y'(z) = \frac{e}{mc\gamma} \int_0^z B_x(z') dz'$  (電子の角度)

アンジュレータ各極中心位置 ( $z_n$ ) での位相を  $\phi_n = \phi(z_n)$  とすれば、理想的な場合では、各極毎（半周期毎）に位相は  $\pi$  進む。

仮に初めの極（0番目）の位相を0とすれば、各極での位相のずれは： $\delta_n = \phi_n - n\pi$  (rad)

となる。この標準偏差： $\sigma_\phi = \sqrt{\sum_{n=1}^{2N} \delta_n^2 / (2N)}$  が位相エラー (deg) である。ここで N はア

ンジュレータの周期数である。

これを使って k 次アンジュレータ放射の位相エラーによるスペクトル強度の減衰率は、

$$\exp\left(-\{k\sigma_\phi(\text{rad})\}^2\right) \quad (5-5.2)$$

と推定できる(Appedix.5-2)。

図 5-22 に位相エラーによる高調波スペクトル強度の減衰率を示す。各高調波に対して、理想的な場合の約 90% のスペクトル強度を得るためには、5 次光で 4 度、7 次光で 3 度、9 次光では 2 度以内の位相エラーが必要となる。PF で開発されてきたアンジュレータの通常の位相エラーの目標値は 3 度以内である。

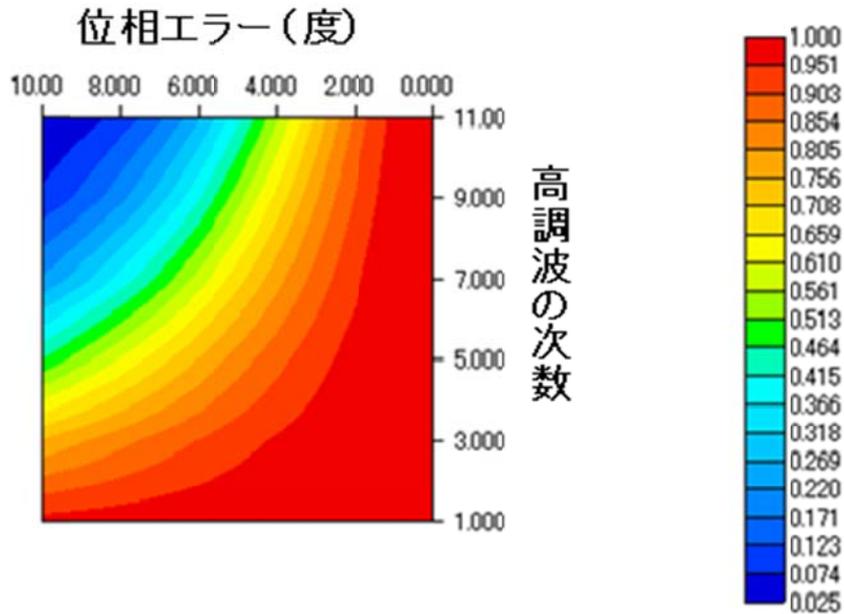


図 5-22 に位相エラーによる高調波スペクトル強度の減衰率

実際に磁場分布データから位相エラーを計算する場合は、 $\lambda$ を決める必要がある。これをどう決めるかを考えてみる。まず磁場データのみから計算できる部分をあらためて

$$A(z) = \frac{z}{2\gamma^2} + \frac{1}{2} \int_0^z (x'(z)^2 + y'(z)^2) dz \quad \text{として、} \quad I_n = A(z_n) - A(z_{n-1}) \text{ を求めてみるとこ}$$

の平均値 $\langle I \rangle$ は、位相の半周期毎の平均的な進み量に比例している。

ある実際の誤差を含んだアンジュレータ磁場分布を考え、その実効的な  $K$  値を  $K_{eff}$  とおく

$$\text{と} \quad \lambda_1 = \frac{1}{2\gamma^2} \left( 1 + \frac{K_{eff}^2}{2} \right) \quad \text{の波長の光に対し、位相は半周期で} \pi \text{ 進む。そこで}$$

$$\langle \phi(z_n) - \phi(z_{n-1}) \rangle = \frac{2\pi}{\lambda_1} \langle I \rangle = \pi \quad \text{と考えれば、} \langle I \rangle \text{ と } K_{eff} \text{ の関係式を得て}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\gamma^2} \left( 1 + \frac{K_{eff}^2}{2} \right) = 2 \langle I \rangle \quad \text{から} \quad \lambda_1 \text{ および } K_{eff} \text{ を決めることができる。}$$

このように  $\lambda_1$  および  $K_{eff}$  が決まれば、(5-5.1),(5-5.2)式から位相エラーを計算できる。この

ようにして計算した結果を図 5-23 に示す。

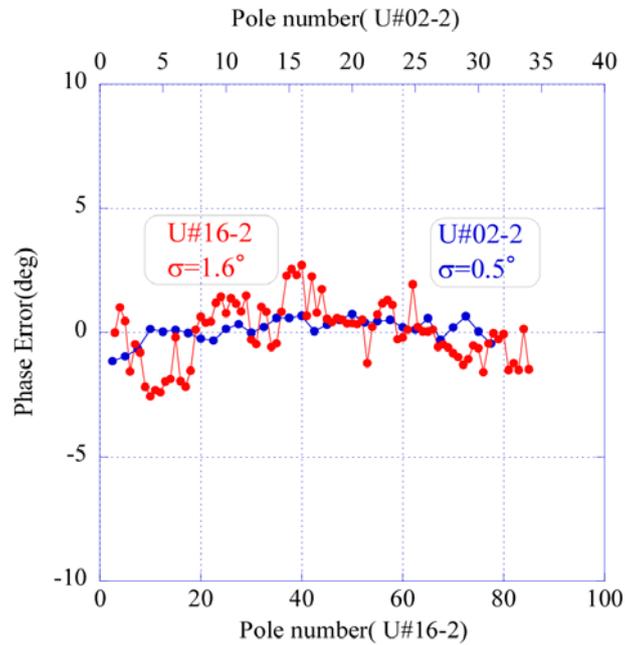


図 5-23 初期状態による位相エラーの推移

ここでは、U#16-2 と U#02-2 中央部垂直磁場の場合を比較している。どちらも 2 度以下の良好な数値となっている。特に U#02-2 の中央部垂直磁場では、周期数が 17 と少ないこともあり、非常に小さな位相エラーとなっている。その他の EPU において測定した結果も合わせて表 5-2 にまとめる。

表 5-2 PF の EPU 位相エラーのまとめ (計算は水平直線偏光モードで行っている)

ID	U#16-2	U#02-2	U#13	U#28
Phase error (°)	1.6	1.5	2.5	2

### [5-5-3] APPLE-II 型 EPU の位相調整

APPLE-II 型 EPU に関しては、水平偏光モードでの磁場調整の後で、取り得る全てのモードでの磁石配置に対して 5-1 で述べた磁場測定システムを使って磁場測定を行い、磁石列の位相量の調整を行った。ある Gap と位相量  $\phi$  を与えたとき垂直磁場と水平磁場の強度比は理想的な磁場分布のもとでは、式(3-1),(3-2)となるが実際の U#16-1 の経験では、磁石列を動かす上下流方向で少し異なる結果を得た。これは磁石列の位置を保持するクロスローラーウエイの強度に若干の不均一性があり磁石列の移動方向によって磁石列間の平均間隔が若干変化するため生じると考えられる。この結果、各モードでの偏光度が設計値と若干異なる値となっていた。とくに U#16-1 と U#16-2 では、早い軌道切り替えによって 10Hz の偏光切り替えを行い、非常に小さな偏光依存性反応の測定を目指しているために、可能な限り

設計値に近い偏光度を持たせて、2 台の U#16-1 と U#16-2 の間に差異が無いように調整を行った。

具体的には各磁石列の移動量に補正を加えることで各極の垂直磁場と水平磁場の平均強度比を設計値に合わせた。具体例を EPU symmetric 円偏光モードで説明する。ある Gap での初期位相を  $\phi_0/2$  として

$$\langle B_y \rangle = 4B_{y1} \cos\left(\frac{\phi_0}{2}\right), \quad \langle B_x \rangle = 4B_{x1} \sin\left(\frac{\phi_0}{2}\right) \quad \text{となっていると考える。ここで} \langle B_y \rangle \text{ 及び}$$

$\langle B_x \rangle$  は測定されたピーク磁場の平均値である。理想的にはこれで問題はないはずであるが

U#16-1 では、実際に使用する Gap 値と位相角  $\phi$  によって隣り合う磁石列間の吸引力が変化し、この磁石列間隔が僅かに変化すると考えられる。

これより  $B_{y1}(Gap)$ ,  $B_{x1}(Gap)$  を逆算する。次に

$$\frac{\phi_1}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{B_{y1}}{B_{x1}}\right) \quad \text{から} \phi_1/2 \text{ を求める。}$$

U#16-1 の調整では、この補正した位相を使い、再測定を行ったところ良好な結果を得た。この位相調整は各モードの使用ギャップ範囲において 1mm ステップで行っている。この位相調整の例として円偏光の場合を図 5-24 に示す。磁場計算によって円偏光配置の磁石列位相 ( $\phi$ ) を採った時、実測した磁場の縦横比が 1 から少し異なっていた。このため実測磁場データをもとに再度、磁石列位相を決めて磁場の縦横比を 1 となるように調整した。

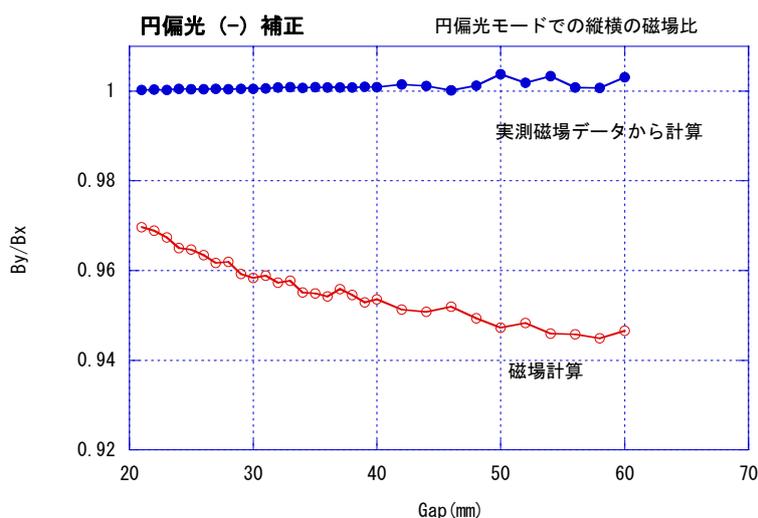


図 5-24 U#16-1 円偏光モードでの磁石列位相調整の例

## 5-6. フリップコイルによる多極磁場成分の測定と調整

APPLE-II 型、6 列型を問わず、EPU の多極成分はロックインアンプを使ったフリップコイル[64-65]による積分磁場測定を行った。このフリップコイルシステムは、S.Yamamoto を研究代表者とする科研費を使って開発が行われた[65]。私は研究分担者として主に測定装置駆動制御と測定データ収集システムを担当した。フリップコイルシステムの写真を図 5-25 に示す。



図 5-25 下流側フリップコイル

図 5-26 のように EPU の両端に 2 台のフリップコイル計測器を設置し、 $z$  軸に沿ってコイルを張る。コイルの材質は絶縁被覆された直径  $100\mu\text{m}$  のタングステンワイヤーで、これを 3 ターン巻いて使用している。この 2 台のフリップコイル計測器はスッテッピングモーターによって 2 台同時に同じ位相を保ちながら  $3\text{Hz}$  でコイルを回転させる (図 5-27)。コイルの全長は  $L=4\text{m}$  で幅は  $3.5\text{mm}$  である。これによって  $z$  軸方向に沿った積分磁場に比例した電圧がコイルに発生し、この電圧をロックインアンプで読み取る。ロックインアンプには、コイルの回転位相を同時に入力することで、垂直磁場成分と水平磁場成分を同時に測定することが出来る。このフリップコイルシステムは回転した状態で  $x$  方向に動かすことによって垂直・水平積分磁場の水平方向分布を測定している。この測定された垂直・水平積分磁場の水平分布の傾きから、EPU 磁場の  $Q$  & skew- $Q$  成分を求めることが出来る。

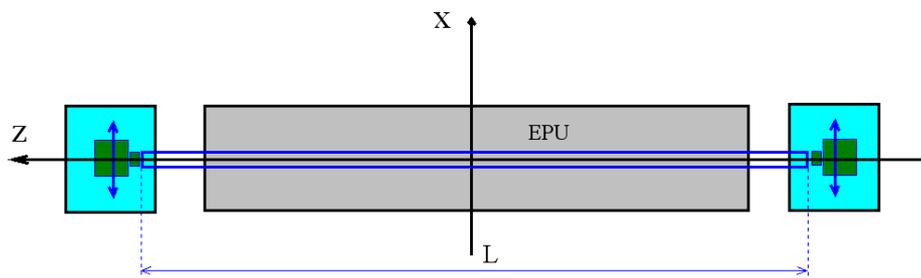


図 5-26 フリップコイルのセットアップ (上面)

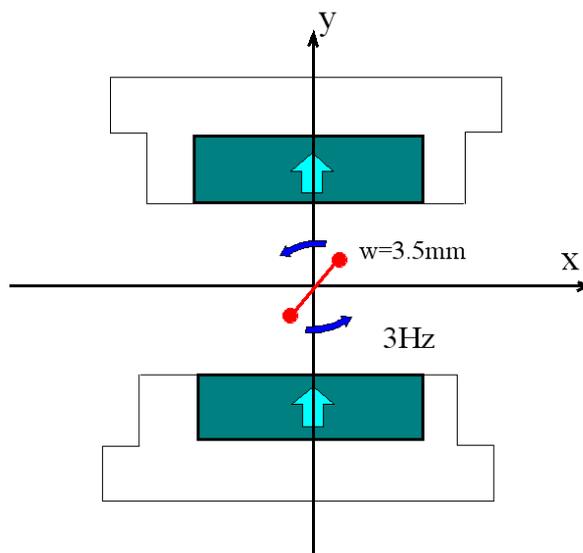


図 5-27 フリップコイルのセットアップ (電子ビーム軸方向)

1 ターンのコイルの全長を  $L$ 、幅を  $r$  とすると、垂直磁場中でコイルが回転するとき誘起される磁束と出力電圧はそれぞれ、

$$\Phi = BLr \cos \omega t$$

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = BLr\omega \sin \omega t$$

$$\omega t = \frac{\pi}{2} \text{ のとき出力電圧は最大値 : } V_{peak} = BLr\omega = BLr \cdot 2\pi f$$

これより  $100\text{Gcm}$  の 1 次積分磁場を測定することを考える。簡単に一様な垂直磁場がある場合では、

$$B = 1\text{Gauss} = 1 \times 10^{-4}\text{T}, \quad L = 1\text{m}, \quad r = 3.5\text{mm} = 3.5 \times 10^{-3}\text{m}, \quad f = 3\text{Hz} \text{ として、} 3 \text{ ターン}$$

のコイルを考えると  $V_{peak} = 19.8\mu\text{V}$  である。

従って回転コイルの場合、1 Gcm の積分磁場を測定するには  $0.198\mu\text{V}$  の電圧を測定することが必要となるが、信号が小さいため安定な電圧読み取りは困難である。ロックインアンプを使用することで  $1\mu\text{V}$  程度の分解能があるため、このシステムでの積分磁場の測定分解能は  $\pm 5.0\text{Gcm}/\mu\text{V}$  である。実際に、この値を検証するためにテスト磁石によるシステムの校正を行った。準備したテスト磁石の積分磁場を Hall 素子とフリップコイルの両方で測定することで出力を比較した。測定例を図 5-28 に示す。Hall 素子による積分磁場は  $-4929.1\text{Gauss} \cdot \text{cm}$  であり、この時のフリップコイル出力は  $977\mu\text{V}$  であった。これより  $5.05\text{Gcm}/\mu\text{V}$  の校正値を得た。これは計算値と良く一致している。

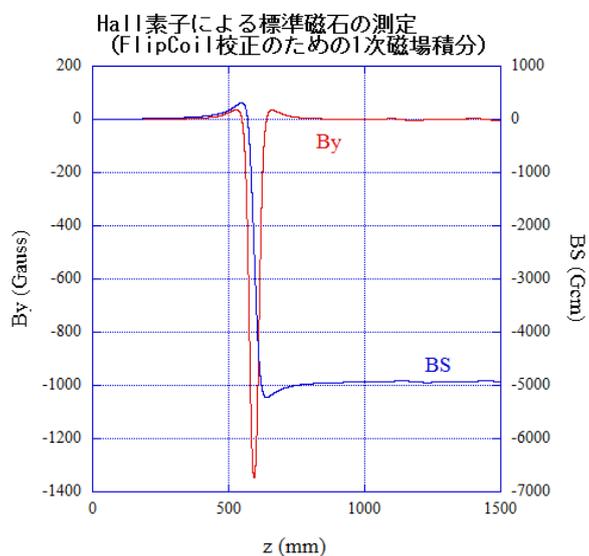


図 5-28 フリップコイルの校正

主に Q & skew-Q 成分を求めるために、両端に設置された 2 台のフリップコイル回転部を水平方向ステージで平行移動して、U#16-1 の 1 次積分磁場の水平方向分布を測定した。この測定の代表的な結果例を図 5-29 に示す。

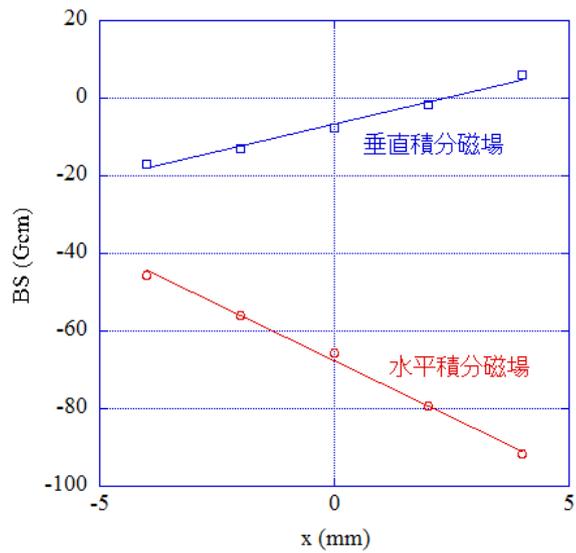


図 5-29 U#16-1 の 1 次積分磁場の水平方向分布 (Gap=21mm)

ここから、Q & skew-Q 成分は次式で求めることができる。

$$\frac{d}{dx}(BS_y) : \text{Normal Q} \qquad \frac{d}{dx}(BS_x) : \text{Skew Q}$$

各 Gap に対して 1 次積分磁場の水平方向分布を測定することで、その傾きから Q & skew-Q 成分を求めた結果を図 5-30 に示す。最小 Gap21mm で Q 及び skew-Q 成分ともに最大で、それぞれ 350, 180Gauss である。Q & skewQ 成分ともに Gap によって変化するが、Gap を 21mm に固定した場合には、磁石列の位相に関係なく、ほぼ一定の結果を得た (図 5-31)。これは磁石列が正しく平行移動していることを示し、磁石列の位相を変えるための z 方向駆動機構が十分精度よく機能していると言える。

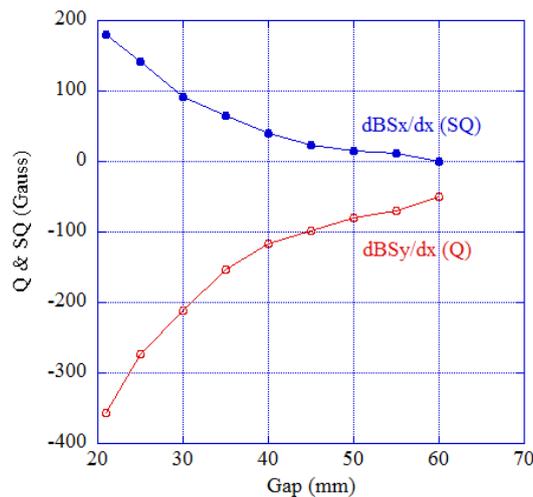


図 5-30 フリップコイルによる Q & skewQ 成分の測定(U#16-1)

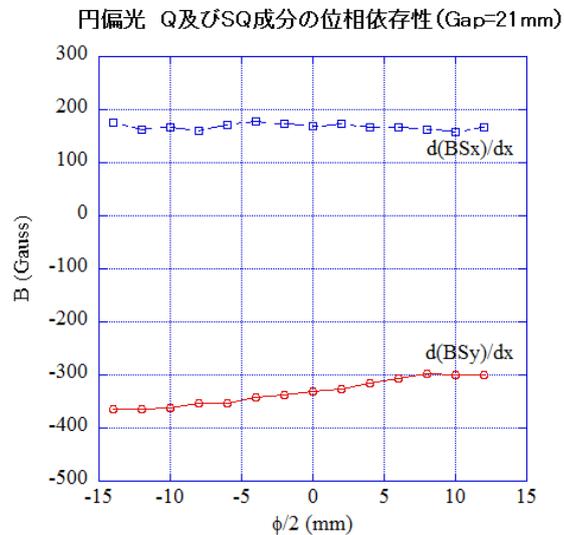


図 5-31 Q & skewQ 成分の位相依存性(U#16-1)

PF リングでは、垂直方向にビームを振る超伝導ウイグラー：VW#14 が垂直方向のビームサイズを大きくしていて、skew-Q 成分による垂直方向ビームサイズへの影響は少ないと考えられた。このため U#16-1 では、Q 及び skew-Q 成分に関する磁場調整は特別に行わずに PF リングへ設置し、運転を開始した。

U#16-2 の調整においても U#16-1 と同じ方針の元、測定データの収集を目的とし、フリップコイルによる測定を試みた。しかし測定システムの立ち上げ調整時に不具合（水銀カップリングの絶縁不良、ロックインアンプの故障）が立て続き発生した。本来であれば故障原因の究明と修理に努めて、Q 及び skew-Q の測定データを探るべきであったが、運用スケジュールの制約があり、十分な対応が取れなかった。不本意ながら、U#16-2 の Q 及び skew-Q 成分の値が不明のまま、PF リングへ設置することとなった。U#16-2 を PF リングへ設置後にリングの運転を開始すると、BL21 に設置されている光干渉計で電子ビームの垂直方向ビームサイズが約 2 割増大していることが測定され、これが U#16-2 の Gap 開閉にリンクしていることが判明した。これは U#16-2 の skew-Q 成分が、非常に大きいためではないかと考えられた。この対策として、軌道グループによって skew-Q 補正電磁石の導入が行われた(Appendix.5-3)。

skew-Q 補正電磁石を励磁することによって、電子ビームの垂直方向ビームサイズを BL21 光干渉計で測定して元の値に戻るよう補正した。このとき、電子ビーム寿命や入射効率にも影響が見られなかった。そのため、U#16-2 を PF リングに導入したことによる、skew-Q 成分の影響は、リング全体としてはほぼ補正できたものと考え、skew-Q 電磁石をその補正值に励磁した状態で U#16-2 のユーザー運転を行っている。

U#16-2 での経験をもとに、その後建設した 3 台の EPU に関しては、Q 及び skew-Q 成

分の補正を、アンジュレータ本体において実施することとした。このためには、アンジュレータ両端部に設けられた” Magic Finger” [66]を用いて調整を行った。Magic Finger は図 5-32 に示すように EPU 上下流端に設けられたアルミブロックで、ここにチップ型磁石を配置することで多極磁場成分の補正を行う。このアルミブロックには、チップ磁石が挿入できる、7つの穴が図示するように開けられている。ここでは、チップ磁石の量と配置を変えることで Q 及び skew-Q 成分の補正方法を U#28 の場合を例に、以下に述べる。

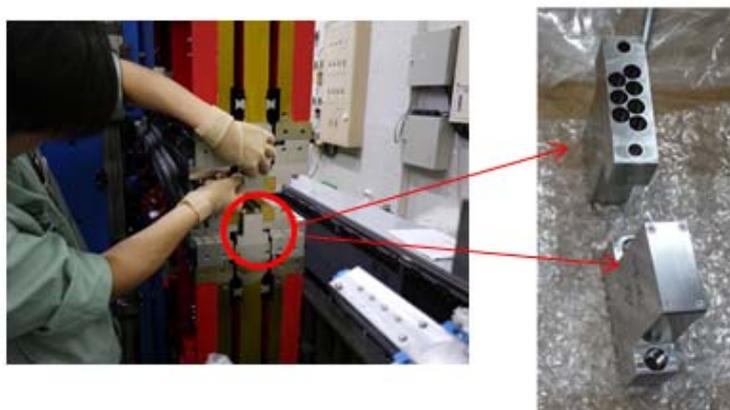


図 5-32 Magic Finger の構造と設置場所 (U#28)

#### (1) Q 成分の補正

図 5-33 に示すように 4 列の穴の内、内側の 2 か所に 4 極磁場を作るようにチップ磁石を挿入する。このチップ磁石の極性と強さを調整することで Q 成分の補正を行う。

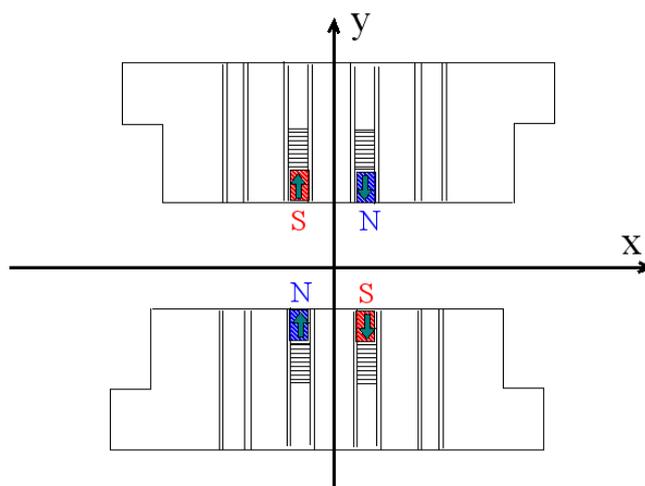


図 5-33 Q 成分の補正

(2) skew-Q 成分の補正

skew-Q 成分は (1) の 4 極磁場を z 軸周りに  $90^\circ$  回転したものである。このためには、図 5-34 に示すように 3 列の穴を使い 3 か所にチップ磁石を挿入する。このチップ磁石の極性と強さを調整することで skew-Q 成分の補正を行う。

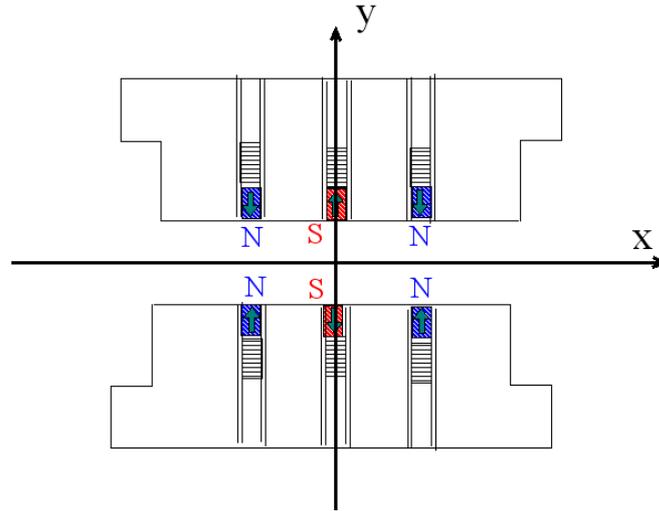


図 5-34 skew-Q 成分の補正

この方法によって行ったチップ磁石調整の結果例を図 5-35 に示す。これは U#16-1 及び U#16-2 と同じ APPLE-II 型の U#13 の調整例である。直線偏光モードの最小 Gap=23mm において調整を行った。調整前の skew-Q 成分が 151Gauss なのに対して調整後は 15Gauss まで改善している。各 EPU に対する調整結果を表 5-3 にまとめる。

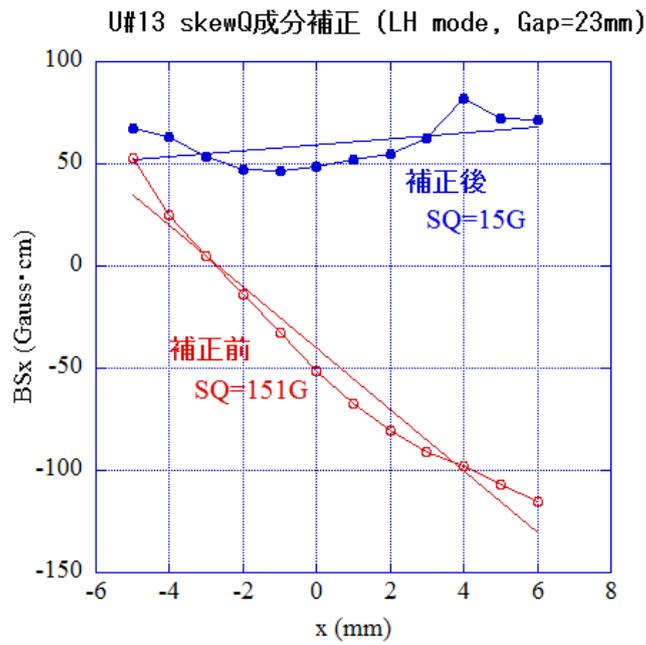


図 5-35 U#13 における skewQ 成分の調整例

表 5-3 Q 及び skew-Q 成分の補正後の値 (括弧内は補正前の値である)

	U#02-2	U#13	U#28
Q (G)	12 (13)	58 (255)	26 (210)
Skew Q (G)	16 (205)	15 (151)	72 (230)

## 第6章 PF リングにおける APPLE-II 型 EPU の運転

PF で最初に導入された U#16-1 は U#16-2 に先行して 2008 年 3 月に PF リングに設置された。U#16-2 が建設された 2010 年夏までの期間は、U#16-1 の単独運転でユーザー実験に対応した。U#16-1 の単独運転では、偏光モードの切り替えを 1 台で行うが、できるだけ短期間の立ち上げ調整期間で全ての偏光モード利用したユーザー運転の開始が強く望まれていた。APPLE-II 型 EPU では、通常、光子エネルギーと偏光モードの制御にアンジュレータ Gap と磁石列間の位相  $\phi$  を使用するが、このための Gap 変更と偏光モードの切り替えの最中に電子ビーム軌道が動かないように挿入光源のフリーチューニング調整が必須となる。すべての偏光モードに対して Gap 変更のフリーチューニングを行うためには各 Gap に依存する COD 補正と Q 成分及び skewQ 成分を行っていく必要がある。これらを全て実行するには多くの労力が必要であり、短期間での EPU の全モードに渡る調整は困難であった。そこでこの要望に応えるために、U#16-1 では、APU (adjustable phase undulator) [45-48]として運転することを決めた。

APU では、Gap を固定し、上下の磁石列ペア間の位相もしくは左右の磁石列ペア間の位相を制御することで光子エネルギーを変えることが出来る。この APPLE-II 型 EPU の APU モードの利用法は文献[46]で提唱されて、SPEAR において実証された[47]。ここでは、APU モードによる運転によって電子ビームに対する影響が少ない事が報告されている。その後、PSI において APPLE-II 型 EPU の運転方式として APU モードが採用されている[48]。PF の APPLE-II 型 EPU では、4 列の磁石列を独立駆動できる設計になっているため[41]、APU モードの採用 (後述の APU  $\rho$  モードおよび APU  $\sigma$  モードを含む) が可能であり、運転の自由度が高まっている。

この APU モードの採用は 2 台の EPU を使った軌道切り替えによる偏光スイッチング運転時の、電子ビームのフィードフォワードを実現のためにも非常に有効であることが判明した。一方、PF リングでの APU 方式の採用はスペクトル強度が低下する問題点を含んでいた。この章では、APU 方式による APPLE-II 型 EPU の運転と問題点の解明及び対策について記す。

### 6-1. APPLE-II 型 EPU の運転方法

APU 方式では、図 6-1 のように、通常の EPU としての位相  $\phi$  に追加して、上下の磁石列ペアの間に位相  $\rho$  を与えて制御する。この運転方法を APU- $\rho$  モードと呼ぶことにする。この時の磁場分布を以下に記す (導出の詳細は Appedix.6-1)。

#### (1) Symmetric mode :

図 6-1 のように追加的な位相  $\rho/2$  を与えて、上部磁石列ペアを上流側、下部磁石列ペアを下流側にそれぞれ動かすとする。

$$\theta_1 = \phi/2 + \rho/2, \theta_2 = -\phi/2 + \rho/2, \theta_3 = \phi/2 - \rho/2, \theta_4 = -\phi/2 - \rho/2$$

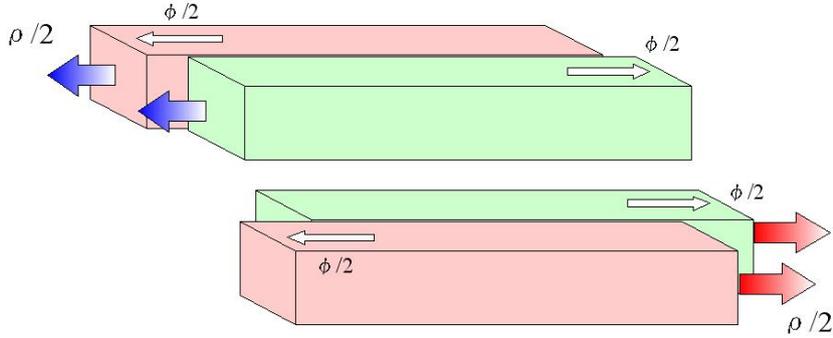


図 6-1 APU- $\rho$  モードでの磁石列の動き

このとき得られる磁場分布は

$$B_y(z) = 4B_{y0} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) \cos(kz) \quad (6-1.1)$$

$$B_x(z) = -4B_{x0} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) \sin(kz) \quad (6-1.2)$$

となる。

(2) Anti-symmetric mode :

Symmetric mode と同様に追加位相  $\rho/2$  を各列に加える。

$$\theta_1 = \phi + \frac{\rho}{2}, \theta_2 = \frac{\rho}{2}, \theta_3 = -\phi - \frac{\rho}{2}, \theta_4 = -\frac{\rho}{2} \quad \text{とすると、}$$

$$B_y(z) = 4B_{y0} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) \cos(kz) \quad (6-1.3)$$

$$B_x(z) = -4B_{x0} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) \cos(kz) \quad (6-1.4)$$

APU- $\rho$  モードの効果としては、Symmetric mode では、 $B_x(z)/B_y(z)$  は一定であり APU- $\rho$  モードによって光子エネルギーのみを変えることができる。一方、Anti-symmetric mode では、 $4B_{y0} \cos\left(\frac{\phi_s}{2}\right) = 4B_{x0} \sin\left(\frac{\phi_s}{2}\right)$  となる円偏光の EPU phase:  $\phi_s$  をとることで、 $\rho$  の値によらずに  $B_x(z)^2 + B_y(z)^2$  を一定にできる。そのため光子エネルギーを一定としたまま

APU- $\rho$ モードによって直線偏光の偏光面を制御することが可能になる。APU- $\rho$ モード運転により円偏光を保ったまま K 値を変えることができることがわかる。

## 6-2. APU- $\rho$ モード運転でのスペクトル特性

APU- $\rho$ モードによる運転では、アンジュレータ制御の簡便さと運用の利便性を持っているが、円偏光モードにおいて測定された放射光フラックスが Gap と位相  $\phi$  を制御する通常の円偏光モードに対して約半分になりバンド幅が広がるという問題点があることが判明した。2つの円偏光モードに対して測定されたスペクトルを図 6-2 に示す。

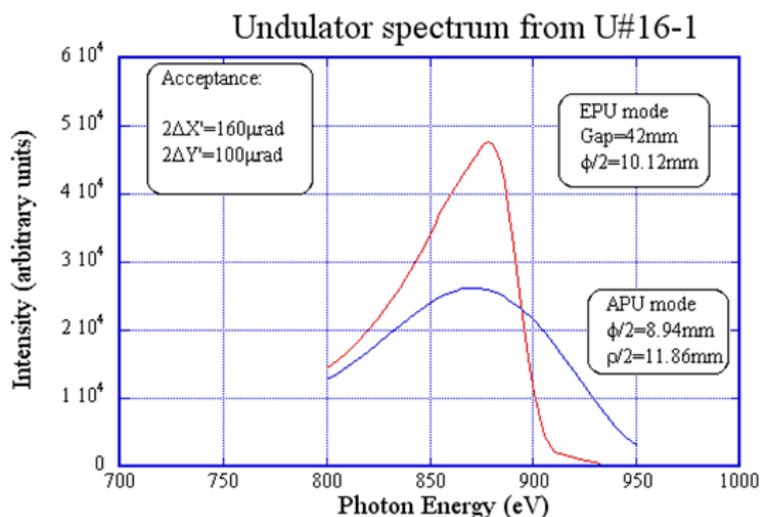


図 6-2 運転モードによる円偏光スペクトル強度の比較 (測定値)

これは APU- $\rho$ モードでの APPLE-II 型 EPU の磁場分布の transverse 方向の均一度が悪く電子ビームのサイズ広がりの影響を受けているためだと推測した。これを確かめるために軸外での APU- $\rho$ モードの磁場分布を近似的に求めて、電子ビームの大きさを考慮したスペクトル計算を実施した。これによって PF リングでは、U#16-1 の中心でのビームサイズは  $\sigma_x = 654\mu\text{m}$  ,  $\sigma_y = 42\mu\text{m}$  であるため、特に水平方向のビームサイズの広がりがスペクトルに大きな影響を与えることが判明した。

### [6-2-1] 軸外における APU- $\rho$ モードでの磁場分布

電子ビームのエミッタンスを考慮したスペクトル計算を行うために、APPLE-II 型の磁石配置での z 軸近傍での磁場分布を考える。そこで一列分の磁石列が z 軸近傍に作る磁場の transverse 方向の勾配をそれぞれ  $\frac{\partial B_{x0}}{\partial x}$  ,  $\frac{\partial B_{x0}}{\partial y}$  ,  $\frac{\partial B_{y0}}{\partial x}$  ,  $\frac{\partial B_{y0}}{\partial y}$  としたとき、APU- $\rho$ モード磁

石配列の磁場分布は、1次までの線形近似で重ね合せると次のように書ける(Appendix.6-2)。

[Symmetric mode]

$$B_y(z) = \left\{ 4B_{y0} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) - 4\left(\frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) \right\} \cos(kz) - 4\left(\frac{\partial B_{y0}}{\partial y} \cdot y\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) \sin(kz) \quad (6-2.1)$$

$$B_x(z) = \left\{ -4B_{x0} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) - 4\left(\frac{\partial B_{x0}}{\partial x} \cdot x\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) \right\} \sin(kz) - 4\left(\frac{\partial B_{x0}}{\partial y} \cdot y\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) \cos(kz) \quad (6-2.2)$$

[Anti-symmetric mode]

$$B_y(z) = 4B_{y0} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) \cos(kz) - 4\left\{ \left(\frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) + \left(\frac{\partial B_{y0}}{\partial y} \cdot y\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) \right\} \sin(kz) \quad (6-2.3)$$

$$B_x(z) = 4B_{x0} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) \cos(kz) - 4\left\{ \left(\frac{\partial B_{x0}}{\partial x} \cdot x\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) + \left(\frac{\partial B_{x0}}{\partial y} \cdot y\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) \right\} \sin(kz) \quad (6-2.4)$$

ここで  $\frac{\partial B_{x0}}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial B_{x0}}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial B_{y0}}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial B_{y0}}{\partial y}$  はそれぞれ一列分の磁石列が z 軸近傍に作る磁場の

水平方向勾配である。この一列分の磁石列が Gap=21mm の場合につくるピーク磁場の transverse 方向分布を ELF MAGIC によって磁場計算したものを図 6-3 に示す。

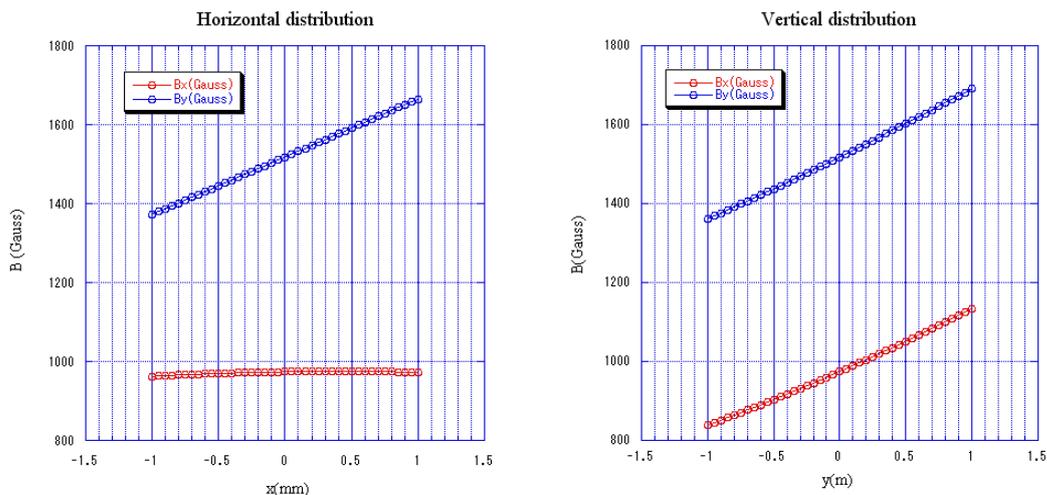


図 6-3 APU- $\rho$  モード (円偏光) での磁場分布

ここから求めた transverse 方向磁場勾配と U#16-1 中心での電子ビームサイズを表 6-1 に示す。

表 6-1 transverse 方向磁場勾配と U#16-1 中心での電子ビームサイズ

$\sigma_x (\mu m)$	$\sigma_y (\mu m)$	$\frac{\partial B_{x0}}{\partial x} (G/mm)$	$\frac{\partial B_{x0}}{\partial y} (G/mm)$	$\frac{\partial B_{y0}}{\partial x} (G/mm)$	$\frac{\partial B_{y0}}{\partial y} (G/mm)$
645	42	2	147	147	165

$z$  軸の近傍では、磁場の主成分に対して軸外しでの余剰磁場の内、(6-2.1)から(6-2.4)に含まれる  $z$  軸方向の位相が  $90^\circ$  ずれている項は影響が少なく、磁場強度と位相に小さな変化しか与えないことが言える(Appendix.6-3)。

したがって Anti-symmetric mode では、放射スペクトルへの影響は少なく問題はない。また、 $\frac{\partial B_{x0}}{\partial x}$  による放射スペクトルへの影響も十分小さく無視できるので、垂直磁場の水平方向分布が Symmetric mode への軸外しの効果として主要な影響を与える。再度、興味のある部分を書き直して

$$B_y(z) = \left\{ 4B_{y0} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) - 4\left(\frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) \right\} \cos(kz) \quad (6-2.5)$$

$$B_x(z) = -4B_{x0} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) \sin(kz) \quad (6-2.6)$$

水平方向にずれた電子に対しては  $K$  値が変わり基本波のエネルギーが変化する。また、アンジュレータ内を  $x$  方向に傾きを持って進む電子に対してはピーク磁場が少しずつ変わ

る周期磁場を受ける。このため全体では、テーパードアンジュレータの場合と同じく、アンジュレータの干渉性が低下して、基本波のバンド幅が広がり強度が低下したスペクトルが得られると考えられる。

#### [6-2-2] APU- $\rho$ モードでのスペクトル解析

式(6-2.5), (6-2.6)から判るように、電子ビームサイズの効果がスペクトルへ与える影響は水平直線偏光では、全く無く、垂直直線偏光では少ないと考えられる(Appendix.6-4)。影響が大きいのは円偏光と楕円偏光の場合である。

そこで円偏光の場合に電子ビームのエミッタンスを考慮したスペクトル計算を試みた。2-10 節(6)で述べた手法を使い、APU- $\rho$  モードでの磁場分布の中での電子軌道を計算して、ひとつの電子による観測地点での単位立体角当りの放射光強度を計算する。

$$\frac{d^2 P}{d\omega d\Omega} = \frac{\varepsilon_0 c}{\pi} |R \cdot \mathbf{E}_\omega|^2$$

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{i e \omega}{4 \pi \varepsilon_0 c R_0} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \boldsymbol{\beta}(t'))] \exp\{i \omega(t' - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}(t')/c)\} dt' \quad (2-3.6)$$

これに電子ビームの角度発散と横方向のビームサイズをコンボリューションすると

$$\frac{d^2 N_{\text{photon}}}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \cdot \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d^2 P}{d\omega d\Omega} \right) \exp\left\{ \frac{-x'^2}{2\sigma_x'^2} + \frac{-y'^2}{2\sigma_y'^2} + \frac{-x^2}{2\sigma_x^2} \right\} dx' dy' dx$$

(6-2.7)

また、実際に測定されたフラックスと比較するためにはスリットの大きさで決まる立体角で上式を積分しなくてはならない。

$$N_{\text{photon}} = \int_{-Y'}^{Y'} \int_{-X'}^{X'} \frac{d^2 N_{\text{photon}}}{d\omega d\Omega} dX' dY' \quad (6-2.8)$$

ここでは、観測と同じく円偏光でのスペクトル計算を行った。電子軌道から放射光スペクトルを求めるに当っては FFT を利用してフラックスを計算した。(6-2.7), (6-2.8)から積分は 5 重に行わなければならないが、これをまともに実行するには計算時間が非常に長くなってしまふ。そこで 2-10 節(6)で述べたように積分方法を工夫することで実際に実行可能なように計算時間の短縮を図った。実際に計算されたスペクトルを図 6-4 に示す。円偏光での APU- $\rho$  モードでは、強度が下がりスペクトル幅が広がるのがわかる。これにより観測されたスペクトルをよく説明できる。

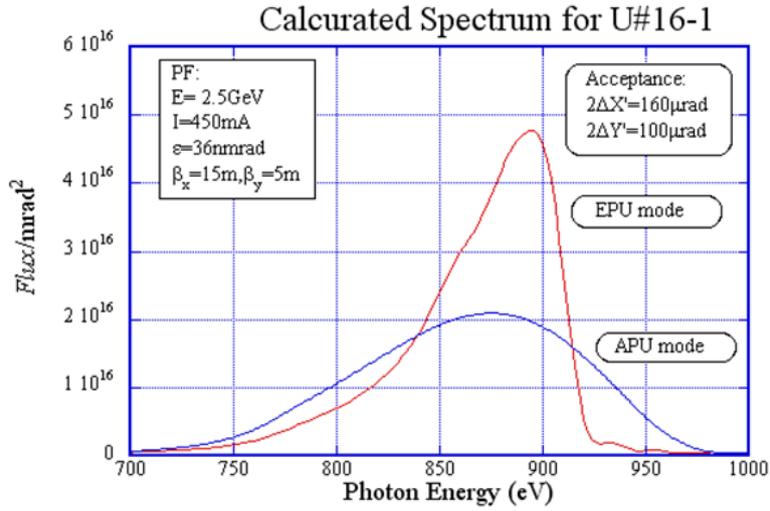


図 6-4 スペクトル計算の比較

### 6-3. APU- $\sigma$ モードでの運転

この APPLE-II 型 EPU の APU- $\rho$  モード運転におけるスペクトル強度低下の問題は、先行して APU- $\rho$  モード運転を行っていたスイスにある PSI 放射光施設でも見られ、彼らはその対策を講じている（文献[67]）。そこで PF においても同じ手法を取り入れた運転モードの改善に取り組み、良好な結果を得た。APU- $\rho$  モードで上下の磁石列ペアを動かす代わりに、図 6-5 に示すように左右の磁石列をペアにして動かす。この運転方法を APU- $\sigma$  モードと呼ぶ。

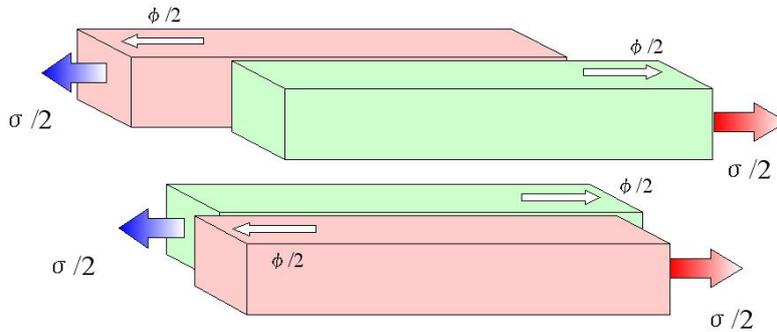


図 6-5 APU- $\sigma$  モードでの磁石列配置

この APU- $\sigma$  モードでは、Symmetric mode の場合、

$$\theta_1 = \phi/2 + \sigma/2, \theta_2 = -\phi/2 - \sigma/2, \theta_3 = \phi/2 - \sigma/2, \theta_4 = -\phi/2 + \sigma/2$$

$$B_y(z) = 4B_{y0} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) \cos(kz) \quad (6-3.1)$$

$$B_x(z) = -4B_{x0} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) \sin(kz) \quad (6-3.2)$$

となる。

これは APU- $\rho$  モードの Symmetric mode 磁場分布(6-1.1),(6-1.2)と全く同じ形をしており、水平・垂直線偏光、左右円偏光そして左右楕円偏光の制御に関して、APU- $\rho$  モードと APU- $\sigma$  モードは同じ働き方をする(ただし Anti-symmetric mode では APU- $\sigma$  モードは使用できない。)

しかし APU- $\sigma$  モードは APU- $\rho$  モードと異なり、磁場分布の一様性が水平方向では良く、垂直方向に悪い特性がある。このため垂直方向のビームサイズがスペクトル強度低下の要因となるが、垂直方向のビームサイズは水平方向に比べて十分小さいため影響が少なくなる。これを PF リングにおいても検証するために、U#16-1 及び U#16-2 の APU- $\sigma$  モードでのスペクトル測定を行った。図 6-6 では、円偏光モードでの 1 次光スペクトル比較を、図 6-6 では、楕円偏光モードの 3 次光スペクトルを表している。

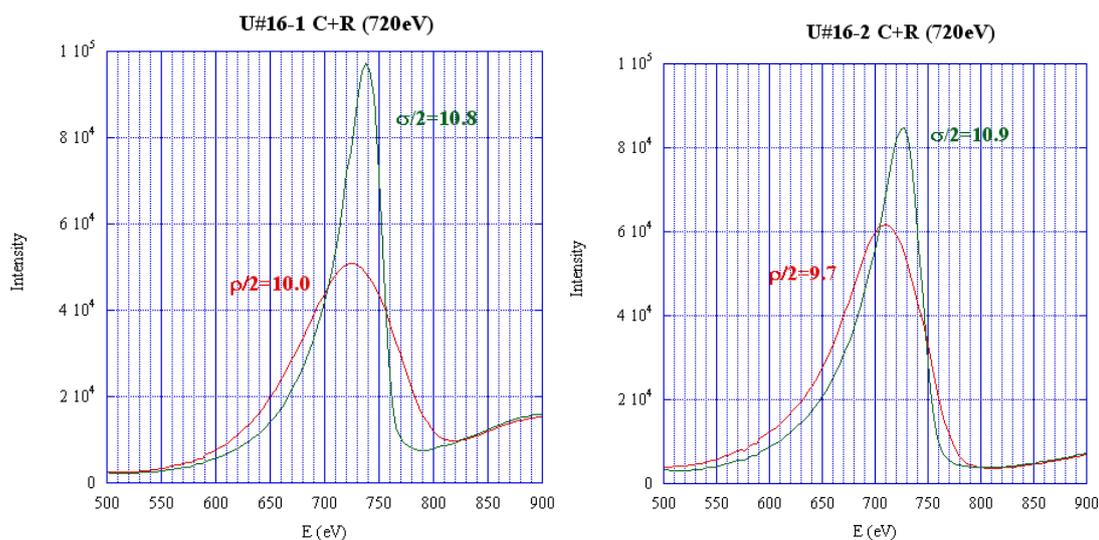


図 6-6 APU- $\sigma$  モード：円偏光での 1 次光スペクトル。上側は U#16-1 の場合を、下側は U#16-2 の場合を示している。両者ともに、緑線は APU- $\sigma$  モードを、赤線は APU- $\rho$  モードの結果を表している。

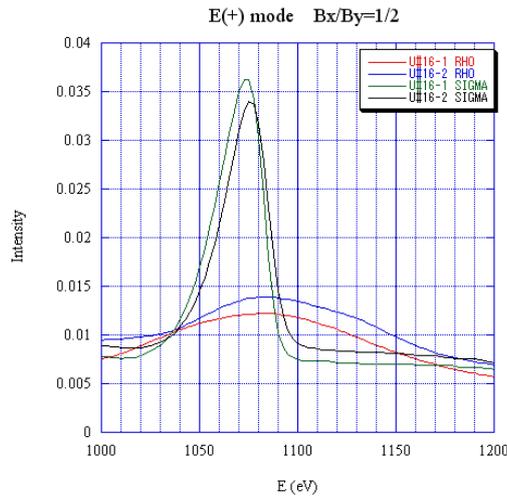


図 6-7 APU- $\sigma$  モード：楕円偏光 ( $B_x/B_y=1/2$ ) での 3 次光スペクトル。U#16-1 と U#16-2 の結果を同時に示している。緑線と黒線が、それぞれの APU- $\sigma$  モードを、赤線と青線が APU- $\rho$  モードの結果を表している。

図 6-6、図 6-7 の結果は、ともに APU- $\rho$  モードで発生するスペクトル強度の低下が APU- $\sigma$  モードでは、大幅に改善していることが判る。特に図 6-7 の楕円偏光モードでは、3 次光のスペクトルを測定したために APU- $\rho$  モードでのスペクトル強度の低下が著しいが、この場合も APU- $\sigma$  モードの運転がスペクトル強度の低下を防ぐ上で大変に有効であることを示している。

また、APU- $\rho$  モードでのスペクトル強度の低下は垂直直線偏光では少ないと上述したが、これを確認するために 2 つの運転モードでの垂直直線偏光のスペクトルを図 6-8 に比較した。ビーム電流値の以外はあるが概ね変化がないと言える。

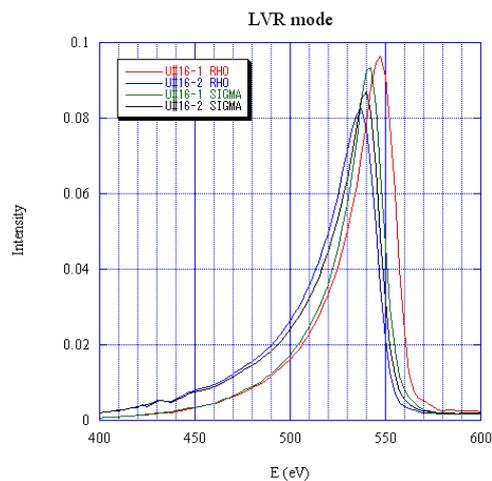


図 6-8 直線偏光モードでの比較（1 次光スペクトル）

以上の結果を踏まえて、水平直線モード以外の円偏光、楕円偏光及び垂直偏光に対して APU- $\sigma$  モードの運転を採用して U#16-1 及び U#16-2 の制御装置の改造を行った。

これにより、U#16-1 及び U#16-2 の運転モードとして APU- $\rho$  モードと APU- $\sigma$  モードの 2 つを偏光状態に合わせて選択して運用する。これを表 6-2 にまとめる。

表 6-2 U#16-1 及び U#16-2 の運転モード一覧

水平直線偏光	APU- $\rho$ モード
垂直直線偏光	APU- $\sigma$ モード
左右円偏光( $B_x/B_y=1$ )	APU- $\sigma$ モード
左右楕円偏光 ( $B_x/B_y=1/2$ )	APU- $\sigma$ モード
直線偏光回転	APU- $\rho$ モード

PF リングでは、U#16-1 及び U#16-2 の軌道切り替えによる 10Hz の高速偏光スイッチング運転を 2012 年の 4 月から開始している。このとき COD 補正のためにフィードフォワードシステムが PF リンググループによって開発された。このフィードフォワードシステムによって高速偏光スイッチング運転時の電子軌道変動を抑えている。このフィードフォワードの効果を図 6-9 に示す[49-50]。

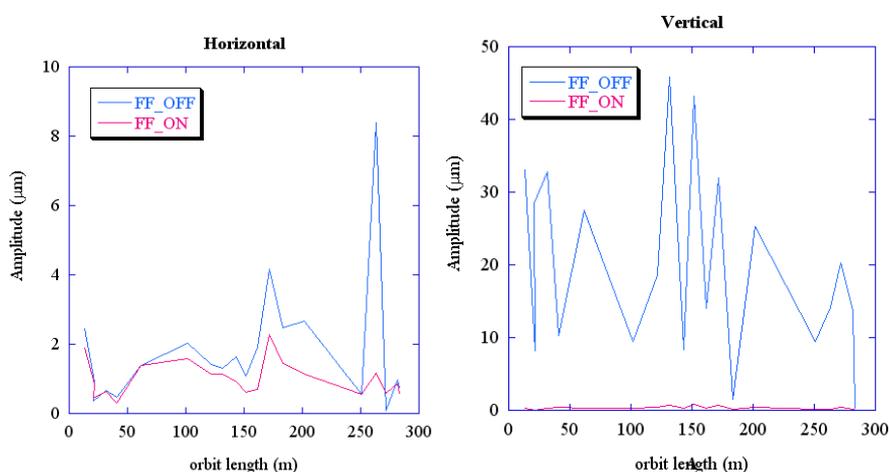


図 6-9 高速偏光スイッチング運転時のフィードフォワードの効果

このフィードフォワードのパラメータテーブルは APU- $\rho$  モードの円偏光で作製されたが、APU- $\rho$  モードの他の偏光状態でも、APU- $\sigma$  モードのどの偏光状態でも使用できる。このため EPU の運転モードを変えてもフィードフォワードテーブルの採り直しをする必要がなく、高速偏光スイッチング運転中は任意の偏光モードへの切り替えや、 $\rho$  または  $\sigma$  による光子エネルギーの変更も自由に行うことができる。高速偏光スイッチング運転にあたって

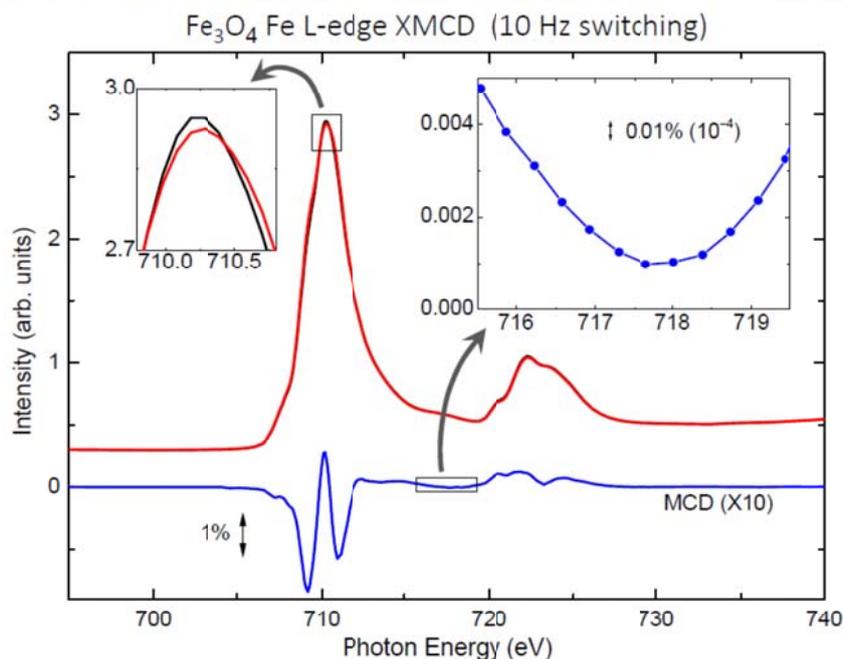
U#16-1 及び U#16-2 の 2 台の APPLE-II 型 EPU を APU として制御することの有用性を示している。この経験を踏まえて、同じ APPLE-II 型 EPU である U#13 は U#16-1 及び U#16-2 と同じく表 6-2 の運転モードで行っている。

#### 6-4. 偏光スイッチング運転の現状と課題

PF リングでは、現在、U#16-1 及び U#16-2 を APU- $\sigma$  モードで運転し、10Hz での高速偏光スイッチング運転を行っている。偏光状態のことなる 2 台の EPU からの放射光を、10Hz で切り替えながら試料に照射し、偏光状態依存した X 線磁気円二色 (XMCD) などの微細な信号の違いを、ロックインアンプを用いることで精度よく測定することが目標である。BL16 では、2012 年 4 月から高速偏光スイッチング運転が開始されて以来、測定システムの改良を積み重ねて、XMCD 測定としてプロジェクトの目標である、 $10^{-4}$  以下の S/N 比を達成している (図 6-10) [68]。

### 偏光スイッチングを用いた XMCD 測定

PF BL-16A



偏光スイッチングを利用したロックイン検出により、S/N比が大幅に向上  
この例では $10^{-4}$ 以下のノイズレベルを実現

図 6-10 弱い XMCD 信号測定の実例 (雨宮氏、酒巻氏 提供)

この高速偏光スイッチング実験では、試料に照射される 2 台の EPU からの放射光は、偏光状態の違いを除くあらゆる性質が、同じであることが理想的である。しかし、実際の測定結果には、偏光状態の違い以外の要因による artifact がみられている (図 6-11)。この artifact

をデータ処理時に取り除くためには、現在のところ、試料に印加する磁場極性を変えて、複数回の測定する工夫と労力が必要であり、偏光スイッチング実験の性能向上に向けての課題となっている。

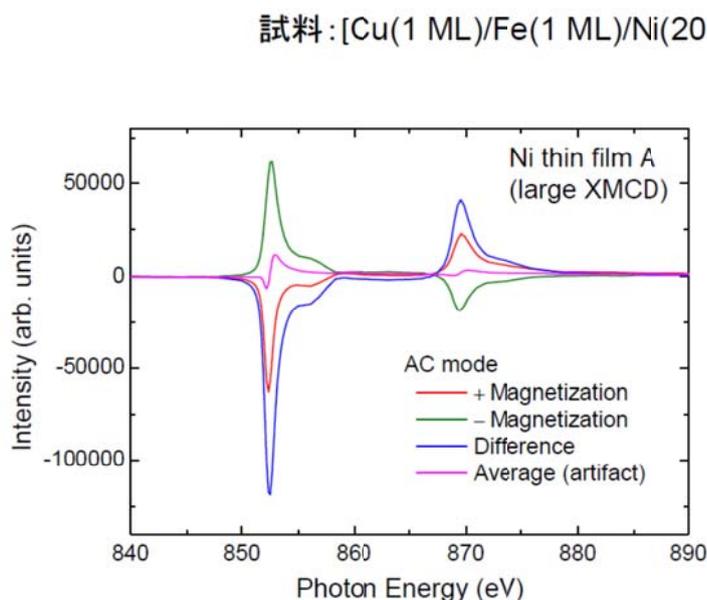


図 6-11 XMCD 信号の測定と artifact (雨宮氏、酒巻氏 提供)。この例では、赤線と緑線は、正しくは対称となるべきであるが、実際には、artifact (桃色線) の違いが出ている。

2 台の EPU からの光の位置や角度、光ビームサイズの違いや、光子エネルギーの違いなど、様々な要因が artifact の原因として考えられる。このうち、2 台の EPU からの光軸の位置や角度については、光軸合わせが未だ十分でない可能性や、スイッチング中の電子ビームのドリフトなども原因として考えられる。光ビームサイズの違いについては、2 台の EPU に対して、補正しきれていない Q 成分や Skew-Q 成分の違いや、軌道オプティクスによる差などが、可能性として考えられる。

2 台の EPU からの光ビームサイズの違いを確認するために、BL16 の集光点において 2 台の EPU からの放射光の垂直方向サイズを測定するマシンスタディが行われた。この結果を表 6-3 に示す。U#16-1 と U#16-2 からの光の切り替えには、APU  $\rho$  モードの位相切り替えと Gap 開閉による 2 種類の方法を比較して光源サイズの測定を行った。光源位置での光サイズは、集光点での光サイズから求めたものであり、同時に BL21 の光干渉計による垂直ビームサイズと電子ビーム寿命を合わせて測定した。APU  $\rho$  モードでは p.92 で述べた SQ 補正を行っているが、Gap 開閉による光源切り替えでは比較のために SQ 補正を行っていない。APU  $\rho$  モードでは、BL21 の光干渉計による垂直ビームサイズと電子寿命に差はないが、光源サイズは若干違いがある。一方、Gap 開閉による試行では、U#16-2 の Gap を全開にしたとき

最も SQ が小さくなるため U#16-1 の垂直光源サイズも APU  $\rho$  モードの場合よりも小さくなると考えられる。今回の測定では、BL21 の光干渉計による測定ではそのように変化しているが、BL16 での光源サイズ測定では逆に大きくなっている。この光源サイズ測定の精度を上げて整合性のある測定を行うことは今後の課題である。

表 6-3 BL16 での垂直方向光サイズ測定 (雨宮氏、酒巻氏、原田氏提供)

	U#16-1	U#16-2	光源サイズ ( $\sigma$ ; $\mu\text{m}$ )	BL21 干渉計 ( $\sigma$ ; $\mu\text{m}$ )	LifeTime (min)
$\rho$ モード(Gap 21mm)	$\rho/2=0\text{mm}$	$\rho/2=14\text{mm}$	39.5	35	1270
SQ 補正あり	$\rho/2=14\text{mm}$	$\rho/2=0\text{mm}$	36.5	35	1270
Gap モード	Gap=21mm	OPEN	44.6	31	1200
SQ 補正なし	OPEN	Gap=21mm	46.3	41	1400

この artifact の原因究明とスイッチング実験の性能向上に向けては、スイッチング中の電子ビーム軌道の安定化や、光ビーム診断用モニターシステムの整備が、重要な課題となる。これらの課題に対して、ビームラインスタッフ及び光源スタッフと協力して、マシンスタディを重ねて、原因究明と改善に努めていく予定である。

## 第7章 結論

電子エネルギー2.5GeVの電子蓄積リングであるPFリングでは、ここ数年渡って5台の可変偏光アンジュレータ：EPUが建設され、ユーザー実験への利用が行われている。これらのEPUはAPPLE-II型EPUがU#16-1、U#16-2、U#13の3台であり、6列型EPUがU#02-2、U#28の2台である。私はこれらの全てのEPUの建設に携わり、PFでのEPU開発研究を行ってきた。

PFにおけるEPU開発に当たって、磁場測定システムの開発に携わり、磁場調整方法を開発した。特にU#16-2以降においては、その後のEPU開発に最も重要となった、個別磁石磁場の重ね合わせによる初期磁石配列の最適化方法を開発した。この方法で得た初期配列磁場分布の特性（半周期毎の1次磁場積分分布）は非常に良好で、その後は簡単な微調整のみで十分要求される条件を満足する磁場分布を得ることが出来た。これによりU#16-2の磁場調整においては必要な磁場調整期間をU#16-1の五分之一に短縮し、調整に必要な労力を大幅に減らすことに成功した。また、その後PFで建設したU#13とU#28の初期磁石配列の最適化にも応用し、今後のPFにおけるEPU磁場調整の手法を確立した。

この初期磁石配列の最適化方法の開発とともにEPU設計に必要な放射理論の整備と放射光計算コードの開発を行った。また、U#16-1及びU#16-2の高速偏光切り替え運転の実現に当たって重要となるAPU方式での運転をPFリングに導入した際に明らかになった円偏光モードでのスペクトル強度低下の問題に対して、ここで開発した計算手法を使ったスペクトル解析を行い、原因を特定した。

周期長が160mmと長いEPUであるU#02-2及びU#28では、6列型EPUを採用し、設計・建設を行った。これによって6列の磁石列を個別に駆動することで水平・垂直磁場を独立に制御して、水平・垂直直線偏光、左右円偏光、左右楕円偏光モードを実現した。これは6列型EPUとしては初めての試みであり、U#02-2及びU#28はこの実証機となった。

PFリングにおけるAPPLE-II型EPUの運転については、APU方式を導入に成功した。最終的にはAPU- $\sigma$ モードの採用と検証を行うことで、PFでのAPPLE-II型EPU運転方法を確立した。Gapを固定したまま、偏光モードや光子エネルギーを制御するAPU方式の利用は、電子ビームへの影響が少なく、電子ビームの軌道制御が難しいU#16-1及びU#16-2の高速偏光切り替え運転には特に有効である。このためPFリングでは、U#16-1、U#16-2、U#13の3台ともAPU- $\sigma$ モードの運転方式がとられて、ユーザー運転が順調に行われている。

## (謝辞)

本研究に当たっては加速器研究施設・加速器第7系の方々をはじめ、物質構造科学研究所・放射光研究施設の多くの方にお世話になり大変ありがとうございました。また、挿入光源グループにおいて共に研究に当たり、あらゆる面でご指導・ご協力いただきました、山本樹氏、塩屋達郎氏、阿達正浩氏、佐々木洋征氏、青戸智弘氏の各氏におきましては特に強く感謝の意を表します。

## (参考文献)

- [1] J. Schwinger, Phys.Rev. 75, 1912 (1949).
- [2] J. Schwinger, “On Radiation by Electrons in a Betatron” (1945)  
A quantum legacy: Seminal papers of Julian Schwinger (World Scientific Publishing, 2000) 307-331
- [3] H. Motz, J.Appl.Phys.22, 527 (1951).
- [4] D.F. Alferov et al., Sov. Phys. Tech. Phys. 18 , 1336 (1974) .
- [5] B.M. Kincade, J.Appl.Phys.48, 2684 (1977).
- [6] K-J. Kim, Nucl. Instr. and Meth. 219 , 425 (1984).
- [7] A. Hofmann, Nucl. Instr. and Meth. 152, 17 (1978).
- [8] J.D. Jackson, Classical Electrodynamics (Wiley, third edition)
- [9] C. Wann, Phys. Rev. E 47, 4358 (1993).
- [10] O. Chubar, Rev. Sci. Instrum. 66, 1872 (1995).
- [11] K-J. Kim, Phys. Rev. Lett. 76, 1244 (1996) .
- [12] L. I. Schiff, Rev. Sci. Instrum. 17, 6 (1946) .
- [13] K-J. Kim, AIP Conference Proceedings, 184, (1989) 565
- [14] H. Kitamura, Jpn. J. Appl. Phys. Vol.19, No.4 L185-188 (1980).
- [15] H. Kitamura, Nucl. Instr. and Meth. 177 , 235 (1980).
- [16] S. Yamamoto and H. Kitamura, Jpn. J. Appl. Phys. 26 , L1613 (1987).
- [17] K-J. Kim, Nucl. Instr. and Meth. A219 , 71 (1986) .
- [18] D.Attwood,K.Halbach and K.J.Kim SCIENCE 228, 1265 (1985).
- [19] K-J. Kim, Nucl. Instr. and Meth. A246 , 67 (1986).
- [20] S. Yamamoto, private communication
- [21] T.Tanaka and H.Kitamura, J. Synchrotron Radiat. 8, 1221 (2001) .
- [22] P.Elleaume and O.Chubar, Proceedings of the 6th European Particle Accelerator Conference (EPAC'98) 1177
- [23] L.R.Elias,W.M.Fairbank,J.M.J.Madey,H.A.Schwettman and T.I.Smith, Phys.Rev.Lett.36, 717 (1976).
- [24] K.Halbach, Nucl. Instr. and Meth. 169 , 1 (1980).
- [25] H. Onuki, Nucl. Instr. and Meth. A246 , 94 (1986).
- [26] J. Goulon, P. Elleaume and D. Laundry, Nucl. Instr. and Meth. A254, 192 (1987).
- [27] J. Pflfiger and G. Heintze, Nucl. Instr. and Meth. A289, 300 (1990).
- [28] S. Yamamoto, T. Shioya, S. Sasaki, and H. Kitamura, Rev. Sci. Instrum. 60, 1834 (1989).
- [29] S.Yamamoto et al., Phys.Rev.Lett.62, 2672 (1989)
- [30] R. P. Walker and B. Diviacco, Rev. Sci. Instrum. 63, 332 (1992).
- [31] P. Elleaume, Nucl. Instr. and Meth. A291, 371 (1990).

- [32] B. Diviacco and R.P. Walker, Nucl. Instr. and Meth. A292,517 (1990).
- [33] S. Sasaki et al., Nucl. Instr. and Meth. A331, 763-767 (1993).
- [34] T. Hara et al., J. Synchrotron Radiat. 5, 426-427 (1998).
- [35] R.P. Walker, “Insertion devices: Undulators and Wigglers” CERN Accelerator School, 1996
- [36] K. Tsuchiya et al., Proc. of SRI 2015, to be published
- [37] 特開2014-013658, 土屋 公央、幸田 勉
- [38] T.Honda et al., AIP Conf. Proc. 879, 87-90 (2007).
- [39] S.Yamamoto et al., AIP Conf. Proc. 879, 384-387 (2007).
- [40] S.Yamamoto et al., AIP Conf. Proc. 1234, 599-602 (2010).
- [41] S.Yamamoto et al., in preparation
- [42] T.Koide et al., KEK Proceedings 2006-18
- [43] S.Yamamoto et al., Proceedings of the 5th Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan(2008) 105
- [44] K.J.S.Sawhney et al., Nucl. Instr. and Meth. A390, 395 (1997)
- [45] R. Carr, Nucl. Instr. and Meth. A306, 391 (1991).
- [46] S. Lidia, R. Carr, Nucl. Instr. and Meth. A 347, 77-82 (1994).
- [47] R. Carr, J. B. Kortright, M. Rice, and S. Lidia, Rev. Sci. Instrum. 66, 1862 (1995).
- [48] T. Schmidt et al., AIP Conf. Proc. 879, 404-407 (2007).
- [49] K.Harada et al., Proceedings of IPAC'10, Kyoto, Japan(2010), 3150
- [50] K.Harada et al., Proceedings of the 9th Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan (2012) 1034
- [51] K. Tsuchiya et al., J. Phys.: Conf. Ser. 425, 132017 (2013).
- [52] S. Yamamoto et al., Rev. Sci. Instrum. 63, 400 (1992).
- [53] S. Yamamoto, T. Shioya, H. Kitamura, and K. Tsuchiya, Rev. Sci. Instrum. 66, 1996 (1995).
- [54] J. Chavanne and P. Elleaume, Synchrotron Radiat. News 8(1), 18 (1995).
- [55] S.Yamamoto et al., AIP Conf. Proc. 705, 235-238 (2003).
- [56] K. Tsuchiya et al., AIP Conf. Proc. 879, 380-383 (2007).
- [57] A. Cox and B. Youngman, Proc. SPIE 0582, 91 (1985).
- [58] R. A. Cover, G. Rakowsky, B. L. Bobbs, and P. K. Kennedy, IEEE J. Quantum Electron. 31, 664 (1995).
- [59] D. Humphries, E. Hoyer, B. Kincaid, S. Marks, and R. Schlueter, IEEE Trans. Magn. 30, 2431 (1994).
- [60] T. Tanaka and H. Kitamura, Rev. Sci. Instrum. 71, 3010 (2000).
- [61] B. Diviacco, Proceedings of the 1993 Particle Accelerator Conference, Vol. 19, p. 1590 (IEEE, 1993).
- [62] K. Tsuchiya et al, Rev. Sci. Instrum. 86, 043305 (2015).

- [63] R.R.Walker, Nucl. Instr. and Meth.A 335, 328 (1993) .
- [64] T. Tanabe and H.Kitamura, J. Synchrotron Radiat. 5, 475 (1998).
- [65] 科研費 研究課題番号：10440123 (1998 年度～1999 年度)  
研究代表者：山本 樹、研究分担者：土屋 公央  
“準単色硬 X 線生成を目指した極短周期アンジュレータ用磁気回路の開発”
- [66] E. Hoyer, et al., Rev. Sci. Instrum., vol. 66 (2), 1901 (1995).
- [67] T. Schmidt et al., J. Phys. Conf. Ser. 425 032020 (2013).
- [68] K.Amemiya, private communication

## (Appendix)

### Appendix.2-1 動く電荷の作る電磁場 (リエナール・ヴィーヘルト表式)

一つの電子による遅延ポテンシャルは、

$$\phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\chi(t')} \quad , \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \cdot \frac{\mathbf{v}(t')}{\chi(t')} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{\mathbf{v}(t')}{\chi(t')} \quad (\text{注}) \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

ここで、 $\chi(t') = R(t') - \{\mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{v}(t')\}/c$  とおいた。

$R$  は電子から観測点までの距離で、 $R(t') = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$  である。

(1) 目標 遅延ポテンシャルを使って  $\mathbf{E}(t) = -\nabla\phi - \frac{d\mathbf{A}}{dt} \dots$  (\*) から電場を計算する事

(2) 計算準備

観測者系と電子系 (ダッシュ付き) の間には  $t = t' + R(t')/c \dots\dots\dots$  (A2-1.1) の関係が

あるため、観測者系での電場を求めるため、①の時間微分及び空間微分を最初に計算する。

[1] 時間微分

(A2-1.1)の両辺を  $t'$  で微分すると  $\frac{dt}{dt'} = 1 + \frac{dR(t')}{dt'} / c$

$R(t')^2 = \mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{R}(t')$  の両辺を  $t'$  で微分して、

$$2R(t') \frac{dR(t')}{dt'} = 2\mathbf{R}(t') \cdot \frac{d\mathbf{R}(t')}{dt'}$$

ここで、 $\frac{d\mathbf{R}(t')}{dt'} = -\mathbf{v}(t')$  であるので、 $\frac{dR(t')}{dt'} = -\mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{v}(t')/R(t')$  (A2-1.2)

よって、 $\frac{dt}{dt'} = 1 - \frac{\mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{v}(t')}{R(t') \cdot c} = 1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')$  (A2-1.3)

また、 $\frac{dt'}{dt} = 1 / \left\{ 1 - \frac{\mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{v}(t')}{R(t') \cdot c} \right\} = \frac{R(t')}{\chi(t')}$  であり、 $\chi(t') = R(t')(1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))$

[2] 空間微分

(A2-1.1)を空間微分すると  $\nabla t' = -\nabla R(t')/c$  (A2-1.4)

ただし、 $\nabla = \frac{d}{dx}\mathbf{i} + \frac{d}{dy}\mathbf{j} + \frac{d}{dz}\mathbf{k}$  である。

これを求めるために、 $(t-t')^2 = R(t')^2/c^2 = \{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\}/c^2$  の両辺を

$x$  で微分すると、

$$[\text{左辺の微分}] = -2(t-t')\frac{dt'}{dx} = -2\frac{R(t')}{c}\frac{dt'}{dx} \quad (\text{A2-1.5})$$

[右辺の微分]

$$= \frac{2}{c^2} \left[ \{x-x'(t')\} \cdot \left\{ 1 - \frac{dx'(t')}{dt'} \frac{dt'}{dx} \right\} + \{y-y'(t')\} \cdot \left\{ -\frac{dy'(t')}{dt'} \frac{dt'}{dx} \right\} + \{z-z'(t')\} \cdot \left\{ -\frac{dz'(t')}{dt'} \frac{dt'}{dx} \right\} \right]$$

$$\mathbf{R}(t') = (R_x, R_y, R_z) = (x-x', y-y', z-z')$$

ここで、 $\mathbf{v}(t') = (v_x, v_y, v_z) = \left( \frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'} \right)$  と書けば、

$$[\text{右辺の微分}] = \frac{2}{c^2} \left[ R_x - \{R_x v_x + R_y v_y + R_z v_z\} \cdot \frac{dt'}{dx} \right] = \frac{2}{c^2} \left[ R_x - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}) \frac{dt'}{dx} \right] \quad (\text{A2-1.6})$$

すると、(A2-1.5) (A2-1.6)から、 $-cR(t')\frac{dt'}{dx} = R_x - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})\frac{dt'}{dx}$  となり、これより、

$$\frac{dt'}{dx} = \frac{-1}{c} \cdot \frac{R_x}{R(t') - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})/c} \quad \text{となる。} \quad y, z \text{ の微分も同様に行うことが出来て結局、}$$

$$\nabla t' = \frac{dt'}{dx}\mathbf{i} + \frac{dt'}{dy}\mathbf{j} + \frac{dt'}{dz}\mathbf{k} = \frac{-\mathbf{R}(t')}{c\{R(t') - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})/c\}} = \frac{-\mathbf{R}(t')}{c\chi(t')} \quad (\text{A2-1.7})$$

$$\text{また、(A2-1.4) (A2-1.7)から、} \quad \nabla R(t') = -c\nabla t' = \frac{\mathbf{R}(t')}{R(t') - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})/c} = \frac{\mathbf{R}(t')}{\chi(t')} \quad (\text{A2-1.8})$$

が判る。

[次に必要となる  $\nabla(\mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{v}(t'))$  の計算]

$$\nabla(\mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{v}(t')) = \nabla\{(x-x')v_x + (y-y')v_y + (z-z')v_z\} \quad \text{のうち} x \text{ の微分を考えると}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})}{dx} = & \left\{ 1 - \frac{dx'(t')}{dt'} \frac{dt'}{dx} \right\} v_x + \{x - x'(t')\} \frac{dv_x}{dt'} \frac{dt'}{dx} + \left\{ -\frac{dy'(t')}{dt'} \frac{dt'}{dx} \right\} v_y + \{y - y'(t')\} \frac{dv_y}{dt'} \frac{dt'}{dx} \\ & + \left\{ -\frac{dz'(t')}{dt'} \frac{dt'}{dx} \right\} v_z + \{z - z'(t')\} \frac{dv_z}{dt'} \frac{dt'}{dx} = v_x + (\mathbf{R}(t') \cdot \dot{\mathbf{v}}(t') - v^2) \frac{dt'}{dx} \end{aligned}$$

同様にして、 $\nabla(\mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{v}(t')) = \mathbf{v}(t') - (\mathbf{R}(t') \cdot \dot{\mathbf{v}}(t') - v(t')^2) \frac{\mathbf{R}(t')}{c\chi(t')}$  (A2-1.9)

(3) 電場の計算

[1]  $\nabla(\phi(t'))$  の計算

$$\nabla(\phi(t')) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \nabla \left( \frac{1}{\chi(t')} \right) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-1}{\chi(t')^2} \{ \nabla R(t') - \nabla \{ \mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{v}(t') \} / c \}$$

(A2-1.8) (A2-1.9) より、

$$\begin{aligned} \nabla(\phi(t')) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-1}{\chi(t')^2} \left[ \frac{\mathbf{R}(t')}{\chi(t')} - \mathbf{v}(t')/c + (\mathbf{R}(t') \cdot \dot{\mathbf{v}}(t') - v(t')^2) \frac{\mathbf{R}(t')}{c^2 \chi(t')} \right] \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-1}{\chi(t')^3} \left[ \mathbf{R} - \{ R - \{ \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} \} / c \} \mathbf{v} / c + (\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{v}} - v^2) \frac{\mathbf{R}}{c^2} \right]_{t'} \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-1}{\chi(t')^3} \left[ \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \mathbf{R} - R \mathbf{v} / c + (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} / c^2 + (\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{v}}) \frac{\mathbf{R}}{c^2} \right]_{t'} \end{aligned}$$

[2]  $\frac{d\mathbf{A}(t')}{dt}$  の計算

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}(t')}{dt} &= \frac{d\mathbf{A}(t')}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{d}{dt'} \left( \frac{\mathbf{v}(t')}{\chi(t')} \right) \cdot \frac{R(t')}{\chi(t')} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{R(t')}{\chi(t')^3} \left[ \frac{d\mathbf{v}(t')}{dt'} \cdot \chi(t') - \mathbf{v}(t') \cdot \frac{d\chi(t')}{dt'} \right] \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{R(t')}{\chi(t')^3} \left[ \dot{\mathbf{v}} \cdot \chi - \mathbf{v} \cdot \left\{ \frac{dR}{dt'} - \frac{1}{c} \frac{d(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})}{dt'} \right\} \right]_{t'} \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{R(t')}{\chi(t')^3} \left[ \dot{\mathbf{v}} \left( R - \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})}{c} \right) - \mathbf{v} \left\{ -\frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})}{R} - \frac{1}{c} (-v^2 + (\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{v}})) \right\} \right]_{t'} \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\chi(t')^3} \left[ \frac{R^2}{c^2} \dot{\mathbf{v}} - \frac{R(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})}{c^3} \dot{\mathbf{v}} + \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})}{c^2} \mathbf{v} + \frac{R(\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{c^3} \mathbf{v} - \frac{v^2 R}{c^3} \mathbf{v} \right]_{t'} \end{aligned}$$

[3]  $\mathbf{E}(t) = -\nabla\phi - \frac{d\mathbf{A}}{dt}$  の計算

[1][2]の結果から、

$$\mathbf{E}(t) = -\nabla\phi - \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\chi(t')^3} \left[ \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \mathbf{R} - R\mathbf{v}/c + (\mathbf{R}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}/c^2 + (\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{v}})\frac{\mathbf{R}}{c^2} \right]_{t'} \\ + \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\chi(t')^3} \left[ -\frac{R^2}{c^2} \dot{\mathbf{v}} + \frac{R(\mathbf{R}\cdot\mathbf{v})}{c^3} \dot{\mathbf{v}} - \frac{(\mathbf{R}\cdot\mathbf{v})}{c^2} \mathbf{v} - \frac{R(\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{v}})}{c^3} \mathbf{v} + \frac{v^2 R}{c^3} \mathbf{v} \right]_{t'}$$

この括弧のなかで

[ $\dot{\mathbf{v}}$  を含まない部分]

$$= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \mathbf{R} - \frac{R}{c} \mathbf{v} + \frac{(\mathbf{R}\cdot\mathbf{v})}{c^2} \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{R}\cdot\mathbf{v})}{c^2} \mathbf{v} + \frac{v^2 R}{c^3} \mathbf{v} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(\mathbf{R} - \frac{R}{c} \mathbf{v}\right)$$

[ $\dot{\mathbf{v}}$  を含む部分]

$$= (\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{v}})\frac{\mathbf{R}}{c^2} - \frac{R^2}{c^2} \dot{\mathbf{v}} + \frac{R(\mathbf{R}\cdot\mathbf{v})}{c^3} \dot{\mathbf{v}} - \frac{R(\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{v}})}{c^3} \mathbf{v} = \frac{1}{c^2} \left\{ \left(\mathbf{R} - \frac{R}{c} \mathbf{v}\right) (\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{v}}) - \left((\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}) - \frac{R}{c} (\mathbf{R}\cdot\mathbf{v})\right) \dot{\mathbf{v}} \right\} \\ = \frac{1}{c^2} \left[ (\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{v}}) \left(\mathbf{R} - \frac{R}{c} \mathbf{v}\right) - \left\{ \mathbf{R}\cdot\left(\mathbf{R} - \frac{R}{c} \mathbf{v}\right) \right\} \dot{\mathbf{v}} \right]$$

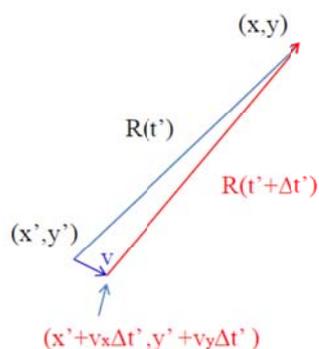
ここで、 $\mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{a}$ ,  $\left(\mathbf{R} - \frac{R}{c} \mathbf{v}\right) \Rightarrow \mathbf{b}$ ,  $\dot{\mathbf{v}} \Rightarrow \mathbf{c}$  とすると、 $(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$  を使

って、

[ $\dot{\mathbf{v}}$  を含む部分] =  $\frac{1}{c^2} \left[ \mathbf{R}\times\left\{\left(\mathbf{R} - \frac{R}{c} \mathbf{v}\right)\times\dot{\mathbf{v}}\right\} \right]$  となる。以上より、

$$\mathbf{E}(t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\chi(t')^3} \left[ \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(\mathbf{R} - \frac{R}{c} \mathbf{v}\right) + \frac{1}{c^2} \mathbf{R}\times\left\{\left(\mathbf{R} - \frac{R}{c} \mathbf{v}\right)\times\dot{\mathbf{v}}\right\} \right]_{t'} \\ = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R(t')^3 (1 - \mathbf{n}(t')\cdot\boldsymbol{\beta}(t'))^3} \left[ \frac{R}{\gamma^2} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{v}}{c}\right) + \frac{R^2}{c} \frac{\mathbf{R}}{R} \times \left\{ \left(\frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \times \frac{\dot{\mathbf{v}}}{c} \right\} \right]_{t'} \\ = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\gamma^2 R^2 (1 - \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} + \frac{\mathbf{n}\times\{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{cR(1 - \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} \right]_{t'}$$

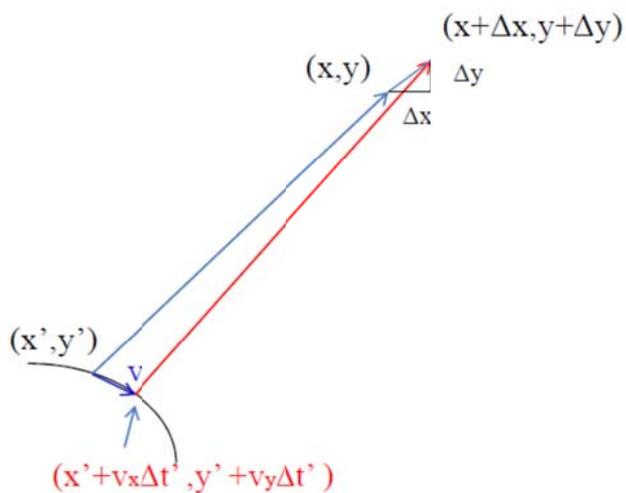
(補足 1) 時間微分について



$$t - t' = R(t')/c, \quad (t + \Delta t) - (t' + \Delta t') = R(t' + \Delta t')/c$$

これより、 $\Delta t = \Delta t' + R(t' + \Delta t')/c - R(t')/c$  となり、 $\frac{dt}{dt'} = 1 + \frac{dR(t')}{dt'}/c$

(補足 2) 空間微分について (2次元)



$$\mathbf{R}(t') = (x - x'(t'), y - y'(t')) \quad , \quad R(t') = \sqrt{(x - x'(t'))^2 + (y - y'(t'))^2}$$

$$\mathbf{R}_1(t') = (x + \Delta x - x'(t') - v_x \Delta t', y + \Delta y - y'(t') - v_y \Delta t')$$

$$\begin{aligned}
R_1 &= \sqrt{(x + \Delta x - x'(t') - v_x \Delta t')^2 + (y + \Delta y - y'(t') - v_y \Delta t')^2} \\
&\approx \sqrt{(x - x'(t'))^2 + 2(\Delta x - v_x \Delta t')(x - x'(t')) + (y - y'(t'))^2 + 2(\Delta y - v_y \Delta t')(y - y'(t'))} \\
&\approx R(t') \sqrt{1 + \left\{ 2(\Delta x - v_x \Delta t')(x - x'(t')) + 2(\Delta y - v_y \Delta t')(y - y'(t')) \right\} / R(t')^2} \\
&\approx R(t') \left[ 1 + \left\{ (\Delta x - v_x \Delta t')(x - x'(t')) + (\Delta y - v_y \Delta t')(y - y'(t')) \right\} / R(t')^2 \right] \\
&= R(t') + \left\{ (\Delta x - v_x \Delta t') R_x + (\Delta y - v_y \Delta t') R_y \right\} / R(t')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_1 - R &= \sqrt{(x + \Delta x - x'(t') - v_x \Delta t')^2 + (y + \Delta y - y'(t') - v_y \Delta t')^2} - \sqrt{(x - x'(t'))^2 + (y - y'(t'))^2} \\
&= \left\{ (\Delta x - v_x \Delta t') R_x + (\Delta y - v_y \Delta t') R_y \right\} / R(t')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dR(t')}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \left( 1 - v_x \frac{\Delta t'}{\Delta x} \right) R_x + \left( -v_y \frac{\Delta t'}{\Delta x} \right) R_y \right\} / R(t') \\
&= \frac{1}{R(t')} \left\{ R_x - (R_x v_x + R_y v_y) \frac{dt'}{dx} \right\} = \frac{1}{R(t')} \left\{ R_x - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}) \frac{dt'}{dx} \right\}
\end{aligned}$$

また、同様にして、

$$\frac{dR(t')}{dy} = \frac{1}{R(t')} \left\{ R_y - (R_x v_x + R_y v_y) \frac{dt'}{dy} \right\} = \frac{1}{R(t')} \left\{ R_y - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}) \frac{dt'}{dy} \right\}$$

これより、

$$\nabla R(t') = \frac{1}{R(t')} \left[ \left\{ R_x - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}) \frac{dt'}{dx} \right\} \mathbf{i} + \left\{ R_y - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}) \frac{dt'}{dy} \right\} \mathbf{j} \right] = \frac{\mathbf{R}(t')}{R(t')} - \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})}{R(t')} \nabla t'$$

一方、(A2-1.4)より、 $\nabla R(t') = -c \nabla t'$  だから

$$-c \nabla t' = \frac{\mathbf{R}(t')}{R(t')} - \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})}{R(t')} \nabla t' \quad \text{であり変形すると、} -\{cR(t') - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})\} \nabla t' = \mathbf{R}(t')$$

よって、

$$\nabla t' = \frac{-\mathbf{R}(t')}{c \{R(t') - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})/c\}}$$

## Appendix.2-2 動く電荷の作る電磁場（ヘヴィサイド・ファインマン表式）

(1) リエナール・ヴィーヘルト (Lienard-Wiechert) 表式

$$\mathbf{E}(t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\gamma^2 R^2 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{cR(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right]_{t'} \quad (\text{A2-2.1})$$

(2) ヘヴィサイド・ファインマン (Heaviside-Feynman) 表式

$$\mathbf{E}(t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{n}(t')}{R(t')^2} + \frac{R(t')}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{n}(t')}{R(t')^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2(\mathbf{n}(t'))}{dt^2} \right]_{t'} \quad (\text{A2-2.2})$$

[目標] (A2-2.2)と(A2-2.1)が同一であることを示す。方針は(A2-2.2)の微分を実行して(A2-2.1)と比較する。

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{n}(t')}{dt'} &= \frac{d}{dt'} \left( \frac{\mathbf{R}(t')}{R(t')} \right) = \frac{1}{R(t')^2} \left\{ \frac{d\mathbf{R}(t')}{dt'} R(t') - \mathbf{R}(t') \frac{dR(t')}{dt'} \right\} \\ &= \frac{1}{R(t')} \left\{ -c\boldsymbol{\beta}(t') - \frac{\mathbf{R}(t')}{R(t')} \frac{dR(t')}{dt'} \right\} \\ &= \frac{c}{R(t')} \left\{ -\boldsymbol{\beta}(t') + \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t') \right\} = \frac{c}{R(t')} \left\{ \mathbf{n}(t') \times (\mathbf{n}(t') \times \boldsymbol{\beta}(t')) \right\} \end{aligned}$$

(A2-2.3)

ここで(A2-1.2), (A2-2.3)式及び、 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$  の関係を使った。

[1] (A2-2.2)式 第3項 (A2-3.1)式及び(A2-2.3)を使い、

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{n}(t') &= \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{c} \left( \frac{dt'}{dt} \right) \frac{d\mathbf{n}(t')}{dt'} \right) \\ &= \frac{1}{c \{1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')\}} \cdot \frac{d}{dt'} \left[ \frac{\mathbf{n}(t') \times \{ \mathbf{n}(t') \times \boldsymbol{\beta}(t') \}}{\{1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')\} R(t')} \right] \end{aligned} \quad (\text{A2-2.4})$$

[2] (A2-2.2)式 第2項

$$\begin{aligned} \frac{R(t')}{c} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{n}(t')}{R(t')^2} \right) &= \frac{R(t')}{c} \left( \frac{dt'}{dt} \right) \cdot \frac{d}{dt'} \left( \frac{\mathbf{n}(t')}{R(t')^2} \right) \\ &= \frac{R(t')}{c(1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))} \cdot \frac{1}{R(t')^4} \left[ \frac{d\mathbf{n}(t')}{dt'} \cdot R(t')^2 - 2R(t') \frac{dR(t')}{dt'} \mathbf{n}(t') \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{R(t')}{c(1-\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))} \frac{1}{R(t')^2} \left\{ \frac{c}{R(t')} \mathbf{n}(t') \times (\mathbf{n}(t') \times \boldsymbol{\beta}(t')) + \frac{2c}{R(t')} (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) \mathbf{n}(t') \right\} \\
&= \frac{1}{R(t')^2 (1-\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))} \left[ \mathbf{n}(t') \times \{ \mathbf{n}(t') \times \boldsymbol{\beta}(t') \} + 2(\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) \mathbf{n}(t') \right]
\end{aligned} \tag{A2-2.5}$$

[3] (A2-2.2)式 第1項

$$\frac{\mathbf{n}(t')}{R(t')^2} = \frac{1}{R(t')^2 \{1-\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')\}} \left[ \{1-\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')\} \mathbf{n}(t') \right] \tag{A2-2.6}$$

これより、

$$[\text{第1項} + \text{第2項}] = \frac{1}{R(t')^2 \{1-\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')\}} \left[ \mathbf{n}(t') \times \{ \mathbf{n}(t') \times \boldsymbol{\beta}(t') \} + (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) \mathbf{n}(t') + \mathbf{n}(t') \right]$$

ここで、 $\mathbf{n}(t') \times (\mathbf{n}(t') \times \boldsymbol{\beta}(t')) = -\boldsymbol{\beta}(t') + (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) \mathbf{n}(t')$  より、

$$[\text{第1項} + \text{第2項}] = \frac{1}{R(t')^2 \{1-\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')\}} \left[ \mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t') + 2(\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) \mathbf{n}(t') \right] \tag{A2-2.7}$$

(A2-2.4)+(A2-2.7)式より、(A2-2.2)式は次のように書き換えられる。

$$\mathbf{E}(t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R^2(1-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \{ \mathbf{n} - \boldsymbol{\beta} + 2(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \mathbf{n} \} + \frac{1}{c(1-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \cdot \frac{d}{dt'} \left[ \frac{\mathbf{n} \times \{ \mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta} \}}{R(1-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right] \right] \tag{A2-2.8}$$

[4] 次に(A2-2.8)の微分を実行して

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt'} \left[ \frac{\mathbf{n} \times \{ \mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta} \}}{R(1-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right] &= \frac{d}{dt'} \left[ \frac{(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{R(1-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right] \\
&= \frac{1}{R^2(1-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \left[ \begin{aligned} &R(1-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \{ (\dot{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta} + \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \dot{\mathbf{n}} - \dot{\boldsymbol{\beta}} \} \\ &- \{ (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \mathbf{n} - \boldsymbol{\beta} \} \left\{ \frac{dR}{dt'} (1-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) - R(\dot{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta} + \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right\} \end{aligned} \right] \tag{A2-2.9}
\end{aligned}$$

ここで(A2-2.9)式分子のうち、 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ を含む部分を $F_1$ 、 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ を含まない部分を $F_2$  とおく。

すると $F_1, F_2$ はそれぞれ、

$$\begin{aligned}
F_1 &= R(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\{(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{n}-\dot{\boldsymbol{\beta}}\}+R\{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}\}(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}) \\
&= R\left[(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{n}-(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{n}-(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}}+(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{n}-(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})\boldsymbol{\beta}\right] \\
&= R\left[(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})-(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}}\right] \\
&= R\left[\mathbf{n}\times\{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\}\right]
\end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{n}\times\{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\}=(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})-\{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\cdot\mathbf{n}\}\dot{\boldsymbol{\beta}}=(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})-\{1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}\}\dot{\boldsymbol{\beta}}$ である。

$$F_2 = R(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\{(\dot{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n}+(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\dot{\mathbf{n}}\}-\{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}\}\left\{\frac{dR}{dt'}(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})-R(\dot{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta})\right\}$$

ここで  $\frac{dR}{dt'}=-c(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})$  ,  $\dot{\mathbf{n}}=\frac{d\mathbf{n}}{dt'}=\frac{c}{R}\{\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta})\}=\frac{c}{R}\{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}\}$  を使えば

$$\begin{aligned}
F_2 &= R(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\left\{\left(\frac{c}{R}\{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}\}\cdot\boldsymbol{\beta}\right)\mathbf{n}+(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\frac{c}{R}\{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}\}\right\} \\
&\quad -\{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}\}\left\{-c(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})-R\left(\frac{c}{R}\{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}\}\cdot\boldsymbol{\beta}\right)\right\} \\
&= c\left[(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2-\boldsymbol{\beta}^2\}\mathbf{n}+(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\mathbf{n}-(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}\}\right] \\
&+ c\left[\{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\mathbf{n}-(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}\}(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})+\{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2-\boldsymbol{\beta}^2\}\{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}\}\right] \\
&= c\left[\begin{array}{l} \overline{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}^2\mathbf{n}-(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3\mathbf{n}+\boldsymbol{\beta}^2(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n}} \\ +\overline{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\mathbf{n}-(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}-(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3\mathbf{n}+(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\boldsymbol{\beta}} \\ +\overline{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\mathbf{n}-(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3\mathbf{n}-(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}+(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\boldsymbol{\beta}} \\ +\overline{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3\mathbf{n}-(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}^2(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n}+\boldsymbol{\beta}^2\boldsymbol{\beta}} \end{array}\right] \\
&= c\left[\underline{3(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\mathbf{n}+\boldsymbol{\beta}^2(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{n})-2(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3\mathbf{n}-2(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}+(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\boldsymbol{\beta}}\right] \\
&= c\left[\underline{4(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\mathbf{n}+(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{n})+\boldsymbol{\beta}^2(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{n})-2(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3\mathbf{n}-2(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{n})-2(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n}}\right] \\
&= c\left[\{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{n})-2(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{n})+\boldsymbol{\beta}^2(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{n})\}+\{-2(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n}+4(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\mathbf{n}-2\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3\}\right] \\
&= c\left[(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{n})\{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2-2(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})+1-1+\boldsymbol{\beta}^2\}-2\{1-2(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})+(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n}\right] \\
&= c\left[(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{n})\{(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2-(1-\boldsymbol{\beta}^2)\}-2(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n}\right] \\
&= c\left[(1-\boldsymbol{\beta}^2)(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})-(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})+2(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n}\}\right]
\end{aligned}$$

これより(A2-2.4)式は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{n}(t') &= \frac{1}{c(1-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \frac{d}{dt'} \left[ \frac{\mathbf{n} \times \{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}\}}{R(1-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right]_{t'} \\ &= \frac{[\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}]}{Rc(1-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{(1-\beta^2)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{R^2(1-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} - \frac{\{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) + 2(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\mathbf{n}\}}{R^2(1-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \end{aligned} \quad (\text{A2-2.10})$$

ここで、(A2-2.7)式より、

$$\frac{\{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) + 2(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\mathbf{n}\}}{R^2(1-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} = \frac{\mathbf{n}(t')}{R(t')^2} + \frac{R(t')}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{n}(t')}{R(t')^2} \right)$$

であるから、(A2-2.10)は、

$$\frac{\mathbf{n}(t')}{R(t')^2} + \frac{R(t')}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{n}(t')}{R(t')^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{n}(t') = \frac{(1-\beta^2)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{R^2(1-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{[\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}]}{Rc(1-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3}$$

となり、(A2-2.1)と(A2-2.2)は同じであることが判明した。

### Appendix.2-3 放射電場の書き換え ((2-1.9)式の導出)

(A2-2.10)式から、放射電場の書き換えを行っておく。

$$\frac{[\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}]}{Rc(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} = \frac{1}{c(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \frac{d}{dt'} \left[ \frac{\mathbf{n} \times \{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}\}}{R(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right]_{t'} + \frac{\{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) + 2(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\mathbf{n}\}}{R^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} - \frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{R^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3}$$

ここで、 $\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta} = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta} + (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\mathbf{n} = \mathbf{n} \times \{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}\} + (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\mathbf{n}$  であり、

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) + 2(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\mathbf{n} &= (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\mathbf{n} + \mathbf{n} \times \{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}\} + 2(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\mathbf{n} \\ &= \mathbf{n} \times \{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}\} + (1 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\mathbf{n} \end{aligned} \quad \text{と変形すれば、最終的に}$$

$$\begin{aligned} \frac{[\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}]}{Rc(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} &= \frac{1}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \frac{d}{dt'} \left[ \frac{\mathbf{n} \times \{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}\}}{Rc(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right]_{t'} + \frac{\{\mathbf{n} \times \{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}\} + (1 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\mathbf{n}\}}{R^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \\ &\quad - \frac{(1 - \beta^2)\{\mathbf{n} \times \{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}\} + (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\mathbf{n}\}}{R^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \\ &= \frac{1}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \left[ \frac{d}{dt'} \left( \frac{\mathbf{n} \times \{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}\}}{Rc(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right) + \left\{ 1 - \frac{1 - \beta^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \right\} \frac{\mathbf{n} \times \{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}\}}{R^2} + \left\{ (1 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) - \frac{1 - \beta^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right\} \frac{\mathbf{n}}{R^2} \right] \end{aligned}$$

と書き表せる。これは放射スペクトルを考える際に有益である。

## Appendix.2-4 放射の全パワーについて

[A2-4-1] 放射パワー分布(2-2.4)の積分

以下では、実際に(2-2.4)を立体角で積分する。

(2-2.4)は電子の単位時間あたりのパワーであり、(2-2.6)の観測者の単位時間あたりのパワーとは異なることに注意が必要である。点電荷が単位時間加速されたときに放射するエネルギー量は遅延時間を使って、 $P(t') = \frac{dW}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \cdot \frac{dW}{dt} = (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \frac{dW}{dt}$  と表される。すると

(2-13)より電子が単位時間あたりに放射するパワーは

$$P(t') = \int \left[ \varepsilon_0 c R^2 |\mathbf{E}_a(t)|^2 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \right] d\Omega = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{4\pi c} \int \frac{\left[ \mathbf{n} \times \{ (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \} \right]^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} d\Omega \quad (\text{A2-4.1})$$

ここで、 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$  である。まず予備計算として

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \{ (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \} &= \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) - \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}} - (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \dot{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) - (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \dot{\boldsymbol{\beta}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{n} \times \{ (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \} \right]^2 &= \left[ (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) - (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \dot{\boldsymbol{\beta}} \right]^2 \\ &= (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \{ 1 - 2(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) + \beta^2 \} - 2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) + (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \\ &= (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \{ 1 - 2(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) + \beta^2 - 2 + 2(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \} + 2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) + (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \\ &= -(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 (1 - \beta^2) + 2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) + (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \end{aligned}$$

従って、

$$\frac{\left[ \mathbf{n} \times \{ (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \} \right]^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} = \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{2(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^4} - \frac{(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 (1 - \beta^2)}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5}$$

これより求める放射パワーの積分部分は、

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\left[ \mathbf{n} \times \{ (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \} \right]^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} d\Omega = \int_0^\pi \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\left[ \mathbf{n} \times \{ (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \} \right]^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} d\phi \right\} \sin\theta d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[ \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{2(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^4} - \frac{(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 (1 - \beta^2)}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \right\} d\phi \right] \sin\theta d\theta \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned} \quad (\text{A2-4.2})$$

と積分を3つに分けて書き表せる。ここで $I_1, I_2, I_3$ はそれぞれ次の通りである。

$$I_1 = \int_0^\pi \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}^2}{(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} d\phi \right\} \sin\theta d\theta \quad (\text{A2-4.3})$$

$$I_2 = \int_0^\pi \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{2(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})(\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})}{(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^4} d\phi \right\} \sin\theta d\theta \quad (\text{A2-4.4})$$

$$I_3 = -\int_0^\pi \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})^2(1-\beta^2)}{(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^5} d\phi \right\} \sin\theta d\theta \quad (\text{A2-4.5})$$

これらの積分を次の座標パラメータを用いて計算する。

$$\boldsymbol{\beta} = (0, 0, \beta) \quad (\text{A2-4.6})$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = (\dot{\beta}_x, \dot{\beta}_y, \dot{\beta}_z) \quad (\text{A2-4.7})$$

$$\mathbf{n} = (\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta) \quad (\text{A2-4.8})$$

これを使って、さらに必要な予備計算を行い、

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\beta}_z\beta \quad \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta} = \beta \cos\theta \quad \mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\beta}_x \cos\phi \sin\theta + \dot{\beta}_y \sin\phi \sin\theta + \dot{\beta}_z \cos\theta$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})^2 &= (\dot{\beta}_x \cos\phi \sin\theta + \dot{\beta}_y \sin\phi \sin\theta + \dot{\beta}_z \cos\theta)^2 \\ &= (\dot{\beta}_x^2 \cos^2\phi \sin^2\theta + \dot{\beta}_y^2 \sin^2\phi \sin^2\theta + \dot{\beta}_z^2 \cos^2\theta) \\ &\quad + (2\dot{\beta}_x\dot{\beta}_y \sin\phi \cos\phi \sin^2\theta + 2\dot{\beta}_y\dot{\beta}_z \sin\phi \sin\theta \cos\theta + 2\dot{\beta}_z\dot{\beta}_x \cos\phi \sin\theta \cos\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}\times\dot{\boldsymbol{\beta}} &= (\beta_y\dot{\beta}_z - \beta_z\dot{\beta}_y)\mathbf{i} + (\beta_z\dot{\beta}_x - \beta_x\dot{\beta}_z)\mathbf{j} + (\beta_x\dot{\beta}_y - \beta_y\dot{\beta}_x)\mathbf{k} \\ &= (-\beta\dot{\beta}_y)\mathbf{i} + (\beta\dot{\beta}_x)\mathbf{j} \end{aligned}$$

$$(\boldsymbol{\beta}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})^2 = \beta^2(\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2)$$

以上の結果を用いて、(1.13),(1.14),(1.15)を $\phi$ について積分すると、

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}^2}{(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} d\phi \right\} \sin\theta d\theta = \int_0^\pi \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}^2}{(1-\beta \cos\theta)^3} d\phi \right\} \sin\theta d\theta \\ &= 2\pi \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{(1-\beta \cos\theta)^3} \quad (\text{A2-4.9}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^\pi \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{2(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})(\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^4} d\phi \right\} \sin \theta d\theta \\
&= \int_0^\pi \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{2(\dot{\beta}_x \cos \phi \sin \theta + \dot{\beta}_y \sin \phi \sin \theta + \dot{\beta}_z \cos \theta) \dot{\beta}_z \beta}{(1 - \beta \cos \theta)^4} d\phi \right\} \sin \theta d\theta \\
&= 4\pi \dot{\beta}_z^2 \beta \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{(1 - \beta \cos \theta)^4}
\end{aligned} \tag{A2-4.10}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= -\int_0^\pi \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 (1 - \beta^2)}{(1 - \beta \cos \theta)^5} d\phi \right\} \sin \theta d\theta \\
&= -(1 - \beta^2) \int_0^\pi \frac{(\pi \dot{\beta}_x^2 \sin^2 \theta + \pi \dot{\beta}_y^2 \sin^2 \theta + 2\pi \dot{\beta}_z^2 \cos^2 \theta)}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \sin \theta d\theta \\
&= -\pi(1 - \beta^2) \left[ (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2) \int_0^\pi \frac{(1 - \cos^2 \theta) \sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} d\theta + 2\dot{\beta}_z^2 \int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} d\theta \right]
\end{aligned} \tag{A2-4.11}$$

ここで変数変換を行い、各積分部分を取り出して次の  $J_1, J_2, J_3, J_4, J_5$  を別途計算しておく。

$$u = \cos \theta \quad du = -\sin \theta \cdot d\theta$$

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \beta \cos \theta)^3} = \int_{-1}^1 \frac{du}{(1 - \beta u)^3} = \left[ \frac{1}{2\beta(1 - \beta u)^2} \right]_{-1}^1 \\
&= \frac{1}{2\beta} \left\{ \frac{1}{(1 - \beta)^2} - \frac{1}{(1 + \beta)^2} \right\} = \frac{2}{(1 - \beta^2)^2}
\end{aligned} \tag{A2-4.12}$$

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{(1-\beta \cos \theta)^4} = \int_{-1}^1 \frac{udu}{(1-\beta u)^4} = \left[ \frac{u}{3\beta(1-\beta u)^3} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{du}{3\beta(1-\beta u)^3} \\
&= \frac{1}{3\beta} \left\{ \frac{1}{(1-\beta)^3} + \frac{1}{(1+\beta)^3} \right\} - \left[ \frac{1}{6\beta^2(1-\beta u)^2} \right]_{-1}^1 \\
&= \frac{2}{3\beta} \cdot \frac{1+3\beta^2}{(1-\beta^2)^3} - \frac{1}{6\beta^2} \left\{ \frac{1}{(1-\beta)^2} - \frac{1}{(1+\beta)^2} \right\} \\
&= \frac{2}{3\beta} \cdot \frac{1+3\beta^2}{(1-\beta^2)^3} - \frac{1}{6\beta^2} \frac{4\beta}{(1-\beta^2)^2} \\
&= \frac{2}{3\beta} \cdot \frac{1}{(1-\beta^2)^3} \{1+3\beta^2 - (1-\beta^2)\} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4\beta}{(1-\beta^2)^3}
\end{aligned} \tag{A2-4.13}$$

$$\begin{aligned}
J_3 &= \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{(1-\beta \cos \theta)^5} d\theta = \int_{-1}^1 \frac{du}{(1-\beta u)^5} = \left[ \frac{1}{4\beta(1-\beta u)^4} \right]_{-1}^1 \\
&= \frac{1}{4\beta} \left[ \frac{1}{(1-\beta)^4} - \frac{1}{(1+\beta)^4} \right] = \frac{1}{4\beta} \frac{(1+\beta)^4 - (1-\beta)^4}{(1-\beta^2)^4} \\
&= \frac{1}{4\beta} \frac{(1+\beta^2+2\beta)^2 - (1+\beta^2-2\beta)^2}{(1-\beta^2)^4} \\
&= \frac{1}{4\beta} \frac{8\beta(1+\beta^2)}{(1-\beta^2)^4} = \frac{2(1+\beta^2)}{(1-\beta^2)^4}
\end{aligned} \tag{A2-4.14}$$

$$\begin{aligned}
J_4 &= \int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{(1-\beta \cos \theta)^5} d\theta = \int_{-1}^1 \frac{u^2 du}{(1-\beta u)^5} = \left[ \frac{u^2}{4\beta(1-\beta u)^4} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{2udu}{4\beta(1-\beta u)^4} \\
&= J_3 - \frac{1}{2\beta} J_2 \\
&= \frac{2(1+\beta^2)}{(1-\beta^2)^4} - \frac{1}{2\beta} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4\beta}{(1-\beta^2)^3} = \frac{2(1+\beta^2)}{(1-\beta^2)^4} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{(1-\beta^2)^3}
\end{aligned} \tag{A2-4.15}$$

$$J_5 = \int_0^\pi \frac{1-\cos^2 \theta \sin \theta}{(1-\beta \cos \theta)^5} d\theta = J_3 - J_4 = \frac{1}{2\beta} J_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{(1-\beta^2)^3} \tag{A2-4.16}$$

これら  $J_1, J_2, J_3, J_4, J_5$  の結果を使って、 $I_1, I_2, I_3$  を求める。

$$\begin{aligned}
 I_1 &= 2\pi\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 J_1 = 2\pi\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \frac{2}{(1-\beta^2)^2} \\
 &= \frac{4\pi}{(1-\beta^2)^3} \left\{ (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2 + \dot{\beta}_z^2) - \beta^2 (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2 + \dot{\beta}_z^2) \right\}
 \end{aligned} \tag{A2-4.17}$$

$$I_2 = 4\pi\dot{\beta}_z^2 \beta J_2 = 4\pi\dot{\beta}_z^2 \beta \frac{2}{3} \cdot \frac{4\beta}{(1-\beta^2)^3} = \frac{4\pi}{(1-\beta^2)^3} \left( \frac{8}{3} \beta^2 \dot{\beta}_z^2 \right) \tag{A2-4.18}$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= -\pi(1-\beta^2) \left[ (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2) J_5 + 2\dot{\beta}_z^2 J_4 \right] \\
 &= -\pi(1-\beta^2) \left[ (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2) \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{(1-\beta^2)^3} + 2\dot{\beta}_z^2 \left\{ \frac{2(1+\beta^2)}{(1-\beta^2)^4} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{(1-\beta^2)^3} \right\} \right] \\
 &= \frac{4\pi}{(1-\beta^2)^3} \left[ -\frac{1}{3} (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2) (1-\beta^2) + \dot{\beta}_z^2 \left\{ -(1+\beta^2) + \frac{2}{3}(1-\beta^2) \right\} \right] \\
 &= \frac{4\pi}{(1-\beta^2)^3} \left[ -\frac{1}{3} (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2) + \frac{\beta^2}{3} (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2) - \dot{\beta}_z^2 \left\{ \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \beta^2 \right\} \right] \\
 &= \frac{4\pi}{(1-\beta^2)^3} \left[ -\frac{1}{3} (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2 + \dot{\beta}_z^2) + \frac{\beta^2}{3} (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2) - \frac{5}{3} \beta^2 \dot{\beta}_z^2 \right]
 \end{aligned} \tag{A2-4.19}$$

以上より、

$$\begin{aligned}
 I &= I_1 + I_2 + I_3 \\
 &= \frac{4\pi}{(1-\beta^2)^3} \left\{ \frac{2}{3} (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2 + \dot{\beta}_z^2) - \frac{2}{3} \beta^2 (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2) + \beta^2 \dot{\beta}_z^2 \left( 1 + \frac{8}{3} - \frac{5}{3} \right) \right\} \\
 &= \frac{4\pi}{(1-\beta^2)^3} \left\{ \frac{2}{3} (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2 + \dot{\beta}_z^2) - \frac{2}{3} \beta^2 (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2) \right\}
 \end{aligned} \tag{A2-4.20}$$

ここで、 $(\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 = \beta^2 (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2)$  より、
$$I = \frac{4\pi}{(1-\beta^2)^3} \frac{2}{3} \left\{ \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \right\}$$

従って最終的に、

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c} \frac{1}{(1-\beta^2)^3} \left\{ \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c} \gamma^6 \left\{ \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \right\} \tag{A2-4.21}$$

となり(2-2.6)と一致することが判明した。

[A2-4-2]

さらに、これをエネルギーと運動量で表すことで(2-2.5)と一致することを示す。

まず、 $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$ ,  $E = mc^2\gamma$  から  $\dot{\mathbf{p}}$ ,  $\dot{E}$  を計算する。この計算の前に当たり前のようだが、

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \text{ より } \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \left( \frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right) = (\dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z)$$

$$\dot{v} = |\dot{\mathbf{v}}| = \sqrt{\dot{v}_x^2 + \dot{v}_y^2 + \dot{v}_z^2} \quad (\text{A2-4.22})$$

一方、 $v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$  より

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{d}{dt} \left\{ \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \right\} = \frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{-\frac{1}{2}} \left( 2v_x \frac{dv_x}{dt} + 2v_y \frac{dv_y}{dt} + 2v_z \frac{dv_z}{dt} \right) \\ &= \frac{v_x \dot{v}_x + v_y \dot{v}_y + v_z \dot{v}_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{v} = \frac{|\mathbf{v}| \cdot |\dot{\mathbf{v}}| \cos \theta}{v} = \dot{v} \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{A2-4.23})$$

となり  $\frac{dv}{dt} \neq |\dot{\mathbf{v}}|$  であることに注意する。

また、この関係は  $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$  の両辺を時間微分して、 $\frac{dv}{dt} = \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{v} = \frac{|\mathbf{v}| \cdot |\dot{\mathbf{v}}| \cos \theta}{v} = \dot{v} \cos \theta$  と簡

単に求めることができる。さらに、

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right\} = -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \left\{ -\frac{2}{c^2} v \frac{dv}{dt} \right\} = \frac{1}{c^2} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \{ v \dot{v} \cos \theta \} \quad (\text{A2-4.24})$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt} (m\gamma\mathbf{v}) = m \frac{d\gamma}{dt} \mathbf{v} + m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad (\dot{\mathbf{p}})^2 = m^2 \left\{ \left( \frac{d\gamma}{dt} \right)^2 v^2 + 2\gamma \frac{d\gamma}{dt} \mathbf{v} \dot{\mathbf{v}} + \gamma^2 \dot{v}^2 \right\}$$

これより

$$\left( \frac{\dot{\mathbf{p}}}{m} \right)^2 = \frac{1}{c^4} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-3} \{ v \dot{v} \cos \theta \}^2 v^2 + \frac{2}{c^2} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-2} \{ v \dot{v} \cos \theta \}^2 + \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1} \dot{v}^2 \quad (\text{A2-4.25})$$

また、 $\dot{E} = mc^2 \frac{d\gamma}{dt}$  より、

$$\left(\frac{\dot{E}}{mc}\right)^2 = c^2 \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 = \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3} \{v\dot{v} \cos \theta\}^2 \quad (\text{A2-4.26})$$

(A1.25),(A1.26)から、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\dot{\mathbf{p}}}{m}\right)^2 - \left(\frac{\dot{E}}{mc}\right)^2 \\ &= \frac{1}{c^4} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3} \{v\dot{v} \cos \theta\}^2 (v^2 - c^2) + \frac{2}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-2} \{v\dot{v} \cos \theta\}^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \dot{v}^2 \\ &= \frac{1}{c^4} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3} \{v\dot{v} \cos \theta\}^2 (v^2 - c^2) + \frac{2}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-2} \{v\dot{v} \cos \theta\}^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \dot{v}^2 \\ &= (1 - \beta^2)^{-2} \left[ -\beta^2 \{\dot{v} \cos \theta\}^2 + 2\beta^2 \{v \cos \theta\}^2 + (1 - \beta^2) \dot{v}^2 \right] \\ &= (1 - \beta^2)^{-2} \left[ \dot{v}^2 - \beta^2 \dot{v}^2 \{1 - \cos^2 \theta\} \dot{v}^2 \right] \\ &= (1 - \beta^2)^{-2} \left[ \dot{v}^2 - \frac{v^2 \dot{v}^2}{c^2} \sin^2 \theta \right] = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-2} \left[ \dot{v}^2 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \dot{\mathbf{v}}\right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{(1 - \beta^2)^2} \left[ \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)^2 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \frac{d\dot{\mathbf{v}}}{dt}\right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A2-4.27})$$

$$\begin{aligned} \therefore P &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c} \frac{1}{(1 - \beta^2)^3} \left\{ \dot{\mathbf{p}}^2 - (\dot{\mathbf{p}} \times \dot{\mathbf{p}})^2 \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^3} \frac{1}{(1 - \beta^2)^3} \left\{ \dot{v}^2 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \dot{\mathbf{v}}\right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^3} \gamma^2 \left\{ \left(\frac{\dot{\mathbf{p}}}{m}\right)^2 - \left(\frac{\dot{E}}{mc}\right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 \left\{ \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{dt}\right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A2-4.28})$$

これは(2-2.5)と一致する。

## Appendix.2-5 放射スペクトルの Chubar 表式について

電場(2-1.4)から直接フーリエ積分を行い、Chubar 表式(2-3.8)を導くこと。

(2-1.9)式から、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{E}_v(t) + \mathbf{E}_a(t)] \exp(i\omega t) (1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) dt' \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{R^2} \{ \mathbf{n} - \boldsymbol{\beta} + 2(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \mathbf{n} \} + \frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dt'} \left[ \frac{\mathbf{n} \times \{ \mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta} \}}{R(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right] \right] \exp(i\omega t) dt' \end{aligned}$$

ここで積分部を3つに分けて積分することを試みる。

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{n}(t')}{R(t')^2} \exp(i\omega t) dt' \quad (\text{A2-5.1})$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\boldsymbol{\beta}(t') + 2(\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) \mathbf{n}(t')}{R(t')^2} \exp(i\omega t) dt' \quad (\text{A2-5.2})$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dt'} \left[ \frac{\mathbf{n}(t') \times \{ \mathbf{n}(t') \times \boldsymbol{\beta}(t') \}}{R(t')(1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))} \right] \exp(i\omega t) dt' \quad (\text{A2-5.3})$$

まず、 $I_3$ を部分積分すると

$$I_3 = \frac{1}{c} \cdot \left[ \frac{\mathbf{n} \times \{ \mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta} \}}{R(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \exp \left\{ i\omega \left( t' + \frac{R}{c} \right) \right\} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{c} \cdot \left[ \frac{\mathbf{n} \times \{ \mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta} \}}{R(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right] \left( \frac{dt}{dt'} \right) \left\{ \frac{d}{dt} \exp(i\omega t) \right\} dt'$$

ここで第1項は $R(t')$ に反比例するので0となる。また、 $\frac{dt}{dt'} = 1 - (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))$ を使えば、

$$I_3 = -\frac{i\omega}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\mathbf{n}(t') \times \{ \mathbf{n}(t') \times \boldsymbol{\beta}(t') \}}{R(t')} \right] \exp(i\omega t) dt'$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(t') \times (\mathbf{n}(t') \times \boldsymbol{\beta}(t')) &= -\boldsymbol{\beta}(t') + (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) \mathbf{n}(t') \\ &= \mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t') - \mathbf{n}(t') \{ 1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t') \} \end{aligned} \quad \text{の関係を使い変形すると}$$

$$I_3 = \frac{i\omega}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\boldsymbol{\beta}(t') - \mathbf{n}(t')}{R(t')} \right] \exp(i\omega t) dt' + I_4 \quad (\text{A2-5.4})$$

$$I_4 = \frac{i\omega}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\mathbf{n}(t') \{1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')\}}{R(t')} \right] \exp(i\omega t) dt' \quad (\text{A2-5.5})$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{n}(t')}{R(t')} \{1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')\} \left( \frac{d}{dt} \exp(i\omega t) \right) dt' \\ &= \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{n}(t')}{R(t')} \left( \frac{dt}{dt'} \right) \left( \frac{d}{dt} \exp(i\omega t) \right) dt' = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{n}(t')}{R(t')} \left( \frac{d}{dt'} \exp(i\omega t) \right) dt' \end{aligned}$$

だから部分積分すると、

$$I_4 = \left[ \frac{1}{c} \frac{\mathbf{n}(t')}{R(t')} \exp(i\omega t) \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{d}{dt'} \left( \frac{\mathbf{n}(t')}{R(t')} \right) \right\} \exp(i\omega t) dt'$$

ここで第1項は0であり、第2項の被積分部は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} \left( \frac{\mathbf{n}(t')}{R(t')} \right) &= \frac{1}{R(t')^2} \left\{ \frac{d\mathbf{n}(t')}{dt'} R(t') - \mathbf{n}(t') \frac{dR(t')}{dt'} \right\} \\ &= \frac{c}{R(t')^2} \left\{ \mathbf{n}(t') \times (\mathbf{n}(t') \times \boldsymbol{\beta}(t')) + (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) \mathbf{n}(t') \right\} \\ &= \frac{c}{R(t')^2} \left\{ 2(\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) \mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t') \right\} \end{aligned} \quad (\text{A2-5.6})$$

$$\therefore I_4 = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R(t')^2} \left\{ 2(\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) \mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t') \right\} \exp(i\omega t) dt' = -I_2 \quad \text{従って、}$$

$$I_2 + I_3 = \frac{i\omega}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\boldsymbol{\beta}(t') - \mathbf{n}(t')}{R(t')} \right] \exp(i\omega t) dt' \quad (\text{A2-5.7})$$

最後に  $I_1$  を変形して、

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{n}(t')}{R(t')^2} \exp(i\omega t) dt' = \frac{-i\omega}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{n}(t')}{R(t')} \cdot \frac{ic}{\omega R(t')} \exp(i\omega t) dt' \quad (\text{A2-5.8})$$

最終的に(A2-5.7)と(A2-5.8)を加えて、最終的に求める電場のフーリエ成分は(2-3.8)のように書ける。

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{i\omega}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R(t')} \left[ \boldsymbol{\beta}(t') - \left\{ 1 + \frac{ic}{\omega R(t')} \right\} \mathbf{n}(t') \right] \exp \left\{ i\omega \left( t' + \frac{R(t')}{c} \right) \right\} dt' \quad (\text{2-3.8})$$

## Appendix.2-6 コヒーレント放射の例

電子ビームが矩形バンチの場合とガウス分布形状の場合のコヒーレント放射の例

[例1]: 矩形バンチからの放射

電子バンチの幅を  $L$  とすると、  
 $f(z) = N/L ; -L/2 \leq z \leq L/2$  である。  
 $f(z) = 0 ; z \leq -L/2, L/2 \leq z$

$$P(\lambda) = \frac{N}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \exp\left(i \cdot \frac{2\pi z}{\lambda}\right) dz = \frac{N}{L} \cdot \frac{\lambda}{\pi} \left[ \sin\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) - i \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) \right]_{-L/2}^{L/2}$$

すると

$$= \frac{N}{L} \cdot \frac{\lambda}{\pi} \sin\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right) = N \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)} \quad (\text{A2-6.1})$$

これより、放射強度(7.6)は、

$$\frac{d}{d\omega} \left( \frac{dP}{d\Omega} \right)_N = N^2 \left\{ \frac{\sin(\pi L / \lambda)}{\pi L / \lambda} \right\}^2 \cdot \frac{d}{d\omega} \left( \frac{dP}{d\Omega} \right)_1 \quad (\text{A2-6.2})$$

となり、バンチ長  $L$  が光の波長程度の場合は  $N$  の 2 乗に比例する CSR が重要になる。

[例2]: ガウス分布形状バンチからの放射

次に標準偏差  $\sigma$  のガウス分布を考えて  $f(z) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right)$  とすれば、

$$P(\lambda) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(i \cdot \frac{2\pi z}{\lambda}\right) dz$$

すると、

$$= \frac{N}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) + i \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \sin\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) \right] dz$$

ここで、 $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha z^2) \cos(\beta z) dz = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$  を使うと、(補足参照)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha z^2) \sin(\beta z) dz = 0$$

$$P(\lambda) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot \sqrt{2\pi\sigma} \exp\left(-\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \frac{2\sigma^2}{4}\right) = N \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi\sigma}{\lambda}\right)^2\right)$$

(A2-6.3)

これより、やはりバンチ長が光の波長に近づくと CSR が発生することが判る。しかし現実世界では、分布形状が完全ということではなく、かつ各バンチでも毎回変わるはずで実際には CSR と自発放射の両者が観測されることになる。この事情を J.Schwinger は矩形バンチの場合に、

$$\left| \sum_{j=1}^N \exp\left(i \cdot \frac{2\pi z_j}{\lambda}\right) \right|^2 = N + N(N-1) \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right)} \right]^2$$

と表していることを参考のために記しておく。

[補足] 積分公式  $\int_0^\infty \exp(-\alpha z^2) \cos(\beta z) dz = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$  の導出

積分を  $\beta$  の関数と見なし、 $I(\beta) = \int_0^\infty \exp(-\alpha z^2) \cos(\beta z) dz$  とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{dI(\beta)}{d\beta} &= \int_0^\infty (-z) \exp(-\alpha z^2) \sin(\beta z) dz \\ &= \frac{1}{2\alpha} \left[ \exp(-\alpha z^2) \sin(\beta z) \right]_0^\infty - \frac{\beta}{2\alpha} \int_0^\infty \exp(-\alpha z^2) \cos(\beta z) dz = -\frac{\beta}{2\alpha} I(\beta) \end{aligned}$$

となるので、 $I(\beta) = C \cdot \exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$

ところで、 $\beta = 0$  のとき、 $I(0) = \int_0^\infty \exp(-\alpha z^2) dz = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$  だから、 $C = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

であり、 $I(\beta) = \int_0^\infty \exp(-\alpha z^2) \cos(\beta z) dz = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$

[補足 2]  $A = \int_0^\infty \exp(-x^2) dx$  とおくと

$$\begin{aligned} A^2 &= \int_0^\infty \exp(-x^2) dx \cdot \int_0^\infty \exp(-y^2) dy = \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-(x^2 + y^2)) dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \exp(-r^2) r d\theta dr = \frac{\pi}{2} \left[ -\frac{1}{2} \exp(-r^2) \right]_0^\infty = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

よって  $A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  である。

## Appendix.2-7 奇数周期のアンジュレータスペクトル関数

奇数周期のアンジュレータスペクトル関数を考えてみる。奇数周期の場合、途中の計算が実数形式で書いて見通しがよい。 $N_u = 2m+1$ としアンジュレータ中心を  $m=0$  とする。

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{N_u T} \mathbf{A}_\omega &= \frac{1}{N_u T} \int_{-(m+\frac{1}{2})T}^{(m+\frac{1}{2})T} \mathbf{a}(t) \exp(i\omega t) dt \\ &= \frac{1}{N_u T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{a}(t) \exp(i\omega t) dt + \frac{1}{N_u T} \int_{T/2}^{3T/2} \mathbf{a}(t) \exp(i\omega t) dt + \dots + \frac{1}{N_u T} \int_{(m-\frac{1}{2})T}^{(m+\frac{1}{2})T} \mathbf{a}(t) \exp(i\omega t) dt \\ &\quad + \frac{1}{N_u T} \int_{-3T/2}^{-T/2} \mathbf{a}(t) \exp(i\omega t) dt + \dots + \frac{1}{N_u T} \int_{-(m+\frac{1}{2})T}^{-(m-\frac{1}{2})T} \mathbf{a}(t) \exp(i\omega t) dt \end{aligned}$$

ここで、 $I_j = \frac{1}{T} \int_{(j-\frac{1}{2})T}^{(j+\frac{1}{2})T} \mathbf{a}(t) \exp(i\omega t) dt$  とおき、 $s = t - jT$  と変数変換すれば、

$$I_j = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{a}(s) \exp(i\omega s) \cdot \exp\{i(j\omega T)\} ds = \exp\{i(j\omega T)\} \cdot \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{a}(t) \exp(i\omega t) dt \text{ であり、}$$

他も同様であるから、

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{N_u T} \mathbf{A}_\omega &= \frac{1}{N_u T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{a}(t) \exp(i\omega t) dt \left\{ \begin{array}{l} 1 + \exp(i\omega T) + \exp(2i\omega T) + \dots + \exp(mi\omega T) \\ + \exp(-i\omega T) + \exp(-2i\omega T) + \dots + \exp(-mi\omega T) \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{N_u T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{a}(t) \exp(i\omega t) dt \{1 + 2\cos(\omega T) + 2\cos(2\omega T) + \dots + 2\cos(m\omega T)\} \end{aligned}$$

ここで、

$$D = 1 + 2\cos(\omega T) + 2\cos(2\omega T) + \dots + 2\cos(m\omega T) \text{ を求める。}$$

両辺に  $\sin(\omega T/2)$  を掛けると、

$$2\sin(\omega T/2)\cos(j\omega T) = \sin\{(j+\frac{1}{2})\omega T\} - \sin\{(j-\frac{1}{2})\omega T\} \text{ だから、}$$

$$\begin{aligned}
\sin(\omega T/2) \cdot D &= \sin(\omega T/2) + \{\sin(3\omega T/2) - \sin(\omega T/2)\} \\
&\quad + \{\sin(4\omega T/2) - \sin(3\omega T/2)\} \\
&\quad + \{\sin(5\omega T/2) - \sin(4\omega T/2)\} \\
&\quad + \dots \\
&\quad + \sin\{(m + \frac{1}{2})\omega T\} - \sin\{(m - \frac{1}{2})\omega T\} \\
&= \sin\{(m + \frac{1}{2})\omega T\}
\end{aligned}$$

よって  $1 + 2\cos(\omega T) + 2\cos(2\omega T) + \dots + 2\cos(m\omega T) = \frac{\sin\{(m + \frac{1}{2})\omega T\}}{\sin(\omega T/2)}$  であり、

$$\frac{2\pi}{N_u T} \mathbf{A}_\omega = \frac{1}{N_u T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{a}(t) \exp(i\omega t) dt \frac{\sin\{(m + \frac{1}{2})\omega T\}}{\sin(\omega T/2)}$$

これより、 $\mathbf{A}_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{a}(t) \exp(i\omega t) dt \frac{\sin\{(m + \frac{1}{2})\omega T\}}{\sin(\omega T/2)} = \frac{\sin\{(m + \frac{1}{2})\omega T\}}{\sin(\omega T/2)} \mathbf{a}_\omega$

$$N_u = 2m + 1 \text{ を使えば結局、 } \mathbf{A}_\omega = \mathbf{a}_\omega \frac{\sin(N_u \omega T/2)}{\sin(\omega T/2)} \tag{2-6.5}$$

と書ける。

## Appendix.2-8 アンジュレータ磁場中での軌道（z成分）

プラナー型アンジュレータ磁場中での電子のz方向の速度として $\psi_0$ の4乗(1/ $\gamma$ の4乗)

以上を落とした近似のもとでは、(2-7.13)が成り立つ。これを使うと(2-7.6)において、

$$t'(z) = \int_0^z \frac{du}{v_z} \approx \int_0^z \frac{du}{v \cdot \left(1 - \frac{\psi_0^2}{4}\right) + v \cdot \frac{\psi_0^2}{4} \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda_u} z\right)}$$

ここで、 $\frac{4\pi}{\lambda_u} t' = s$  と変数変換すると、

$$vt'(z) = \frac{4\pi}{\lambda_u} \int_0^{\frac{4\pi z}{\lambda_u}} \frac{ds}{a + b \cos(s)} \quad \text{ただし、} \quad a = 1 - \frac{\psi_0^2}{4}, \quad b = \frac{\psi_0^2}{4} \quad \text{である。}$$

この積分は、 $b^2 < a^2$  のとき、 $u = \tan(s/2)$  と置くことで積分できて、

$$\int \frac{dx}{a + b \cos(x)} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right) \quad \text{となる。}$$

これを適応すれば、 $a^2 - b^2 = 1 - \frac{\psi_0^2}{2}$ ,  $\frac{a-b}{a+b} = 1 - \frac{\psi_0^2}{2}$  より、

$$vt'(z) = \frac{\lambda_u}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \psi_0^2/2}} \tan^{-1} \left\{ \sqrt{1 - \psi_0^2/2} \cdot \tan\left(\frac{2\pi z}{\lambda_u}\right) \right\} \quad (\text{A2-8.1})$$

これより(A2-8.1)をzの関数として書き直すと

$$z = \frac{\lambda_u}{2\pi} \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \psi_0^2/2}} \cdot \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda_u} \sqrt{1 - \psi_0^2/2} \cdot vt'\right) \right\} \quad (\text{A2-8.2})$$

ここで $\psi_0$ の4乗(1/ $\gamma$ の4乗)以上を落とした近似では、

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\psi_0^2}{2}\right)^{1/2} &= 1 + \frac{\psi_0^2}{4} - \frac{3}{8} \left(\frac{\psi_0^2}{4}\right)^2 + \dots \approx 1 - \frac{\psi_0^2}{4} \\ \left(1 - \frac{\psi_0^2}{2}\right)^{-1/2} &= 1 - \frac{\psi_0^2}{4} + \frac{3}{8} \left(\frac{\psi_0^2}{4}\right)^2 - \dots \approx 1 + \frac{\psi_0^2}{4} \end{aligned} \quad \text{であるから、(A2-8.2)は、}$$

$$\begin{aligned}
z &= \frac{\lambda_u}{2\pi} \tan^{-1} \left\{ \left( 1 + \frac{\psi_0^2}{4} \right) \cdot \tan \left[ \frac{2\pi}{\lambda_u} \left( 1 - \frac{\psi_0^2}{4} \right) \cdot vt' \right] \right\} \\
&= \frac{\lambda_u}{2\pi} \tan^{-1} \left\{ \left( 1 + \frac{\psi_0^2}{4} \right) \cdot \tan \left[ \frac{2\pi}{\lambda_u} \langle v_z \rangle t' \right] \right\} = \frac{\lambda_u}{2\pi} \tan^{-1} \left\{ \left( 1 + \frac{\psi_0^2}{4} \right) \cdot \tan(\omega_0 t') \right\}
\end{aligned} \tag{A2-8.3}$$

(A2-8.3)において級数展開

$$\tan^{-1}(x) = \begin{cases} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots & |x| < 1 \\ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \dots & |x| \geq 1 \end{cases} \quad \text{を用いて、}$$

(A2-8.3)の中に含まれる  $\tan(\omega_0 t')$  の値域に応じて級数展開を使い、最終的に(2-7.15)を導く

$$(I) \quad \left| \left( 1 + \frac{\psi_0^2}{4} \right) \tan(\omega_0 t') \right| < 1 \quad \text{のとき}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda_u} z = \left( 1 + \frac{\psi_0^2}{4} \right) \tan(\omega_0 t') - \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{\psi_0^2}{4} \right)^3 \tan^3(\omega_0 t') + \frac{1}{5} \left( 1 + \frac{\psi_0^2}{4} \right)^5 \tan^5(\omega_0 t') + \dots$$

このうち  $\psi_0$  の 4 乗 (1/ $\gamma$  の 4 乗) 以上を落とすと

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi}{\lambda_u} z &\approx \tan(\omega_0 t') - \frac{1}{3} \tan^3(\omega_0 t') + \frac{1}{5} \tan^5(\omega_0 t') + \dots \\
&+ \frac{\psi_0^2}{4} \left\{ \tan(\omega_0 t') - \tan^3(\omega_0 t') + \tan^5(\omega_0 t') + \dots \right\}
\end{aligned} \tag{A2-8.4}$$

このうち(A2-8.4)の第 1 項は、 $|\tan(\omega_0 t')| < 1$  だから、 $\tan^{-1}\{\tan(\omega_0 t')\} = \omega_0 t'$

このうち(A2-8.4)の第 2 項も、 $|\tan(\omega_0 t')| < 1$  だから、

$$\frac{1}{1 + \tan^2(\omega_0 t')} = 1 - \tan^2(\omega_0 t') + \tan^4(\omega_0 t') - \tan^6(\omega_0 t') + \dots \quad \text{となるので、}$$

$$(\text{第 2 項}) \quad \frac{\psi_0^2}{4} \cdot \frac{\tan(\omega_0 t')}{1 + \tan^2(\omega_0 t')} = \frac{\psi_0^2}{4} \cdot \frac{\sin(\omega_0 t') \cos(\omega_0 t')}{\cos^2(\omega_0 t') + \sin^2(\omega_0 t')} = \frac{\psi_0^2}{8} \sin(2\omega_0 t') \quad \text{となる。}$$

よって、((A2-8.4)は (I) の場合、 $\psi_0$  の 4 乗 (1/ $\gamma$  の 4 乗) 以上を落とした近似で、

$$z = \langle v_z \rangle t' + v \cdot \frac{\psi_0^2}{8\omega_0} \sin(2\omega_0 t') \quad (2-7-15)$$

となることが示せた。

$$(II) \quad \left| \left( 1 + \frac{\psi_0^2}{4} \right) \tan(\omega_0 t') \right| \geq 1 \quad \text{のとき}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda_u} z = \frac{\pi}{2} - \left( 1 + \frac{\psi_0^2}{4} \right)^{-1} \{ \tan(\omega_0 t') \}^{-1} + \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{\psi_0^2}{4} \right)^{-3} \{ \tan(\omega_0 t') \}^{-3} - \dots$$

このうち  $\psi_0$  の 4 乗 (1/ $\gamma$  の 4 乗) 以上を落とすと、

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\lambda_u} z \approx & \frac{\pi}{2} - \{ \tan(\omega_0 t') \}^{-1} + \frac{1}{3} \{ \tan(\omega_0 t') \}^{-3} - \frac{1}{5} \{ \tan(\omega_0 t') \}^{-5} + \dots \\ & + \frac{\psi_0^2}{4} \left[ \{ \tan(\omega_0 t') \}^{-1} - \{ \tan(\omega_0 t') \}^{-3} - \{ \tan(\omega_0 t') \}^{-5} + \dots \right] \end{aligned} \quad (A2-8.5)$$

(A2-8.5)を評価するために、 $|\tan(\omega_0 t')| \geq 1$  と、 $1 > |\tan(\omega_0 t')| > 1 / \left( 1 + \frac{\psi_0^2}{4} \right)$  に分けて考え

る。これは逆正接が、 $|\tan^{-1}(x)| = 1 \left( x = \pm \frac{\pi}{4} \right)$  の近傍で評価がやっかいなためである。

$$(II-1) \quad |\tan(\omega_0 t')| \geq 1 \quad \text{のとき}$$

これは(I)と同様に求めることが出来る。(A2-8.5)のうち、

$$\frac{\pi}{2} - \{ \tan(\omega_0 t') \}^{-1} + \frac{1}{3} \{ \tan(\omega_0 t') \}^{-3} - \frac{1}{5} \{ \tan(\omega_0 t') \}^{-5} + \dots = \tan^{-1} \{ \tan(\omega_0 t') \} = \omega_0 t'$$

(A2-8.5)の残りの項も  $|\{ \tan(\omega_0 t') \}^{-1}| < 1$  だから、

$$\frac{\psi_0^2}{4} \cdot \frac{\{ \tan(\omega_0 t') \}^{-1}}{1 + \{ \tan(\omega_0 t') \}^{-2}} = \frac{\psi_0^2}{4} \cdot \frac{\tan(\omega_0 t')}{\{ \tan(\omega_0 t') \}^2 + 1} = \frac{\psi_0^2}{8} \sin(2\omega_0 t') \quad \text{となる。}$$

よって(A2-8.5)は (II-1) の場合、 $\psi_0$  の 4 乗 (1/ $\gamma$  の 4 乗) 以上を落とした近似で

$$z = \langle v_z \rangle t' + v \cdot \frac{\psi_0^2}{8\omega_0} \sin(2\omega_0 t') \quad (2-7.15)$$

となることが示せた。

(II-2)  $1 > |\tan(\omega_0 t')| > 1 / \left(1 + \frac{\psi_0^2}{4}\right)$  のとき

ここでは、 $\tan(\omega_0 t') > 0$  のときのみを考える。(負の場合も全く同様に出来るので)

$\psi_0$  の 4 乗 ( $1/\gamma$  の 4 乗) 以上を落とした場合、 $1 / \left(1 + \frac{\psi_0^2}{4}\right) \approx 1 - \frac{\psi_0^2}{4}$  だから、

$\tan(\omega_0 t') = 1 - \alpha \frac{\psi_0^2}{4}$  ,  $0 \leq \alpha \leq 1$  とおくと、

$$\left(1 + \frac{\psi_0^2}{4}\right) \tan(\omega_0 t') \approx \left(1 + \frac{\psi_0^2}{4}\right) \left(1 - \alpha \frac{\psi_0^2}{4}\right) \approx 1 - \alpha \frac{\psi_0^2}{4} + \frac{\psi_0^2}{4} = \tan(\omega_0 t') + \frac{\psi_0^2}{4} \quad \text{となる。}$$

ここで  $\tan(\omega_0 t') = x$  とおくと、 $\frac{\psi_0^2}{4} \ll 1$  であるため  $x$  は 1 に近い値である。すると、

$$\begin{aligned} \tan^{-1}\left(x + \frac{\psi_0^2}{4}\right) &\approx \tan^{-1}(x) + \frac{\psi_0^2}{4} \left\{ \tan^{-1}(x) \right\}' \\ &= \tan^{-1}(x) + \frac{\psi_0^2}{4} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \tan^{-1}(x) + \frac{\psi_0^2}{4} \cdot \frac{x + \alpha \frac{\psi_0^2}{4}}{1+x^2} \\ &\approx \tan^{-1}(x) + \frac{\psi_0^2}{4} \cdot \frac{x}{1+x^2} = \tan^{-1}(\tan(\omega_0 t')) + \frac{\psi_0^2}{4} \cdot \frac{\tan(\omega_0 t')}{1+\tan^2(\omega_0 t')} \end{aligned}$$

となる。これより(I),(II-1)と同様に

$$z = \langle v_z \rangle t' + v \cdot \frac{\psi_0^2}{8\omega_0} \sin(2\omega_0 t') \quad (2-7.15)$$

となることが判る。

結局、(2-7.15)は $\psi_0$ の4乗 ( $1/\gamma$ の4乗) 以上を落とした近似であると判明した。

**Appendix.2-9** アンジュレータスペクトルの積分表示[13]

$$\mathbf{F}_\omega = \frac{ie\omega}{4\pi\epsilon_0 cT} \int_0^{T'} [\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \boldsymbol{\beta}(t'))] \exp\{i\omega(t' - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}(t')/c)\} dt' \quad (\text{A2-9.1})$$

$$\mathbf{Q}_k = \int_0^{T'} \boldsymbol{\beta}(t') \exp\{i\omega(t' - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}(t')/c)\} dt' \quad (\text{A2-9.2})$$

ここでは、より一般的に楕円型アンジュレータスペクトルに関して同様の計算を行い、合わせてプラナー型の結果を示す。

まず初めに、 $\mathbf{n}_0 = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$  と  $\mathbf{n}_0 \times \{\mathbf{n}_0 \times \boldsymbol{\beta}\}$  は垂直だから、互いに

$\mathbf{n}_0$  に直行する単位ベクトル  $\mathbf{m}_\parallel$ ,  $\mathbf{m}_\perp$  を導入すると便利である。 $\mathbf{m}_\parallel$  を x-z 平面上に採ると、

$$\mathbf{m}_\parallel = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta \cos^2\phi}} (\cos\theta, 0, -\cos\phi \sin\theta) = (1 - \sin^2\theta \sin^2\phi)^{-\frac{1}{2}} (\cos\theta, 0, -\cos\phi \sin\theta)$$

$$\text{ここで } \theta \ll 1 \text{ に限り } \theta^2 \text{ の項を落とすと、 } \mathbf{m}_\parallel = (1, 0, -\theta \cos\phi) \quad (\text{A2-9.3})$$

すると  $\mathbf{m}_\perp$  の形として、

$$\mathbf{m}_\perp = (a^2 + b^2 + c^2)^{-\frac{1}{2}} (a, b, c) \quad \text{と表せる。条件 } \mathbf{m}_\perp \perp \mathbf{m}_\parallel \text{ を使い、 } \mathbf{m}_\perp \cdot \mathbf{m}_\parallel = 0 \text{ より、}$$

$$a \cos\theta - c \cos\phi \sin\theta = 0 \quad \text{これより } a = c \cos\phi \sin\theta / \cos\theta$$

$$\text{また、 } \mathbf{m}_\perp \cdot \mathbf{n}_0 = 0 \text{ より } a \cos\phi \sin\theta + b \sin\phi \sin\theta + c \cos\theta = 0$$

この2式から  $c \cos^2\phi \sin^2\theta + b \sin\phi \sin\theta \cos\theta + c \cos^2\theta = 0$  となる。これより、

$$c = -b \sin\phi \sin\theta \cos\theta / (1 - \sin^2\phi \sin^2\theta) \quad , \quad a = -b \sin\phi \cos\phi \sin^2\theta / (1 - \sin^2\phi \sin^2\theta)$$

$d = 1 - \sin^2\phi \sin^2\theta$  として条件  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  から  $b$  を求める。

$$\begin{aligned} 1 &= a^2 + b^2 + c^2 = \frac{b^2}{d^2} (\sin^2\phi \cos^2\phi \sin^4\theta + d^2 + \sin^2\phi \sin^2\theta \cos^2\theta) \\ &= \frac{b^2}{d^2} \{1 + \sin^2\phi \sin^2\theta (\cos^2\phi \sin^2\theta - 2 + \sin^2\phi \sin^2\theta + \cos^2\theta)\} \\ &= \frac{b^2}{d^2} \{1 + \sin^2\phi \sin^2\theta (\sin^2\theta - 2 + \cos^2\theta)\} = \frac{b^2}{d^2} \{1 - \sin^2\phi \sin^2\theta\} = \frac{b^2}{d} \end{aligned}$$

これより、 $b = \sqrt{d} = \sqrt{1 - \sin^2\phi \sin^2\theta}$  として、

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_\perp &= \left( -\sin\phi \cos\phi \sin^2\theta \frac{\sqrt{d}}{d}, \sqrt{d}, -\sin\phi \sin\theta \cos\theta \frac{\sqrt{d}}{d} \right) \\ &= (1 - \sin^2\theta \sin^2\phi)^{\frac{1}{2}} (-\sin\phi \cos\phi \sin^2\theta, 1 - \sin^2\phi \sin^2\theta, -\sin\phi \sin\theta \cos\theta)\end{aligned}$$

ここで  $\mathbf{m}_\parallel$  と同様に  $\theta^2$  の項を落とすと、

$$\mathbf{m}_\perp = (0, 1, -\theta \sin\phi) \quad (\text{A2-9.4})$$

[2-8-1]では、Kim の表記と合わせるために、単位ベクトル  $\mathbf{m}_\parallel$ ,  $\mathbf{m}_\perp$  方向成分をそれぞれ  $\sigma$  成分,  $\pi$  成分と呼び直し表記する。

$$\mathbf{A} \times \{\mathbf{B} \times \mathbf{C}\} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad \text{より、}$$

$$\begin{aligned}\left[ \mathbf{n}_0 \times \{\mathbf{n}_0 \times \boldsymbol{\beta}\} \right]_\sigma &= (\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\beta})(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{m}_\parallel) - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{m}_\parallel) = -\beta_x + \beta_z \theta \cos\phi \approx \theta \cos\phi - \frac{K_y}{\gamma} \cos(u) \\ &= \frac{K_y}{\gamma} \left\{ \frac{\gamma}{K_y} \cos\phi - \cos(u) \right\} = \frac{K_y}{\gamma} \left\{ \frac{\gamma}{K_y} \varphi - \cos(u) \right\} \\ \left[ \mathbf{n}_0 \times \{\mathbf{n}_0 \times \boldsymbol{\beta}\} \right]_\pi &= (\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\beta})(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{m}_\perp) - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{m}_\perp) = -\beta_y + \beta_z \theta \sin\phi \approx \theta \sin\phi - \frac{K_x}{\gamma} \sin(u) \\ &= \frac{K_x}{\gamma} \left\{ \frac{\gamma}{K_x} \cos\phi - \cos(u) \right\} = \frac{K_x}{\gamma} \left\{ \frac{\gamma}{K_x} \psi - \cos(u) \right\}\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_k &= \int_0^{T'} \boldsymbol{\beta}(t') \exp \left\{ i \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \omega_1(\theta) (t' - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}(t')/c) \right\} dt' \\ &= \int_0^{T'} \frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{\omega_0} \exp \left\{ i \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} [\omega_0 t' - A \sin(\omega_0 t') + B \cos(\omega_0 t') + X \sin(2\omega_0 t')] \right\} \omega_0 dt' \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{\omega_0} \exp \left\{ i \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} [u - A \sin(u) + B \cos(u) + X \sin(2u)] \right\} du\end{aligned} \quad (\text{A2-9.5})$$

ここで、 $\xi_n = \frac{n}{1 + \gamma\theta + (K_x^2 + K_y^2)/2}$  とおくと、(A2-9.5)の A,B,X をそれぞれ次のように

置き直して、

$$p_1 = \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} A = \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \cdot \frac{\beta\omega_1(\theta) K_y}{\omega_0 \gamma} \sin\theta \cos\phi \approx \frac{\omega}{\omega_1(0)} \cdot \frac{2K_y\gamma\theta \cos\phi}{1+(K_x^2+K_y^2)/2} \quad (\text{A2-9.6})$$

$$p_2 = \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} B = \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \cdot \frac{\beta\omega_1(\theta) K_x}{\omega_0 \gamma} \sin\theta \sin\phi \approx \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \cdot \frac{2K_x\gamma\theta \sin\phi}{1+(K_x^2/2+K_y^2/2)} \quad (\text{A2-9.7})$$

$$q = \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} X = \frac{-\omega}{\omega_1(\theta)} \frac{\omega_1(K_x^2 - K_y^2)}{c \cdot 8\gamma^2\omega_0} \cos\theta \sin(2\omega_0 t') \approx \frac{1}{4} \cdot \frac{K_y^2 - K_x^2}{1+(K_x^2/2+K_y^2/2)} \cdot \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \quad (\text{A2-9.8})$$

以上より、

$$(B_E)_{\sigma, \pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} \gamma\varphi - K_y \cos(u) \\ \gamma\psi - K_x \sin(u) \end{pmatrix} \exp \left\{ i \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} u - p_1 \sin(u) + p_2 \cos(u) + q \sin(2u) \right\} du \quad (\text{A2-9.9})$$

と置けば、

$$(F_\omega)_{\sigma, \pi} = \frac{ie\omega}{4\varepsilon_0 c T} \frac{\pi}{\gamma} \begin{pmatrix} (B_E)_\sigma \\ (B_E)_\pi \end{pmatrix} = \frac{ie\omega}{4\varepsilon_0 c} \cdot \frac{\omega_1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{\gamma\omega_0} \begin{pmatrix} (B_E)_\sigma \\ (B_E)_\pi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{d\omega} \left( \frac{dP}{d\Omega} \right) \right] &= \frac{4\pi\varepsilon_0 c}{\omega_1(\theta)^2} \cdot N_u^2 \left| \frac{ie\omega}{4\pi\varepsilon_0 c} \cdot \frac{\omega_1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{\gamma\omega_0} \right|^2 \left\{ (B_E)_\sigma^2 + (B_E)_\pi^2 \right\} \left[ \frac{\sin\{\pi N_u(\omega/\omega_1(\theta))\}}{N_u \sin\{\pi(\omega/\omega_1(\theta))\}} \right]^2 \\ &= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c} \cdot \left\{ \frac{\omega}{\omega_1(0)} \right\}^2 \cdot \frac{N_u^2 \gamma^2}{1+(K_x^2+K_y^2)/2} \left\{ (B_E)_\sigma^2 + (B_E)_\pi^2 \right\} \left[ \frac{\sin\{\pi N_u(\omega/\omega_1(\theta))\}}{N_u \sin\{\pi(\omega/\omega_1(\theta))\}} \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{A2-9.10})$$

ここから、バンド幅  $\Delta\omega$  あたりの光子数に換算して、楕円アンジュレータのスペクトルは、

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\text{photon}}}{d\Omega} &= \frac{d}{d\omega} \left( \frac{dP}{d\Omega} \right)_{\text{total}} \cdot \Delta\omega \cdot \frac{I(A)}{e} \cdot \frac{1}{\hbar\omega} \quad (\text{photons/sec/rad}^2) \\ &= \left\{ \frac{\omega}{\omega_1(0)} \right\}^2 \cdot \frac{N_u^2 \gamma^2}{1+(K_x^2+K_y^2)/2} \left\{ (B_E)_\sigma^2 + (B_E)_\pi^2 \right\} \left[ \frac{\sin\{\pi N_u(\omega/\omega_1(\theta))\}}{N_u \sin\{\pi(\omega/\omega_1(\theta))\}} \right]^2 \cdot \alpha \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{I(A)}{e} \end{aligned} \quad (\text{A2-9.11})$$

ここで、 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}$  は構造微細定数であり、 $\alpha \approx \frac{1}{137}$  である。

(A2-9.11)において、 $K_x = 0$ としたのがプラナー型アンジュレータの場合であり、

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\text{photon}}}{d\Omega} &= \frac{d}{d\omega} \left( \frac{dP}{d\Omega} \right)_{\text{total}} \cdot \Delta\omega \cdot \frac{I(A)}{e} \cdot \frac{1}{\hbar\omega} \quad (\text{photons/sec/rad}^2) \\ &= \left\{ \frac{\omega}{\omega_1(0)} \right\}^2 \cdot \frac{N_u^2 K_y^2 \gamma^2}{1 + K_y^2/2} \left\{ (B_p)_\sigma^2 + (B_p)_\pi^2 \right\} \left[ \frac{\sin\{\pi N_u (\omega/\omega_1(\theta))\}}{N_u \sin\{\pi (\omega/\omega_1(\theta))\}} \right]^2 \cdot \alpha \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{I(A)}{e} \end{aligned} \quad (\text{A2-9.12})$$

ここで、

$$(B_p)_{\sigma, \pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} \gamma\phi/K_y - \cos(u) \\ \gamma\psi/K_y \end{pmatrix} \exp \left\{ i \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} u - p \sin(u) + q \sin(2u) \right\} du \quad (\text{A2-9.13})$$

$$p = \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} A = \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \cdot \frac{\beta\omega_1(\theta) K_y}{\omega_0 \gamma} \sin\theta \cos\phi \approx \frac{\omega}{\omega_1(0)} \cdot \frac{2K_y \gamma \theta \cos\phi}{1 + K_y^2/2} \quad (\text{A2-9.14})$$

$$q = \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} X = \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \frac{\omega_1(K_y^2)}{c \ 8\gamma^2 \omega_0} \cos\theta \sin(2\omega_0 t') \approx \frac{1}{4} \cdot \frac{K_y^2}{1 + K_y^2/2} \cdot \frac{\omega}{\omega_1(\theta)} \quad (\text{A2-9.15})$$

**Appendix.2-10** プラナー型アンジュレータスペクトルの Bessel 関数表示[4,14-15]

まず、観測者系では、 $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$  であり、電子系では、 $T' = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\lambda_u}{\langle v_z \rangle}$  である。いま、

$$t = t' + R_0 - \frac{\mathbf{r}(t') \cdot \mathbf{n}_0}{\omega_1} \quad \text{において、} \quad T = t_2 - t_1 \quad , \quad T' = t_2' - t_1' \quad \text{とすれば、}$$

$$T = T' - \left( \mathbf{r}(t_2') \cdot \mathbf{n}_0 - \mathbf{r}(t_1') \cdot \mathbf{n}_0 \right) / c \quad (\text{A2-10.1})$$

プラナー型アンジュレータ内での電子軌道を改めて記せば、

$$\text{アンジュレータ磁場：} \quad \mathbf{B} = (0, B_{y0} \sin(\omega_0 z), 0)$$

$$\text{速度：} \quad \boldsymbol{\beta} = \left( \psi_0 \cos(\omega_0 t'), 0, \beta \cdot \left( 1 - \frac{\psi_0^2}{4} \right) + \beta \cdot \frac{\psi_0^2}{4} \cos(2 \cdot \omega_0 t') \right) \quad (\text{A2-10.2})$$

$$\text{座標：} \quad \mathbf{r} = \left( \frac{v\psi_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t'), 0, v \cdot \left( 1 - \frac{\psi_0^2}{4} \right) t' - v \cdot \frac{\psi_0^2}{8\omega_0} \sin(2\omega_0 t') \right) \quad (\text{A2-10.3})$$

ここで、 $\omega_0 = \frac{2\pi}{\lambda_u}$  である。

すると、(A2-10.1)の T は  $t_2' = t_1' + T'$  より、

$$T = T' \left\{ 1 - \frac{v}{c} \left( 1 - \frac{\psi_0^2}{4} \right) \cos \theta \right\} \approx T' \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \right) \cdot \left( 1 - \frac{K^2}{4\gamma^2} \right) \cdot \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right\}$$

この内、微少量の2次まで残せば、

$$T \approx T' \left\{ 1 - 1 + \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{K^2}{4\gamma^2} + \frac{\theta^2}{2} \right\} = \frac{T'}{2\gamma^2} \left( 1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2 \theta^2 \right)$$

これがアンジュレータ1次光の周期となり、波長と振動数はそれぞれ、

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left( 1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2 \theta^2 \right), \quad \omega_1 = \frac{2\gamma^2 \omega_0}{1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2 \theta^2} \quad (\text{A2-10.4})$$

$$\text{ここで、} \quad \delta = \left\{ 1 - \frac{v}{c} \left( 1 - \frac{\psi_0^2}{4} \right) \cos \theta \right\} \approx \frac{1}{2\gamma^2} \left( 1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2 \theta^2 \right) \quad (\text{A2-10.5})$$

とおく。次に(2-8.12)式中の  $k\omega_1(t' - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}(t')/c)$  計算を行う。

$$\begin{aligned}
\omega_1(t' - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}(t')/c) &= \omega_1 t' - \omega_1 \left\{ \frac{v\psi_0}{c\omega_0} \sin\theta \cos\phi \sin(\omega_0 t') + \cos\theta \left\{ \frac{v}{c} \left(1 - \frac{\psi_0^2}{4}\right) t' - \frac{v}{c} \cdot \frac{\psi_0^2}{8\omega_0} \sin(2\omega_0 t') \right\} \right\} \\
&= \omega_1 t' \left\{ 1 - \beta \left(1 - \frac{\psi_0^2}{4}\right) \cos\theta \right\} - \omega_1 \left\{ \frac{v\psi_0}{c\omega_0} \sin\theta \cos\phi \sin(\omega_0 t') - \frac{v}{c} \cdot \frac{\psi_0^2}{8\omega_0} \sin(2\omega_0 t') \right\} \\
&= \omega_1 \delta t' - \left\{ \frac{\beta\psi_0}{\delta} \sin\theta \cos\phi \sin(\omega_0 t') - \frac{\beta\psi_0^2}{8\delta} \sin(2\omega_0 t') \right\} \\
&= \omega_0 t' - A \sin(\omega_0 t') + B \sin(2\omega_0 t')
\end{aligned} \tag{A2-10.6}$$

となる。ここで、

$$A = \frac{\beta\psi_0}{\delta} \sin\theta \cos\phi \approx \frac{K}{\gamma} \cdot \frac{2\gamma^2}{1 + K^2/2 + \gamma^2\theta^2} \cdot (\beta \sin\theta) \cos\phi \approx \frac{2K\gamma\theta \cos\phi}{1 + K^2/2 + \gamma^2\theta^2} \tag{A2-10.7}$$

$$B = \frac{\beta\psi_0^2}{8\delta} \cos\theta \approx \frac{K^2}{8\gamma^2} \cdot \frac{2\gamma^2 \beta \cos\theta}{1 + K^2/2 + \gamma^2\theta^2} \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{K^2/2}{1 + K^2/2 + \gamma^2\theta^2} \tag{A2-10.8}$$

とおいた。すると、

$$\mathbf{Q}_k = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{kx} \\ \mathcal{Q}_{kz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta\psi_0 \int_0^{T'} \cos(\omega_0 z) \exp\{ik(\omega_0 t' - A \sin(\omega_0 t') + B \sin(2\omega_0 t'))\} dt' \\ \beta \int_0^{T'} \exp\{ik(\omega_0 t' - A \sin(\omega_0 t') + B \sin(2\omega_0 t'))\} dt' \end{pmatrix} \tag{A2-10.9}$$

これらをベッセル関数で表す。

$$J_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \cdot \frac{1}{(n+j)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2j} \text{ に対して母関数 } f(t) = \exp\left(\frac{xt}{2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{xt^{-1}}{2}\right) \text{ を使う}$$

と、次の関係が得られる（導出略）。

$$\exp(ix \sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \cdot \exp(in\theta)$$

これを使い、 $\eta = \omega_0 t'$  とおくと、

$$\begin{aligned}
& \exp\{ik(\omega_0 t' - A \sin(\omega_0 t') + B \sin(2\omega_0 t'))\} \\
&= \exp(ik\eta) \exp(-ikA \sin \eta) \exp(ikB \sin 2\eta) \\
&= \exp(ik\eta) \left\{ \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(kA) \cdot \exp(-iq\eta) \right\} \left\{ \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kB) \cdot \exp(2ip\eta) \right\} \quad (\text{A2-10.10}) \\
&= \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(kA) \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kB) \exp\{i\eta(k-q+2p)\}
\end{aligned}$$

となり、

$$Q_{kx} = \beta\psi_0 \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(kA) \cdot \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kB) \int_0^{2\pi} \cos \eta \exp\{i\eta(k-q+2p)\} \frac{d\eta}{\omega_0}$$

ここで  $\cos \theta = \frac{1}{2} \{ \exp(i\theta) + \exp(-i\theta) \}$  より、

$$Q_{kx} = \frac{1}{2} \beta\psi_0 \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(kA) \cdot \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kB) \int_0^{2\pi} \left[ \exp\{i\eta(1+k-q+2p)\} + \exp\{i\eta(-1+k-q+2p)\} \right] \frac{d\eta}{\omega_0}$$

ここで積分部分は、

- 1)  $q = 2p + k + 1$  または  $q = 2p + k - 1$  のとき  $2\pi$
- 2) それ以外のとき  $0$

これより

$$Q_{kx} = \frac{\pi\beta\psi_0}{\omega_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kB) \{ J_{2p+k+1}(kA) + J_{2p+k-1}(kA) \} \quad (\text{A2-10.11})$$

と表される。同様に  $Q_{kz}$  もベッセル関数を用いて、

$$Q_{kz} = \frac{2\pi\beta}{\omega_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kB) J_{2p+k}(kA) \quad (\text{A2-10.12})$$

$$\text{ここで、 } S_j = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kB) J_{2p+k+j}(kA) \quad (\text{A2-10.13})$$

とおけば

$$\begin{cases} Q_{kx} = \frac{\pi\psi_0}{\omega_0} \{ S_1 + S_{-1} \} \\ Q_{kz} = \frac{2\pi}{\omega_0} S_0 \end{cases} \quad (\text{A2-10.14})$$

次に  $\mathbf{n}_0 \times \{ \mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q}_k \}$  の計算を行う。Appendix.2-9 より、

$$\mathbf{m}_{\parallel} = (1, 0, -\theta \cos \phi) \quad (\text{A2-9.3})$$

$$\mathbf{m}_{\perp} = (0, 1, -\theta \sin \phi) \quad (\text{A2-9.4})$$

(A2-9.3), (A2-9.4)を使えば、 $\mathbf{A} \times \{\mathbf{B} \times \mathbf{C}\} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$  より、

$\mathbf{n}_0 \times \{\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q}_k\} = (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{Q}_k)\mathbf{n}_0 - \mathbf{Q}_k$  となり、成分で書けば、

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{n}_0 \times \{\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q}_k\}]_{\parallel} &= (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{Q}_k)(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{m}_{\parallel}) - (\mathbf{Q}_k \cdot \mathbf{m}_{\parallel}) = -Q_{kx} + Q_{kz} \theta \cos \phi \\ [\mathbf{n}_0 \times \{\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q}_k\}]_{\perp} &= (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{Q}_k)(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{m}_{\perp}) - (\mathbf{Q}_k \cdot \mathbf{m}_{\perp}) = -Q_{ky} + Q_{kz} \theta \sin \phi \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2-10.15})$$

以上より、(9-2), (9-16), (9-19)を使ってプラナー型アンジュレータのスペクトルの  $k$  次光は、

$$\left\{ \begin{aligned} [\mathbf{F}_k]_{\parallel} &= \frac{iek\omega_1}{4\pi\epsilon_0 c T} \{-Q_{kx} + Q_{kz} \theta \cos \phi\} = \frac{iek\omega_1^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \{-\psi_0 (S_1 + S_{-1}) + 2S_0 \theta \cos \phi\} \\ [\mathbf{F}_k]_{\perp} &= \frac{iek\omega_1^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \{2S_0 \theta \sin \phi\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2-10.16})$$

$$\text{ここで、} S_j = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kB) J_{2p+k+j}(kA) \quad (\text{A2-10.17})$$

であり、

$$A = \frac{2K\gamma\theta \cos \phi}{1 + K^2/2 + \gamma^2\theta^2} \quad (\text{A2-10.18})$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot \frac{K^2/2}{1 + K^2/2 + \gamma^2\theta^2} \quad (\text{A2-10.19})$$

である。こうして、 $z$  軸近傍の観測角に対する  $k$  次光強度として次の(A2-10.20)が得られる。

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{d\omega} \left( \frac{dP}{d\Omega} \right)_{total} \right]_{\mathbf{k}} &= \frac{4\pi\epsilon_0 c}{\omega_1^2} \cdot N_u^2 |\mathbf{F}_k|^2 \left[ \frac{\sin \{\pi N_u (\omega/\omega_1 - k)\}}{\pi N_u (\omega/\omega_1 - k)} \right]^2 \\ &= \frac{4\pi\epsilon_0 c}{\omega_1^2} \cdot N_u^2 \left| \frac{iek\omega_1^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \right|^2 \left[ \{-\psi_0 (S_1 + S_{-1}) + 2S_0 \theta \cos \phi\}^2 + \{2S_0 \theta \sin \phi\}^2 \right] \left[ \frac{\sin \{\pi N_u (\omega/\omega_1 - k)\}}{\pi N_u (\omega/\omega_1 - k)} \right]^2 \\ &= \frac{e^2 k^2}{4\pi\epsilon_0 c} \cdot \frac{\gamma^4 N_u^2}{\{1 + \gamma^2\theta^2 + K^2/2\}^2} \left[ \{-\psi_0 (S_1 + S_{-1}) + 2S_0 \theta \cos \phi\}^2 + \{2S_0 \theta \sin \phi\}^2 \right] \left[ \frac{\sin \{\pi N_u (\omega/\omega_1 - k)\}}{\pi N_u (\omega/\omega_1 - k)} \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{A2-10.20})$$

## Appendix.2-11 楕円型アンジュレータスペクトルの Bessel 関数表示[16]

本文での円（楕円）偏光アンジュレータ放射の議論のために Yamamoto[16]の一般論を再現する。楕円型アンジュレータ内での電子軌道を改めて記せば、

$$\text{アンジュレータ磁場： } \mathbf{B} = (B_{x0} \cos(\omega_0 z), B_{y0} \sin(\omega_0 z), 0)$$

速度：

$$\boldsymbol{\beta} = \left( \frac{K_y \beta}{\gamma} \cos(\omega_0 t'), \frac{K_x \beta}{\gamma} \sin(\omega_0 t'), \beta \left( 1 - \frac{K_x^2 + K_y^2}{4\gamma^2} \right) + \beta \frac{K_x^2 - K_y^2}{4\gamma^2} \cos(2\omega_0 t') \right) \quad (\text{A2-11.1})$$

座標：

$$\mathbf{r} = \left( \frac{K_y \beta c}{\gamma \omega_0} \sin(\omega_0 t'), \frac{-K_x \beta c}{\gamma \omega_0} \cos(\omega_0 t'), \beta c \left( 1 - \frac{K_x^2 + K_y^2}{4\gamma^2} \right) t' + \beta c \frac{K_x^2 - K_y^2}{4\gamma^2 \cdot 2\omega_0} \cos(2\omega_0 t') \right) \quad (\text{A2-11.2})$$

プラナー型と同様に電子の運動周期と観測者の見る周期の関係は

$$T = \frac{T'}{2\gamma^2} \left( 1 + \frac{K_x^2 + K_y^2}{2} + \gamma^2 \theta^2 \right) \quad (\text{A2-11.3})$$

次に(9-8)に相当する位相部分は、

$$\begin{aligned} \omega_1(t' - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}(t')/c) &= \omega_1 t' - \omega_1 \frac{v K_y}{c \gamma \omega_0} \sin \theta \cos \phi \sin(\omega_0 t') + \omega_1 \frac{v K_x}{c \gamma \omega_0} \sin \theta \sin \phi \cos(\omega_0 t') \\ &\quad - \frac{v \omega_1}{c} \cos \theta \cdot \left( 1 - \frac{K_x^2 + K_y^2}{4} \right) t' - \frac{\omega_1 v}{c} \frac{1}{8\gamma^2 \omega_0} (K_x^2 - K_y^2) \cos \theta \sin(2\omega_0 t') \\ &= \omega_0 t' - A \sin(\omega_0 t') + B \cos(\omega_0 t') + X \sin(2\omega_0 t') \end{aligned} \quad (\text{A2-11.4})$$

と書けば、

$$A = \frac{\beta \omega_1}{\omega_0} \frac{K_y}{\gamma} \sin \theta \cos \phi \approx \frac{2K_y \gamma \theta \cos \phi}{1 + (K_x^2/2 + K_y^2/2) + \gamma^2 \theta^2} \quad (\text{A2-11.5})$$

$$B = \frac{\beta \omega_1}{\omega_0} \frac{K_x}{\gamma} \sin \theta \sin \phi \approx \frac{2K_x \gamma \theta \sin \phi}{1 + (K_x^2/2 + K_y^2/2) + \gamma^2 \theta^2} \quad (\text{A2-11.6})$$

$$X = \frac{-\omega_1 (K_x^2 - K_y^2)}{c \cdot 8\gamma^2 \omega_0} \cos \theta \sin(2\omega_0 t') \approx \frac{1}{4} \cdot \frac{K_y^2 - K_x^2}{1 + (K_x^2/2 + K_y^2/2) + \gamma^2 \theta^2} \quad (\text{A2-11.7})$$

これらを使って、

$$Q_{kx} = \beta \frac{K_y}{\gamma} \int_0^{T'} \cos(\omega_0 z) \exp\{ik(\omega_0 t' - A \sin(\omega_0 t') + B \cos(\omega_0 t') + X \sin(2\omega_0 t'))\} dt'$$

プラナー型と同様に、 $\exp(ix \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \cdot \exp(in\theta)$  を使い、ベッセル関数で展開

する。 $\eta = \omega_0 t'$  として、

$$-A \sin \eta + B \cos \eta = -\sqrt{A^2 + B^2} \sin(\eta - \phi) \text{ と合成する。ここで } \tan \phi = \frac{B}{A} = \frac{K_x}{K_y} \tan \theta$$

$$\text{さらに、 } L = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{2\gamma\theta}{1 + \gamma^2 \theta^2 + (K_x^2 + K_y^2)/2} \cdot \sqrt{K_x^2 \sin^2 \phi + K_y^2 \cos^2 \phi} \text{ として、 } Q$$

の各成分を計算する。

$$\begin{aligned} Q_{kx} &= \beta \frac{K_y}{\gamma} \int_0^{T'} \cos(\omega_0 t') \exp(ik\eta) \exp(-ikL \sin(\eta - \phi)) \exp(ikX \sin 2\eta) dt' \\ &= \beta \frac{K_y}{\gamma} \int_0^{T'} \cos(\omega_0 t') \exp(ik\eta) \left\{ \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(kL) \cdot \exp(-iq(\eta - \phi)) \right\} \left\{ \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kX) \cdot \exp(2ip\eta) \right\} \frac{d\eta}{\omega_0} \\ &= \beta \frac{K_y}{\gamma} \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(kL) \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kX) \exp(iq\phi) \int_0^{T'} \cos(\omega_0 t') \exp\{i\eta(k - q + 2p)\} \frac{d\eta}{\omega_0} \end{aligned}$$

ここで、 $\cos \theta = \frac{1}{2} \{ \exp(i\theta) + \exp(-i\theta) \}$  より、上式の積分部分は

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\omega_0} \left[ \exp\{i\eta(1 + k - q + 2p)\} + \exp\{i\eta(-1 + k - q + 2p)\} \right] d\eta$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{\omega_0} & \dots q = 2p + k \pm 1 \\ 0 & \dots q \neq 2p + k \pm 1 \end{cases}$$

$$Q_{kx} = \frac{\pi\beta K_y}{\gamma\omega_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kX) \{ J_{2p+k+1}(kL) \exp\{i(2p+k+1)\phi\} + J_{2p+k-1}(kL) \exp\{i(2p+k-1)\phi\} \}$$

(A2-11.8)

同様に、

$$\begin{aligned}
Q_{ky} &= \beta \frac{K_x}{\gamma} \int_0^{T'} \sin(\omega_0 t') \exp(ik\eta) \exp(-ikL \sin(\eta - \varphi)) \exp(ikX \sin 2\eta) dt' \\
&= \beta \frac{K_y}{\gamma} \int_0^{T'} \sin(\omega_0 t') \exp(ik\eta) \left\{ \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(kL) \cdot \exp(-iq(\eta - \varphi)) \right\} \left\{ \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kX) \cdot \exp(2ip\eta) \right\} \frac{d\eta}{\omega_0} \\
&= \beta \frac{K_y}{\gamma} \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(kL) \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kX) \exp(iq\varphi) \int_0^{T'} \sin(\omega_0 t') \exp\{i\eta(k - q + 2p)\} \frac{d\eta}{\omega_0}
\end{aligned}$$

同じくこの積分部は、 $\sin \theta = \frac{1}{2} \{ \exp(i\theta) - \exp(-i\theta) \}$  より、

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \frac{-i}{2\omega_0} \left[ \exp\{i\eta(1+k-q+2p)\} - \exp\{i\eta(-1+k-q+2p)\} \right] d\eta \\
&= \begin{cases} -\frac{\pi}{\omega_0} & \cdots \cdots q = 2p+k+1 \\ +\frac{\pi}{\omega_0} & \cdots \cdots q = 2p+k-1 \\ 0 & \cdots \cdots q \neq 2p+k \pm 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

これらをまとめて、

$$Q_{ky} = \frac{i\pi\beta K_x}{\gamma\omega_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kX) \{ J_{2p+k+1}(kL) \exp\{i(2p+k+1)\varphi\} - J_{2p+k-1}(kL) \exp\{i(2p+k-1)\varphi\} \} \quad (\text{A2-11.9})$$

$$\begin{aligned}
Q_{kz} &= \int_0^{T'} \left[ \beta \left\{ 1 - \frac{1}{4\gamma^2} (K_x^2 + K_y^2) \right\} \right] \exp(ik\eta) \exp(-ikL \sin(\eta - \varphi)) \exp(ikX \sin 2\eta) dt' \\
&\approx \beta \int_0^{T'} \exp(ik\eta) \left\{ \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(kL) \cdot \exp(-iq(\eta - \varphi)) \right\} \left\{ \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kX) \cdot \exp(2ip\eta) \right\} \frac{d\eta}{\omega_0} \\
&= \beta \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(kL) \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kX) \exp(iq\varphi) \int_0^{T'} \exp\{i\eta(k - q + 2p)\} \frac{d\eta}{\omega_0}
\end{aligned}$$

同じくこの積分部は、 $\begin{cases} \frac{\pi}{\omega_0} & \cdots \cdots q = 2p+k \\ 0 & \cdots \cdots q \neq 2p+k \end{cases}$  となり、

$$Q_{kz} = \frac{2\pi\beta}{\omega_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kX) J_{2p+k}(kL) \exp\{i(2p+k)\varphi\} \quad (\text{A2-11.10})$$

$$\text{ここで、} S_j = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kX) J_{2p+k+j}(kL) \exp\{i(k+2p+j)\varphi\} \quad (\text{A2-11.11})$$

とおけば、楕円型アンジュレータのスペクトルのk次光をまとめて、

$$\left\{ \begin{aligned}
[\mathbf{F}_k]_{\parallel} &= \frac{iek\omega_1}{4\pi\varepsilon_0cT} \{-Q_{kx} + Q_{kz} \theta \cos \phi\} = \frac{iek\omega_1^2}{8\pi^2\varepsilon_0\gamma c} \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \{2S_0\gamma\theta \cos \phi - K_y(S_1 + S_{-1})\} \\
[\mathbf{F}_k]_{\perp} &= \frac{iek\omega_1}{4\pi\varepsilon_0cT} \{-Q_{ky} + Q_{kz} \theta \sin \phi\} = \frac{iek\omega_1^2}{8\pi^2\varepsilon_0\gamma c} \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \{2S_0\gamma\theta \sin \phi - iK_x(S_1 - S_{-1})\}
\end{aligned} \right. \quad (\text{A2-11.12})$$

## Appendix.2-12 アンジュレータ放射パワーの角度分布[19,20]

以下に、Kim[19], Yamamoto[20] の表式を求める。図 2-2 の座標系において、

$$\begin{cases} \mathbf{n} = (\sin \varphi, \sin \psi, \cos \varphi \cos \psi) \approx \left( \varphi, \psi, 1 - \frac{1}{2}(\varphi^2 + \psi^2) \right) \\ \mathbf{e}_\sigma = \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z \sin \varphi \approx \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z \varphi \\ \mathbf{e}_\pi = \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z \sin \psi \approx \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z \psi \end{cases} \quad (\text{A2-12.1})$$

まず加速を受けた電子による放射のパワーの分布は、次式で表せる。

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4\pi c} \cdot \frac{I}{e} \int \left| n \times \left\{ n \times \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} \right\} \right|^2 dt \quad (\text{A2-12.2})$$

ここで、 $\boldsymbol{\beta} = (\beta_x, \beta_y, \beta_z)$  とおくと、

$$\beta^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2, \quad \beta^2 = 1 - \gamma^{-2} \quad \text{より、}$$

$$\beta_z = \left\{ 1 - \gamma^{-2} - (\beta_x^2 + \beta_y^2) \right\}^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{1}{2}(\beta_x^2 + \beta_y^2) \quad (\text{A2-12.3})$$

次に、 $\kappa = \frac{dt}{dt'} = 1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}(t')$  とおくと、(A2-12.1), (A2-12.3)より、

$$\begin{aligned} \kappa &\approx 1 - \varphi\beta_x - \psi\beta_y - \left\{ 1 - \frac{1}{2}(\varphi^2 + \psi^2) \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\gamma^2} + \beta_x^2 + \beta_y^2 \right) \right\} \\ &\approx 1 - \varphi\beta_x - \psi\beta_y - \left\{ 1 - \frac{1}{2}(\varphi^2 + \psi^2) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\gamma^2} + \beta_x^2 + \beta_y^2 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2}(\varphi^2 - 2\varphi\beta_x + \beta_x^2) + \frac{1}{2}(\psi^2 - 2\psi\beta_y + \beta_y^2) + \frac{1}{2\gamma^2} = \frac{1}{2}(\varphi - \beta_x)^2 + \frac{1}{2}(\psi - \beta_y)^2 + \frac{1}{2\gamma^2} \end{aligned} \quad (\text{A2-12.4})$$

更に、 $\frac{d}{dt'} \boldsymbol{\beta}(t') = \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')$  と書くと、

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = (\dot{\beta}_x, \dot{\beta}_y, -\beta_x \dot{\beta}_x - \beta_y \dot{\beta}_y) \quad (\text{A2-12.5})$$

これから、

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t') &= \varphi \dot{\beta}_x + \psi \dot{\beta}_y - (\beta_x \dot{\beta}_x + \beta_y \dot{\beta}_y) \left\{ 1 - \frac{1}{2}(\varphi^2 + \psi^2) \right\} \\ &\approx (\varphi - \beta_x) \dot{\beta}_x + (\psi - \beta_y) \dot{\beta}_y\end{aligned}\tag{A2-12.6}$$

計算すべきパワー表示(10-2)の積分部分を  $\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) = \mathbf{b}$  と置き、 $\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{b})$  を求める。

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) = \frac{dt'}{dt} \cdot \frac{d}{dt'} \left\{ \frac{dt'}{dt} \cdot \frac{d}{dt'} \mathbf{r}(t) \right\} = \frac{1}{\kappa} \frac{d}{dt'} \left\{ \frac{\boldsymbol{\beta}}{\kappa} \right\} \\ &= \frac{1}{\kappa} \left\{ \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}} \kappa - \boldsymbol{\beta} \dot{\kappa}}{\kappa^2} \right\} = \frac{1}{\kappa^3} \left\{ \dot{\boldsymbol{\beta}} \kappa + \boldsymbol{\beta} (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right\} \\ &= \frac{1}{\kappa^3} \left[ \kappa (\dot{\beta}_x, \dot{\beta}_y, -\beta_x \dot{\beta}_x - \beta_y \dot{\beta}_y) + \left\{ (\varphi - \beta_x) \dot{\beta}_x + (\psi - \beta_y) \dot{\beta}_y \right\} \left( \beta_x, \beta_y, 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{1}{2}(\beta_x^2 + \beta_y^2) \right) \right]\end{aligned}$$

これより

$$\begin{cases} b_x = \frac{1}{\kappa^3} \dot{\beta}_x \{ \kappa + (\varphi - \beta_x) \beta_x \} \\ b_y = \frac{1}{\kappa^3} \dot{\beta}_y \{ \kappa + (\psi - \beta_y) \beta_y \} \\ b_z \approx \frac{1}{\kappa^3} \left[ \kappa (-\beta_x \dot{\beta}_x - \beta_y \dot{\beta}_y) + \left\{ (\varphi - \beta_x) \dot{\beta}_x + (\psi - \beta_y) \dot{\beta}_y \right\} \right] \\ \left[ = \frac{1}{\kappa^3} \left[ \dot{\beta}_x \{ (\varphi - (1 + \kappa) \beta_x) \} + \dot{\beta}_y \{ (\psi - (1 + \kappa) \beta_y) \} \right] \right] \end{cases}\tag{A2-12.7}$$

次に  $\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{n} - \mathbf{b}$  より、 $\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{b})$  を  $\sigma$  成分と  $\pi$  成分に分けて、

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{b}) \Big|_{\sigma} &= [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{n} - \mathbf{b}]_x - [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{n} - \mathbf{b}]_z \varphi \\ &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) \varphi - b_x - ((\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) n_z - b_z) \varphi \\ &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) \left\{ \varphi - \left\{ 1 - \frac{1}{2}(\varphi^2 + \psi^2) \right\} \varphi \right\} - b_x + b_z \varphi \\ &\approx -\frac{1}{\kappa^3} \dot{\beta}_x \{ \kappa + (\varphi - \beta_x) \beta_x \} + \frac{\varphi}{\kappa^3} \left[ \dot{\beta}_x \{ (\varphi - (1 + \kappa) \beta_x) \} + \dot{\beta}_y \{ (\psi - (1 + \kappa) \beta_y) \} \right] \\ &= -\frac{1}{\kappa^3} \dot{\beta}_x \{ \kappa + (\varphi - \beta_x) \beta_x - \varphi (\varphi - (1 + \kappa) \beta_x) \} + \frac{\varphi}{\kappa^3} \dot{\beta}_y \{ (\psi - (1 + \kappa) \beta_y) \} \\ &= \frac{1}{\kappa^3} \dot{\beta}_x \{ -\kappa - \varphi \beta_x + \beta_x^2 + \varphi^2 - (1 + \kappa) \beta_x \varphi \} + \frac{\varphi}{\kappa^3} \dot{\beta}_y \{ (\psi - (1 + \kappa) \beta_y) \} \\ &\approx \frac{1}{\kappa^3} \dot{\beta}_x \{ -\kappa + (\varphi - \beta_x)^2 \} + \frac{\varphi}{\kappa^3} \dot{\beta}_y \{ (\psi - \beta_y) \}\end{aligned}$$

(A2-12.8)

ここで最後の近似では、 $\kappa \ll 1$ として $1 + \kappa \approx 1$ とした。同様に $\pi$ 成分に対しても、

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{b}) \Big|_{\pi} &= [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{n} - \mathbf{b}]_y - [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{n} - \mathbf{b}]_z \psi \\
&= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) \psi - b_y - ((\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) n_z - b_z) \psi \\
&= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) \left\{ \psi - \left[ 1 - \frac{1}{2} (\varphi^2 + \psi^2) \right] \psi \right\} - b_y + b_z \psi \tag{A2-12.9} \\
&\approx -\frac{1}{\kappa^3} \dot{\beta}_y \left\{ \kappa + (\psi - \beta_y) \beta_y \right\} + \frac{\psi}{\kappa^3} \left[ \dot{\beta}_x \left\{ (\varphi - (1 + \kappa) \beta_x) \right\} + \dot{\beta}_y \left\{ (\psi - (1 + \kappa) \beta_y) \right\} \right] \\
&\approx \frac{1}{\kappa^3} \dot{\beta}_y \left\{ -\kappa + (\psi - \beta_y)^2 \right\} + \frac{\psi}{\kappa^3} \dot{\beta}_x \left\{ (\varphi - \beta_x) \right\}
\end{aligned}$$

(A2-12.8), (A2-12.9)を使って(A2-12.2)をまとめると、

$$\left( \frac{dP_{\sigma}}{d\Omega} \right) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4\pi c^3} \cdot \frac{I}{e} \int \frac{1}{\kappa^5} \left( \left[ \dot{\beta}_x \left\{ -\kappa + (\varphi - \beta_x)^2 \right\} + \varphi \dot{\beta}_y (\psi - \beta_y) \right]^2 + \left[ \dot{\beta}_y \left\{ -\kappa + (\psi - \beta_y)^2 \right\} + \psi \dot{\beta}_x (\varphi - \beta_x) \right]^2 \right) dt' \tag{A2-12.10}$$

(A2-12.10)を用いて、楕円アンジュレータの放射パワーの角度分布を計算する。その後プレーナー型の場合を導出する。楕円アンジュレータ内での電子の速度と軌道は、それぞれ、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta} &= \left( \frac{K_y \beta}{\gamma} \cos(\omega_0 t'), \frac{K_x \beta}{\gamma} \sin(\omega_0 t'), \beta \left( 1 - \frac{K_x^2 + K_y^2}{4\gamma^2} \right) + \beta \frac{K_x^2 - K_y^2}{4\gamma^2} \cos(2\omega_0 t') \right) \\
\mathbf{r} &= \left( \frac{K_y \beta c}{\gamma \omega_0} \sin(\omega_0 t'), \frac{-K_x \beta c}{\gamma \omega_0} \cos(\omega_0 t'), \beta c \left( 1 - \frac{K_x^2 + K_y^2}{4\gamma^2} \right) t' + \beta c \frac{K_x^2 - K_y^2}{4\gamma^2 \cdot 2\omega_0} \cos(2\omega_0 t') \right)
\end{aligned}$$

(A2-12.1)の単位ベクトル $\mathbf{n}$ において  $\theta = \sqrt{\varphi^2 + \psi^2}$  とおくと

$$\mathbf{n} = (\varphi, \psi, 1 - \theta^2/2) \tag{A2-12.11}$$

[(A2-12.10)に必要な計算]

$$\begin{aligned}
\kappa &= 1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} \\
&= 1 - \left\{ \frac{\varphi K_y \beta}{\gamma} \cos(\omega_0 t') + \frac{\psi K_x \beta}{\gamma} \sin(\omega_0 t') + (1 - \theta^2/2) \left\{ \beta \left( 1 - \frac{K_x^2 + K_y^2}{4\gamma^2} \right) + \beta \frac{K_x^2 - K_y^2}{4\gamma^2} \cos(2\omega_0 t') \right\} \right\} \\
&\approx 1 - \left\{ \frac{\varphi K_y}{\gamma} \cos(\omega_0 t') + \frac{\psi K_x}{\gamma} \sin(\omega_0 t') + 1 - \theta^2/2 - \gamma^{-2}/2 + \frac{K_x^2 + K_y^2}{4\gamma^2} + \frac{K_x^2 - K_y^2}{4\gamma^2} \cos(2\omega_0 t') \right\} \\
&= \frac{1}{2\gamma^2} \left( 1 + \gamma^2 \theta^2 + \frac{K_x^2 + K_y^2}{2} \right) - \frac{\varphi K_y}{\gamma} \cos(\omega_0 t') - \frac{\psi K_x}{\gamma} \sin(\omega_0 t') - \frac{K_x^2 - K_y^2}{4\gamma^2} \cos(2\omega_0 t')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\gamma^2} \left( 1 + \gamma^2 (\varphi^2 + \psi^2) + \frac{K_x^2 + K_y^2}{2} \right) - \frac{\varphi K_y}{\gamma} \cos(\omega_0 t') - \frac{\psi K_x}{\gamma} \sin(\omega_0 t') - \frac{K_x^2 - K_y^2}{4\gamma^2} \{2\cos^2(\omega_0 t') - 1\} \\
&= \frac{1}{2\gamma^2} + \left[ \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi K_y}{\gamma} \cos(\omega_0 t') + \frac{K_y^2}{2\gamma^2} \cos^2(\omega_0 t') \right] + \left[ \frac{\psi^2}{2} + \frac{K_x^2}{2\gamma^2} - \frac{\psi K_x}{\gamma} \sin(\omega_0 t') - \frac{K_x^2}{2\gamma^2} \{1 - \sin^2(\omega_0 t')\} \right] \\
&= \frac{1}{2\gamma^2} \left[ 1 + \{K_y \cos(\omega_0 t') - \gamma\varphi\}^2 + \{K_x \sin(\omega_0 t') - \gamma\psi\}^2 \right] \\
&\cdot (\varphi - \beta_x)^2 = \left( \varphi - \frac{K_y}{\gamma} \cos(\omega_0 t') \right)^2 = \frac{1}{\gamma^2} (K_y \cos(\omega_0 t') - \gamma\varphi)^2 \\
&\cdot (\psi - \beta_y)^2 = \left( \psi - \frac{K_x}{\gamma} \sin(\omega_0 t') \right)^2 = \frac{1}{\gamma^2} (K_x \sin(\omega_0 t') - \gamma\psi)^2 \\
&\cdot -\kappa + (\varphi - \beta_x)^2 = \frac{-1}{2\gamma^2} \left[ 1 - \{K_y \cos(\omega_0 t') - \gamma\varphi\}^2 + \{K_x \sin(\omega_0 t') - \gamma\psi\}^2 \right] = -\frac{1 + X^2 - Y^2}{2\gamma^2} \\
&\cdot -\kappa + (\psi - \beta_y)^2 = \frac{-1}{2\gamma^2} \left[ 1 + \{K_y \cos(\omega_0 t') - \gamma\varphi\}^2 - \{K_x \sin(\omega_0 t') - \gamma\psi\}^2 \right] = -\frac{1 - X^2 + Y^2}{2\gamma^2}
\end{aligned}$$

ここで、 $X = K_x \sin(\omega_0 t') - \gamma\psi$ 、 $Y = K_y \cos(\omega_0 t') - \gamma\varphi$ とおいた。すると、

$$\kappa = \frac{1}{2\gamma^2} [1 + X^2 + Y^2] \equiv \frac{D}{2\gamma^2} \quad \text{と書ける。一方、}$$

$$\begin{aligned}
&\cdot \varphi(\psi - \beta_y) \approx (\varphi - \beta_x)(\psi - \beta_y) = \left( \varphi - \frac{K_y}{\gamma} \cos(\omega_0 t') \right) \left( \psi - \frac{K_x}{\gamma} \sin(\omega_0 t') \right) = \frac{XY}{\gamma^2} \\
&\cdot \psi(\varphi - \beta_x) \approx (\psi - \beta_y)(\varphi - \beta_x) = \frac{XY}{\gamma^2}
\end{aligned}$$

以上の結果を用いて、(A2-12.10)は楕円アンジュレータの場合、 $\omega_0 t' = \xi$ と変数変換して

$$\begin{aligned}
\left( \frac{dP_\sigma}{d\Omega} \right) &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4\pi c} \cdot \frac{I}{e} \int \frac{1}{\kappa^5} \left( \left[ -\dot{\beta}_x \frac{1 + X^2 - Y^2}{2\gamma^2} + \dot{\beta}_y \frac{XY}{\gamma^2} \right]^2 \right. \\
&\quad \left. \left[ -\dot{\beta}_y \frac{1 + X^2 - Y^2}{2\gamma^2} + \dot{\beta}_x \frac{XY}{\gamma^2} \right]^2 \right) dt' \\
&= N_u \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 c} \cdot \gamma^4 \omega_0 \cdot \frac{I}{e} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{D^5} \left( \left[ -K_y (1 + X^2 - Y^2) \sin \xi + 2K_x XY \cos \xi \right]^2 \right. \\
&\quad \left. \left[ -K_x (1 + X^2 - Y^2) \cos \xi + 2K_y XY \sin \xi \right]^2 \right) dt'
\end{aligned} \tag{A2-12.12}$$

$$\text{ここで、 } X = K_x \sin(\omega_0 t') - \gamma\psi, \quad Y = K_y \cos(\omega_0 t') - \gamma\varphi \quad (\text{A2-12.13})$$

である。このように楕円アンジュレータの、周波数積分した放射パワーの角分布の  $\sigma$  成分と  $\pi$  成分が計算される。

最後に実際に良く用いられる、全放射パワーの角分布： $\frac{dP}{d\Omega} = \frac{dP_\sigma}{d\Omega} + \frac{dP_\pi}{d\Omega}$  を求める。

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4\pi c^3} \cdot \frac{I}{e} \int \frac{1}{\kappa^5} \left\{ \left( -\dot{\beta}_x \frac{1+X^2-Y^2}{2\gamma^2} + \dot{\beta}_y \frac{XY}{\gamma^2} \right)^2 + \left( -\dot{\beta}_y \frac{1+X^2-Y^2}{2\gamma^2} + \dot{\beta}_x \frac{XY}{\gamma^2} \right)^2 \right\} dt'$$

この被積分部を  $S$  とおくと

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\kappa^5} \frac{1}{(2\gamma^2)^2} \left\{ \left( -\dot{\beta}_x (1+X^2-Y^2) + 2\dot{\beta}_y XY \right)^2 + \left( -\dot{\beta}_y (1+X^2-Y^2) + \dot{\beta}_x XY \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{\kappa^5} \frac{1}{(2\gamma^2)^2} \left\{ \begin{aligned} &\dot{\beta}_x^2 (1+X^2-Y^2)^2 - 4\dot{\beta}_x \dot{\beta}_y XY (1+X^2-Y^2) + 4\dot{\beta}_y^2 X^2 Y^2 \\ &+ \dot{\beta}_y^2 (1-X^2+Y^2)^2 - 4\dot{\beta}_x \dot{\beta}_y XY (1+X^2-Y^2) + 4\dot{\beta}_x^2 X^2 Y^2 \end{aligned} \right\} \\ &= \frac{1}{\kappa^5} \frac{1}{(2\gamma^2)^2} \left\{ \begin{aligned} &\dot{\beta}_x^2 (1+X^2+Y^2)^2 - 4\dot{\beta}_x Y^2 - 4\dot{\beta}_x^2 X^2 Y^2 + 4\dot{\beta}_y^2 X^2 Y^2 \\ &+ \dot{\beta}_y^2 (1+X^2+Y^2)^2 - 4\dot{\beta}_y X^2 - 4\dot{\beta}_y^2 X^2 Y^2 + 4\dot{\beta}_x^2 X^2 Y^2 - 8\dot{\beta}_x \dot{\beta}_y XY \end{aligned} \right\} \\ &= \frac{1}{\kappa^5} \frac{1}{(2\gamma^2)^2} \left\{ (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2) (1+X^2+Y^2)^2 - 4\dot{\beta}_x Y^2 - 4\dot{\beta}_y X^2 - 8\dot{\beta}_x \dot{\beta}_y XY \right\} \\ &= \frac{1}{\kappa^5} \frac{1}{(2\gamma^2)^2} \left\{ (\dot{\beta}_x^2 + \dot{\beta}_y^2) (1+X^2+Y^2)^2 - 4(\dot{\beta}_x Y + \dot{\beta}_y X)^2 \right\} \end{aligned}$$

ここで、 $\kappa = \frac{1+X^2+Y^2}{2\gamma^2} = \frac{D}{2\gamma^2}$ ,  $\dot{\beta}_x = -\frac{K_y \beta \omega_0}{\gamma} \sin(\omega_0 t')$ ,  $\dot{\beta}_y = \frac{K_x \beta \omega_0}{\gamma} \cos(\omega_0 t')$  を使い、

$$S = (2\gamma^2)^3 \left( \frac{\beta \omega_0}{\gamma} \right)^2 \left[ \frac{1}{D^3} (K_y^2 \sin^2(\omega_0 t') + K_x^2 \cos^2(\omega_0 t')) - \frac{1}{D^5} \left\{ 4(K_y \sin(\omega_0 t') Y - K_x \cos(\omega_0 t') X)^2 \right\} \right]$$

となる。すると求める放射パワーの角分布は、

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{8\gamma^4 \omega_0^2}{4\pi c} \cdot \frac{IN_u}{e\omega_0} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{D^3} (K_y^2 \sin^2 \xi + K_x^2 \cos^2 \xi) - \frac{1}{D^5} \left\{ 4(K_y \sin \xi Y - K_x \cos \xi X)^2 \right\} \right] d\xi \\ &= \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 c} \gamma^4 \omega_0 (K_x^2 + K_y^2) \cdot \frac{IN_u}{e} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{L_y^2 \sin^2 \xi + L_x^2 \cos^2 \xi}{D^3} - \frac{4(L_y \sin \xi Y - L_x \cos \xi X)^2}{D^5} \right] d\xi \end{aligned}$$

(A2-12.14)

と表せる。ここで  $L_{x,y} = \frac{K_{x,y}}{\sqrt{K_x^2 + K_y^2}}$  (A2-12.15)

である。以上に示したように、p33 (2-9.7) Yamamoto の式を(A2-12.14) として再導出することができた。

プラナー型アンジュレータに関しては、(A2-12.12), (A2-12.13)において  $K_x = 0$  において、

$$\left( \begin{array}{c} \frac{dP_\sigma}{d\Omega} \\ \frac{dP_\pi}{d\Omega} \end{array} \right) = N_u \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 c} \cdot \gamma^4 \omega_0 \cdot \frac{I}{e} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K_y^2}{\pi} \cdot \frac{\sin^2 \xi}{D^5} \left( \begin{array}{c} (1 + X^2 - Y^2)^2 \\ 4X^2 Y^2 \end{array} \right) d\xi \quad (\text{A2-12.16})$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = N_u \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 c} \gamma^4 \omega_0 K_y^2 \cdot \frac{I}{e} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \xi \left[ \frac{1}{D^3} - \frac{4Y^2}{D^5} \right] d\xi \quad (\text{A2-12.17})$$

となり、K-J.Kim の導出した式と一致する。

### Appendix.3-1 APPLE-II 型 EPU の磁場分布

4 列の磁石列の z 軸上に作る磁場分布は、磁場の重ね合わせとして、

$$B_y(z) = B_{y0} \cos(kz + \theta_1) + B_{y0} \cos(kz + \theta_2) + B_{y0} \cos(kz + \theta_3) + B_{y0} \cos(kz + \theta_4) \quad (\text{A3-1.1})$$

$$B_x(z) = B_{x0} \cos(kz + \theta_1) - B_{x0} \cos(kz + \theta_2) + B_{x0} \cos(kz + \theta_3) - B_{x0} \cos(kz + \theta_4) \quad (\text{A3-1.2})$$

#### (I) Symmetric mode の磁場分布

(A3-1.1) (A3-1.2)において

Symmetric mode の位相を、 $\theta_1 = \theta_3 = \phi/2$ ,  $\theta_2 = \theta_4 = -\phi/2$  とおけば、

$$\begin{aligned} B_y(z) &= 2B_{y0} \cos(kz + \phi/2) + 2B_{y0} \cos(kz - \phi/2) \\ &= 2B_{y0} \{ \cos(kz) \cos(\phi/2) - \sin(kz) \sin(\phi/2) + \cos(kz) \cos(\phi/2) + \sin(kz) \sin(\phi/2) \} \\ &= 4B_{y0} \cos(\phi/2) \cos(kz) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_x(z) &= 2B_{x0} \cos(kz + \phi/2) - 2B_{x0} \cos(kz - \phi/2) \\ &= 2B_{x0} \{ \cos(kz) \cos(\phi/2) - \sin(kz) \sin(\phi/2) - \cos(kz) \cos(\phi/2) - \sin(kz) \sin(\phi/2) \} \\ &= -4B_{x0} \sin(\phi/2) \sin(kz) \end{aligned}$$

となり、(3-2.1)式となる。

また、円偏光の場合、 $B_y(z) = B_x(z)$  となる位相は  $B_{y0} \cos(\phi/2) = B_{x0} \sin(\phi/2)$  で決まり、

$\phi/2 = \tan^{-1}(B_{y0}/B_{x0})$  である。

同様に楕円偏光モード (By:Bx=2:1) では、条件： $B_{y0} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = 2B_{x0} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$  より、

$\frac{\phi}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{B_{y0}}{2B_{x0}}\right)$  となるときである。

#### (II) Anti-symmetric mode の磁場分布

(A3-1.1) (A3-1.2)において

Anti-symmetric mode の位相を、 $\theta_1 = -\theta_3 = \theta$ ,  $\theta_2 = \theta_4 = 0$  とおけば、

$$\begin{aligned}
B_y(z) &= B_{y_0} \cos(kz + \phi) + B_{y_0} \cos(kz) + B_{y_0} \cos(kz - \phi) + B_{y_0} \cos(kz) \\
&= B_{y_0} \{ \cos(kz) \cos(\phi) - \sin(kz) \sin(\phi) + \cos(kz) \cos(\phi) + \sin(kz) \sin(\phi) \} + 2B_{y_0} \cos(kz) \\
&= 2B_{y_0} \{ 1 + \cos(\phi) \} \cos(kz) \\
&= 2B_{y_0} \{ 1 + \cos^2(\phi/2) - \sin^2(\phi/2) \} \cos(kz) \\
&= 4B_{y_0} \cos^2(\phi/2) \cos(kz)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_x(z) &= B_{x_0} \cos(kz + \phi) - B_{x_0} \cos(kz) + B_{x_0} \cos(kz - \phi) - B_{x_0} \cos(kz) \\
&= 2B_{x_0} \{ \cos(kz) \cos(\phi) - \sin(kz) \sin(\phi) + \cos(kz) \cos(\phi) + \sin(kz) \sin(\phi) - \cos(kz) \} \\
&= 2B_{x_0} \{ \cos(\phi) - 1 \} \cos(kz) \\
&= 2B_{x_0} \{ \cos^2(\phi/2) - \sin^2(\phi/2) - 1 \} \cos(kz) \\
&= -4B_{x_0} \sin^2(\phi/2) \cos(kz)
\end{aligned}$$

となり(3-2.2)式となる。また、 $45^\circ$  直線偏光の場合、Anti-symmetric mode では、 $\pm 45^\circ$  直線偏光での使用を想定している。この時、

位相は、 $B_{y_0} \cos^2(\phi/2) = B_{x_0} \sin^2(\phi/2)$  から決まり、 $\phi = 2 \tan^{-1} \left( \sqrt{B_{y_0} / B_{x_0}} \right)$  である。

## Appendix.3-2 6列型 EPU の磁場分布

### ・磁場の符号の定義

下流側から見て X 方向：(N→S) の磁場方向が、左から右を+

Y 方向：(N→S) の磁場方向が、下から上を+

### ・原点の定義

各磁石列は仮に上流から縦磁化、横磁化、の順で繰り返し並ぶと考える。最上流の縦磁化極中心を Z 軸原点とし、コサイン磁場で表す。

・ZERO 配置での各軸の最上流縦磁化極の極性を次のようにする。

X1 : N	Y1 : S	X3 : S
X2 : S	Y2 : S	X4 : N

・周期長 160mm の場合、波数を  $k = \frac{2\pi}{\lambda_u} = \frac{2\pi}{160\text{mm}}$  とおく。

・軸上での磁場はそれぞれ、

$$B_x = B_{x\text{-side}} \quad B_y = B_{y\text{-center}} + B_{y\text{-side}} \quad \text{と書けば、}$$

$$B_{x\text{-side}} = (B_{x\text{-side}})_0 \{ \cos(kz + k \cdot X1) - \cos(kz + k \cdot X3) + \cos(kz + k \cdot X2) - \cos(kz + k \cdot X4) \}$$

$$B_{y\text{-side}} = (B_{y\text{-side}})_0 \{ -\cos(kz + k \cdot X1) + \cos(kz + k \cdot X3) - \cos(kz + k \cdot X2) + \cos(kz + k \cdot X4) \}$$

$$B_{y\text{-center}} = (B_{y\text{-center}})_0 \{ \cos(kz + k \cdot Y1) - \cos(kz + k \cdot Y2) \}$$

### (I) 磁場の重ね合わせ

(I-1) 中央部磁石列が作る垂直磁場の計算

$$\begin{aligned} B_{y\text{-center}} &= (B_{y\text{-center}})_0 \{ \cos(kz + k \cdot Y1) - \cos(kz + k \cdot Y2) \} \\ &= (B_{y\text{-center}})_0 \left\{ \begin{array}{l} \cos kz \cdot \cos(k \cdot Y1) - \sin kz \cdot \sin(k \cdot Y1) \\ \quad \quad \quad - \cos kz \cdot \cos(k \cdot Y2) + \sin kz \cdot \sin(k \cdot Y2) \end{array} \right\} \\ &= (B_{y\text{-center}})_0 \left[ \cos kz \{ \cos(k \cdot Y1) - \cos(k \cdot Y2) \} - \sin kz \{ \sin(k \cdot Y1) - \sin(k \cdot Y2) \} \right] \end{aligned}$$

ここで

$$\left[ \begin{array}{l} \cos(A+B) - \cos(A-B) = -2 \sin A \sin B, \quad \cos(A+B) + \cos(A-B) = 2 \cos A \cos B \\ \sin(A+B) - \sin(A-B) = 2 \cos A \sin B, \quad \sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \sin A \cos B \end{array} \right]$$

より、 $A = Y1 + Y2$ ,  $B = Y1 - Y2$  とおけば

$$\begin{aligned}
\cos(k \cdot Y1) - \cos(k \cdot Y2) &= \cos\left(\frac{k}{2}(Y1+Y2) + \frac{k}{2}(Y1-Y2)\right) - \cos\left(\frac{k}{2}(Y1+Y2) - \frac{k}{2}(Y1-Y2)\right) \\
&= -2 \sin\left(\frac{k}{2}(Y1+Y2)\right) \sin\left(\frac{k}{2}(Y1-Y2)\right) \\
\sin(k \cdot Y1) - \sin(k \cdot Y2) &= \sin\left(\frac{k}{2}(Y1+Y2) + \frac{k}{2}(Y1-Y2)\right) - \sin\left(\frac{k}{2}(Y1+Y2) - \frac{k}{2}(Y1-Y2)\right) \\
&= 2 \cos\left(\frac{k}{2}(Y1+Y2)\right) \sin\left(\frac{k}{2}(Y1-Y2)\right)
\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
B_{y-center} &= (B_{y-center})_0 \begin{bmatrix} -2 \cos kz \cdot \sin\left\{\frac{1}{2}k(Y1+Y2)\right\} \sin\left\{\frac{1}{2}k(Y1-Y2)\right\} \\ -2 \sin kz \cdot \cos\left\{\frac{1}{2}k(Y1+Y2)\right\} \sin\left\{\frac{1}{2}k(Y1-Y2)\right\} \end{bmatrix} \\
&= -2 (B_{y-center})_0 \sin\left\{\frac{k}{2}(Y1-Y2)\right\} \left\{ \cos kz \cdot \sin\left\{\frac{k}{2}(Y1+Y2)\right\} + \sin kz \cdot \cos\left\{\frac{k}{2}(Y1+Y2)\right\} \right\} \\
&= -2 (B_{y-center})_0 \sin\left\{\frac{1}{2}k(Y1-Y2)\right\} \sin\left\{kz + \frac{1}{2}k(Y1+Y2)\right\}
\end{aligned} \tag{A3-1.1}$$

(I-2) サイド部磁石列が作る水平磁場の計算

$$\begin{aligned}
B_{x-side} &= (B_{x-side})_0 \left\{ \begin{array}{l} \cos(kz + k \cdot X1) - \cos(kz + k \cdot X3) \\ + \cos(kz + k \cdot X2) - \cos(kz + k \cdot X4) \end{array} \right\} \\
&= (B_{x-side})_0 \left\{ \begin{array}{l} \cos kz \cdot \cos(k \cdot X1) - \sin kz \cdot \sin(k \cdot X1) \\ \quad - \cos kz \cdot \cos(k \cdot X3) + \sin kz \cdot \sin(k \cdot X3) \\ + \cos kz \cdot \cos(k \cdot X2) - \sin kz \cdot \sin(k \cdot X2) \\ \quad - \cos kz \cdot \cos(k \cdot X4) + \sin kz \cdot \sin(k \cdot X4) \end{array} \right\} \\
&= (B_{x-side})_0 \left[ \begin{array}{l} \cos kz \{ \cos(k \cdot X1) - \cos(k \cdot X3) \} \\ \quad - \sin kz \{ \sin(k \cdot X1) - \sin(k \cdot X3) \} \\ + \cos kz \{ \cos(k \cdot X2) - \cos(k \cdot X4) \} \\ \quad - \sin kz \{ \sin(k \cdot X2) - \sin(k \cdot X4) \} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\cos(k \cdot X1) - \cos(k \cdot X3) &= -2 \sin\left(\frac{k}{2}(X1+X3)\right) \sin\left(\frac{k}{2}(X1-X3)\right) \\
\sin(k \cdot X1) - \sin(k \cdot X3) &= 2 \cos\left(\frac{k}{2}(X1+X3)\right) \sin\left(\frac{k}{2}(X1-X3)\right) \quad \text{等を使えば、}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{x-side} &= (B_{x-side})_0 \begin{bmatrix} \cos kz \left\{ -2 \sin \left( \frac{k}{2} (X1 + X3) \right) \sin \left( \frac{k}{2} (X1 - X3) \right) \right\} \\ - \sin kz \left\{ 2 \cos \left( \frac{k}{2} (X1 + X3) \right) \sin \left( \frac{k}{2} (X1 - X3) \right) \right\} \\ + \cos kz \left\{ -2 \sin \left( \frac{k}{2} (X2 + X4) \right) \sin \left( \frac{k}{2} (X2 - X4) \right) \right\} \\ - \sin kz \left\{ 2 \cos \left( \frac{k}{2} (X2 + X4) \right) \sin \left( \frac{k}{2} (X2 - X4) \right) \right\} \end{bmatrix} \\
&= (B_{x-side})_0 \sin \frac{k}{2} (X1 - X3) \left[ -2 \cos kz \cdot \left\{ \sin \frac{k}{2} (X1 + X3) \right\} - 2 \sin kz \left\{ \cos \frac{k}{2} (X1 + X3) \right\} \right] \\
&+ (B_{x-side})_0 \sin \frac{k}{2} (X2 - X4) \left[ -2 \cos kz \cdot \left\{ \sin \frac{k}{2} (X2 + X4) \right\} - 2 \sin kz \left\{ \cos \frac{k}{2} (X2 + X4) \right\} \right] \\
&= -2 (B_{x-side})_0 \begin{bmatrix} \sin \frac{1}{2} k (X1 - X3) \cdot \sin \left\{ kz + \frac{1}{2} k (X1 + X3) \right\} \\ + \sin \frac{1}{2} k (X2 - X4) \cdot \sin \left\{ kz + \frac{1}{2} k (X2 + X4) \right\} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(A3-1.2)

(I-3) サイド部磁石列の作る垂直磁場成分

$$\begin{aligned}
y-side &= (B_{y-side})_0 \left\{ \begin{array}{l} -\cos(kz + k \cdot X1) + \cos(kz + k \cdot X3) \\ -\cos(kz + k \cdot X2) + \cos(kz + k \cdot X4) \end{array} \right\} \\
&= (B_{y-side})_0 \left\{ \begin{array}{l} -\cos kz \cdot \cos(k \cdot X1) + \sin kz \cdot \sin(k \cdot X1) \\ + \cos kz \cdot \cos(k \cdot X3) - \sin kz \cdot \sin(k \cdot X3) \\ -\cos kz \cdot \cos(k \cdot X2) + \sin kz \cdot \sin(k \cdot X2) \\ + \cos kz \cdot \cos(k \cdot X4) - \sin kz \cdot \sin(k \cdot X4) \end{array} \right\} \\
&= (B_{y-side})_0 \left[ \begin{array}{l} -\cos kz \{ \cos(k \cdot X1) - \cos(k \cdot X3) \} + \sin kz \{ \sin(k \cdot X1) - \sin(k \cdot X3) \} \\ -\cos kz \{ \cos(k \cdot X2) - \cos(k \cdot X4) \} + \sin kz \{ \sin(k \cdot X2) - \sin(k \cdot X4) \} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( B_{y-side} \right)_0 \left[ \begin{array}{l} -\cos kz \left\{ -2 \sin \frac{1}{2} k (X1 + X3) \sin \frac{1}{2} k (X1 - X3) \right\} \\ \qquad \qquad \qquad + \sin kz \left\{ 2 \cos \frac{1}{2} k (X1 + X3) \sin \frac{1}{2} k (X1 - X3) \right\} \\ -\cos kz \left\{ -2 \sin \frac{1}{2} k (X2 + X4) \sin \frac{1}{2} k (X2 - X4) \right\} \\ \qquad \qquad \qquad + \sin kz \left\{ 2 \cos \frac{1}{2} k (X2 + X4) \sin \frac{1}{2} k (X2 - X4) \right\} \end{array} \right] \\
&= 2 \left( B_{y-side} \right)_0 \sin \frac{k}{2} (X1 - X3) \left[ \cos kz \cdot \left\{ \sin \frac{k}{2} (X1 + X3) \right\} + \sin kz \cdot \left\{ \cos \frac{k}{2} (X1 + X3) \right\} \right] \\
&\quad - 2 \left( B_{y-side} \right)_0 \sin \frac{k}{2} (X2 - X4) \left[ \cos kz \cdot \left\{ \sin \frac{k}{2} (X2 + X4) \right\} + \sin kz \cdot \left\{ \cos \frac{k}{2} (X2 + X4) \right\} \right] \\
&= 2 \left( B_{y-side} \right)_0 \left[ \begin{array}{l} \sin \frac{1}{2} k (X1 - X3) \cdot \sin \left\{ kz + \frac{1}{2} k (X1 + X3) \right\} \\ \qquad \qquad \qquad - \sin \frac{1}{2} k (X2 - X4) \cdot \sin \left\{ kz + \frac{1}{2} k (X2 + X4) \right\} \end{array} \right]
\end{aligned} \tag{A3-1.3}$$

## (II) 6列型 EPU の磁場分布

実際に6列型 EPU として運用する場合には6列の磁石列の位相に次の条件を付ける。

$$X1 = X3 \quad , \quad X2 = X4 \tag{A3-1.4}$$

$$\text{そこで改めて、} \quad X1 = X3 \equiv XU \quad , \quad X2 = X4 \equiv XD \quad , \quad Y1 \equiv YU \quad , \quad Y2 \equiv YD \tag{A3-1.5}$$

とおくと(A3-1.1) (A3-1.2) (A3-1.3)はそれぞれ、

$$B_{y-center} = -2 \left( B_{y-center} \right)_0 \sin \left\{ \frac{1}{2} k (YU - YD) \right\} \sin \left\{ kz + \frac{1}{2} k (YU + YD) \right\}$$

$$B_{x-side} = -4 \left( B_{x-side} \right)_0 \left[ \sin \frac{1}{2} k (XU - XD) \cdot \sin \left\{ kz + \frac{1}{2} k (XU + XD) \right\} \right]$$

$$B_{y-side} = 0$$

これより求める6列型 EPU の磁場分布は(3-3.1),(3-3.2)の形で表される。

$$B_y = B_{y0} \sin \left\{ \frac{\pi}{\lambda_u} (YU - YD) \right\} \sin \left\{ \frac{2\pi}{\lambda_u} z + \frac{\pi}{\lambda_u} (YU + YD) \right\} \tag{3-3.1}$$

$$B_x = B_{x0} \sin \left\{ \frac{\pi}{\lambda_u} (XU - XD) \right\} \sin \left\{ \frac{2\pi}{\lambda_u} z + \frac{\pi}{\lambda_u} (XU + XD) \right\} \tag{3-3.2}$$

## Appendix.5-1 アンジュレータ内での電子の位相

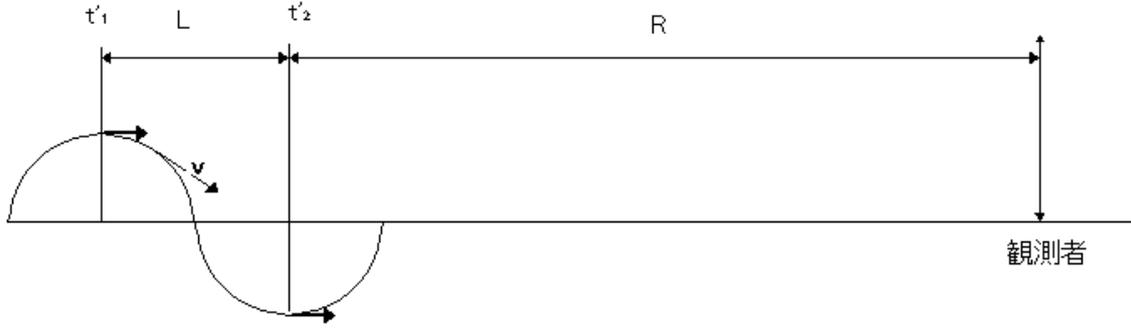


図 A5-1 観測者が受け取る放射の時間間隔

図 A5-1 で、電子が時刻  $t'_1, t'_2$  で放射した光を観測者が時刻  $t_1, t_2$  に受け取ると考えると  $t_1 = t'_1 + (L+R)/c$  ,  $t_2 = t'_2 + R/c$  である。上図 2 箇所での電子の位相差は、

$$\Delta\phi = \omega(t_2 - t_1) = \frac{2\pi(t_2 - t_1)}{T} = \frac{2\pi}{T} \left( (t'_2 - t'_1) - \frac{L}{c} \right) \quad \text{となる。}$$

ここで電子系での時間差:  $t'_2 - t'_1$  は、2 点間の道のりを  $S_1$  とすれば、 $t'_2 - t'_1 = S_1/v$  である。

$$v = c\sqrt{1-1/\gamma^2} \approx c\left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}\right) \quad \text{であるので、} \quad t'_2 - t'_1 = S_1/v \approx \left(1 + \frac{1}{2\gamma^2}\right) \frac{S_1}{c} \quad \text{となる。}$$

アンジュレータ入り口での時刻を  $t'_1 = 0$  とし、アンジュレータ軌道の各位置での位相を求めると

$$\phi(z) = \frac{2\pi}{T} \left( t'(z) - \frac{z}{c} \right) = \frac{2\pi}{T} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2\gamma^2}\right) \frac{S(z)}{c} - \frac{z}{c} \right\} = \frac{2\pi}{\lambda} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2\gamma^2}\right) S(z) - z \right\} \quad (\text{A5-1.1})$$

ここで電子の道のり  $S(z)$  は、

$$S(z) = \int_0^z \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz'}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz'}\right)^2} dz' \quad \text{で求められる。}$$

ここで、 $\frac{dx}{dz} = x'(z) = \frac{e}{mc\gamma} \int_0^z B_y(z') dz'$ ,  $\frac{dy}{dz} = y'(z) = \frac{e}{mc\gamma} \int_0^z B_x(z') dz'$  である。これ

は電子の角度を表している。これを用いて、

$$\begin{aligned}
S(z) &= \int_0^z \sqrt{1 + \left(\frac{e}{mc\gamma}\right)^2 \left[ \left\{ \int_0^z B_y(z') dz' \right\}^2 + \left\{ \int_0^z B_x(z') dz' \right\}^2 \right]} dz' \\
&\approx \int_0^z \left[ 1 + \frac{1}{2\gamma^2} \left(\frac{e}{mc}\right)^2 \left[ \left\{ \int_0^z B_y(z') dz' \right\}^2 + \left\{ \int_0^z B_x(z') dz' \right\}^2 \right] \right] dz \\
&= z + \frac{1}{2} \int_0^z (x'(z)^2 + y'(z)^2) dz
\end{aligned} \tag{A5-1.2}$$

(A5-1.2)を(A5-1.1)に代入すれば、

$$\begin{aligned}
\phi(z) &= \frac{2\pi}{\lambda} \left\{ \left( 1 + \frac{1}{2\gamma^2} \right) \left\{ z + \frac{1}{2} \int_0^z (x'(z)^2 + y'(z)^2) dz \right\} - z \right\} \\
&= \frac{2\pi}{\lambda} \left\{ \frac{z}{2\gamma^2} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2\gamma^2} \right) \int_0^z (x'(z)^2 + y'(z)^2) dz \right\} \\
&\approx \frac{2\pi}{\lambda} \left\{ \frac{z}{2\gamma^2} + \frac{1}{2} \int_0^z (x'(z)^2 + y'(z)^2) dz \right\}
\end{aligned} \tag{5-5.1}$$

と書ける。

## Appendix.5-2 位相によるアンジュレータスペクトル強度の低下

まず初めに、理想磁場に対するアンジュレータスペクトル形(2-6.4)を再掲し、次に磁場に誤差がある場合を考える。アンジュレータに周期性がある場合、各周期で作られる放射電場(2-6.1)が一定の時間間隔で繰り返し並んでいるとした。

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(t+T) = \mathbf{a}(t+2T) = \mathbf{a}(t+3T) = \cdots = \mathbf{a}(t+N_u T) \text{ である。}$$

この場合 (2-3.4) は

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_0^T \mathbf{a}(t) \exp(i\omega t) dt \{1 + \exp(i\omega T) + \exp(2i\omega T) + \cdots + \exp((N_u - 1)i\omega T)\} \\ &= \frac{1 - \exp(iN_u \omega T)}{1 - \exp(i\omega T)} \mathbf{a}_\omega \end{aligned}$$

$$\text{ここで、} \mathbf{a}_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \mathbf{a}(t) \exp(i\omega t) dt \quad (2-6.2)$$

そして、観測者が受ける一周期あたりの基本角周波数を  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  とすれば、

$$|\mathbf{A}_\omega|^2 = N_u^2 |\mathbf{a}_\omega|^2 \cdot \left[ \frac{\sin(\pi N_u \omega / \omega_1)}{N_u \sin(\pi \omega / \omega_1)} \right]^2 \quad (2-6.4)$$

ここで各アンジュレータ高調波に対して、

$$|\mathbf{A}_\omega|^2 = N_u^2 |\mathbf{a}_\omega|^2 \quad (\text{A5-2.1})$$

である。次に各周期で磁場に誤差があることによって、第  $n$  番目の位相が  $n\omega_1 T = 2\pi n$  からずれる場合を考える。各周期で位相を  $\phi_n = n\omega_1 T + \delta_n$  とおくと、

$$\mathbf{A}_\omega = \mathbf{a}_\omega \{ \exp(i\delta_1) + \exp(i\omega T + i\delta_2) + \exp(2i\omega T + i\delta_3) + \cdots + \exp((N_u - 1)i\omega T + i\delta_N) \}$$

ここで基本波 ( $\mathbf{A}_\omega$ )<sub>1</sub> に対して、 $\exp(ni\omega_1 T) = \exp(2n\pi i) = 1$ 、 $\phi_n = 2n\pi + \delta_n$  であり

$$(\mathbf{A}_\omega)_1 = \mathbf{a}_\omega \sum_{n=1}^N (\exp(i\delta_n))$$

ここで、各周期での位相誤差は充分小さく ( $|\delta_n| \ll 1$ )、周期数  $N$  が十分に大きいときに、位相誤差はゼロの周りをランダムにばらつく正規分布をとり、その平均値も 0 に近づくと仮定する。すると、

$$(\mathbf{A}_\omega)_1 = \mathbf{a}_\omega \sum_{n=1}^N (\exp(i\delta_n)) = \mathbf{a}_\omega \sum_{n=1}^N (\cos(\delta_n) + i \sin(\delta_n)) \approx \mathbf{a}_\omega \sum_{n=1}^N \left( \left(1 - \frac{1}{2} \delta_n^2\right) + i \delta_n \right)$$

ここで仮定より、 $\sum_{n=1}^N (\delta_n) = 0$  であり、分布の分散は  $\sum_{n=1}^N (\delta_n^2) / N = \sigma_\phi^2$  である。

$$(\mathbf{A}_\omega)_1 \approx \mathbf{a}_\omega \left( N - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \delta_n^2 \right) = N \mathbf{a}_\omega \left( 1 - \frac{1}{2} \sigma_\phi^2 \right) \approx N \mathbf{a}_\omega \exp \left( -\frac{1}{2} \sigma_\phi^2 \right)$$

これより位相に誤差がある場合のスペクトル強度は

$$|\mathbf{A}_\omega|^2 = N_u^2 |\mathbf{a}_\omega|^2 \cdot \left\{ \exp \left( -\frac{1}{2} \sigma_\phi^2 \right) \right\}^2 = N_u^2 |\mathbf{a}_\omega|^2 \exp(-\sigma_\phi^2) \quad (\text{A5-2.2})$$

となる。(A5-2.1),(A5-2.2)を比較して、1次光の強度はだけ  $\exp(-\sigma_\phi^2)$  減衰することが判る。

k次の高次光の位相エラーは(5-5.1)から、単にk倍になることからk次光の減衰率は

$$\exp(-k^2 \sigma_\phi^2) \quad (5-5.2)$$

となる。

ここでは、一周期ごとのアンジュレータ放射を重ね合わせたが、P.Walkerは[58]において半周期毎の磁極部で偏光部放射が出ているというモデルを採用し、これを重ね合わせることで位相エラーのスペクトル強度への影響を求めている。その結果、周期数が充分大きな場合には(5-5.2)に一致することを示している。

この時の位相エラーは半周期毎の位相： $\phi_n = n\pi + \delta_n$ を採用して、

$$\sigma_\phi = \sqrt{\sum_{n=1}^{2N} (\delta_n^2) / (2N)} \quad \text{から決まる。}$$

### Appendix.5-3 U#16-2 の skew-Q 成分の見積もりと補正電磁石

U#16-2 のフリップコイルの測定は、2010 年 7/20 から 7/22 の間に行ったデータ収集用プログラム調整の後に実施される予定であった。実際に 7/27 から Gap=21mm にて水平偏光、円偏光（左右）、楕円偏光（左右）の位相（ $\phi$ 、 $\rho$ ）依存性を自動測定したが、ここでは、出力信号が出ておらず測定に失敗した。事前にコイルの導通は確認したが、実際には正しい信号が出ておらずノイズのみを測っていた。これは後に水銀カップリングの導通不良が原因であると判明したが、原因調査中にロックインアンプ故障したこともありフリップコイル測定を断念した。

しかし U#16-2 の PF リングへ設置後、最小 Gap21mm にすると垂直ビームサイズが約 20% 増大した。これは U#16-2 の skew-Q 成分によるものだと判断し、軌道グループ（K.Harada, H.Takaki）に新たに skew-Q 補正電磁石を U#16-2 の下流に導入してもらうこととした。この際、推定される skew-Q の最大値が必要だったため、7/22 のテスト測定で採った数回のデータから skew-Q 最大値を見積もった（図 A5-2）。このテスト測定はコイルが切れることを防ぐために張力を弱めてコイルがかなり緩んだ状態で行った。このためコイルは中心軸より垂れた状態で、回転による遠心力でコイル幅も大きくなっているため、実際よりもかなり大きな出力が出ていると考えられる。この見積もりでは、skew-Q の最大値として 1200Gauss と推定し、skew-Q 補正電磁石の設計最大出力値とした。

この skew-Q 補正電磁石の概略と設計仕様を図 A5-3 に示す。また磁場測定の結果から、電流 6.2A で目標の 1200Gauss を出すことを確認されている（図 A5-4）。

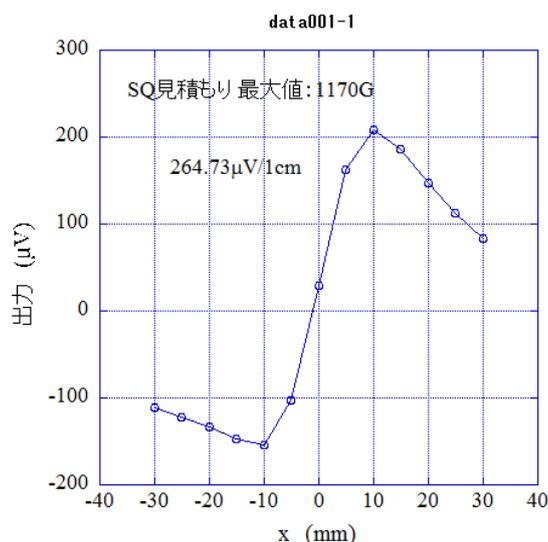


図 A5-2 U#16-2 フリップコイル出力の水平分布。青線は水平磁場の 1 次積分に比例するフリップコイルの出力を表す。この青線の原点付近の傾きから、skew-Q 成分の最大値を見積もった。

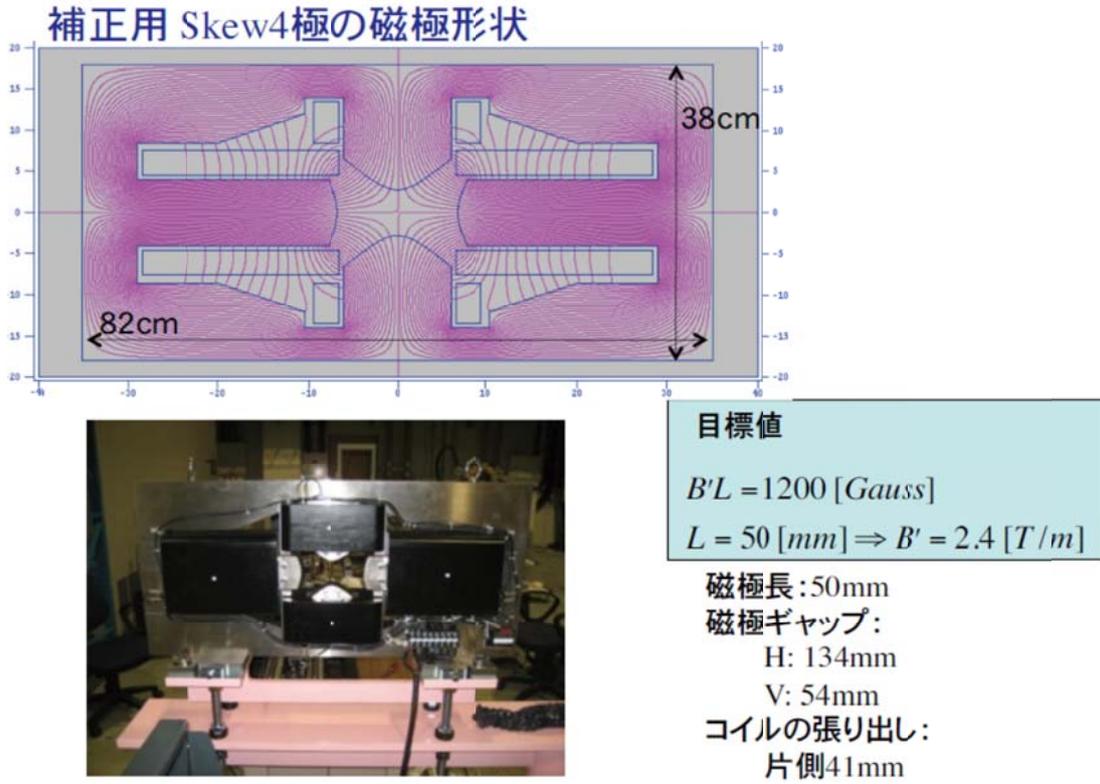


図 A5-3 skew-Q 補正電磁石の概略と設計仕様 (K.Harada, H.Takaki)

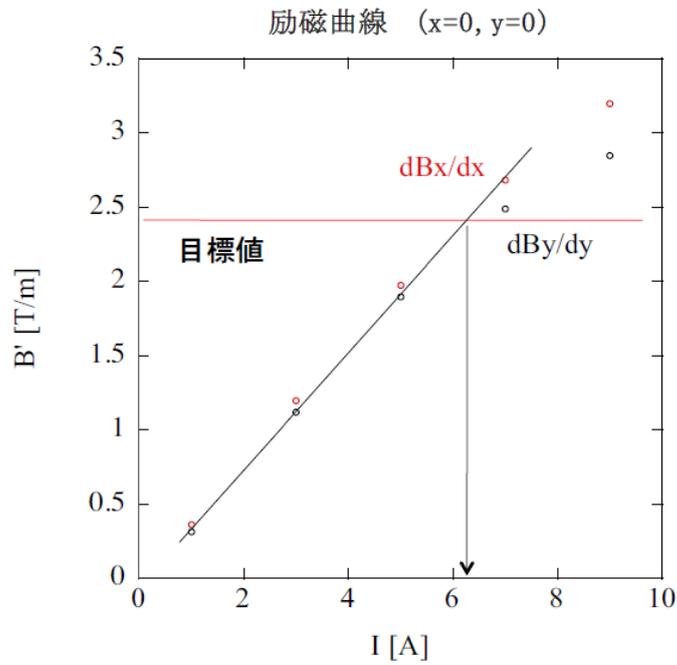


図 A5-4 skew-Q 補正電磁石の磁場測定 (K.Harada, H.Takaki)

skew-Q 補正電磁石は、2011 年度に PF リングに導入された。この skew-Q 補正電磁石を励磁することによって、電子ビームの垂直方向ビームサイズと電子寿命は元の値に戻っている。この時の補正電流値は 2 A である。

## Appendix.6-1 APU- $\rho$ モードでの APPLE-II 型 EPU の磁場分布

4 列の磁石列の  $z$  軸上に作る磁場分布は磁場の重ね合わせとして、

$$B_y(z) = B_{y0} \cos(kz + \theta_1) + B_{y0} \cos(kz + \theta_2) + B_{y0} \cos(kz + \theta_3) + B_{y0} \cos(kz + \theta_4) \quad (\text{A3-1.1})$$

$$B_x(z) = B_{x0} \cos(kz + \theta_1) - B_{x0} \cos(kz + \theta_2) + B_{x0} \cos(kz + \theta_3) - B_{x0} \cos(kz + \theta_4) \quad (\text{A3-1.2})$$

(1) Symmetric mode の計算

$$\theta_1 = \phi/2 + \rho/2, \quad \theta_2 = -\phi/2 + \rho/2, \quad \theta_3 = \phi/2 - \rho/2, \quad \theta_4 = -\phi/2 - \rho/2$$

これを(A3-1.1)(A3-1.2)に入れて計算する。三角関数部分のみを抜き出して書けば

$$\begin{aligned} I_y &= \cos\left(kz + \frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(kz - \frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(kz + \frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(kz - \frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right) \\ &= \cos(kz) \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) + \cos(kz) \cos\left(-\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) + \cos(kz) \cos\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right) + \cos(kz) \cos\left(-\frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right) \\ &\quad - \sin(kz) \sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) - \sin(kz) \sin\left(-\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) - \sin(kz) \sin\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right) - \sin(kz) \sin\left(-\frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right) \\ &= \cos(kz) \left\{ \begin{aligned} &\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) \\ &+ \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\rho}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\rho}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\rho}{2}\right) \end{aligned} \right\} \\ &\quad - \sin(kz) \left\{ \begin{aligned} &\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) \\ &+ \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\rho}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\rho}{2}\right) \end{aligned} \right\} \\ &= \left[ 4 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) \right] \cos(kz) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_x &= \cos\left(kz + \frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(kz - \frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(kz + \frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(kz - \frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right) \\ &= \cos(kz) \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) - \cos(kz) \cos\left(-\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) + \cos(kz) \cos\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right) - \cos(kz) \cos\left(-\frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right) \\ &\quad - \sin(kz) \sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) + \sin(kz) \sin\left(-\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) - \sin(kz) \sin\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right) + \sin(kz) \sin\left(-\frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right) \\ &= \cos(kz) \left\{ \begin{aligned} &\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) \\ &+ \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\rho}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\rho}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\rho}{2}\right) \end{aligned} \right\} \\ &\quad - \sin(kz) \left\{ \begin{aligned} &\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) \\ &+ \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\rho}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\rho}{2}\right) \end{aligned} \right\} \\ &= \left[ -4 \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) \right] \sin(kz) \end{aligned}$$

これより、

$$B_y(z) = 4B_{y0} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) \cos(kz) \quad (6-1.1)$$

$$B_x(z) = -4B_{x0} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) \sin(kz) \quad (6-1.2)$$

となる。

(2) Anti-symmetric mode の計算

Symmetric mode と同様に

$$\theta_1 = \phi + \frac{\rho}{2}, \theta_2 = \frac{\rho}{2}, \theta_3 = -\phi - \frac{\rho}{2}, \theta_4 = -\frac{\rho}{2}$$

これを(A3-1.1)(A3-1.2)に入れて計算する。

$$\begin{aligned} J_y &= \cos\left(kz + \phi + \frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(kz + \frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(kz - \phi - \frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(kz - \frac{\rho}{2}\right) \\ &= \cos\left(kz + \phi + \frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(kz - \phi - \frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(kz + \frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(kz - \frac{\rho}{2}\right) \\ &= \cos(kz) \cos\left(\phi + \frac{\rho}{2}\right) + \cos(kz) \cos\left(-\phi - \frac{\rho}{2}\right) + \cos(kz) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) + \cos(kz) \cos\left(-\frac{\rho}{2}\right) \\ &\quad - \sin(kz) \sin\left(\phi + \frac{\rho}{2}\right) - \sin(kz) \sin\left(-\phi - \frac{\rho}{2}\right) - \sin(kz) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) - \sin(kz) \sin\left(-\frac{\rho}{2}\right) \\ &= 2 \cos(kz) \cos\left(\phi + \frac{\rho}{2}\right) + 2 \cos(kz) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) \\ &= 2 \cos(kz) \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2} + \frac{\phi}{2}\right) + 2 \cos(kz) \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2} - \frac{\phi}{2}\right) \\ &= 2 \cos(kz) \left\{ \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) \cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) \right\} \\ &= \left[ 4 \cos\left(\phi + \frac{\rho}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \cos(kz) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_x &= \cos\left(kz + \phi + \frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(kz + \frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(kz - \phi - \frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(kz - \frac{\rho}{2}\right) \\ &= \cos\left(kz + \phi + \frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(kz - \phi - \frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(kz + \frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(kz - \frac{\rho}{2}\right) \\ &= \cos(kz) \cos\left(\phi + \frac{\rho}{2}\right) + \cos(kz) \cos\left(-\phi - \frac{\rho}{2}\right) - \cos(kz) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) - \cos(kz) \cos\left(-\frac{\rho}{2}\right) \\ &\quad - \sin(kz) \sin\left(\phi + \frac{\rho}{2}\right) - \sin(kz) \sin\left(-\phi - \frac{\rho}{2}\right) + \sin(kz) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) + \sin(kz) \sin\left(-\frac{\rho}{2}\right) \\ &= 2 \cos(kz) \cos\left(\phi + \frac{\rho}{2}\right) - 2 \cos(kz) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) \\ &= 2 \cos(kz) \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2} + \frac{\phi}{2}\right) - 2 \cos(kz) \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2} - \frac{\phi}{2}\right) \\ &= 2 \cos(kz) \left\{ \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) \cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) \right\} \\ &= \left[ -4 \sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \cos(kz) \end{aligned}$$

すると、

$$B_y(z) = 4B_{y0} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) \cos(kz) \quad (6-1.3)$$

$$B_x(z) = -4B_{x0} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) \cos(kz) \quad (6-1.4)$$

となる。

## Appendix.6-2 APU- $\rho$ モードでの APPLE-II 型 EPU の磁場分布 (軸外)

軸外での APU- $\rho$  モードでの APPLE-II 型 EPU の磁場分布を求めるために予備計算を行う。

[予備計算 1] : Symmetric mode の計算

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \cos\left(kz + \frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(kz - \frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(kz + \frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(kz - \frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right) \\
 &= \cos(kz) \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) + \cos(kz) \cos\left(-\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) + \cos(kz) \cos\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right) + \cos(kz) \cos\left(-\frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right) \\
 &\quad - \sin(kz) \sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) - \sin(kz) \sin\left(-\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) - \sin(kz) \sin\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right) - \sin(kz) \sin\left(-\frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right) \\
 &= \cos(kz) \left\{ \begin{aligned} &\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) \\ &+ \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\rho}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\rho}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\rho}{2}\right) \end{aligned} \right\} \\
 &\quad - \sin(kz) \left\{ \begin{aligned} &\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) \\ &+ \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\rho}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\rho}{2}\right) \end{aligned} \right\} \\
 &= \left[ 4 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) \right] \cos(kz)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \cos\left(kz + \frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(kz - \frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(kz + \frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(kz - \frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right) \\
 &= \cos(kz) \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) - \cos(kz) \cos\left(-\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) - \cos(kz) \cos\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right) + \cos(kz) \cos\left(-\frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right) \\
 &\quad - \sin(kz) \sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) + \sin(kz) \sin\left(-\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) + \sin(kz) \sin\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right) - \sin(kz) \sin\left(-\frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right) \\
 &= \cos(kz) \left\{ \begin{aligned} &\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) \\ &- \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\rho}{2}\right) + \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\rho}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\rho}{2}\right) \end{aligned} \right\} \\
 &\quad - \sin(kz) \left\{ \begin{aligned} &\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) \\ &- \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\rho}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\rho}{2}\right) \end{aligned} \right\} \\
 &= \left[ -4 \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) \right] \cos(kz)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
J_2 &= \cos\left(kz + \phi + \frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(kz + \frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(kz - \phi - \frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(kz - \frac{\rho}{2}\right) \\
&= \cos\left(kz + \phi + \frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(kz - \phi - \frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(kz + \frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(kz - \frac{\rho}{2}\right) \\
&= \cos(kz)\cos\left(\phi + \frac{\rho}{2}\right) - \cos(kz)\cos\left(-\phi - \frac{\rho}{2}\right) - \cos(kz)\cos\left(\frac{\rho}{2}\right) + \cos(kz)\cos\left(-\frac{\rho}{2}\right) \\
&\quad - \sin(kz)\sin\left(\phi + \frac{\rho}{2}\right) + \sin(kz)\sin\left(-\phi - \frac{\rho}{2}\right) + \sin(kz)\sin\left(\frac{\rho}{2}\right) - \sin(kz)\sin\left(-\frac{\rho}{2}\right) \\
&= -2\sin(kz)\sin\left(\phi + \frac{\rho}{2}\right) + 2\sin(kz)\sin\left(\frac{\rho}{2}\right) \\
&= -2\sin(kz)\sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2} + \frac{\phi}{2}\right) + 2\sin(kz)\sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2} - \frac{\phi}{2}\right) \\
&= 2\sin(kz)\left\{-\sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right)\cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right)\sin\left(-\frac{\phi}{2}\right)\right\} \\
&= \left[-4\cos\left(\phi + \frac{\rho}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]\sin(kz)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_3 &= \cos\left(kz + \phi + \frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(kz + \frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(kz - \phi - \frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(kz - \frac{\rho}{2}\right) \\
&= \cos\left(kz + \phi + \frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(kz - \phi - \frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(kz + \frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(kz - \frac{\rho}{2}\right) \\
&= \cos(kz)\cos\left(\phi + \frac{\rho}{2}\right) - \cos(kz)\cos\left(-\phi - \frac{\rho}{2}\right) + \cos(kz)\cos\left(\frac{\rho}{2}\right) - \cos(kz)\cos\left(-\frac{\rho}{2}\right) \\
&\quad - \sin(kz)\sin\left(\phi + \frac{\rho}{2}\right) + \sin(kz)\sin\left(-\phi - \frac{\rho}{2}\right) - \sin(kz)\sin\left(\frac{\rho}{2}\right) + \sin(kz)\sin\left(-\frac{\rho}{2}\right) \\
&= -2\sin(kz)\sin\left(\phi + \frac{\rho}{2}\right) - 2\sin(kz)\sin\left(\frac{\rho}{2}\right) \\
&= -2\sin(kz)\sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2} + \frac{\phi}{2}\right) - 2\sin(kz)\sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2} - \frac{\phi}{2}\right) \\
&= -2\sin(kz)\left\{\sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right)\cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right)\sin\left(-\frac{\phi}{2}\right)\right\} \\
&= \left[-4\sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]\sin(kz)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_4 &= \cos\left(kz + \phi + \frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(kz + \frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(kz - \phi - \frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(kz - \frac{\rho}{2}\right) \\
&= \cos\left(kz + \phi + \frac{\rho}{2}\right) + \cos\left(kz - \phi - \frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(kz + \frac{\rho}{2}\right) - \cos\left(kz - \frac{\rho}{2}\right) \\
&= \cos(kz)\cos\left(\phi + \frac{\rho}{2}\right) + \cos(kz)\cos\left(-\phi - \frac{\rho}{2}\right) - \cos(kz)\cos\left(\frac{\rho}{2}\right) - \cos(kz)\cos\left(-\frac{\rho}{2}\right) \\
&\quad - \sin(kz)\sin\left(\phi + \frac{\rho}{2}\right) - \sin(kz)\sin\left(-\phi - \frac{\rho}{2}\right) + \sin(kz)\sin\left(\frac{\rho}{2}\right) + \sin(kz)\sin\left(-\frac{\rho}{2}\right) \\
&= 2\cos(kz)\cos\left(\phi + \frac{\rho}{2}\right) - 2\cos(kz)\cos\left(\frac{\rho}{2}\right) \\
&= 2\cos(kz)\cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2} + \frac{\phi}{2}\right) - 2\cos(kz)\cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2} - \frac{\phi}{2}\right) \\
&= 2\cos(kz)\left\{\cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right)\cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right)\sin\left(-\frac{\phi}{2}\right)\right\} \\
&= \left[-4\sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]\cos(kz)
\end{aligned}$$

以上の予備計算の結果を使って軸外での APU- $\rho$  モードでの APPLE-II 型 EPU の磁場分布

の近似式を求めることが出来る。

(1) Symmetric mode の計算

$$\phi_1 = \frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}, \phi_2 = -\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}, \phi_3 = \frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}, \phi_4 = \frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}$$

[By] : 垂直磁場への各磁石列の寄与は

$$A1: \{B_y(z)\}_1 = \left\{ B_{y0} + \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x \right) + \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial y} \cdot y \right) \right\} \cos\left(kz + \frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right)$$

$$A2: \{B_y(z)\}_2 = \left\{ B_{y0} - \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x \right) + \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial y} \cdot y \right) \right\} \cos\left(kz - \frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right)$$

$$A3: \{B_y(z)\}_3 = \left\{ B_{y0} - \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x \right) - \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial y} \cdot y \right) \right\} \cos\left(kz + \frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right)$$

$$A4: \{B_y(z)\}_4 = \left\{ B_{y0} + \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x \right) - \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial y} \cdot y \right) \right\} \cos\left(kz - \frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right)$$

これより、

$$\begin{aligned} B_y(z) &= B_{y0} \cdot I_1 + \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x \right) \cdot I_2 + \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial y} \cdot y \right) \cdot I_3 \\ &= \left\{ 4B_{y0} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) - 4 \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x \right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) \right\} \cos(kz) \\ &\quad - 4 \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial y} \cdot y \right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) \sin(kz) \end{aligned} \quad (6-2.1)$$

[Bx] : 水平磁場への各磁石列の寄与は

$$A1: \{B_x(z)\}_1 = \left\{ B_{x0} + \left( \frac{\partial B_{x0}}{\partial x} \cdot x \right) + \left( \frac{\partial B_{x0}}{\partial y} \cdot y \right) \right\} \cos\left(kz + \frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right)$$

$$A2: \{B_x(z)\}_2 = - \left\{ B_{x0} - \left( \frac{\partial B_{x0}}{\partial x} \cdot x \right) + \left( \frac{\partial B_{x0}}{\partial y} \cdot y \right) \right\} \cos\left(kz - \frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right)$$

$$A3: \{B_x(z)\}_3 = \left\{ B_{x0} - \left( \frac{\partial B_{x0}}{\partial x} \cdot x \right) - \left( \frac{\partial B_{x0}}{\partial y} \cdot y \right) \right\} \cos\left(kz + \frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right)$$

$$A4: \{B_x(z)\}_4 = - \left\{ B_{x0} + \left( \frac{\partial B_{x0}}{\partial x} \cdot x \right) - \left( \frac{\partial B_{x0}}{\partial y} \cdot y \right) \right\} \cos\left(kz - \frac{\phi}{2} - \frac{\rho}{2}\right)$$

これより、

$$\begin{aligned} B_x(z) &= B_{x0} \cdot I_4 + \left( \frac{\partial B_{x0}}{\partial x} \cdot x \right) \cdot I_3 + \left( \frac{\partial B_{x0}}{\partial y} \cdot y \right) \cdot I_2 \\ &= \left\{ -4B_{x0} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) - 4 \left( \frac{\partial B_{x0}}{\partial x} \cdot x \right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) \right\} \sin(kz) \\ &\quad - 4 \left( \frac{\partial B_{x0}}{\partial y} \cdot y \right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) \cos(kz) \end{aligned} \quad (6-2.2)$$

(2) Anti-symmetric mode の計算

$$\phi_1 = \phi + \frac{\rho}{2}, \phi_2 = \frac{\rho}{2}, \phi_3 = -\phi - \frac{\rho}{2}, \phi_4 = -\frac{\rho}{2}$$

[By] : 垂直磁場への各磁石列の寄与は

$$A1: \{B_y(z)\}_1 = \left\{ B_{y0} + \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x \right) + \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial y} \cdot y \right) \right\} \cos\left(kz + \phi + \frac{\rho}{2}\right)$$

$$A2: \{B_y(z)\}_1 = \left\{ B_{y0} - \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x \right) + \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial y} \cdot y \right) \right\} \cos\left(kz + \frac{\rho}{2}\right)$$

$$A3: \{B_y(z)\}_1 = \left\{ B_{y0} - \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x \right) - \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial y} \cdot y \right) \right\} \cos\left(kz - \phi - \frac{\rho}{2}\right)$$

$$A4: \{B_y(z)\}_1 = \left\{ B_{y0} + \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x \right) - \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial y} \cdot y \right) \right\} \cos\left(kz - \frac{\rho}{2}\right)$$

これより、

$$\begin{aligned} B_y(z) &= B_{y0} \cdot J_1 + \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x \right) \cdot J_2 + \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial y} \cdot y \right) \cdot J_3 \\ &= 4B_{y0} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) \cos(kz) \\ &\quad - 4 \left\{ \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x \right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) + \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial y} \cdot y \right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) \right\} \sin(kz) \end{aligned}$$

(6-2.3)

[Bx] : 水平磁場への各磁石列の寄与は

$$A1: \{B_x(z)\}_1 = \left\{ B_{x0} + \left( \frac{\partial B_{x0}}{\partial x} \cdot x \right) + \left( \frac{\partial B_{x0}}{\partial y} \cdot y \right) \right\} \cos\left(kz + \phi + \frac{\rho}{2}\right)$$

$$A2: \{B_x(z)\}_2 = - \left\{ B_{x0} - \left( \frac{\partial B_{x0}}{\partial x} \cdot x \right) + \left( \frac{\partial B_{x0}}{\partial y} \cdot y \right) \right\} \cos\left(kz + \frac{\rho}{2}\right)$$

$$A3: \{B_x(z)\}_3 = \left\{ B_{x0} - \left( \frac{\partial B_{x0}}{\partial x} \cdot x \right) - \left( \frac{\partial B_{x0}}{\partial y} \cdot y \right) \right\} \cos\left(kz - \phi - \frac{\rho}{2}\right)$$

$$A4: \{B_x(z)\}_4 = - \left\{ B_{x0} + \left( \frac{\partial B_{x0}}{\partial x} \cdot x \right) - \left( \frac{\partial B_{x0}}{\partial y} \cdot y \right) \right\} \cos\left(kz - \frac{\rho}{2}\right)$$

これより、

$$\begin{aligned} B_x(z) &= B_{x0} \cdot J_4 + \left( \frac{\partial B_{x0}}{\partial x} \cdot x \right) \cdot J_3 + \left( \frac{\partial B_{x0}}{\partial y} \cdot y \right) \cdot J_2 \\ &= 4B_{x0} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) \cos(kz) \\ &\quad - 4 \left\{ \left( \frac{\partial B_{x0}}{\partial x} \cdot x \right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) + \left( \frac{\partial B_{x0}}{\partial y} \cdot y \right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) \right\} \sin(kz) \end{aligned}$$

(6-2.4)

### Appendix.6-3 軸外磁場分布の Anti-symmetric mode への影響

磁場の主成分に対して位相が90度ずれた項の影響を考えるために Anti-symmetric mode の垂直磁場分布を考える。

$$\begin{aligned}
 B_y(z) &= 4B_{y0} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) \cos(kz) \\
 &\quad - 4 \left\{ \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x \right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) + \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial y} \cdot y(z) \right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\rho}{2}\right) \right\} \sin(kz) \\
 &= X \cos(kz) + Y \sin(kz)
 \end{aligned}
 \tag{A6-3.1}$$

とおくと  $X \gg Y$  である。つまり  $\frac{Y}{X} \ll 1$  であることに注意する。電子ビームサイズの影響は第2項に現れるが、この余剰磁場は主成分にたいして位相が90度ずれている。三角関数の合成によって(A6-3.1)式を書き直すと、

$$B_y(z) = X \cos(kz) + Y \sin(kz) = R \cos(kz - \delta) \tag{A6-3.2}$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = X \sqrt{1 + \left(\frac{Y}{X}\right)^2} \approx X \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{X}\right)^2 \right\} \tag{A6-3.3}$$

$$\delta = \tan^{-1}(Y/X) = \left(\frac{Y}{X}\right) - \frac{1}{3} \left(\frac{Y}{X}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{Y}{X}\right)^5 - \frac{1}{7} \left(\frac{Y}{X}\right)^7 + \dots \approx \frac{Y}{X}$$

これより強度変化の割合は  $\frac{Y}{X}$  の2乗である。また、位相の変化量も小さいことがわかる。

この事情は他の Anti-symmetric mode の磁場分布に対しても同様である。

一方、symmetric mode の垂直磁場のうち主成分と同位相のものを考えれば、直ちに

$$\begin{aligned}
 B_y(z) &= \left\{ 4B_{y0} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) - 4 \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x(z) \right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) \right\} \cos(kz) \\
 &= (X + Y) \cos(kz) \\
 &= X \left( 1 + \frac{Y}{X} \right) \cos(kz)
 \end{aligned}
 \tag{A6-3.4}$$

となり強度変化の割合は  $\frac{Y}{X}$  に比例することがわかる。従って電子ビームサイズが放射光スペクトルに与える影響は Anti-symmetric mode に対しては小さく、symmetric mode に対して重要となる。

## Appendix.6-4 軸外磁場分布の Symmetric mode への影響

[symmetric mode で軸外電子の受ける K 値]

一般的な楕円アンジュレータからの放射光の基本波長は

$$\lambda = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left( 1 + \frac{K_x^2 + K_y^2}{2} \right) \text{ であり、 } K_{x,y} = 93.37 \langle B_{x,y} \rangle (T) \lambda_u (m) \text{ である。}$$

これより symmetric mode での電子ビームサイズの放射光スペクトルに対する効果を考えるために  $\langle B_x \rangle^2 + \langle B_y \rangle^2$  を求める。

Symmetric mode での磁場分布を

$$B_y(z) = \left\{ 4B_{y0} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) - 4 \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x(z) \right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) \right\} \cos(kz) = \langle B_y \rangle \cos(kz)$$

$$B_x(z) = \left\{ -4B_{x0} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) \right\} \sin(kz) = \langle B_x \rangle \sin(kz)$$

とおくと

$$\begin{aligned} \langle B_x \rangle^2 + \langle B_y \rangle^2 &= \left\{ -4B_{x0} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) \right\}^2 \\ &\quad + \left\{ 4B_{y0} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) - 4 \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x(z) \right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) \right\}^2 \\ &= \left\{ \left( 4B_{x0} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right)^2 + \left( 4B_{y0} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \right)^2 \right\} \cos^2\left(\frac{\rho}{2}\right) \\ &\quad - 2 \left\{ \left( 4B_{y0} \right) \cdot \left( 4 \frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x(z) \right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) \right\} \\ &\quad + \left( 4 \frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x(z) \right)^2 \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\rho}{2}\right) \end{aligned} \tag{A6-4.1}$$

これより、Symmetric mode の各偏光状態に対して軸外れの電子に対する K 値の変化量を個別に見積もる。

(1) 水平直線偏光 ( $\phi/2 = 0$  のとき)

$$\langle B_x \rangle^2 + \langle B_y \rangle^2 = (4B_{y0})^2 \cos^2\left(\frac{\rho}{2}\right) \tag{A6-4.2}$$

となり、軸外しの電子に対しても K 値は変わらない。

(2) 垂直直線偏光 ( $\phi/2 = \pi/2$  のとき)

$$\begin{aligned} \langle B_x \rangle^2 + \langle B_y \rangle^2 &= (4B_{x0})^2 \cos^2\left(\frac{\rho}{2}\right) + \left(4 \frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x(z)\right)^2 \sin^2\left(\frac{\rho}{2}\right) \\ &= (4B_{x0})^2 \cos^2\left(\frac{\rho}{2}\right) \left\{ 1 + \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x(z) / B_{x0} \right)^2 \tan^2\left(\frac{\rho}{2}\right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A6-4.3})$$

ここで  $\frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x(z) / B_{x0} \ll 1$  に注意すれば、K 値の変化の割合は微量の 2 乗であり、電子ビームサイズのスペクトルへの影響は少ないと言える。

(3) 円偏光 ( $4B_{x0} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = 4B_{y0} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$  のとき)

$$\begin{aligned} \langle B_x \rangle^2 + \langle B_y \rangle^2 &= 2 \cdot (4B_{y0})^2 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\rho}{2}\right) - 2 \left\{ (4B_{y0}) \cdot \left(4 \frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x(z)\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\rho}{2}\right) \cos\left(\frac{\rho}{2}\right) \right\} \\ &\quad + \left(4 \frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x(z)\right)^2 \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\rho}{2}\right) \\ &= 2(4B_{y0})^2 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\rho}{2}\right) \left\{ 1 - \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x(z) / B_{y0} \right) \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) \tan\left(\frac{\rho}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x(z) / B_{y0} \right)^2 \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \tan^2\left(\frac{\rho}{2}\right) \right\} \end{aligned}$$

ここでも (2) と同じく、 $\frac{\partial B_{y0}}{\partial x} \cdot x(z) / B_{y0} \ll 1$  であるが今度は 1 次の項が残るためビームサイズの影響を大きく受けると考えられる。

以上により、symmetric mode で電子ビームサイズの放射光スペクトルに対する効果を大きく受けるのは、円偏光 (または楕円偏光) であり、垂直水平直線偏光では、その影響が小さいといえる。

## Appendix.6-5 APU- $\sigma$ モードでの APPLE-II 型 EPU の磁場分布

4 列の磁石列の  $z$  軸上に作る磁場分布は磁場の重ね合わせとして、

$$B_y(z) = B_{y0} \cos(kz + \theta_1) + B_{y0} \cos(kz + \theta_2) + B_{y0} \cos(kz + \theta_3) + B_{y0} \cos(kz + \theta_4) \quad (\text{A3-1.1})$$

$$B_x(z) = B_{x0} \cos(kz + \theta_1) - B_{x0} \cos(kz + \theta_2) + B_{x0} \cos(kz + \theta_3) - B_{x0} \cos(kz + \theta_4) \quad (\text{A3-1.2})$$

Symmetric mode の計算

$$\theta_1 = \phi/2 + \sigma/2, \theta_2 = -\phi/2 - \sigma/2, \theta_3 = \phi/2 - \sigma/2, \theta_4 = -\phi/2 + \sigma/2$$

これを(A3-1.1)(A3-1.2)に入れて計算する。三角関数部分のみを抜き出して書けば

$$\begin{aligned} I_y &= \cos\left(kz + \frac{\phi}{2} + \frac{\sigma}{2}\right) + \cos\left(kz - \frac{\phi}{2} - \frac{\sigma}{2}\right) + \cos\left(kz + \frac{\phi}{2} - \frac{\sigma}{2}\right) + \cos\left(kz - \frac{\phi}{2} + \frac{\sigma}{2}\right) \\ &= \cos(kz) \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\sigma}{2}\right) + \cos(kz) \cos\left(-\frac{\phi}{2} - \frac{\sigma}{2}\right) + \cos(kz) \cos\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\sigma}{2}\right) + \cos(kz) \cos\left(-\frac{\phi}{2} + \frac{\sigma}{2}\right) \\ &\quad - \sin(kz) \sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\sigma}{2}\right) - \sin(kz) \sin\left(-\frac{\phi}{2} - \frac{\sigma}{2}\right) - \sin(kz) \sin\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\sigma}{2}\right) - \sin(kz) \sin\left(-\frac{\phi}{2} + \frac{\sigma}{2}\right) \\ &= \cos(kz) \left\{ \begin{aligned} &\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\sigma}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\sigma}{2}\right) \\ &+ \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\sigma}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\sigma}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right) \end{aligned} \right\} \\ &\quad - \sin(kz) \left\{ \begin{aligned} &\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) + \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\sigma}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\sigma}{2}\right) \\ &+ \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\sigma}{2}\right) + \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\sigma}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right) \end{aligned} \right\} \\ &= \left[ 4 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) \right] \cos(kz) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_x &= \cos\left(kz + \frac{\phi}{2} + \frac{\sigma}{2}\right) - \cos\left(kz - \frac{\phi}{2} - \frac{\sigma}{2}\right) + \cos\left(kz + \frac{\phi}{2} - \frac{\sigma}{2}\right) - \cos\left(kz - \frac{\phi}{2} + \frac{\sigma}{2}\right) \\ &= \cos(kz) \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\sigma}{2}\right) - \cos(kz) \cos\left(-\frac{\phi}{2} - \frac{\sigma}{2}\right) + \cos(kz) \cos\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\sigma}{2}\right) - \cos(kz) \cos\left(-\frac{\phi}{2} + \frac{\sigma}{2}\right) \\ &\quad - \sin(kz) \sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\sigma}{2}\right) + \sin(kz) \sin\left(-\frac{\phi}{2} - \frac{\sigma}{2}\right) - \sin(kz) \sin\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\sigma}{2}\right) + \sin(kz) \sin\left(-\frac{\phi}{2} + \frac{\sigma}{2}\right) \\ &= \cos(kz) \left\{ \begin{aligned} &\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\sigma}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\sigma}{2}\right) \\ &+ \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\sigma}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\sigma}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right) \end{aligned} \right\} \\ &\quad - \sin(kz) \left\{ \begin{aligned} &\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) + \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\sigma}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\sigma}{2}\right) \\ &+ \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\sigma}{2}\right) + \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\sigma}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right) \end{aligned} \right\} \\ &= \left[ -4 \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) \right] \sin(kz) \end{aligned}$$

$$\text{これより、} B_y(z) = 4B_{y0} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) \cos(kz) \quad (6-2.9)$$

$$B_x(z) = -4B_{x0} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) \sin(kz) \quad (6-2.10)$$

となる。