

二重光ポンピング法による
核スピン偏極負重水素イオンビーム生成に関する研究

金正 倫計

博士（理学）

総合研究大学院大学
数物科学研究科
加速器科学専攻

平成5年度
(1993)

目次

	ページ
第1章 序論	1
第2章 磁場中での重水素原子の核スピン偏極と二重光ポンピング法による偏極負重水素イオンビームの生成の原理	
2.1 磁場中での重水素原子の核スピン偏極度	
2.1.1 磁場中での重水素原子の基底 ($1S_{1/2}$) 状態の性質	6
2.1.2 重水素原子の核スピンのベクトル偏極度	14
2.2 二重光ポンピング法による核スピン偏極	20
第3章 二重光ポンピング型偏極イオン源の性能 (ビーム強度、偏極度) を決定する要因	
3.1 ビーム強度	28
3.2 核スピン偏極度	30
3.2.1 中性化セルで生成される重水素原子の電子スピン偏極度	32
3.2.2 零交叉磁場領域での減偏極	41
第4章 二重光ポンピング型偏極イオン源装置の構成	57
第5章 二重光ポンピング法における負重水素イオンビームの強度変化による核スピンのベクトル偏極度の評価	
5.1 二重光ポンピング法における負重水素イオンビームの強度変化	
5.1.1 アルカリ金属原子の電子スピン偏極度と負重水素イオンビーム強度の関係	81

5.1.2	実験方法	86
	(a) ビーム強度の測定	
	(b) アルカリ金属原子の電子スピン偏極度測定	
5.1.3	実験結果と議論	97
5.2	負重水素イオンビームの強度変化を用いた 核スピンのベクトル偏極度の評価	
5.2.1	二重光ポンピング法の負重水素イオンビームの 強度変化と核スピンのベクトル偏極度の関係	105
5.2.2	実験結果と議論	
	(a) 中性化セルの磁場強度に対する ベクトル偏極度の依存性	108
	(b) 中性化セル中のルビジウム蒸気ターゲット厚さに対する 核スピンのベクトル偏極度依存性と減偏極	111
	(c) 偏極の向きを反転させた場合のベクトル偏極度の変化	114
第6章	議論及びまとめ	116

謝辞

参考文献

付録

第1章 序論

核スピン偏極した陽子あるいは重陽子ビームを生成する偏極イオン源には、現在、原子線型偏極イオン源（atomic beam type of polarized ion source）、ラムシフト型偏極イオン源（Lamb-shift type of polarized ion source）、そして光ポンピング型偏極イオン源（optically pumped polarized ion source）の3つの方式がある。

原子線型偏極イオン源の開発は、1950年代半ば頃から G. Clausnitzer, H. Shopper, R. Fleischmann らによって始められ[1]、1971年 H. F. Glavish らにより、ほぼ現在の形として完成された[2]。原子線型偏極イオン源では、まず水素あるいは重水素分子を高周波放電を用いて水素原子や重水素原子に解離し中性原子線を生成する。次に、原子線を6極磁石による不均一磁場中を通して、電子スピン s について分離する。6極磁石の半径 r における磁場の強さは、 $B = B_m (r/r_m)^2$ で与えられる。 r_m は中心軸から磁極までの距離、 B_m は r_m における磁場の強さである。水素原子の磁気モーメント μ は電子スピンによって決まりそれに働く力は、 $F = -\text{grad}(\mu \cdot B) = -2\mu r/r_m^2$ であるから、磁気量子数 $m_j = +1/2$ の電子をもつ原子は軸中心線に向かう収束力を受け、 $m_j = -1/2$ 状態の原子は外向きの力を受けて発散する。従って、6極磁場を通過した後では、原子線は $m_j = +1/2$ の状態に偏極することになる。 $m_j = +1/2$ の状態について分離された原子を断熱的に磁場 $B = 0$ に導けば、超微細相互作用により部分的核偏極が起こる。さらに大きい核偏極を得るためには、Abragam と Winter が提案した”断熱通過法” [3] が用いられる。これらの方法で核偏極した原子は電子衝撃や電子サイクロトロン共鳴（ECR）によりイオン化される。この原子線型偏極イオン源を用いて現在得られているビーム強度は、偏極重陽子の直流ビームで、正イオン（ D^+ イオン）では $\sim 100 \mu\text{A}$ 、負イオン（ D^- イオン）では最大 $10 \mu\text{A}$ 程度であり偏極度は80%程度である[4]。

ラムシフト型偏極イオン源の偏極方式は、1950年に Lamb と Retherford [5][6][7] によって最初に示された。その後、Los Alamos 国立研究所（LANL）において J. L. McKibben, G. P. Lawrence, G. G. Ohlsen らによって実際に装置として開発された[8]。このイオン源では、水素または重水素の $2S_{1/2}$ 励起状態（準安定状態）の磁場中における超微細相互作用を利用して、 $2S_{1/2}$ 状態にある原子のなかの陽子または重陽子を核スピン偏極させる[9]。そして、核スピン偏極した原子をイオン

化するには、核スピン偏極した状態である $2S_{1/2}$ 状態の原子のみを選択的にイオン化させることにより、核スピン偏極した負水素あるいは負重水素イオンを得ようとするものである。選択的なイオン化を行なうのは、中性原子線中の $2S_{1/2}$ 準安定状態の原子が $1S_{1/2}$ 状態のものよりも極めて少ないために、これらが同時にイオン化されると減偏極の原因となるからである。このラムシフト型偏極イオン源を用いて現在得られているビーム強度は、偏極重陽子のパルスビームで負イオン (D^- イオン) では $1\ \mu A$ 程度であり偏極度は $80\sim 85\%$ 程度である[10]。

このように、1950年代から開発が進められてきた原子線型やラムシフト型の偏極イオン源は、生成される偏極イオンビームの偏極度は十分に高いものであったが、ビーム強度については1970年代半ばにそれぞれの生成方法での限界が見えてきた。このビーム強度についての問題点を解決したのが、1979年にL.W.Andersonにより提案され[11]、1983年に高エネルギー物理学研究所(KEK)で、12 GeV陽子シンクロトロン(KEK-PS)用の偏極負水素イオン源として世界で最初に開発に成功した[12]、光ポンピング型偏極イオン源である。光ポンピング型偏極イオン源は、レーザーを用いた光ポンピングにより作られたアルカリ金属原子の偏極電子を陽子に移行させることによって、核スピン偏極した陽子ビームを得ようというものである。この方法によるイオン源は、KEKで開発に成功した後、1980年代後半からLALN(Los Alamos National Laboratory), INR(Institute for Nuclear Research), TRIUMF等の研究所でさらに改良されてきた[13][14][15]。現在、この光ポンピング型偏極イオン源の開発により、高偏極度(核スピン 65% 以上)で高強度($100\ \mu A$ 程度)の偏極負水素イオンビームの生成が可能となっている。

光ポンピング型偏極イオン源による偏極負水素イオンの生成方法は次のようにして行なう。まず、低エネルギー($5\ keV$ 程度)の H^+ イオンビームを生成する。この H^+ イオンが強い磁場中で、光ポンピングにより電子スピン偏極したアルカリ金属原子との荷電交換反応により、電子スピン偏極した水素原子となる($H^+ + Na(e\uparrow) \rightarrow H(e\uparrow) + Na^+$)。この荷電交換反応により生成された電子スピン偏極した水素原子を、適当な磁場勾配で磁場の方向が反転する零交叉磁場を通過させると、超微細構造の準位間で非断熱遷移(diabatic transition)が生じ、電子スピン偏極を核スピン偏極に移すことができる。核スピン偏極した水素原子は、アルカリ金属原子との再度の荷電交換反応により、核スピン偏極した負水素イオンとなる($H(p\uparrow) + Na \rightarrow H^-(p\uparrow) + Na^+$)。

高エネルギー物理学研究所の 12 GeV 陽子シンクロトロン (KEK - PS) では、1990 年末 から重陽子ビーム加速の準備が開始され、1992 年 1 月には、到達しうる最大エネルギー (11.2 GeV) までの加速に成功した[16]。さらに1992 年 4 月には、重陽子を用いた最初の物理実験が行なわれ、さらに今後偏極重陽子ビームを用いた物理実験が考えられている。偏極重陽子をKEK - PS で加速するためには、高強度で高い核スピン偏極度をもつ偏極負重水素イオンビームの生成が可能なイオン源が必要である。

シンクロトロンでの偏極重陽子ビームの加速を考える場合、正イオンビーム入射に比べて負イオンビーム入射の方が、荷電交換多重入射を用いることができるためにビーム強度を増やすことができる。従って、KEK - PS での偏極重陽子加速を考えた場合、偏極負重水素イオンビームの生成可能なイオン源の開発が必要である。そこで、上に述べた 3 つの型の偏極イオン源における偏極負重水素イオン生成を行なった場合の原理的な偏極度 (ベクトル偏極度 : P_z , テンソル偏極度 : P_{zz}) と、得られるビーム強度についての特徴を表 1 にそれぞれまとめて示す。

	原理的的最大偏極度	ビーム強度
原子線型	$P_z = 1, P_{zz} = -2$	$\sim 10 \mu\text{A}$
ラムシフト型	$P_z = 1, P_{zz} = -2$	$\sim 1 \mu\text{A}$
光ポンピング型	$P_z = 2/3, P_{zz} = -1/3$	$\sim 100 \mu\text{A}$

表 1 偏極負重水素イオンビーム生成での各偏極イオン源の性能比較

これからわかるように、負重水素イオンビーム強度については、光ポンピング型偏極イオン源が優れている。しかしながら、光ポンピング型偏極イオン源を用いて偏極負重水素イオンビーム生成を行なっても、生成される負重水素イオ

ンビームの核スピンのベクトル偏極度は原理的に最大で 67 % である。これは次の理由による。

偏極負水素イオン生成の場合と同様に、電子スピン偏極した重水素原子を、適当な磁場勾配で磁場の方向が反転する零交叉磁場を通過させると、超微細構造の準位間で非断熱遷移 (diabatic transition) が生じ、電子スピン偏極を核スピン偏極に移すことができる。水素原子では、核スピンは $I = 1/2$ であるので、電子スピン $1/2$ の偏極が 100 % 核スピンの移った場合には 100 % 核偏極となる。しかしながら、重水素原子では核スピンは $I = 1$ であり、非断熱遷移後の重水素原子の核スピン状態は、 $I_z = +1$ と $I_z = 0$ の状態が 2 対 1 の割合で占める。この $I_z = 0$ の状態の存在のために、核スピンのベクトル偏極度は最大で $2/3$ である。この理由より、光ポンピング法を偏極負重水素イオンビームの生成に用いることは不適切だとされてきた。

高偏極度を得るためには純粋な核スピン状態 (例えば、 $I_z = +1$ 状態のみ) を選ぶ必要がある。1988 年に、Schneider と Clegg は光ポンピング法において純粋な核スピン状態を選ぶ新しい方法を提案した[17]。それは、従来の光ポンピング型偏極イオン源でのイオン化領域 (イオン化セル) のアルカリ金属原子も光ポンピング (二重光ポンピング) することで電子スピン偏極させ、負イオン化に際して純粋な核スピン状態をもった原子のみを Pauli の排他原理により選択的に負イオン化させるというものである。しかしながら、彼らの結論では、この方法では radiation trapping (放射捕獲) の影響により、イオン化セル中のアルカリ金属原子の密度をあまり大きくできず、実用的でないということであった。radiation trapping とは、光ポンピングにおける光子の再吸収過程であり、ポンピングされた原子の最大偏極度はこの radiation trapping により制限される。最近、Mori は、radiation trapping の効果を定量的に評価し、その結果、強磁場中 (2 ~ 3 kG) では radiation trapping の影響はそれほど小さくなく、二重光ポンピング法により十分な強度の偏極負重水素イオンビームの生成が可能となることを示した[18]。このように、光ポンピング型偏極イオン源で高偏極度の負重水素イオンビームを得るためには、二重光ポンピング法が有望であることが理論的には解明された。しかしながら、これまで実験的にこの方式の有効性は確かめられておらず、これに基づいた偏極イオン源も開発されていない。

本研究は、高い核スピン偏極度を持つ負重水素イオンビームの生成が、二重光ポンピング法によって可能であることを実験的に示し、あわせてこの二重光

ポンピング型偏極イオン源の装置としての特性を明かにすることを目的とする。

本論文は6章から構成されている。第2章に、二重光ポンピング法による偏極負重水素イオンビームの生成原理について述べる。続いて第3章では偏極イオン源のビーム強度と偏極度を決定する各要因について議論し、特に偏極度を向上させる要因について述べる。第4章では、本研究で用いた二重光ポンピング型偏極イオン源装置の構成を説明し、第5章で、イオンビームの強度変化とアルカリ金属原子の電子スピン偏極度を測定により、二重光ポンピング法の有効性とベクトル偏極度の評価が可能であることを示し、それらについての実験結果を示す。そして、第6章は本研究での二重光ポンピング型偏極負重水素イオン源の性能とまとめである。

第2章 磁場中での重水素原子の核スピン偏極と二重光

ポンピング法による偏極負重水素イオンビームの生成の原理

本章においては、まず、2.1節で、光ポンピング型偏極イオン源において重要な磁場中での重水素原子の基底 ($1S_{1/2}$) 状態の性質について述べ、その後、重水素原子の核スピンのベクトル偏極度についての理論的な評価を行なう。そして、2.2節で、二重光ポンピング法による偏極負重水素イオンビームの生成方法について述べる。

2.1 磁場中での重水素原子の核スピン偏極度

重水素原子の核スピン偏極度の磁場依存性は、二重光ポンピング法により偏極負重水素イオンビームを生成する場合の重要な性質である。従ってこの節では、2.1.1節で磁場中での重水素原子の基底 ($1S_{1/2}$) 状態の性質について述べ、2.1.2節で重水素原子の核スピンのベクトル偏極度についての理論的な評価を行なう。

2.1.1 磁場中での重水素原子の基底 ($1S_{1/2}$) 状態の性質

原子はその構成要素である電子の軌道角運動量、電子スピン及び原子核のスピンの大きさによって定まる磁気モーメントをもっており、そのため外部から磁場が加わると、この磁気モーメントと外部磁場との間に相互作用が生じる。また、電子と原子核の両磁気モーメント間の相互作用も存在する。これらの相互作用の結果、原子の各エネルギー状態は縮退が解け、細かないくつかのエネルギー状態に分離する。この分離したエネルギー状態がいわゆる原子の超微細構造 (hyperfine structure) と呼ばれるものである。

状態の超微細構造の分離をもたらす相互作用を表すハミルトニアンは、双極子近似により一般に次のように書ける。

$$H_{IM} = (\mu_0 g_J \vec{J} + \mu_N g_I \vec{I}) \cdot \vec{B} + \alpha (\vec{I} \cdot \vec{J}) \quad (2-1)$$

ここで、 μ_0, μ_N はそれぞれ Bohr 磁子および核磁子と呼ばれるものであり、また、 g_J, g_I は電子および核の g-factor である。 \vec{J} は電子の全角運動量ベクトルであり、軌道角運動量ベクトル \vec{l} および電子スピンベクトル \vec{s} により、

$$\vec{J} = \vec{l} + \vec{s}$$

で表される。また、 \vec{I} は原子核のスピンベクトルである。

α は、電子と原子核間の角運動量の結合の強さを表す量で、超微細構造の分離エネルギー ΔE に比例し、次式で与えられる。

$$\alpha = \begin{cases} \Delta E / I (2J + 1), & I \leq J \\ \Delta E / J (2I + 1), & I \geq J \end{cases} \quad (2-2)$$

$1S_{1/2}$ 状態の水素原子の場合には、 $I = 1/2, J = 1/2$ より $\alpha = \Delta E_{1S} = 1420.4$ MHz、重水素原子の場合には、 $I = 1, J = 1/2$ より $\alpha = 2/3 \Delta E_{1S} = 327.4$ MHzである[19]。

(2-1) 式で表されるような摂動が加わった場合の時間を含んだ形での Schrodinger 方程式は次のように表される。

$$(H_0 + H_{IM}) | \psi \rangle = i \hbar \frac{\partial}{\partial t} | \psi \rangle \quad (2-3)$$

H_0 は無摂動系のハミルトニアンである。また、 $| \psi \rangle$ は、摂動 H_{IM} が加わった場合の系の状態ベクトルを表す。

いま、無摂動系のハミルトニアン H_0 に対する時間を含んだ固有状態を

$$|\Phi_n\rangle = |\phi_n\rangle \exp\left(-\frac{iE_0}{\hbar}t\right) \quad (2-4)$$

とおく。ここで、 $|\phi_n\rangle$ および E_0 は、それぞれ H_0 の時間を含まない固有状態および固有エネルギーである。各固有状態 $|\phi_n\rangle$ を電子の角運動量 \vec{J} の z 成分 m_j と原子核のスピンベクトル \vec{I} の z 成分 I_z で定まる固有状態で表すと、

$$\begin{aligned} |\phi_1\rangle &= |m_j = 1/2\rangle |I_z = 1\rangle \\ |\phi_2\rangle &= |m_j = 1/2\rangle |I_z = 0\rangle \\ |\phi_3\rangle &= |m_j = 1/2\rangle |I_z = -1\rangle \\ |\phi_4\rangle &= |m_j = -1/2\rangle |I_z = -1\rangle \\ |\phi_5\rangle &= |m_j = -1/2\rangle |I_z = 0\rangle \\ |\phi_6\rangle &= |m_j = -1/2\rangle |I_z = 1\rangle \end{aligned} \quad (2-5)$$

となる。

(2-3) 式を満足する状態ベクトル $|\psi\rangle$ は、(2-4) 式での $|\phi_n\rangle$ の一次結合で表されるので、

$$|\psi\rangle = \sum_n b_n(t) \exp\left(-\frac{iE_0}{\hbar}t\right) |\phi_n\rangle \quad (2-6)$$

と書ける。これを (2-3) 式に代入して左から $\langle\Phi_m|$ を作用させると次式が得られる。

$$i\hbar \frac{d}{dt} b_m = \sum_n b_n \langle\phi_m|H_{I,M}|\phi_n\rangle \quad (2-7)$$

$H_{I,M}$ の行列要素 $\langle\phi_m|H_{I,M}|\phi_n\rangle$ の具体的な形は付録 A に示す。

$H_{I,M}$ を対角化するユニタリー変換により、各係数 b_n は新たな係数 b'_n に変

換され、これを用いることにより、各エネルギー状態の固有値と固有関数が得られる（付録A参照）。

固有値 λ_i ($i = 1 \dots 6$) を具体的に表すと、

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \left(\frac{1}{2} + k \right) B_z + \frac{B_0}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(k B_z - \frac{B_0}{2} \right) + \left\{ (1-k)^2 B_z^2 + (1-k) B_0 B_z + \frac{9}{4} B_0^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right\} \\ \lambda_3 &= -\frac{1}{2} \left\{ \left(k B_z + \frac{B_0}{2} \right) - \left\{ (1-k)^2 B_z^2 - (1-k) B_0 B_z + \frac{9}{4} B_0^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right\} \\ \lambda_4 &= -\left(\frac{1}{2} + k \right) B_z + \frac{B_0}{2} \\ \lambda_5 &= -\frac{1}{2} \left\{ \left(k B_z + \frac{B_0}{2} \right) + \left\{ (1-k)^2 B_z^2 - (1-k) B_0 B_z + \frac{9}{4} B_0^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right\} \\ \lambda_6 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(k B_z - \frac{B_0}{2} \right) - \left\{ (1-k)^2 B_z^2 + (1-k) B_0 B_z + \frac{9}{4} B_0^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned} \tag{2-8}$$

となる。

また、固有関数は、

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \{1/2 (1 + \delta_1)\}^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \{1/2 (1 + \delta_2)\}^{1/2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\{1/2 (1 - \delta_2)\}^{1/2} \\ 0 & -\{1/2 (1 - \delta_1)\}^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{1/2 (1 - \delta_1)\}^{1/2} \\ 0 & \{1/2 (1 - \delta_2)\}^{1/2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \{1/2 (1 + \delta_2)\}^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \{1/2 (1 + \delta_1)\}^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix} \quad (2-9)$$

ただし、 $\delta_1 = (x + 1/3) / (1 + 2x/3 + x^2)^{1/2}$,

$\delta_2 = (x - 1/3) / (1 - 2x/3 + x^2)^{1/2}$ である。

また、 x は $\mu_0, \mu_N, g_I, g_I, \alpha_{IS}$ 及び、外部磁場 B_z を用いて

$$x = \frac{2}{3} \frac{1}{\alpha_{IS}} (\mu_0 g_I - \mu_N g_I) \cdot B_z$$

で表される外部磁場に比例する量である。

よって、(2-9) 式より、重水素原子の各固有状態は次式で表される。

$$\begin{aligned}
 |\phi_1'\rangle &= |\phi_1\rangle \\
 |\phi_2'\rangle &= \left\{ \frac{1}{2} (1 + \delta_1) \right\}^{\frac{1}{2}} |\phi_2\rangle + \left\{ \frac{1}{2} (1 - \delta_1) \right\}^{\frac{1}{2}} |\phi_6\rangle \\
 |\phi_3'\rangle &= \left\{ \frac{1}{2} (1 + \delta_2) \right\}^{\frac{1}{2}} |\phi_3\rangle + \left\{ \frac{1}{2} (1 - \delta_2) \right\}^{\frac{1}{2}} |\phi_5\rangle \\
 |\phi_4'\rangle &= |\phi_4\rangle \\
 |\phi_5'\rangle &= -\left\{ \frac{1}{2} (1 - \delta_2) \right\}^{\frac{1}{2}} |\phi_3\rangle + \left\{ \frac{1}{2} (1 + \delta_2) \right\}^{\frac{1}{2}} |\phi_5\rangle \\
 |\phi_6'\rangle &= -\left\{ \frac{1}{2} (1 - \delta_1) \right\}^{\frac{1}{2}} |\phi_2\rangle + \left\{ \frac{1}{2} (1 + \delta_1) \right\}^{\frac{1}{2}} |\phi_6\rangle \quad (2-10)
 \end{aligned}$$

外部磁場 B_z が零 ($B_z=0$) の場合、 $x=0$ であり、 $\delta_1=1/3$, $\delta_2=-1/3$ となるため、(2-10) 式は、

$$\begin{aligned}
 |\phi_1'\rangle &= |\phi_1\rangle \\
 |\phi_2'\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |\phi_2\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |\phi_6\rangle \\
 |\phi_3'\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} |\phi_3\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\phi_5\rangle \\
 |\phi_4'\rangle &= |\phi_4\rangle \\
 |\phi_5'\rangle &= -\sqrt{\frac{2}{3}} |\phi_3\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |\phi_5\rangle \\
 |\phi_6'\rangle &= -\sqrt{\frac{1}{3}} |\phi_2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\phi_6\rangle \quad (2-11)
 \end{aligned}$$

となる。一方、外部磁場が無限大 ($B_z = \infty$) の場合、 $x = \infty$ であり、 $\delta_1 = 1, \delta_2 = 1$ となるために、(2-10)式は、

$$\begin{aligned}
 |\phi_1'\rangle &= |\phi_1\rangle \\
 |\phi_2'\rangle &= |\phi_2\rangle \\
 |\phi_3'\rangle &= |\phi_3\rangle \\
 |\phi_4'\rangle &= |\phi_4\rangle \\
 |\phi_5'\rangle &= |\phi_5\rangle \\
 |\phi_6'\rangle &= |\phi_6\rangle
 \end{aligned}
 \tag{2-12}$$

となる。

次に、電子と原子核の全角運動量ベクトル $\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}$ を考える。重水素原子の $1S_{1/2}$ 状態に対しては、 $I = 1, J = 1/2$ だから、 $F = 3/2$ または、 $F = 1/2$ であるので、その z 成分に対応する各状態を考えると Clebsch - Gordan 係数を用いて次のようになる[20]。

$$\begin{aligned}
 \left| F = \frac{3}{2}, m_F = \frac{3}{2} \right\rangle &= \left| m_j = \frac{1}{2} \right\rangle | I_z = 1 \rangle \\
 \left| F = \frac{3}{2}, m_F = \frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left| m_j = \frac{1}{2} \right\rangle | I_z = 0 \rangle \\
 &\quad + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| m_j = -\frac{1}{2} \right\rangle | I_z = 1 \rangle
 \end{aligned}$$

$$\left| F = \frac{3}{2}, m_F = -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| m_j = \frac{1}{2} \right\rangle | I_z = -1 \rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| m_j = -\frac{1}{2} \right\rangle | I_z = 0 \rangle$$

$$\left| F = \frac{3}{2}, m_F = -\frac{3}{2} \right\rangle = \left| m_j = -\frac{1}{2} \right\rangle | I_z = -1 \rangle$$

$$\left| F = \frac{1}{2}, m_F = \frac{1}{2} \right\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}} \left| m_j = \frac{1}{2} \right\rangle | I_z = 0 \rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| m_j = -\frac{1}{2} \right\rangle | I_z = 1 \rangle$$

$$\left| F = \frac{1}{2}, m_F = -\frac{1}{2} \right\rangle = -\sqrt{\frac{1}{3}} \left| m_j = \frac{1}{2} \right\rangle | I_z = -1 \rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| m_j = -\frac{1}{2} \right\rangle | I_z = 0 \rangle \quad (2-13)$$

このように、各状態は(2-10)式での弱磁場の場合 ($B_z = 0$) の各固有状態に一致している。すなわち、弱磁場の場合には、全角角運動量Fを良い量子数として各状態の固有状態が表される。

以上述べたように、重水素の $1S_{1/2}$ 状態は弱磁場中では、全角角運動量Fを良い量子数として

$$\left| F = \frac{3}{2}, m_F = \frac{3}{2} \right\rangle, \left| F = \frac{3}{2}, m_F = \frac{1}{2} \right\rangle, \left| F = \frac{3}{2}, m_F = -\frac{1}{2} \right\rangle,$$

$$\left| F = \frac{3}{2}, m_F = -\frac{3}{2} \right\rangle, \left| F = \frac{1}{2}, m_F = \frac{1}{2} \right\rangle, \left| F = \frac{1}{2}, m_F = -\frac{1}{2} \right\rangle$$

の各状態に、また、強磁場中では J, I を良い量子数として、

$$\left| m_j = \frac{1}{2} \right\rangle |I_z = 1\rangle, \left| m_j = \frac{1}{2} \right\rangle |I_z = 0\rangle, \left| m_j = \frac{1}{2} \right\rangle |I_z = -1\rangle,$$

$$\left| m_j = -\frac{1}{2} \right\rangle |I_z = -1\rangle, \left| m_j = -\frac{1}{2} \right\rangle |I_z = 0\rangle, \left| m_j = -\frac{1}{2} \right\rangle |I_z = 1\rangle$$

の各状態に分離する。

これらの各状態に対して磁場の強さに対するエネルギーの関係を (2-8) 式によって求めた結果を図 2-1 のようになる。

2.1.2 重水素原子の核スピンのベクトル偏極度

前節で述べたように、外部から加える磁場によって各状態が原子核スピンの z 成分 I_z の各値に対応して分離する性質をもつことが、偏極した粒子ビームを生成する偏極イオン源の原理において基本的に重要な点である。ここで、磁場強度に対する各状態の核スピンの偏極度の変化を考察する。

一般に、スピンを持った粒子の集団において、そのスピンの向きが z -方向に偏っている程度を表す偏極度は、Pauli のスピンオペレータの z 成分 σ_z の統計的平均値で与えられる[21]。すなわち、ベクトル偏極度を P_z とすると、

$$P_z = \langle \sigma_z \rangle$$

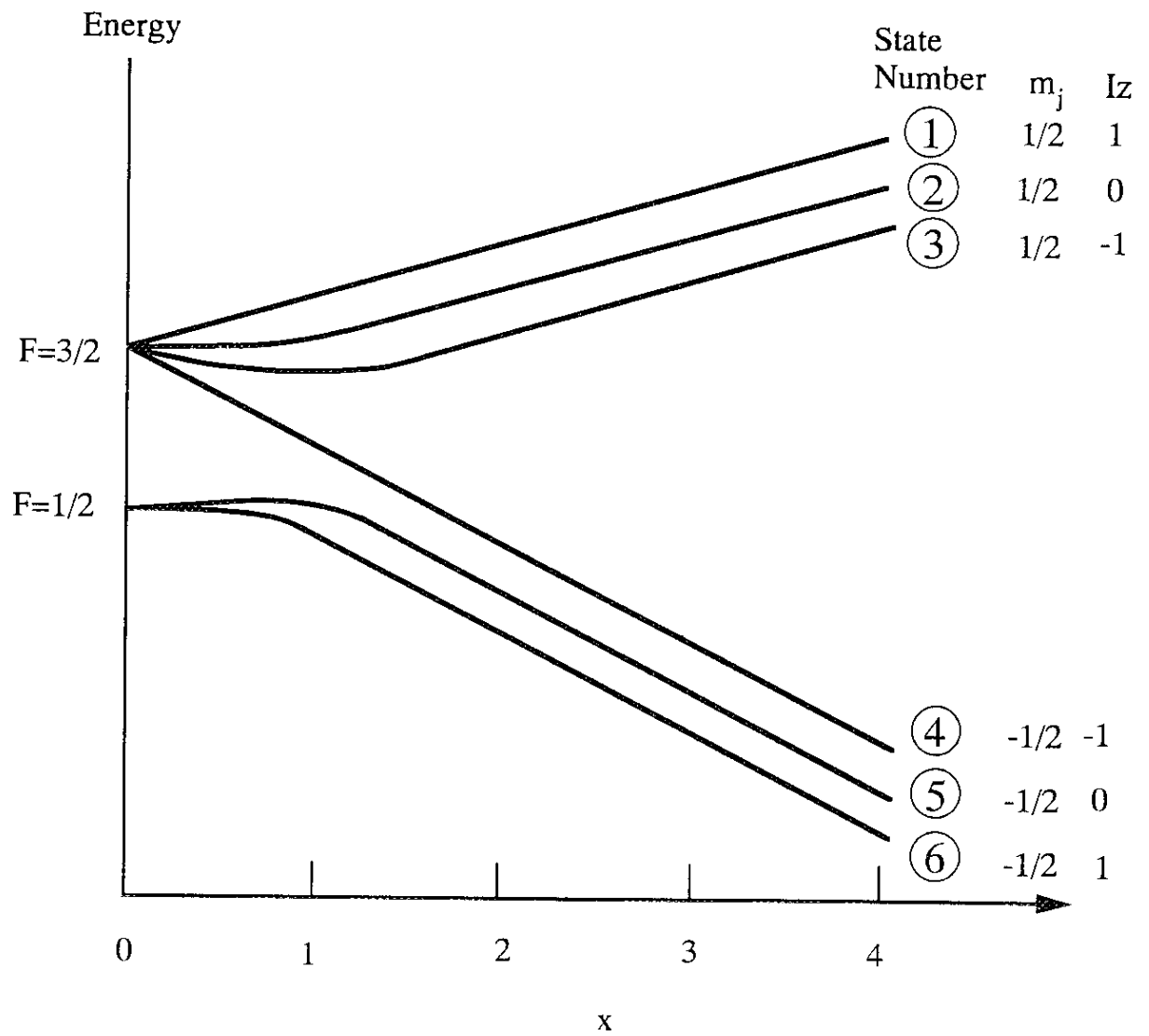


図 2 - 1 磁場に対する重水素原子の 1 S 状態のエネルギー準位
 縦軸はエネルギー、横軸は $x = B/117[G]$ 、
 B は磁場強度を示す。

$$= \sum p_n \langle n | \sigma_z | n \rangle \quad (2-14)$$

で与えられる。ここで p_n は粒子集団において、量子力学的スピン状態 $|n\rangle$ である粒子の全体に占める割合を表す。

まず、 $1S_{1/2}$ 状態の 1 から 6 の状態（図 2-1 の状態 1~6）のうち、状態 1 だけの粒子集団を考えるならば、

$$p_1 = 1 \quad (2-15)$$

であり、また状態ベクトル $|1\rangle$ は、核スピンの項だけを見ると、

$$|1\rangle = |I_z = 1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2-16)$$

であるので、偏極度 P_z は、

$$\begin{aligned} P_z &= 1 \times \langle 1 | \sigma_z | 1 \rangle \\ &= (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (2-17)$$

となり、常にベクトル偏極度は +1 である。

つぎに状態 2 だけの粒子集団を考えると、状態 1 の場合と同様にして、

$$p_2 = I$$

$$|2\rangle = \left\{ \frac{1}{2}(I + \delta_1) \right\}^{\frac{1}{2}} |I_z = 0\rangle + \left\{ \frac{1}{2}(I - \delta_1) \right\}^{\frac{1}{2}} |I_z = 1\rangle$$

(2-18)

であるので、

$$P_z = I \times \langle 2 | \sigma_z | 2 \rangle$$

$$= \frac{1 + \delta_1}{2} (0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1 - \delta_1}{2} (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1 - \delta_1}{2}$$

(2-19)

ただし、 $\delta_1 = \frac{x + \frac{1}{3}}{\left\{ 1 + \frac{2}{3}x + x^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}$ である。

状態 3~6 についても同様に、

$$\text{状態 3 : } P_z = - \frac{1 + \delta_2}{2}$$

$$\text{状態 4 : } P_z = -1$$

$$\text{状態 5 : } P_z = - \frac{1 - \delta_2}{2}$$

$$\text{状態 6 : } P_z = \frac{1 + \delta_1}{2} \quad (2-20)$$

$$\text{ただし、 } \delta_2 = \frac{x - \frac{1}{3}}{\left\{1 - \frac{2}{3}x + x^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

となる。

以上のことより、磁場強度に対する各状態のベクトル偏極度を示すと図 2-2 となる。状態 1 及び状態 4 の偏極度は磁場に依らずそれぞれ $P_z = 1$ 及び -1 であるが、状態 2, 3, 5, 及び 6 のベクトル偏極度は磁場の増加に従って、状態 2 は $P_z = 1/3$ から $P_z = 0$, 状態 3 は $P_z = -1/3$ から $P_z = -1$, 状態 5 は $P_z = -2/3$ から $P_z = 0$, そして状態 6 は $P_z = 2/3$ から $P_z = 1$ に変化する。すなわち状態 1, 4 以外は、核スピンの状態が混合した状態であり、外部磁場の強さに応じて核スピン偏極度が変化する。

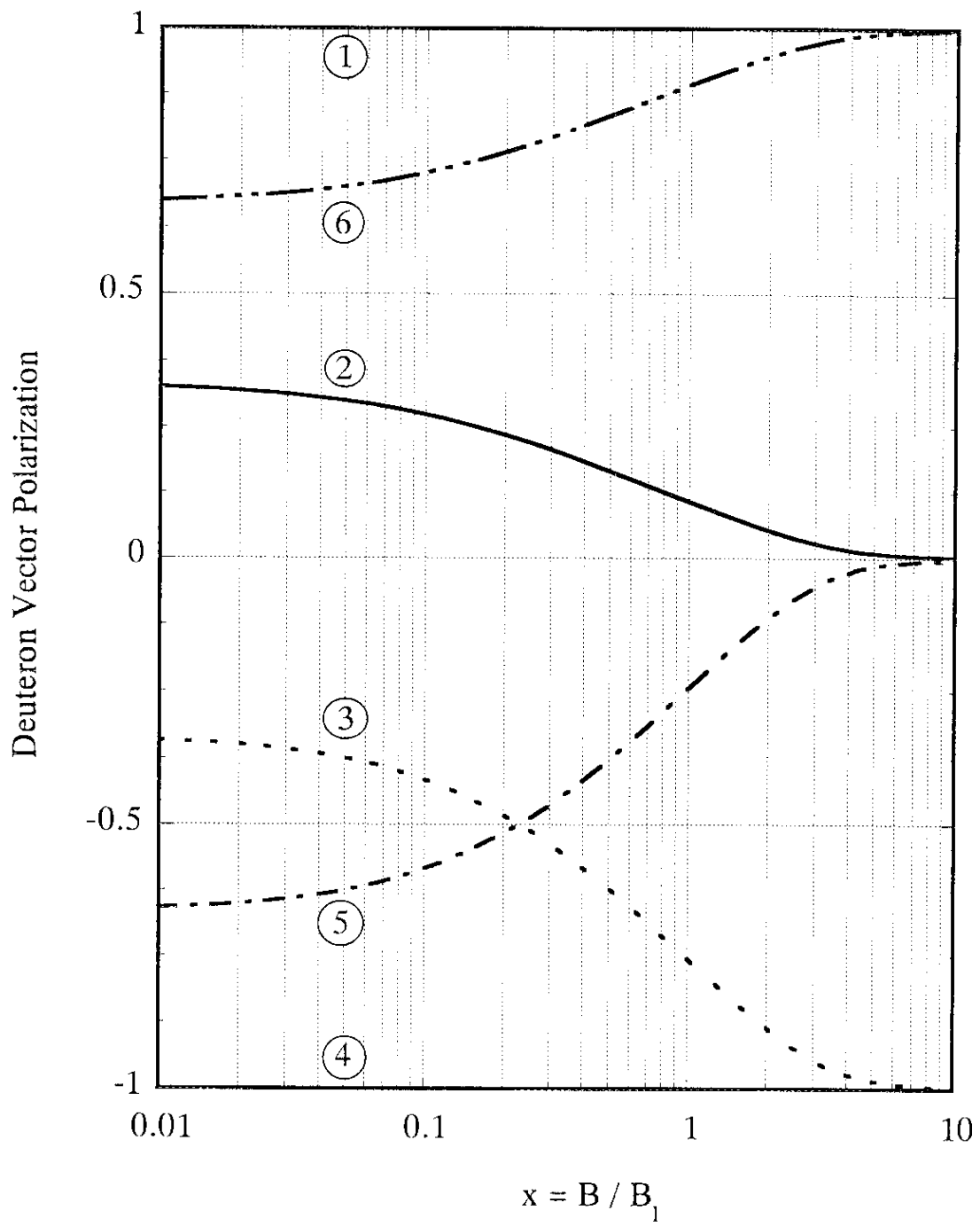


図 2 - 2 重水素原子の核スピンのベクトル偏極度の磁場強度依存性
 縦軸は重水素原子の核スピンのベクトル偏極度、
 横軸は $x = B/117[G]$ 、 B は磁場強度を示す。

2.2 二重光ポンピング法による核スピン偏極

この節では、まず従来の光ポンピング型偏極イオン源での偏極負水素イオンビーム生成についての説明を行ない、そのイオン源を偏極負重水素イオンビームの生成に用いた場合の問題点について述べる。次に、従来の光ポンピング法の問題点を解決する二重光ポンピング法による偏極負重水素イオンビームの生成について述べる。

光ポンピング型偏極イオン源のブロック図を図 2-3 に示す。偏極負水素イオンビームの生成のためには、まず低エネルギー（5 keV 程度）の H^+ イオンビームをつくる。この H^+ イオンが強い磁場中で、光ポンピングにより電子スピン偏極したアルカリ金属原子との荷電交換反応により、電子スピン偏極した水素原子となる。その後、電子スピン偏極した水素原子を、適当な磁場勾配で磁場の方向が反転する零交叉磁場を通過させると、超微細構造の準位間で非断熱遷移（diabatic transition）が生じ、電子スピン偏極を核スピン偏極に移すことができる。

水素原子の場合、強磁場中での基底（ $1S_{1/2}$ ）状態は、原子の超微細相互作用により、4つのエネルギー状態に分離する。中性化セルでの荷電交換反応により生成された電子スピン偏極した水素原子が、図 2-4 に示すように磁気量子数 $m_j = +1/2$ の状態に偏極しているとする。これらの電子スピン偏極した水素原子は強磁場中では2つの sub-level $I_z = +1/2, -1/2$ が同等に存在する。それぞれを状態 1、2 として図 2-4 に示す。これらの各状態を磁場が非断熱的に反転する領域（零交叉磁場領域）を通過させると、状態 1 のスピンは強磁場中でも $F_z = +1$ であるので磁場の反転に追従できずに以前の状態を保持するのに対して、状態 2 は磁場の反転に追従して状態が変化する（詳細については、3.2.2 節で述べる）。従って、零交叉磁場を用いると、図 2-4 に示すように、状態 1（ $m_j = +1/2, I_z = +1/2$ ）は状態 1'（ $m_j = -1/2, I_z = -1/2$ ）へ、状態 2（ $m_j = +1/2, I_z = -1/2$ ）は状態 2'（ $m_j = +1/2, I_z = -1/2$ ）へとそれぞれ遷移する。これを Sona transition という [9]。Sona transition 後の水素原子の核スピン状態は、 $I_z = -1/2$ の状態のみが存在するため核スピン偏極度は 100% である。

次に重水素原子の場合を考える。重水素原子では電子スピン偏極した重水素原子は高磁場中で、3つの sub-level $I_z = +1, 0, -1$ が同等に存在する。それぞれ、状態 1、2、3 として図 2-5 に示す。零交叉磁場による Sona transition を用いると、

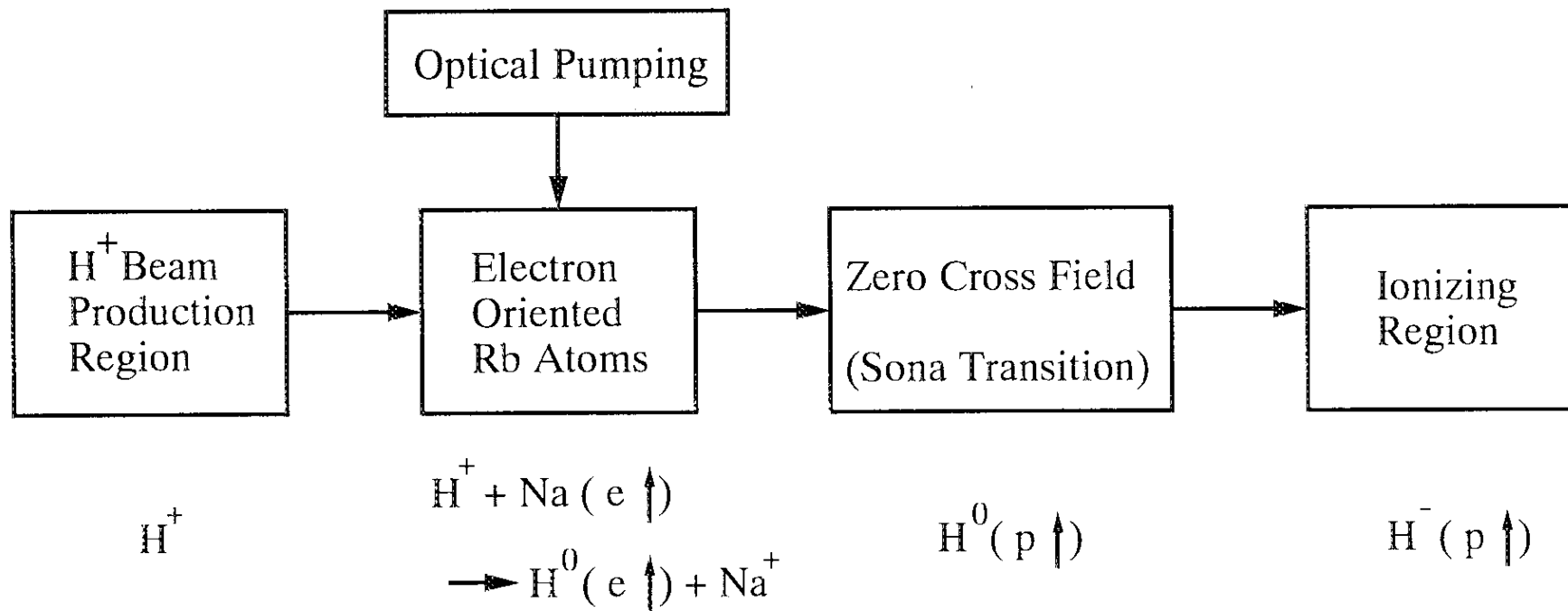


図2-3 光ポンピング型偏極イオン源による偏極負水素イオンビーム生成のブロック図

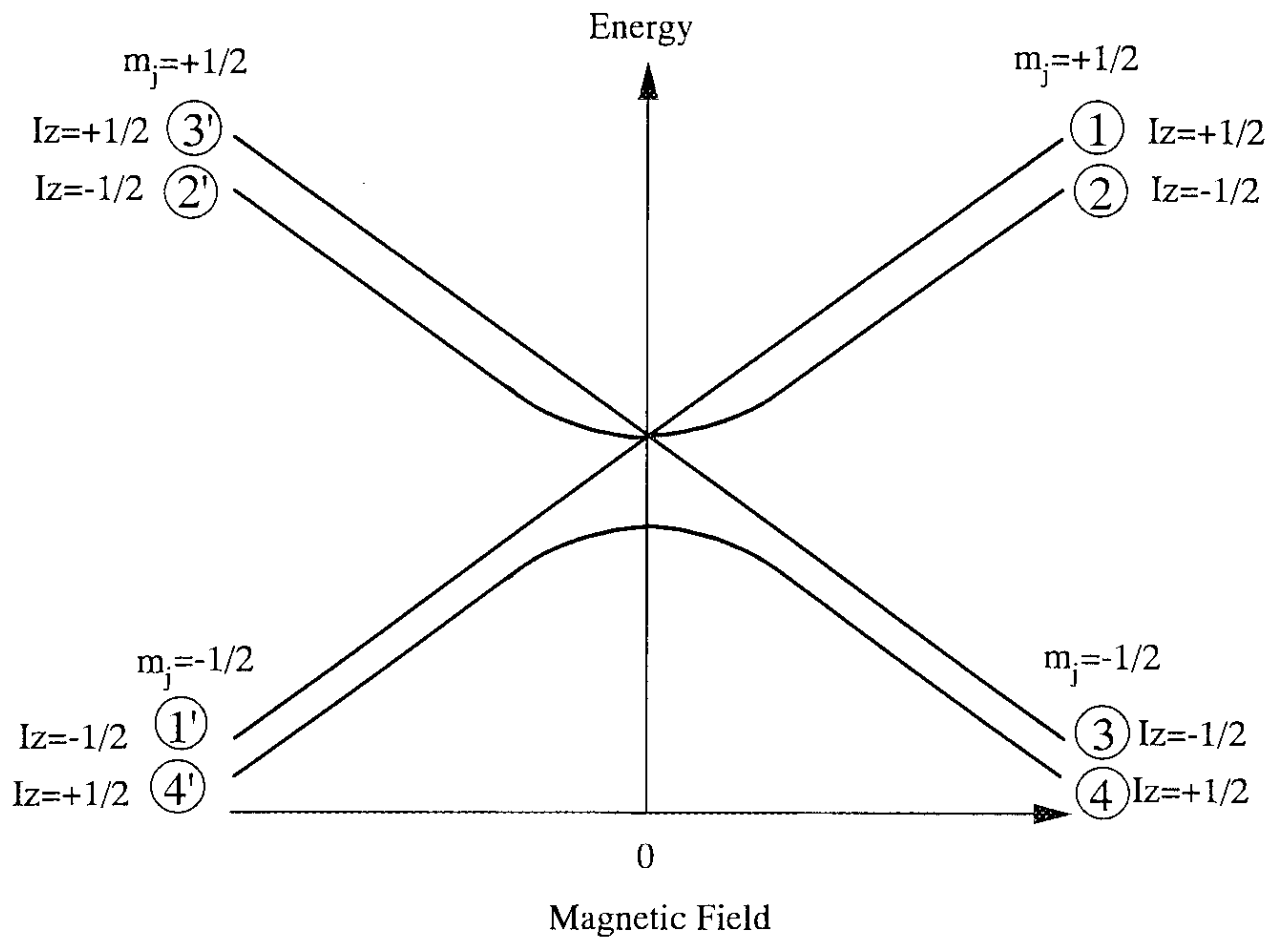


図 2 - 4 零交叉磁場による水素原子の超微細構造の各状態の変化
縦軸はエネルギー、横軸は磁場を示す。

図2-5 に示すように、状態1 ($m_j = +1/2, I_z = +1$) は状態1' ($m_j = -1/2, I_z = -1$) へ、状態2 ($m_j = +1/2, I_z = 0$) は状態2' ($m_j = +1/2, I_z = -1$) へ、そして状態3 ($m_j = +1/2, I_z = -1$) は状態3' ($m_j = +1/2, I_z = 0$) へとそれぞれ遷移する。零交叉磁場領域後の重水素原子の核スピン状態は、 $I_z = +1$ と $I_z = 0$ の状態が2対1の割合で占める。

水素原子では核スピンは $I = 1/2$ であるので、電子スピン $1/2$ の偏極が100%核スピンの移った場合には100%核偏極となった。しかしながら、重水素原子では核スピンは $I = 1$ であり、零交叉磁場領域後の重水素原子の核スピン状態は、 $I_z = +1$ と $I_z = 0$ の状態が2対1の割合で占め、この $I_z = 0$ の状態の存在のために、核スピンのベクトル偏極度は最大で $2/3$ ほどとなりとなる。これにより、従来の光ポンピング法を用いた偏極負重水素イオンビーム生成では、核スピンの高いベクトル偏極度は期待できないとされてきたが、これを解決する方法として、Schneider と Clegg によりいわゆる<二重光ポンピング法>が提案された[17]。

二重光ポンピング法による偏極負重水素イオンビーム生成のブロック図を図2-6に示す。光ポンピング法で核スピンのベクトル偏極度を制限しているのは、零交叉磁場領域後の重水素原子の核スピン状態 $I_z = 0$ の状態の存在である。ところが、二重光ポンピング法を用いると、この核スピン状態 $I_z = 0$ の状態の存在に無関係に純粋に、核スピン状態を選択することができる。

すでに述べたように中性化セルで $m_j = +1/2$ の重水素原子が生成された場合の零交叉磁場領域後の重水素原子の各状態は次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{状態 1'} &: m_j = -1/2 \quad I_z = -1 \\ \text{状態 2'} &: m_j = +1/2 \quad I_z = -1 \\ \text{状態 3'} &: m_j = +1/2 \quad I_z = 0 \end{aligned}$$

ここで、状態1'の重水素原子だけが、零交叉磁場領域後に他の2つの状態(2'と3')とは異なった電子スピン状態 ($m_j = -1/2$) をもつ。負重水素イオンの2つの電子は同一軌道 ($1S^2$) に存在するので[22]、Pauliの排他原理により、各々の電子スピンの向きは反平行でなければならない。従って、イオン化に際してイオン化セル中のアルカリ金属原子の電子を光ポンピングにより $m_j = -1/2$ の状態に偏極させると、Pauliの排他原理に従い電子スピンの $m_j = -1/2$ の状態の重水素原子(状態1')のみが負イオンとして生成される。

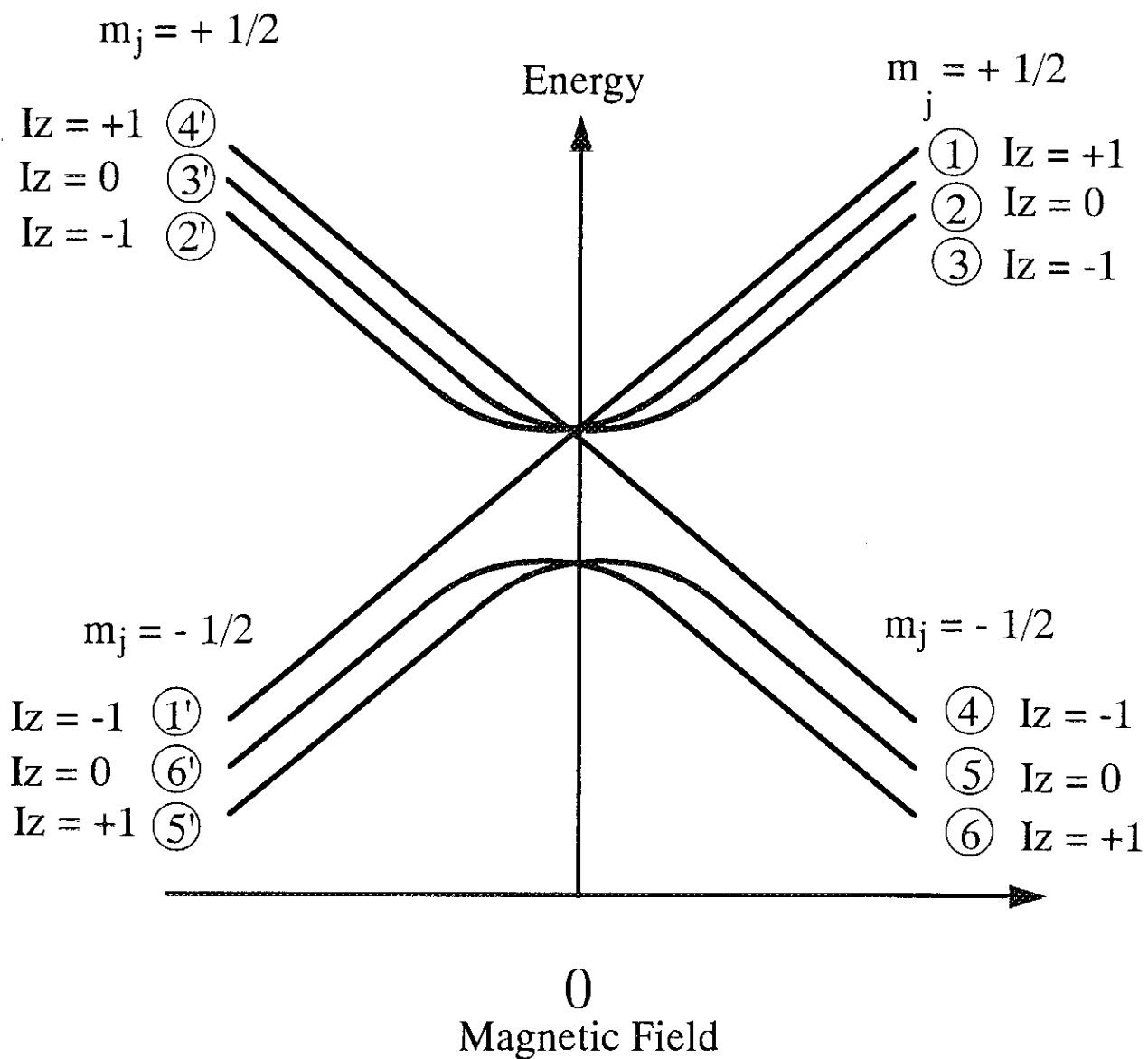


図 2 - 5 零交叉磁場による重水素原子の超微細構造の各状態の変化
縦軸はエネルギー、横軸は磁場を示す。

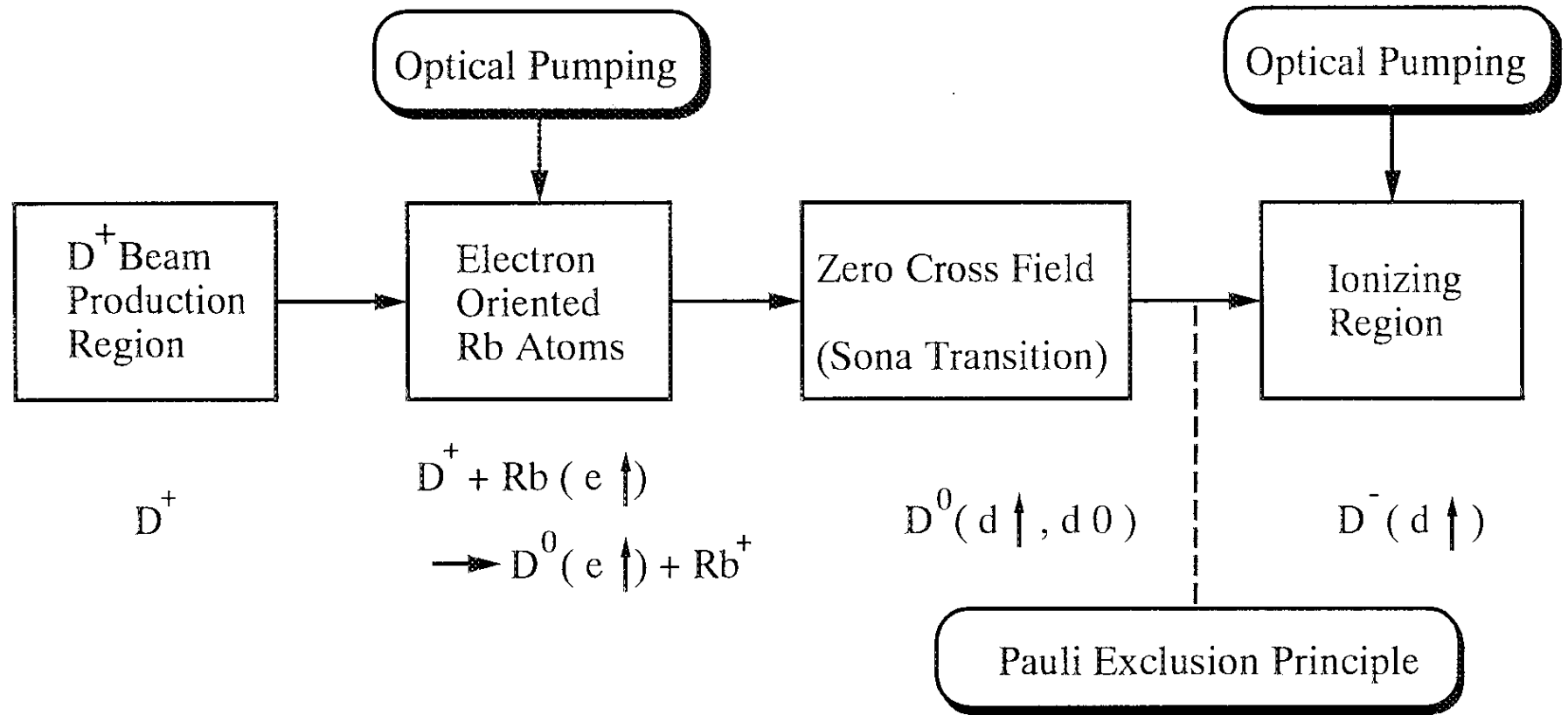


図2-6 二重光ポンピング型偏極負重水素イオン源による偏極負重水素イオンビーム生成のブロック図

すなわち、 $1'$ 状態の核スピン状態 $I_z = -1$ に 100 % ベクトル偏極された負重水素イオンビームが得られることになる。この機構を図式的に示したものを図 2-7 に示す。

以上述べたように、二重光ポンピング法により偏極負重水素イオンビームの生成を行なうと、原理的に核スピンのベクトル偏極度が 100 % の偏極負重水素イオンビームの生成が可能となることがわかる。

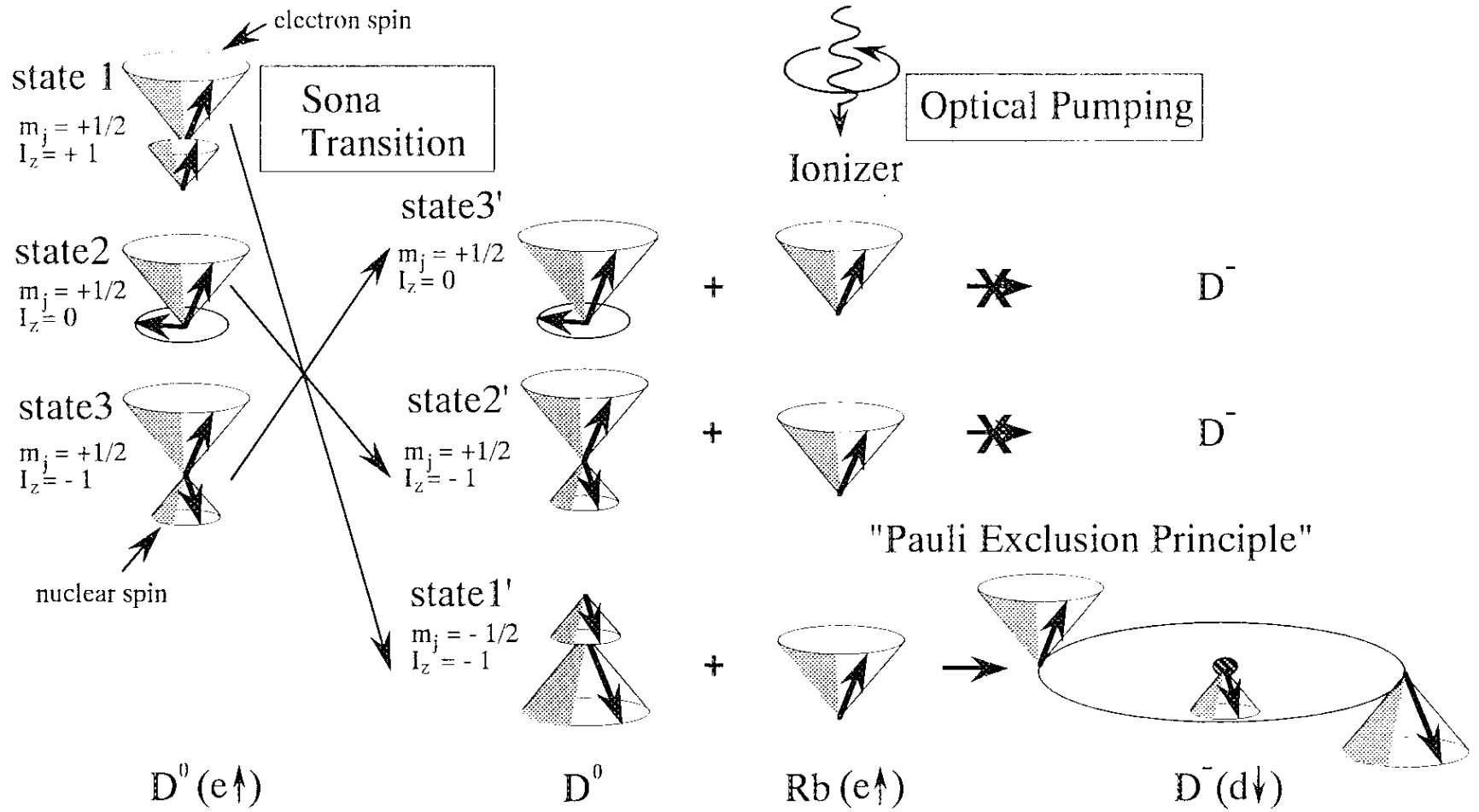


図 2-7 二重光ポンピング法による偏極負重水素イオンビーム生成の原理図

第3章 二重光ポンピング型偏極イオン源の性能 (ビーム強度、偏極度)を決定する要因

第2章で二重光ポンピング法による偏極負重水素イオンビームの生成方法について述べた。この章では、二重光ポンピング法により生成される偏極負重水素イオンのビーム強度と核スピンのベクトル偏極度を決定する要因を、3.1節でビーム強度、3.2節では核スピンの偏極度についてそれぞれ述べる。

3.1 ビーム強度

二重光ポンピング法により生成される偏極負重水素イオンのビーム強度を決定する要因としては、主に次の3つのものが考えられる。

- (a) ECR イオン源から引き出される
正重水素イオン (D^+ イオン) ビームの強度

ECR イオン源から引き出される正重水素イオン (D^+ イオン) のビーム強度は、空間電荷効果によるビームの拡がりのために、引き出されるビームのエネルギーに大きく依存する。一方ビームエネルギーは、中性化セルでの荷電交換反応の断面積のエネルギー依存性から決定される。 D^+ イオンとアルカリ金属原子との荷電交換反応の断面積は、 D^+ イオンのエネルギー (E) が約 2 ~ 5 keV で最大となり、それ以上のエネルギーでは減少する[23] (第4章参照)。実際の装置では、これらの両方からビームエネルギーの最適値を見つける必要がある。また、実際の装置では引き出し電極の形状やサイズにもビーム強度は影響されるので、電極の形状やサイズによりビーム強度の最適化を図る必要がある。

(b) 中性化セル中のアルカリ金属蒸気ターゲットの厚さ

D^+ イオンとアルカリ金属原子との荷電交換反応でつくられる重水素原子ビームの強度は、アルカリ金属蒸気ターゲットの厚さを大きくすることで増大する。しかしながら、中性化セルやイオン化セルのアルカリ金属蒸気の密度を大きくすると、たとえ光ポンピングのレーザーパワーが十分であっても、いわゆる radiation trapping (放射捕獲) の効果により、電子スピン偏極度が減少することになる [24]。radiation trapping とは、アルカリ金属蒸気の密度が大きい場合に、光ポンピングの過程で円偏光を吸収することにより励起状態となった電子が、基底状態に decay する際に放射する直線偏光した光を偏極したアルカリ金属原子が再度吸収することで、減偏極する効果のことをいう。中性化セルを長くすることでアルカリ金属蒸気ターゲットの厚さを実効的に増すことができれば、アルカリ金属蒸気の密度は大きくならずすみ、radiation trapping の影響を免れて、ビーム強度を増すことができる。

(c) イオン化セル中のアルカリ金属蒸気ターゲットの厚さ

イオン化セル中での負イオン生成の反応断面積は中性化セルでの荷電交換の反応断面積に比べて1桁近く小さい [23]。従って、アルカリ金属蒸気ターゲットの厚さを中性化セルに比べて大きくする必要があるので、radiation trapping によるアルカリ金属原子の電子スピン偏極度の減偏極が問題となる。しかしながら、Mori の検討によると、アルカリ金属蒸気ターゲットの厚さが 3×10^{14} atoms / cm² 程度以上になると、イオン化セルでは負重水素イオン (D^- イオン) の生成反応よりも消滅反応の方が支配的となり、従って D^- イオンのビーム強度は、これ以上アルカリ金属蒸気ターゲット厚さを大きくしても増加しない。この 3×10^{14} atoms / cm² 程度のターゲット厚さであればイオン化セルの長さを例えば 30 cm だとすると、密度は 1×10^{13} atoms / cm³ 程度となる。この程度ならイオン化セルの磁場強度を大きくすることで radiation trapping の抑制が可能である [18]。従って、アルカリ金属蒸気ターゲットを厚くしたときに radiation trapping によるアルカリ金属原子の電子スピン偏極度の減偏極は大きな問題ではないので、高強度の偏極負重水素イオンビームの生成が可能となる。

3.2 核スピン偏極度

この節では核スピン偏極度を決定する要因について述べる。二重光ポンピング法により生成される偏極負重水素イオンビームの核スピン偏極度を決定する要因としては、主に次の3つのことが考えられる。

- (a) 中性化セルでの正重水素イオン (D^+ イオン) とアルカリ金属原子との荷電交換反応により生成される重水素原子の電子スピン偏極度

二重光ポンピング法により生成される負重水素イオンビームの核スピン偏極度は、中性化セルで生成される重水素原子の電子スピン偏極度に依存する。一方、この重水素原子の電子スピン偏極度は、中性化セル中のアルカリ金属原子の電子スピン偏極度及び荷電交換反応での電子スピン偏極の移行度によって決まる。

中性化セル及びイオン化セルのアルカリ金属原子の電子スピン偏極度は、光ポンピングを行なうためのレーザーパワーに大きく依存する。光ポンピングに必要なレーザーパワーは Tupa et al. の評価によって 1 W/cm^2 以上あればよいことがわかっている[24]。しかしながら、実際の装置ではレーザー光を導入する窓での吸収やセル壁との衝突によるアルカリ金属原子の減偏極 (relaxation) の問題のために、これより十分大きなレーザーパワーが必要となり、実験的に評価することが重要である。

また、ECR イオン源から引き出された正重水素イオン (D^+ イオン) ビームのエネルギーが 5 keV 程度では、荷電交換反応によってつくられる重水素原子は殆ど主量子数 $n=2$ の状態である。 $n=2$ の状態には軌道角運動量 $l=1$ の $2P$ 状態が存在するのでスピン-軌道相互作用により電子スピンの減偏極が生ずる。このスピン-軌道相互作用は外部磁場を大きくすることにより相対的にその効果を減ずることができる(詳細については3.2.1節で述べる)。すなわち、中性化セル領域の外部磁場の強さは偏極度に大きな影響を与える。

(b) 零交叉磁場領域において重水素原子の電子スピン偏極から
核スピン偏極への移行効率

中性化セルで生成された重水素原子の電子スピン偏極度が高くても、電子スピン偏極から核スピン偏極への移行が不完全であれば、生成される負重水素イオンビームの核スピン偏極度は小さくなる。すなわち、零交叉磁場領域での重水素原子の電子スピン偏極が核スピン偏極に移行する割合も、核スピンのベクトル偏極度を決定する重要な要素の1つである。

(c) 残留ガスとの荷電交換反応により生成される非偏極重水素原子ビーム
(background)

ECR イオン源から引き出された正重水素イオン (D^+ イオン) ビームが、中性化セル中の電子スピン偏極したアルカリ金属原子以外の残留ガスと荷電交換反応を行ない、重水素原子 (D^0) になると、生成した D^0 原子の電子スピンは偏極していない。

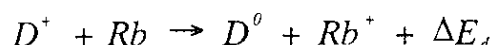
従って、この残留ガスとの荷電交換反応により生成される非偏極の重水素原子の存在 (background) により、ビームの偏極度は減少する。偏極度を増加させるためには残留ガスを減少させることが極めて重要である。

以上のことから、二重光ポンピング法により生成される偏極負重水素イオンビームの核スピン偏極度を増加させるには、中性化セル中での荷電交換反応での電子スピン移行度と、零交叉磁場領域での Sona transition の不完全さを定量的に議論することが重要である。次の 3.2.1 節で中性化セルでの外部磁場の強さに対する荷電交換後の重水素原子の電子スピン偏極度の依存性を評価し、さらに、3.2.2 節で零交叉磁場領域での Sona transition の不完全さによる減偏極について定量的に議論する。

3.2.1 中性化セルで生成される重水素原子の電子スピン偏極度

中性化セルで生成される重水素原子の電子スピン偏極度を増加させることは、偏極負重水素イオンビームの核スピンのベクトル偏極度を増加させるための重要な点の1つである。中性化セルで生成される重水素原子の電子スピン偏極度を減じさせる原因として、荷電交換反応後につくられる重水素原子の励起状態でのスピン-軌道相互作用が考えられる。この節では、スピン-軌道相互作用による重水素原子の電子スピン偏極度の外部磁場の強さに対する減偏極を定量的に評価する。

中性化セルでは、電子スピン偏極したアルカリ金属原子と正重水素イオン (D^+ イオン) ビームとの荷電交換反応により、電子スピン偏極した重水素原子を生成する。アルカリ金属原子としてルビジウムを用いた場合の荷電交換反応は次式で表される。



ここで、 ΔE_d は反応の前後の内部エネルギーの差であり、エネルギー損失 (energy defect) と呼ばれる。この ΔE_d が 0 に近づくと、上の荷電交換反応は共鳴的に起こりやすくなる。 D^+ イオンとルビジウムとの荷電交換反応においてできた重水素原子 (D^0) が、 $n=1$ の $1S$ 状態 (基底状態) である場合のエネルギー損失 ΔE_d の値は、9.43 eV である。一方 $n=2$ の状態では $\Delta E_d = -0.72$ eV と 0 に近い値となる。また、反応の断面積が最大となる D^+ イオンの速度はこの ΔE_d の大きさによって決定される。これはいわゆる Massay の判別条件 (Massay criterion) から求めることができる [25], [26]。Massay の判別条件を次に示す。

$$\frac{a \Delta E_d}{\hbar v_0} \approx 1$$

a は相互作用を特徴づける長さ、 \hbar はプランク定数 / 2π 、 v_0 はビームの速度である。この式の意味するところは、反応の前後の軌道電子の相対速度が近くなるところで反応の起こりやすさが最も大きくなるということである。従ってビームの

エネルギーが 5keV 程度の低エネルギーでは $n=2$ の状態が最も多く作られることになる。

$n=2$ の状態には $2P$ 状態が含まれる。 $2P$ 状態は軌道角運動量 $l=1$ の状態であるのでスピン-軌道相互作用により、電子スピン偏極した重水素原子が減偏極する。このスピン-軌道相互作用は外部磁場の強さに大きく左右され電子スピン偏極度もそれに依りて大きく影響を受ける。次に、荷電交換反応後の重水素原子の電子スピン偏極度の磁場強度依存性を評価する。

$n=2$ の状態の $l=1$ の状態である $2P_{3/2}$, $2P_{1/2}$ 状態の磁場中での固有関数は、空間部分を表す状態ベクトル $|n, l, m\rangle$ (主量子数 n , 方位量子数 l , 磁気量子数 m) 及び、電子スピン状態を表すスピン状態ベクトル $|S_z\rangle$ を用いて次のように表される[27]。

$2P_{3/2}$ 状態

$$|u\rangle = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{2}(1+\delta) \right\}^{\frac{1}{2}} |n, l, m-1/2\rangle |S_z = +1/2\rangle \\ \left\{ -\frac{1}{2}(1-\delta) \right\}^{\frac{1}{2}} |n, l, m+1/2\rangle |S_z = -1/2\rangle \end{cases}$$

$2P_{1/2}$ 状態

$$|u\rangle = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{2}(1-\delta) \right\}^{\frac{1}{2}} |n, l, m-1/2\rangle |S_z = +1/2\rangle \\ \left\{ \frac{1}{2}(1+\delta) \right\}^{\frac{1}{2}} |n, l, m+1/2\rangle |S_z = -1/2\rangle \end{cases} \quad (3-1)$$

ここで、

$$\delta = \frac{\xi + \frac{2m}{2l+1}}{\left\{ 1 + \xi \frac{4m}{2l+1} + \xi^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\xi = \frac{\mu_B B}{\Delta E} \quad (3-2)$$

である。

(3-2) 式の μ_0 は Bohr 磁子、 B は外部磁場、そして、 ΔE は微細構造の分離エネルギーである。

次に、重水素原子の磁場中での各状態を具体的に記すと次のようになる。

[$2P_{3/2}$ 状態]

$$\text{a: } l = 1, m = \frac{3}{2}$$

$\delta = 1$ より

$$|u_a\rangle = 1 \times |2, 1, 1\rangle |S_z = +1/2\rangle$$

$$\text{b: } l = 1, m = \frac{1}{2}$$

$$\delta = \frac{\xi + \frac{1}{3}}{\left\{1 + \xi \frac{2}{3} + \xi^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \equiv \delta_1 \quad \text{より、}$$

$$|u_b\rangle = \left\{\frac{1}{2}(1 + \delta_1)\right\}^{\frac{1}{2}} |2, 1, 0\rangle |S_z = +1/2\rangle$$
$$- \left\{\frac{1}{2}(1 - \delta_1)\right\}^{\frac{1}{2}} |2, 1, 1\rangle |S_z = -1/2\rangle$$

$$c: l = 1, m = -\frac{1}{2}$$

$$\delta = \frac{\xi - \frac{1}{3}}{\left\{1 - \xi \frac{2}{3} + \xi^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \equiv \delta_2 \quad \text{より、}$$

$$\begin{aligned} |u_c\rangle = & \left\{ \frac{1}{2}(1 + \delta_2) \right\}^{\frac{1}{2}} |2, 1, -1\rangle |S_z = +1/2\rangle \\ & - \left\{ \frac{1}{2}(1 - \delta_2) \right\}^{\frac{1}{2}} |2, 1, 0\rangle |S_z = -1/2\rangle \end{aligned}$$

$$d: l = 1, m = -\frac{3}{2}$$

$$\delta = 1 \quad \text{より、}$$

$$|u_d\rangle = 1 \times |2, 1, -1\rangle |S_z = -1/2\rangle$$

[$2P_{1/2}$ 状態]

$$c: l = 1, m = \frac{1}{2}$$

$$\delta = \delta_1 \quad \text{より、}$$

$$\begin{aligned} |u_c\rangle = & \left\{ \frac{1}{2}(1 - \delta_1) \right\}^{\frac{1}{2}} |2, 1, 0\rangle |S_z = +1/2\rangle \\ & + \left\{ \frac{1}{2}(1 + \delta_1) \right\}^{\frac{1}{2}} |2, 1, 1\rangle |S_z = -1/2\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f: \quad l &= 1, \quad m = -\frac{1}{2} \\
\delta &= \delta_2 \quad \text{より、} \\
|u_f\rangle &= \left\{ \frac{1}{2}(1-\delta_2) \right\}^{\frac{1}{2}} |2, 1, -1\rangle |S_z = +1/2\rangle \\
&\quad + \left\{ \frac{1}{2}(1+\delta_2) \right\}^{\frac{1}{2}} |2, 1, 0\rangle |S_z = -1/2\rangle
\end{aligned} \tag{3-3}$$

ここで、 $D^+ + Rb(e \uparrow) \rightarrow D^0(e \uparrow) + Rb^+$ の偏極電子の移行反応において、 D^0 原子はまず $2P_{3/2}$ 、 $2P_{1/2}$ 状態に等確率で入るとすると、 $+1/2$ に偏極した電子 ($S_z = +1/2$) が上記の各状態を占める占有確率 $w_{a,b,f}$ は $w_i = \langle S_z = +1/2 | u_i \rangle^2$ より次式で表される。

$$\begin{aligned}
w_a &= \frac{1}{3} \\
w_b &= \frac{1+\delta_1}{6} \\
w_c &= \frac{1+\delta_2}{6} \\
w_d &= 0 \\
w_e &= \frac{1-\delta_1}{6} \\
w_f &= \frac{1-\delta_2}{6}
\end{aligned} \tag{3-4}$$

ただし、上式は $\sum_{i=a}^f w_i = 1$ で規格化している。

これらの各状態に入った偏極電子は、純粋状態 ($|u_a\rangle$) 以外は、L-S coupling force により、電子スピンに関しては混合した状態となる ($|S_z = +1/2\rangle$ と $|S_z = -1/2\rangle$ が混合している)。2P 状態は 1S 状態へ極めて速く decay する ($\tau \sim 1.6 \times 10^{-9}$ sec) [28]。この decay は電気双極子遷移 (Electric dipole transition; $\Delta l = 1$) であるので、強磁場中では遷移前後において、電子スピンの状態は変化しない。

この遷移後 2P 状態の a~f の状態において、これらの各状態が 1S 状態へ遷移する確率 p_i は次式で表される[29]。

$$p_i = \frac{\omega_{SP}^3}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} \left| \langle 1S_{1/2}(S_z = +1/2) | e\bar{r} | 2P_i(S_z = +1/2) \rangle \right|^2$$

(i=a,b...f) (3-5)

ここで $e\bar{r}$ は双極子モーメント、 $\hbar\omega_{SP}$ は 2P 状態と 1S 状態のエネルギー差、 c は光の速度である。 p_i を各状態 a~f について具体的に書くと次のようになる。

a:

$$\frac{\omega_{SP}^3}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} \left| \langle 1, 0, 0 | e\bar{r} | 2, 1, 0 \rangle \right|^2$$

b:

$$\frac{\omega_{SP}^3}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} \left| \left\{ \frac{1}{2} (1 + \delta_1) \right\}^{\frac{1}{2}} \langle 1, 0, 0 | e\bar{r} | 2, 1, 0 \rangle \right|^2$$

c:

$$\frac{\omega_{SP}^3}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} \left| \left\{ \frac{1}{2} (1 + \delta_2) \right\}^{\frac{1}{2}} \langle 1, 0, 0 | e\bar{r} | 2, 1, 0 \rangle \right|^2$$

d: 0

c:

$$\frac{\omega_{SP}^3}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} \left| \left\{ \frac{1}{2}(1 - \delta_1) \right\}^{\frac{1}{2}} \langle 1, 0, 0 | e\vec{r} | 2, 1, 0 \rangle \right|^2$$

f:

$$\frac{\omega_{SP}^3}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} \left| \left\{ \frac{1}{2}(1 - \delta_2) \right\}^{\frac{1}{2}} \langle 1, 0, 0 | e\vec{r} | 2, 1, 0 \rangle \right|^2 \quad (3-6)$$

この p_i ($i = a, b, \dots, f$) は a 状態の遷移確率を 1 ($p_a = 1$) に規格化すると具体的には次のようになる。

$$p_a = 1$$

$$p_b = \frac{1 + \delta_1}{2}$$

$$p_c = \frac{1 + \delta_2}{2}$$

$$p_d = 0 \quad (3-7)$$

$$p_e = \frac{1 - \delta_1}{2}$$

$$p_f = \frac{1 - \delta_2}{2}$$

従って、遷移後 1S 状態において、 $|S_z = +1/2\rangle$ を占める電子の割合 W_+ と $|S_z = -1/2\rangle$ を占める電子の割合 W_- はそれぞれ、

$$\begin{aligned}
W_{\uparrow} &= \sum_{i=a}^f w_i p_i \\
&= \frac{4 + \delta_1^2 + \delta_2^2}{6} \\
W_{\downarrow} &= 1 - W_{\uparrow} \\
&= \frac{2 - \delta_1^2 - \delta_2^2}{6} \tag{3-8}
\end{aligned}$$

となる。よって、1S 状態での電子スピンの偏極度 P_{\uparrow} は、

$$\begin{aligned}
P_{\uparrow} &= \frac{W_{\uparrow} - W_{\downarrow}}{W_{\uparrow} + W_{\downarrow}} \\
&= \frac{1 + \delta_1^2 + \delta_2^2}{3} \tag{3-9}
\end{aligned}$$

となる。

(3-9) 式より磁場の強さ (B) に対する偏極度 P_{\uparrow} を図 3-1 に示す。

これからわかるように、磁場強度を大きくすることにより、重水素原子の電子スピン偏極度が大きくなる。電子スピン偏極度を 90 % 以上に保つためには、外部磁場の強さは 2 T 以上なければならないことがわかる。

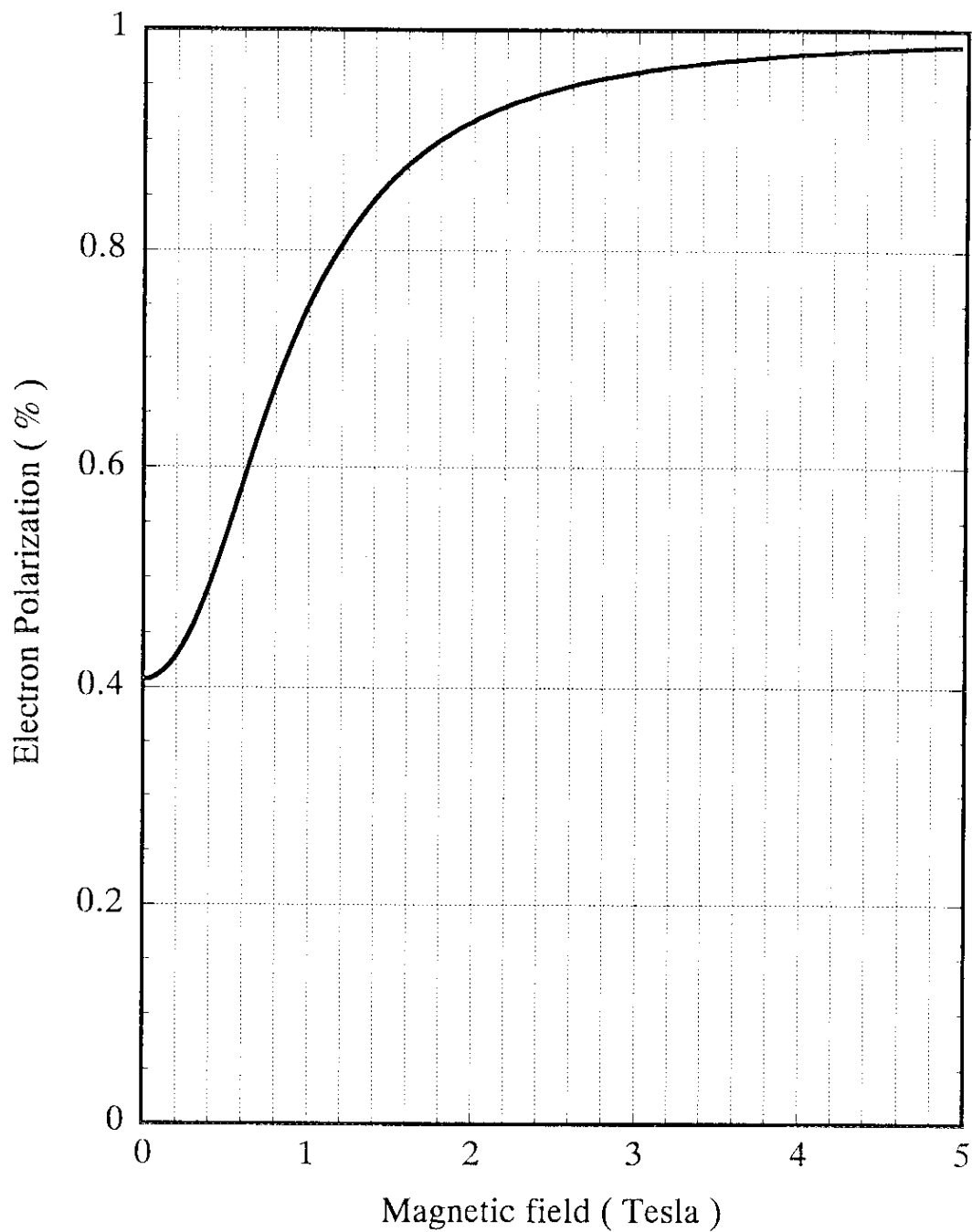


図 3 - 1 中性化セルでの正重水素イオン (D^+) とアルカリ金属原子の荷電交換反応により生成される重水素原子の電子スピン偏極度の磁場強度依存性 (計算値)
 縦軸は重水素原子の電子スピン偏極度、
 横軸は中性化セルの磁場強度を示す。

3.2.2 零交叉磁場領域での減偏極

高い核スピンのベクトル偏極度をもつ偏極負重水素イオンビームを生成するためには、まず中性化セルの領域でできるだけ大きな電子スピン偏極度をもつ重水素原子をつくる必要がある。しかしながら、重水素原子の電子スピン偏極度がいかに大きくとも、電子スピン偏極から核スピン偏極への移行が完全でなければ、高い核スピンのベクトル偏極度は期待できない。すなわち、零交叉磁場（Sona transition）領域での電子スピン偏極から核スピン偏極への移行の効率が、核のベクトル偏極度を決定する重要な要素の1つである。

この節では零交叉磁場（Sona transition）領域での、電子スピン偏極から核スピン偏極への移行度をいろいろな磁場に対して具体的に求め、必要な零交叉磁場の形状について評価する。さらに、二重光ポンピング法により偏極負重水素イオンビームを生成する際の零交叉磁場の問題点について述べる。

磁場方向の急激な反転により、水素や重水素原子の各超微細構造準位を非断熱的に遷移させることにより、電子スピン偏極を核スピン偏極に移行できることが Sona により提案された[9]。この効果を定量的に評価するためには、時間的に変化する磁場中での超微細構造準位の変化を求める必要がある。

磁場中での重水素原子の超微細構造準位の時間的な変化は、時間依存した Schrodinger 方程式を解くことにより求まる。すでに第2章で述べたように超微細構造準位の各状態を表す係数行列 $\vec{b} (b_1, b_2 \dots b_6)$ の時間依存は次の微分方程式を解くことによって評価できる。（付録A(A-12)式参照）

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 g_I}{i \hbar} \begin{pmatrix} (\frac{1}{2} + k) B_z + \frac{B_0}{2} & k(B_x + i B_y) & 0 \\ k(B_x - i B_y) & \frac{1}{2} B_z & k(B_x + i B_y) \\ 0 & k(B_x - i B_y) & (\frac{1}{2} - k) B_z - \frac{B_0}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} (B_x - i B_y) \\ 0 & \frac{1}{2} (B_x - i B_y) & \frac{B_0}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} (B_x - i B_y) & \frac{B_0}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} (B_x + i B_y) \\ 0 & \frac{1}{2} (B_x + i B_y) & \frac{B_0}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} (B_x + i B_y) & \frac{B_0}{\sqrt{2}} & 0 \\ -(\frac{1}{2} + k) B_z + \frac{B_0}{2} & k(B_x - i B_y) & 0 \\ k(B_x + i B_y) & -\frac{B_z}{2} & k(B_x - i B_y) \\ 0 & k(B_x + i B_y) & -(\frac{1}{2} - k) B_z - \frac{B_0}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix} \quad (3-10)$$

ただし、 $k = \frac{\mu_N g_I}{\mu_0 g_J}$, $B_0 = \frac{\alpha}{\mu_0 g_J}$ である。

μ_0, μ_N はそれぞれ Bohr 磁子および核磁子で、 g_I, g_J は核および電子の g - factor である。また、 α は電子と原子核間の角運動量の結合の強さを表す量で、 B_x, B_y, B_z は磁場の各成分である。

(3-10) 式を解く際に、磁場の方向を量子化の軸とし量子化の軸を常に z 軸とするためには、係数行列 \bar{b} を磁場の方向を軸とする Euler 角 (α, β, γ) の回転により変換された後の係数行列 \bar{b}' を用いればよい。 \bar{b}' は次式により求められる。

$$\bar{b}' = D \bar{b} \quad (3-11)$$

D は磁場の方向を軸とする Euler 角の回転変換行列である。

重水素原子は電子スピン 1/2 と核スピン 1 の合成系であるので、それぞれスピン 1/2 及び 1 に対する回転行列 $d^{1/2}, d^1$ を用いることで、 $d^{1/2}$ と d^1 の直積として回転変換行列 D を求めることができる[19]。Euler 角 α, β, γ に対するスピン 1/2 の回転行列 $d^{1/2}$ は

$$d^{1/2} = \exp(-i\alpha) \begin{bmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & -\sin \frac{\beta}{2} \\ \sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{bmatrix} \exp(-i\gamma) \equiv \begin{bmatrix} a_{++} & a_{+-} \\ a_{-+} & a_{--} \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

である[19]。

一方スピン 1 に対する回転行列 d^1 は

$$d^1 = [UMU^{-1}]^1 \quad (3-13)$$

で与えられる[30]。

ここで、 U は直交座標から球基底へのユニタリ変換で次式で与えられる。

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad (3-14)$$

また、 M は回転演算子で、3 個の Euler 回転の積として

$$M = M(\gamma) M(\beta) M(\alpha) \quad (3-15)$$

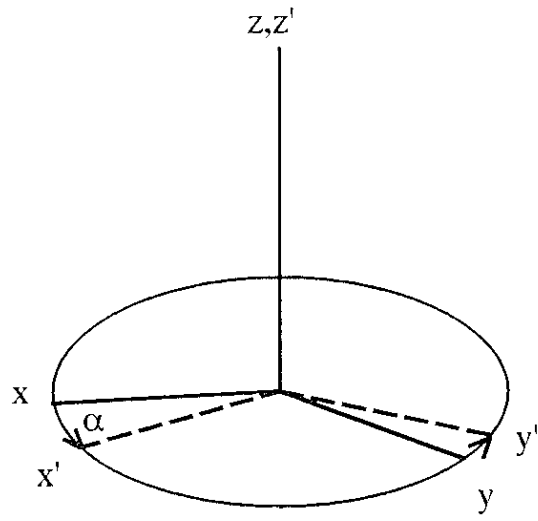
と表す。ここで、 α はもとの z 軸のまわりの回転、 β は新しい y 軸のまわりの回転、そして γ は最後の z 軸のまわりの回転である（図 3-2 参照）。 $M(\alpha)$, $M(\beta)$, $M(\gamma)$ を 3×3 行列で表すとそれぞれ次のようになる。

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-16)$$

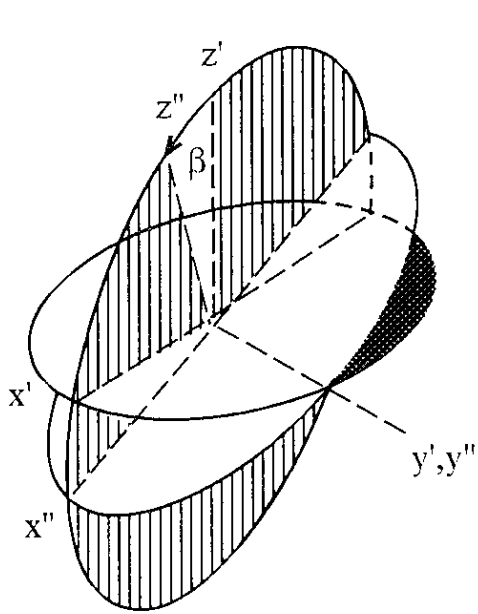
$$M(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$$

$$M(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

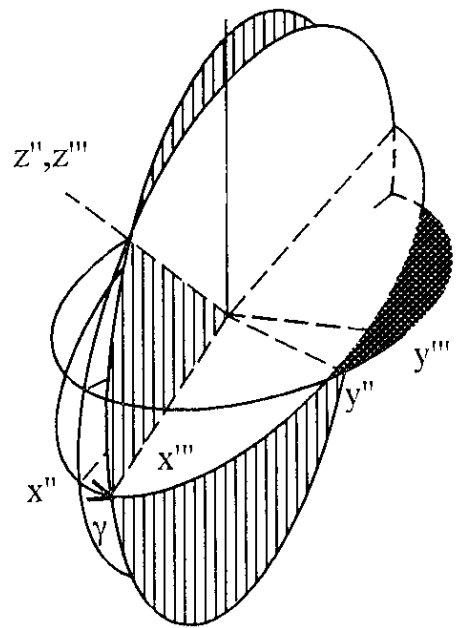
従って回転演算子 M は、



(a)



(b)



(c)

図 3 - 2 Euler 角 α, β, γ および Euler 回転

$$M = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma \\ -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma \\ \cos \alpha \sin \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \beta \cos \gamma \\ -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & \sin \beta \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

(3-17)

として表される。

これらを (3-13) 式に代入すると、スピン 1 に対する回転行列 d^1 は

$$d^1 =$$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \beta\right) \exp[-i(\alpha + \gamma)] & \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} \exp[-i\gamma] & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \beta\right) \exp[i(\alpha - \gamma)] \\ -\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} \exp[-i\alpha] & \cos \beta & \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} \exp[i\alpha] \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \beta\right) \exp[-i(\alpha - \gamma)] & -\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} \exp[i\gamma] & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \beta\right) \exp[i(\alpha + \gamma)] \end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} c_{++} & c_{+0} & c_{+-} \\ c_{0+} & c_{00} & c_{0-} \\ c_{-+} & c_{-0} & c_{--} \end{bmatrix}$$

(3-18)

となる。従って、重水素原子の回転変換行列 D は、(3-12), (3-18) 式より、

$$D = \begin{bmatrix} a_{++}c_{++} & a_{++}c_{+0} & a_{++}c_{++} & a_{+}c_{+} & a_{+}c_{+0} & a_{+}c_{++} \\ a_{++}c_{0+} & a_{++}c_{00} & a_{++}c_{0-} & a_{+}c_{0-} & a_{+}c_{00} & a_{+}c_{0+} \\ a_{++}c_{-+} & a_{++}c_{-0} & a_{++}c_{--} & a_{+}c_{--} & a_{+}c_{-0} & a_{+}c_{-+} \\ a_{+}c_{+} & a_{+}c_{+0} & a_{+}c_{-} & a_{-}c_{-} & a_{-}c_{+0} & a_{-}c_{+} \\ a_{+}c_{0+} & a_{+}c_{00} & a_{+}c_{0-} & a_{-}c_{0-} & a_{-}c_{00} & a_{-}c_{0+} \\ a_{+}c_{-+} & a_{+}c_{-0} & a_{+}c_{-} & a_{-}c_{-} & a_{-}c_{+0} & a_{-}c_{-+} \end{bmatrix} \quad (3-19)$$

で表される。この行列により係数行列を変換した後、(3-10)式の微分方程式を解くことにより各状態の時間依存性を求めることができる。

磁場方向の急激な反転による重水素原子の各超微細構造準位間の非断熱的な遷移により、電子スピン偏極を核スピン偏極に移行させることができる。重水素原子ビームに大きさが無い場合には、中心軸上では径方向の磁場が存在しないので、零交叉磁場の磁場勾配が大きいが非断熱性も大きくなり、各状態間の遷移は完全なものとなる。しかしながら、実際のビームには大きさがあり、中心軸上以外では径方向の磁場により重水素原子のスピンはその磁場の周りに歳差運動を行なうために、零交叉磁場領域後にその影響が残り、各状態間の遷移が不完全なものとなる。この零交叉磁場領域での各状態間の遷移の不完全さが、生成される負重水素イオンビームの核スピン偏極度に影響を与えたと考えられる。従ってここでは、微分方程式の数値的解法にルンゲクッタ法を用いて、零交叉磁場の勾配やビーム径を変化させたときに、重水素原子の各状態(状態1~状態6)が零交叉磁場領域後どう変化するかを求めた。

反転磁場の勾配が 0.5 Gauss/cm と 10 Gauss/cm の場合についての各状態の変化の計算結果をそれぞれ図 3-3 (a),(b) に示す。縦軸は重水素原子の各状態の占める割合、横軸は零交叉領域での位置を示し、Position が 10 cm の位置で磁場が零となる。ただし、ここで径方向の磁場は、 $\text{div } B = 0$ より、円筒座標系で

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

であたえた。また磁場の中心からの距離 r を 6 mm とし、重水素原子のビームエネルギーを 5 keV とした。

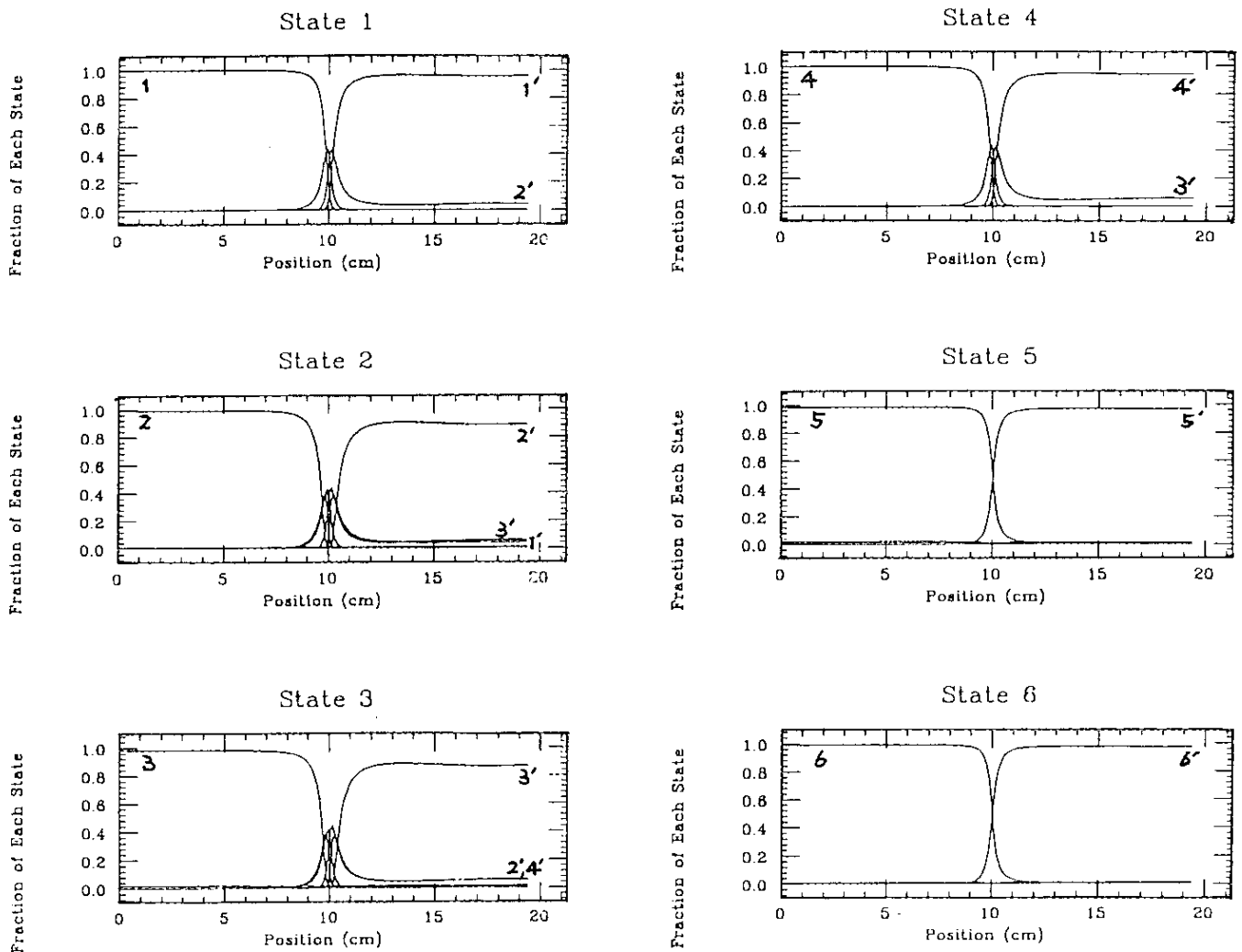


図 3 - 3 (a) 零交叉磁場による重水素原子の各状態の変化
 磁場勾配 $dB/dz = 0.5 \text{ G/cm}$
 縦軸は重水素原子の各状態の占める割合、
 横軸は零交叉磁場領域での位置を示す。
 Position 10 cm で磁場は 0 G である。

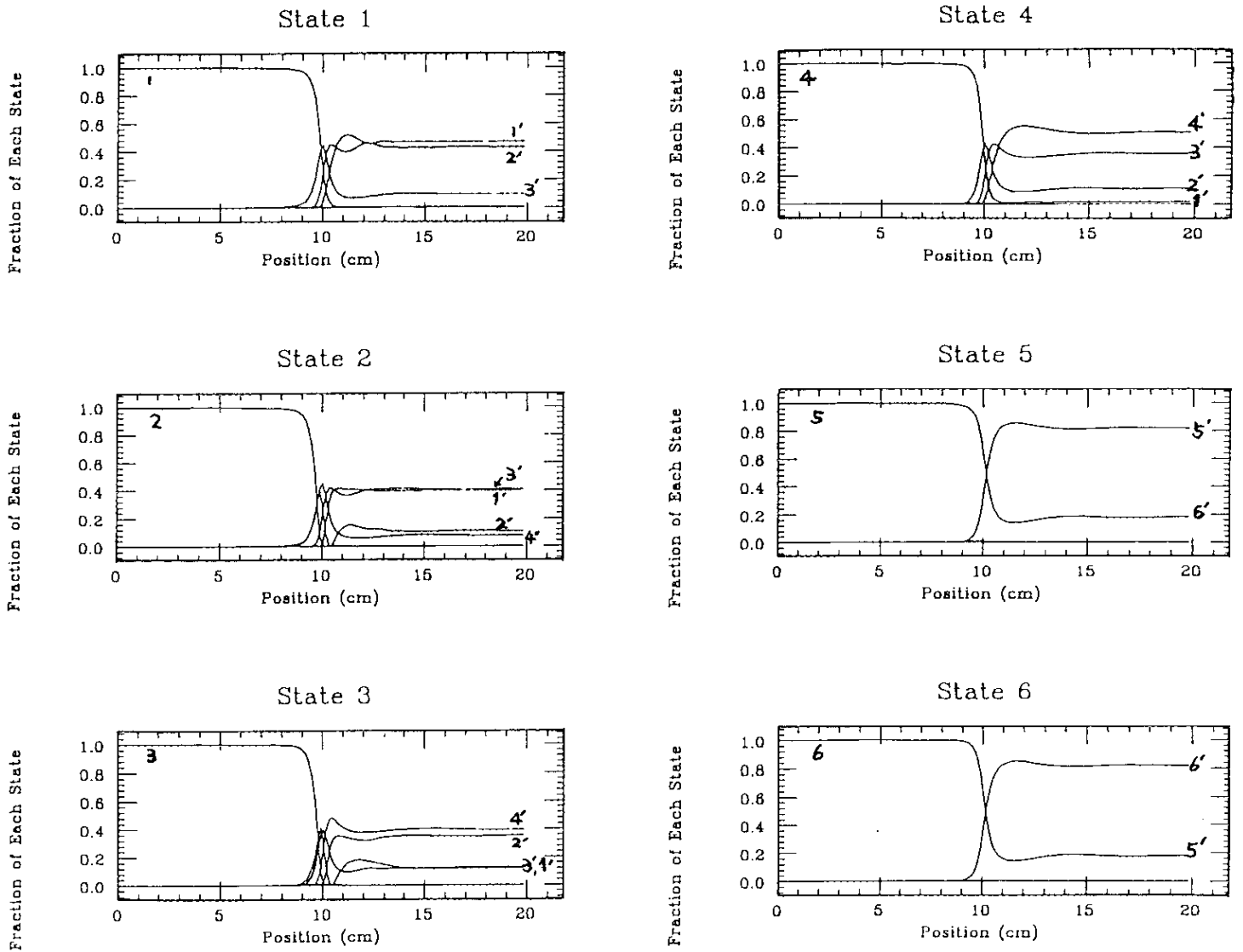


図 3 - 3 (b) 零交叉磁場による重水素原子の各状態の変化

磁場勾配 $dB/dz = 10.0 \text{ G/cm}$

縦軸は重水素原子の各状態の占める割合、
横軸は零交叉磁場領域での位置を示す。

Position 10 cm で磁場は 0 G である。

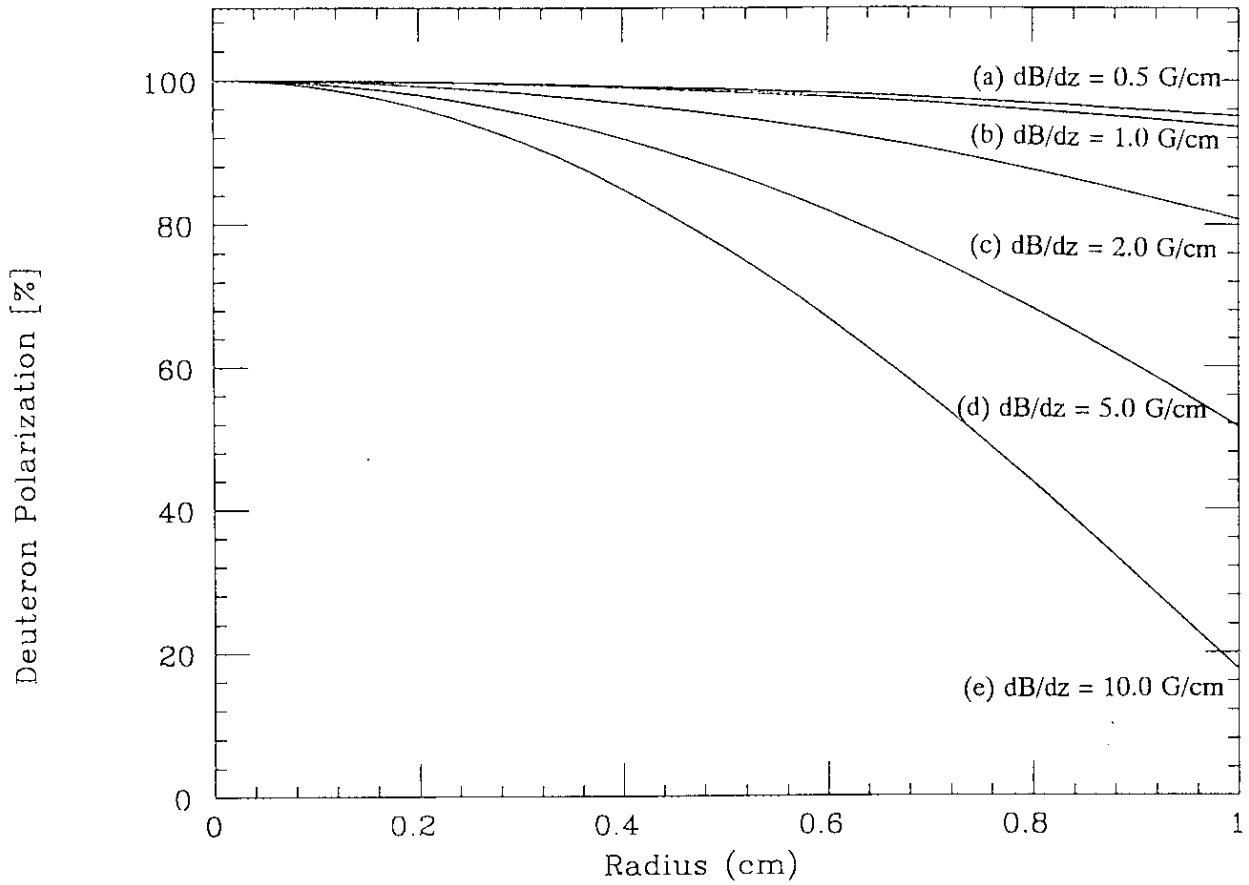


図 3 - 4 零交叉磁場の磁場勾配と中心軸からの距離に対する重水素原子の核スピンのベクトル偏極度の変化（計算値）
 縦軸は重水素原子の核スピンのベクトル偏極度、
 横軸は中心軸からの距離を示す。
 磁場勾配 (a) $dB/dz = 0.5 \text{ G/cm}$ (b) $dB/dz = 1.0 \text{ G/cm}$
 (c) $dB/dz = 2.0 \text{ G/cm}$ (d) $dB/dz = 5.0 \text{ G/cm}$
 (e) $dB/dz = 10.0 \text{ G/cm}$

これからわかるように、反転磁場の勾配が 0.5 Gauss / cm の場合には、各状態はほぼ原理どおりに移行するが（例えば、状態 1 が状態 1'）、磁場勾配が 10 Gauss / cm の場合には重水素原子の各状態間の遷移が頻繁に起こり、移行後各状態で複数の状態が混在する。この状態間の遷移は、状態 $F = 3/2$ 内の各状態 1,2,3,4 間どうし、あるいは、状態 $F = 1/2$ 内の各状態 5,6 間では頻繁に起こるが、 $F = 3/2$ と $F = 1/2$ の間では 327.4 MHz のエネルギーの差があるためほとんど起こらないと考えられる。また、各状態 1,2,3,4 では零磁場（Position が 10 cm の位置）近傍で各状態が混在する。これは重水素原子のスピンが径方向の磁場の周りに行なう歳差運動が原因であると考えられる。零交叉磁場の磁場勾配の大きさに従って、径方向の磁場も大きくなり、そのため歳差運動によるスピンの回転角も大きくなる。従って、図 3-3 (a),(b) に示したように零交叉磁場の磁場勾配が大きいと、歳差運動による影響も大きくなるので、零交叉磁場領域後もその影響が残り各状態が混在する。

次に、磁場が反転する際の磁場勾配と中心軸からの距離の変化に対して、重水素原子の状態 1 の核スピンのベクトル偏極度がどのように変化するかを評価した計算結果を図 3-4 に示す。図 3-4 の横軸は磁場の中心からの距離を示し、縦軸は核スピンのベクトル偏極度である。計算は、重水素原子のビームエネルギーを 5 keV とし、反転磁場の勾配が 10 Gauss / cm, 5.0 Gauss / cm, 2.0 Gauss / cm, 1.0 Gauss / cm, 0.5 Gauss / cm の場合についてそれぞれ行った。

これからわかるように、磁場の勾配が急になるにつれて中心軸から離れたところでは、偏極度は急速に低下する。これは中心軸上の磁場が正から負に反転しても、中心軸上以外では径方向の磁場が存在するために磁場の強度は零にはならず、この磁場の存在のために重水素原子の電子スピンはその磁場のまわりで歳差運動（precession）を行なう。その結果、Sona transition は不完全なものとなる。

以上の計算より、零交叉磁場領域での磁場勾配が 0.5 Gauss / cm 以下の反転磁場を実現できれば、ビーム半径が約 10 mm であっても、原理的にはほぼ 100 % のベクトルスピン偏極した重水素原子を得ることができることがわかった。

重水素原子のビームの速度が変わると、原子の静止系からみた反転磁場の時間変化も変わる。従って、同じ磁場勾配の反転磁場であっても Sona transition に変化が生じると考えられる。反転磁場の勾配を 10 Gauss / cm, 5.0 Gauss / cm, 0.5 Gauss / cm の場合について、異なるビームエネルギーに対する重水素原子の核スピ

ンのベクトル偏極度の変化を計算した。結果を図 3-5 に示す。

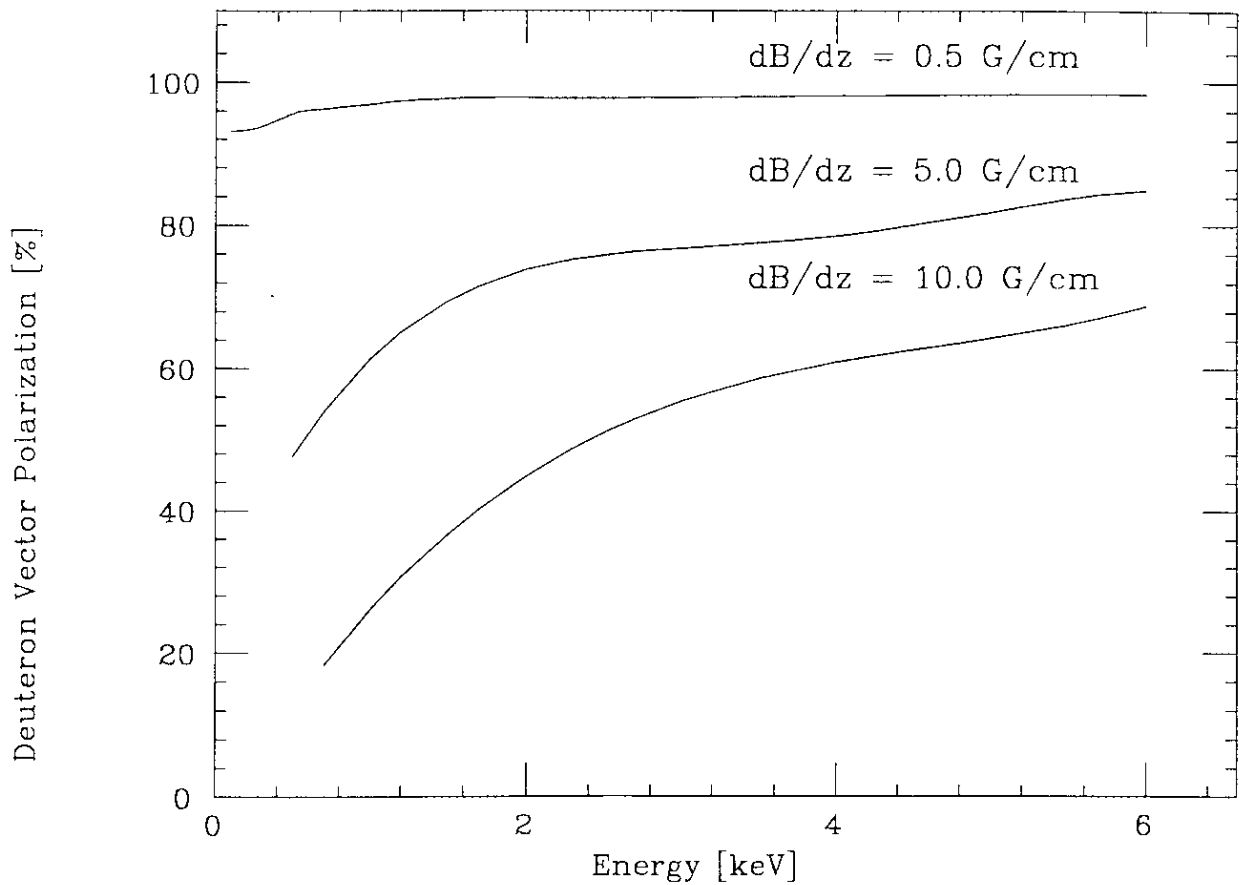


図 3 - 5 重水素原子ビームのエネルギーと零交叉磁場の磁場勾配 (dB/dz)に対する核スピンのベクトル偏極度の変化 (計算値)
縦軸は重水素原子の核スピンのベクトル偏極度、
横軸は重水素原子のビームエネルギーを示す。
磁場勾配 (a) $dB/dz = 0.5 \text{ G/cm}$ (b) $dB/dz = 5.0 \text{ G/cm}$
(c) $dB/dz = 10.0 \text{ G/cm}$

これからわかるように、エネルギーが 1keV 以下すなわち速度が 3×10^7 cm/sec 以下の小さいところでは、核スピンの偏極度は急激に減少する。また磁場の勾配が大きいと偏極度は大きく減少する。これは磁場の変化する速度が小さいために Sona transition を効率よく起こさせるための非断熱的な条件がくずれするためである。この計算結果より、反転磁場の勾配が 0.5 Gauss / cm の場合、ビームのエネルギーが 2 keV 以上であれば、重陽子のベクトル偏極度はビームのエネルギーに無関係にほぼ 100 % であることがわかった。

以上のことより、零交叉磁場領域で重水素原子の電子スピン偏極を核スピン偏極に完全に遷移させるには、磁場勾配が 0.5 Gauss / cm 以下の反転磁場が必要であることがわかった。

次に、零交叉磁場領域後の重水素原子の各状態の変化を計算した結果より明らかになった、二重光ポンピング法による偏極負重水素イオンビーム生成の問題点について述べる。

二重光ポンピング法では、零交叉磁場領域後の重水素原子がイオン化セル中で電子スピン偏極したアルカリ金属原子との荷電交換により負重水素イオンとなる。この際 Pauli の排他原理により、イオン化セルのアルカリ金属原子の電子スピンの向きと反対の向きの電子スピンを持った重水素原子のみが負イオンとなる。従って、イオン化セルのアルカリ金属原子の電子スピン偏極度を -1 から 1 まで変えた場合には、Sona transition 後の重水素原子の各状態（状態 1 ~ 6）の占有率により、負重水素イオンの核スピンのベクトル偏極度がイオン化セルのアルカリ金属原子の偏極度と 1 対 1 の対応を示さなくなることがある。

イオン化セル中のアルカリ金属原子の電子スピン偏極度を -1 から 1 まで変えたときの負重水素イオンの核スピンのベクトル偏極度の変化を、重水素原子の電子スピン偏極度 (P_D^0) をパラメーターとして計算した。結果を図 3-6 (a),(b),(c) に示す。(a) は反転磁場の勾配が 0.5 Gauss / cm、(b) は 5.0 Gauss / cm、(c) は 10 Gauss / cm の時の計算結果である。また横軸は、イオン化セル中のアルカリ金属原子の電子スピン偏極度 (P_e^j) を示し、縦軸は負重水素イオンの核スピンのベクトル偏極度である。またこの計算では重水素原子のビーム半径は 6 mm とし、ビーム内は一様分布であるとした。

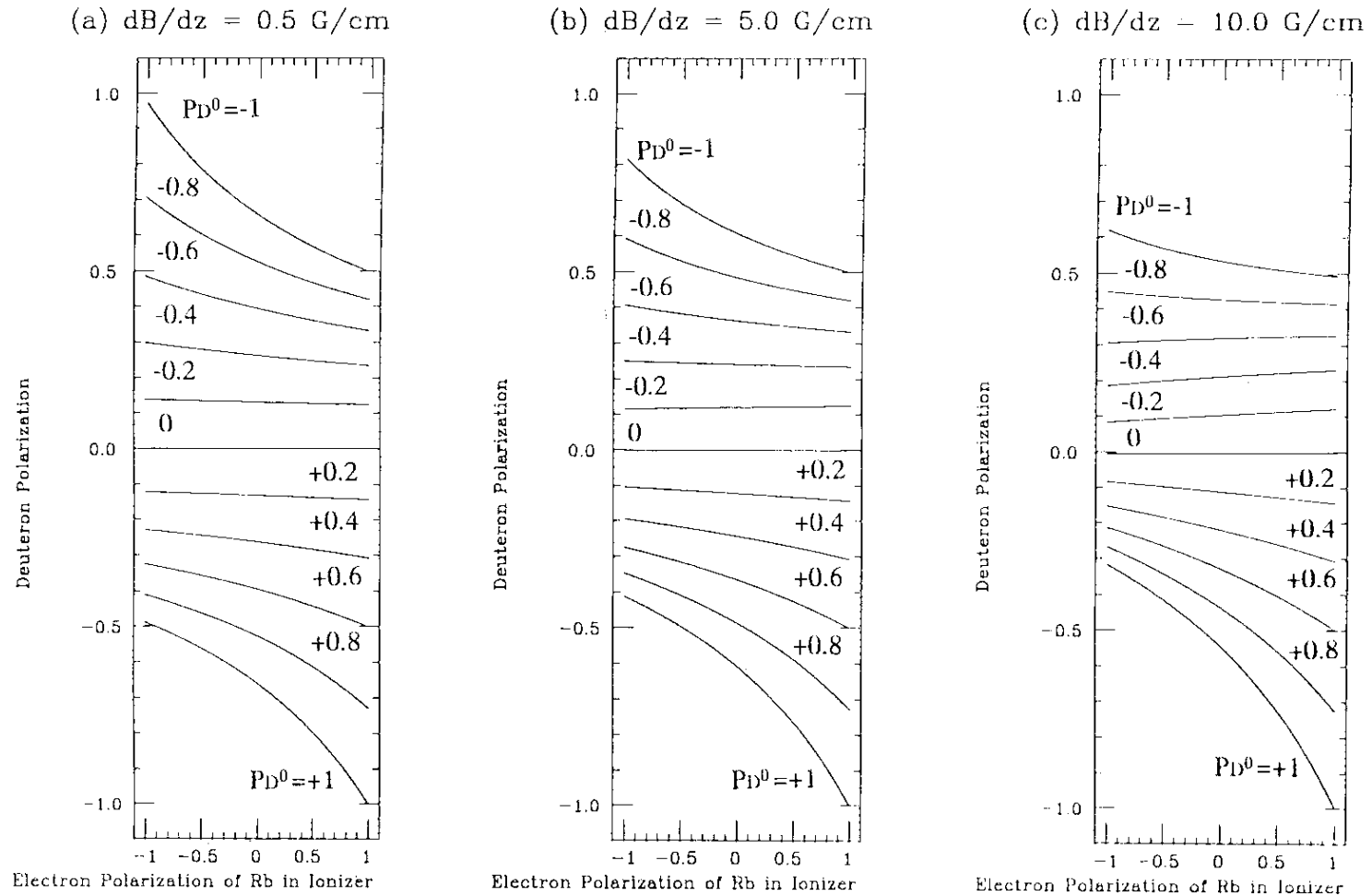


図 3 - 6 重陽子原子の電子スピン偏極度 (P_{D^0}) とイオン化セル中のアルカリ金属原子の電子スピン偏極度変化 (P_e^i) に対する偏極負重水素イオンの核スピンのベクトル偏極度の変化 (計算値)
 横軸はイオン化セルのアルカリ金属原子の電子スピン偏極度 (P_e^i)、
 縦軸は偏極負重水素イオンの核スピンのベクトル偏極度を示す。
 重陽子原子の電子スピン偏極度 (P_{D^0}) をパラメータとした。
 磁場勾配 (a) $dB/dz = 0.5 \text{ G/cm}$ (b) $dB/dz = 5.0 \text{ G/cm}$ (c) $dB/dz = 10.0 \text{ G/cm}$

これからわかるように、反転磁場の勾配が 0.5 Gauss/cm の場合、すなわち、Sona transition がほぼ完全に行なわれている場合には、 $P_D^0 = 1$ の場合、Sona transition 後の重水素原子は、 $m_j = -1/2, I_z = -1$ (状態1'), $m_j = +1/2, I_z = -1$ (状態2'), $m_j = +1/2, I_z = 0$ (状態3') の状態が同等に存在するので、 $P_e^i = -1$ の場合、イオン化セル中のアルカリ金属原子の電子スピン状態は $m_j = -1/2$ であるので、Pauli の排他原理より、 $m_j = +1/2$ の電子スピン状態の重水素原子 (状態2' と3') のみがイオン化される。従って、負重水素イオンの核スピンは $I_z = -1$ と $I_z = 0$ が同等に存在するために、核スピンのベクトル偏極度は -0.5 となる。また、 $P_e^i = +1$ の場合には、 $m_j = -1/2$ の重水素原子のみ (状態1') がイオン化されるので、核スピンのベクトル偏極度は -1 となる。一方、 $P_D^0 = -1$ の場合には、Sona transition 後の重水素原子は、 $m_j = +1/2, I_z = +1$ (状態4'), $m_j = -1/2, I_z = +1$ (状態5'), $m_j = -1/2, I_z = 0$ (状態6') の状態が同等に存在するので、 $P_e^i = -1$ の場合、状態4' の重水素原子のみがイオン化されるため、核スピンのベクトル偏極度は $+1$ となる。また、 $P_e^i = +1$ の場合には、状態5' と状態6' の重水素原子がイオン化されるため、負重水素イオンの核スピンに $I_z = +1$ と $I_z = 0$ が同等に存在するので、核スピンのベクトル偏極度は 0.5 となる。従って、この反転磁場の勾配が 0.5 Gauss/cm の場合には、負重水素イオンの核スピンのベクトル偏極は、イオン化セル中のアルカリ金属原子の電子スピン偏極の状態 ($m_j = +1/2$ または $m_j = -1/2$) に対してほぼ対称となる。しかしながら、反転磁場の勾配が増加するに従って、すなわち、Sona transition が不完全になるに従って、負重水素イオンの核スピンのベクトル偏極度のイオン化セルの電子スピン偏極度に対する対称性が崩れていく。これは次の理由による。

Sona transition が不完全な場合は、重水素原子の各状態間の遷移が頻繁に起こる (図 3-3 (b) 参照)。この状態間の遷移は、前に述べたように、状態 $F = 3/2$ 内の各状態 1,2,3,4 間どうし、あるいは、状態 $F = 1/2$ 内の各状態 5,6 間では頻繁に起こるが、 $F = 3/2$ と $F = 1/2$ の間では 327.4 MHz のエネルギーの差があるためほとんど起こらない。 $P_D^0 = +1$ のときには、Sona transition が不完全な場合には、重水素原子の電子スピンと核スピンの状態は、 $m_j = -1/2, I_z = -1$ (状態1'), $m_j = +1/2, I_z = -1$ (状態2'), $m_j = +1/2, I_z = 0$ (状態3'), $m_j = +1/2, I_z = +1$ (状態4') が混在するが、電子スピンの状態が $m_j = -1/2$ 状態であるのは、核スピン状態が $I_z = -1$ のみである (状態1')。従って、イオン化セル中のアルカリ金属原子の電子スピン偏極度を $m_j = +1/2$ に 100% 偏極させると、負重水素イオンの核スピン偏極度は -1 となる。一方、 $P_D^0 = -1$ のときには、Sona transition が不完全な場合、電子スピンの状態が $m_j = +1/2$

の状態に核スピン $I_z = 1, 0, -1$ の各状態が混在する。従って、イオン化セルにおいても電子スピンを $m_j = -1/2$ に100% 偏極させたとしても、負重水素イオンの核スピン偏極度は+1より小さくなる。

以上のことから、二重光ポンピング法において核スピン偏極の向きをできるだけ対称的に反転させる場合には、いかに Sona transition を完全に行なうかが非常に重要であることがわかる。

第4章 二重光ポンピング型偏極イオン源装置の構成

本章では、二重光ポンピング法による偏極負重水素イオン源の装置の構成について述べる。

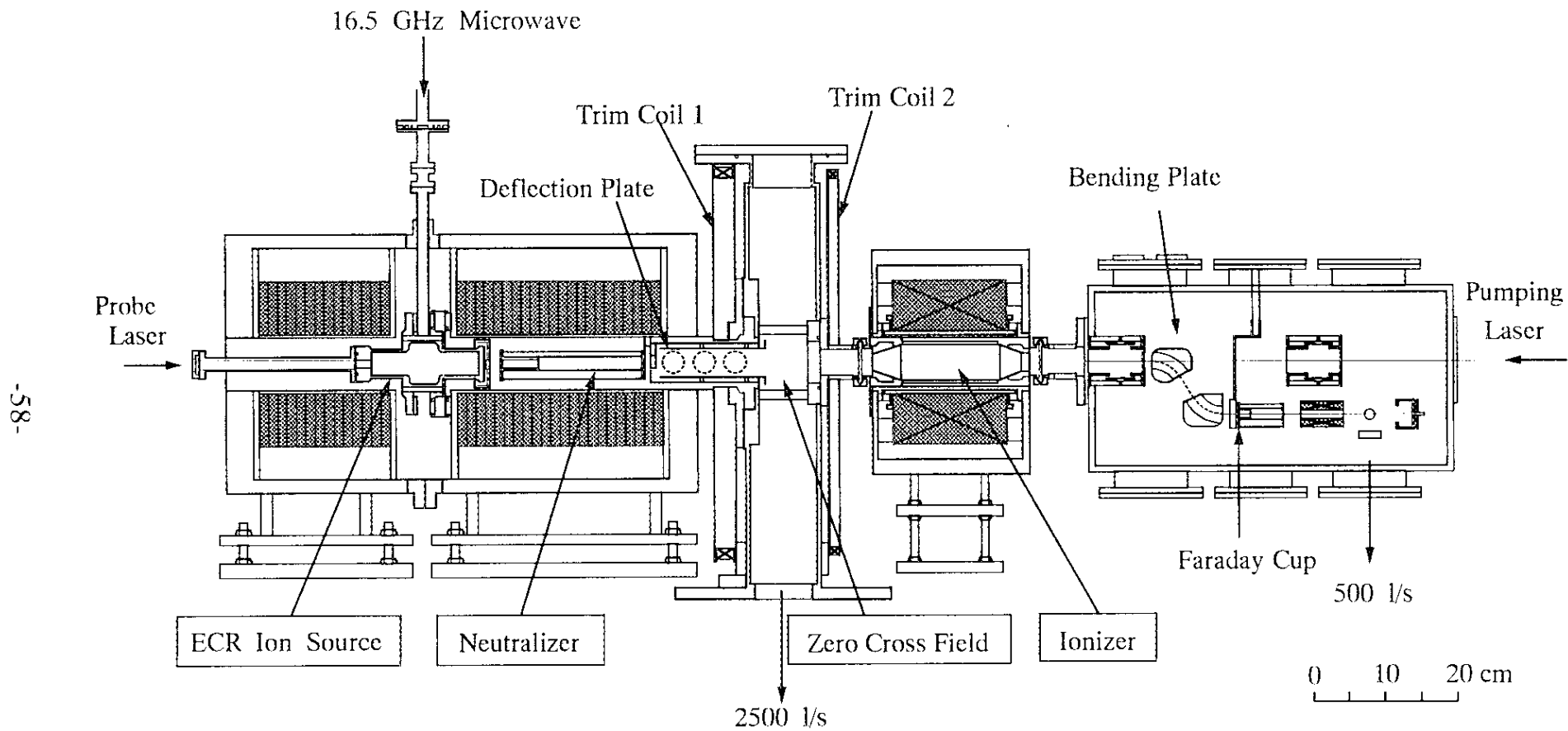
図 4-1 (a) 及び (b) に本研究での二重光ポンピング型偏極イオン源の装置図を示す。このイオン源は以下の5つの部分から構成される。1) ECR (電子サイクロトロン共鳴) イオン源を用いて、正重水素イオン (D^+) を生成する領域 2) 光ポンピングにより電子スピン偏極したアルカリ金属原子と、ECR イオン源から引き出された数keVの正重水素イオン (D^+) ビームとの荷電交換反応により、電子スピン偏極した重水素原子を生成する領域 (中性化セル) 3) 超微細構造間の非断熱遷移によって、重水素原子の電子スピン偏極を核偏極へ遷移 (Sona transition) させる領域 4) 再度、光ポンピングにより電子スピン偏極したアルカリ金属原子と核スピン偏極した重水素原子との荷電交換反応により、核スピン偏極した重水素原子ビームをイオン化する領域 (イオン化セル) 5) 中性化セルとイオン化セル中のアルカリ金属原子の光ポンピングを行なうための光ポンピングレーザーである。その他にアルカリ金属蒸気ターゲットの厚さとその電子スピン偏極度を測定するための、Faraday 回転測定系がある。

次に、各部の詳細ならびに種々の特性について述べる。

1) ECRイオン源

二重光ポンピング型偏極イオン源では、強磁場中で正重水素イオンビーム (D^+ ビーム) を生成する必要がある。このため強磁場中でのイオンビーム生成に適したECR (Electron Cyclotron Resonance : 電子サイクロトロン共鳴) イオン源を用いる。実験では中性化セル部の磁場の強さが 1.2 T の常伝導ソレノイドによるものと、2.7 T の超伝導ソレノイドによるものの2種類のECRイオン源を用いた。図 4-1 (a),(b) はそれぞれに対する装置図である。排気系には 2500 l/s と 500 l/s のターボ分子ポンプを用いた。到達真空度は零交叉磁場領域で、 2.0×10^{-7} Torr であった。真空度は電離真空計により測定した。

ECRイオン源は円筒型のプラズマ容器とプラズマを閉じ込めるためのミラー



-58-

図 4 - 1 (a) 二重光ポンピング型偏極負重水素イオン源

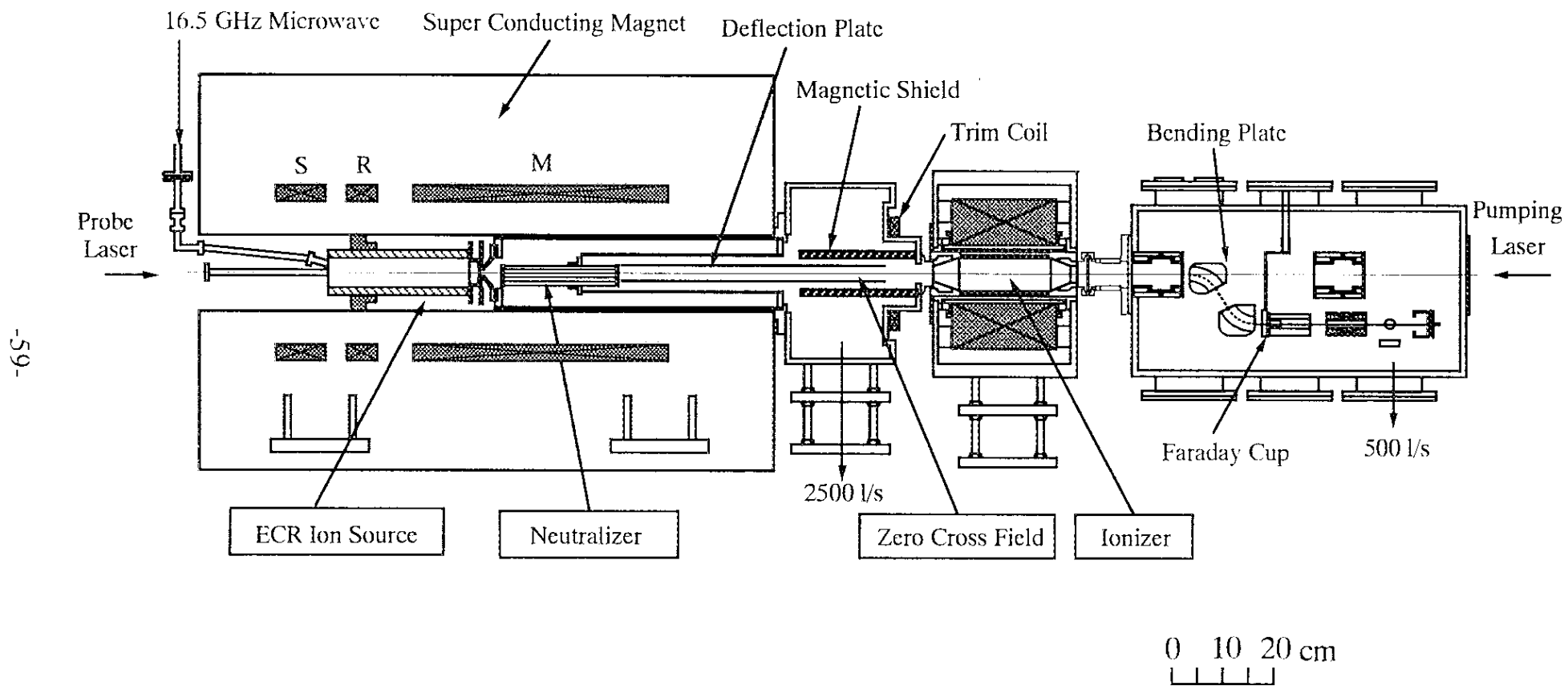


図 4 - 1 (b) 超伝導ソレノイドを用いた二重光ポンピング型偏極負重水素イオン源

磁場からなる。電子サイクロトロン共鳴によるプラズマの加熱を行なうためのマイクロ波は、16.5 GHz のマグネトロンを用いて発生させ、真空シールした薄いマイクロ波窓を通してプラズマ容器へ導入する。マイクロ波はパルス幅が 0.4 msec、繰り返し 20 Hz のパルス状であり、ピークパワーは ~1 kW 程度である。マイクロ波の周波数が 16.5 GHz の場合、電子がサイクロトロン共鳴を起こす磁場強度は約 5.9 kG であるので、図 4-1 (a),(b) に示したソレノイド磁石により共鳴磁場を生成する。

図 4-2 (a),(b) に 1.2 T 及び 2.7 T 用の ECR イオン源それぞれに対するプラズマ容器の構造を示す。プラズマ容器はステンレス製で、その内側に石英ガラスのパイプを設置した。これは、重水素分子イオン (D_2^+) の生成を抑えて、いわゆる陽子比 (proton ratio) を向上させるためのものである。また、石英ガラス製のチャンバーの周りには、プラズマの閉じ込めを良くするために、Sm-Co 磁石を用いてカusp 磁場を形成した。ECR イオン源用のミラー磁場はソレノイドコイルの組み合わせによりつくり、下流側のソレノイドコイルにより、約 20 ~ 25 cm の範囲で常伝導電磁石の場合は磁場強度約 1.2 T、超伝導電磁石の場合は磁場強度約 2.7 T の平坦な強磁場を形成した。

ECR イオン源からの正重水素イオンビーム (D^+ イオンビーム) の引き出しは、ビーム強度を大きくするために 3 枚の多孔電極により行なった。多孔電極を図 4-3 に示す。引き出し電極間の距離はそれぞれ 0.5 mm で、引き出し穴はそれぞれ直径 0.9 mm の穴が 91 個で六角形を形成するように並んでいる。磁場によるビームの発散を防ぐために、引き出し電極は先に示した磁場の平坦な領域に設置する。

図 4-4 に ECR イオン源の各部分に供給する電源のブロック図を示す。各電源と電極の間に大きな抵抗 (300 k Ω , 600 k Ω) を介するのは、放電による電極の損傷を防ぐためである。正重水素イオンビーム (D^+ イオンビーム) の引き出しは、キャビティ本体に加速電圧 (5 kV)、1 枚目の電極にも加速電圧 (3 ~ 3.3 kV) をそれぞれ印加し、2 枚目の電極は接地して行なった。

正重水素イオンビーム (D^+ ビーム) 生成時のマイクロ波の反射波形と、 D^+ ビーム波形を図 4-5 に示す。反射波は方向性結合器 (-30 dB) により一部を取りだし、検波器により測定した。 D^+ ビームは、引き出し電極から約 1.5 m 下流のファラデーカップにより測定した。図 4-6 にファラデーカップの構造を示す。直径 44 mm のステンレス製の板 (以後、電極という) を絶縁物を介して支持板に取付け、この電極に流れる電流値を測定することにより、ビーム強度の測定を行なう。

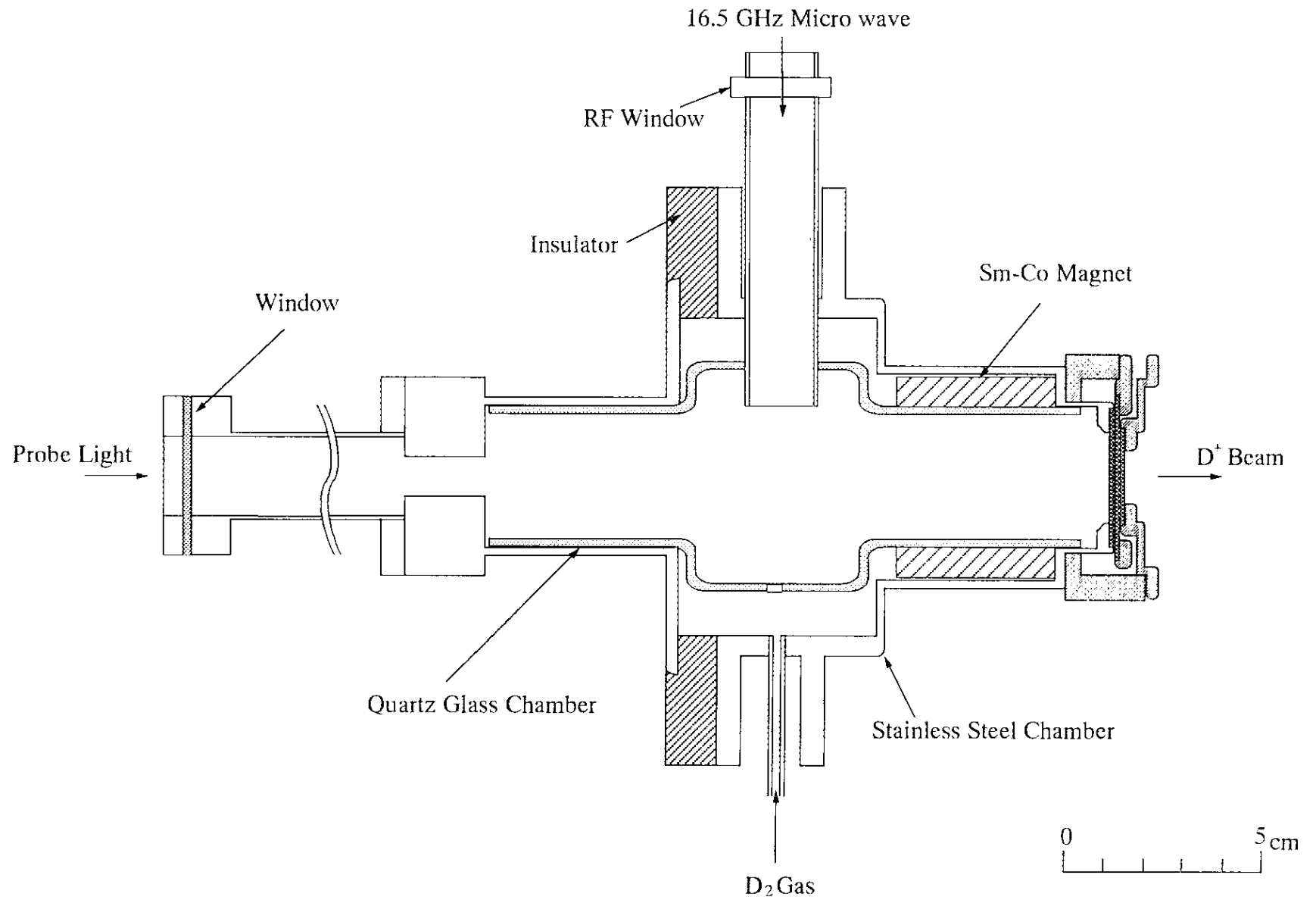


図 4 - 2 (a) ECR イオン源のプラズマ生成容器の構造

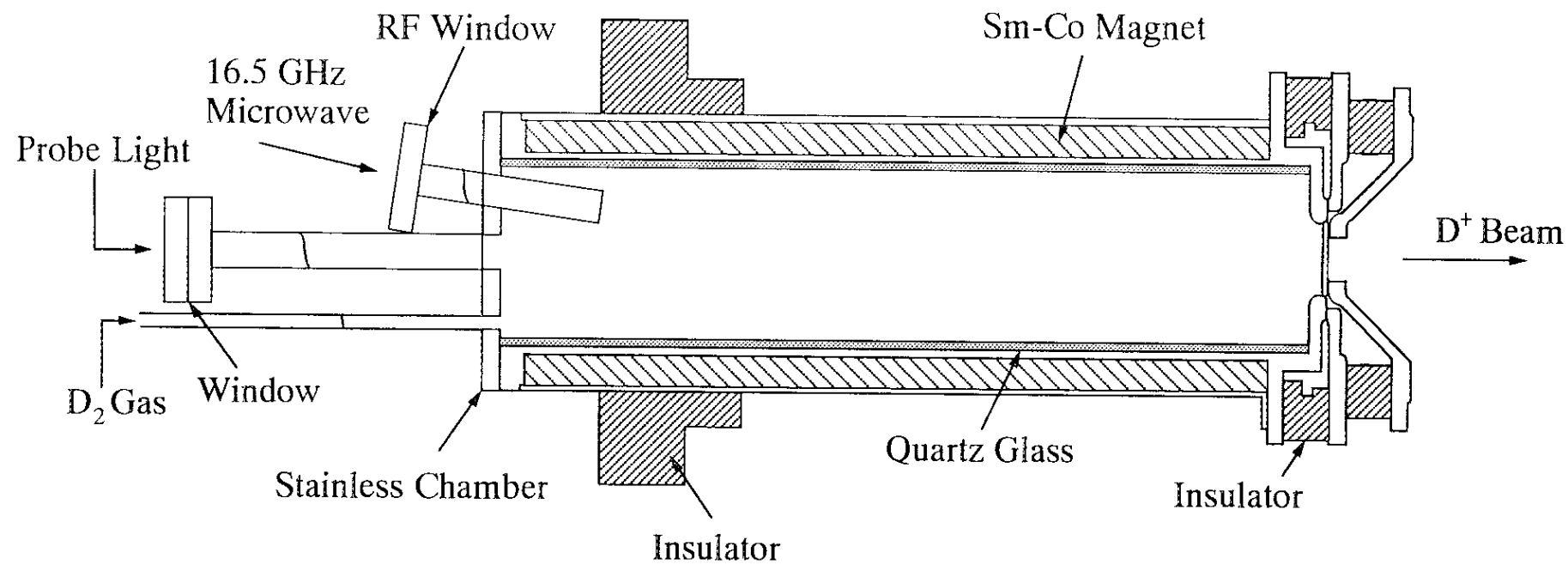
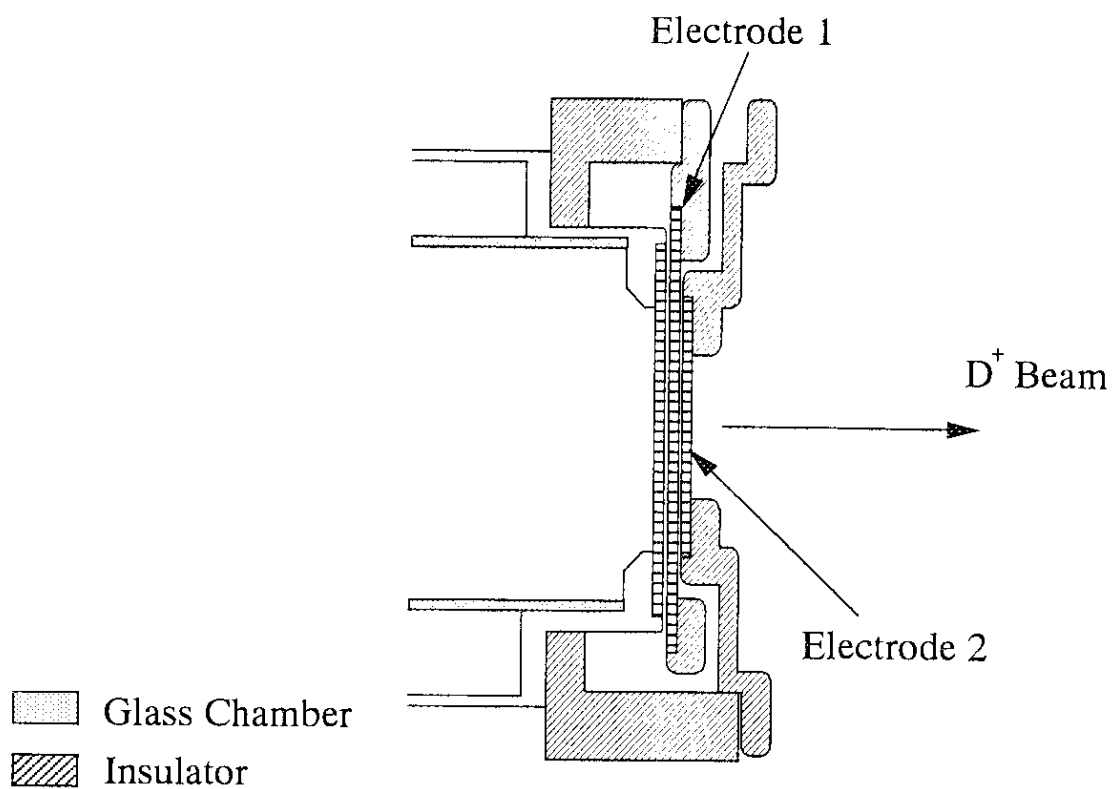


図 4 - 2 (b) ECR イオン源のプラズマ生成容器の構造 (超伝導ソレノイド用)

- The extraction electrode system -



- Multi -Aperture Electrode -

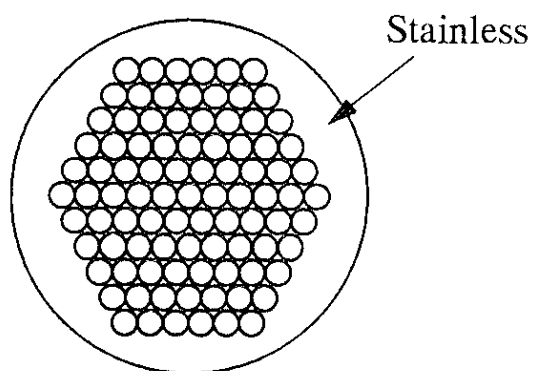


図 4 - 3 ECR イオン源のビーム引き出し部の構造と多孔電極

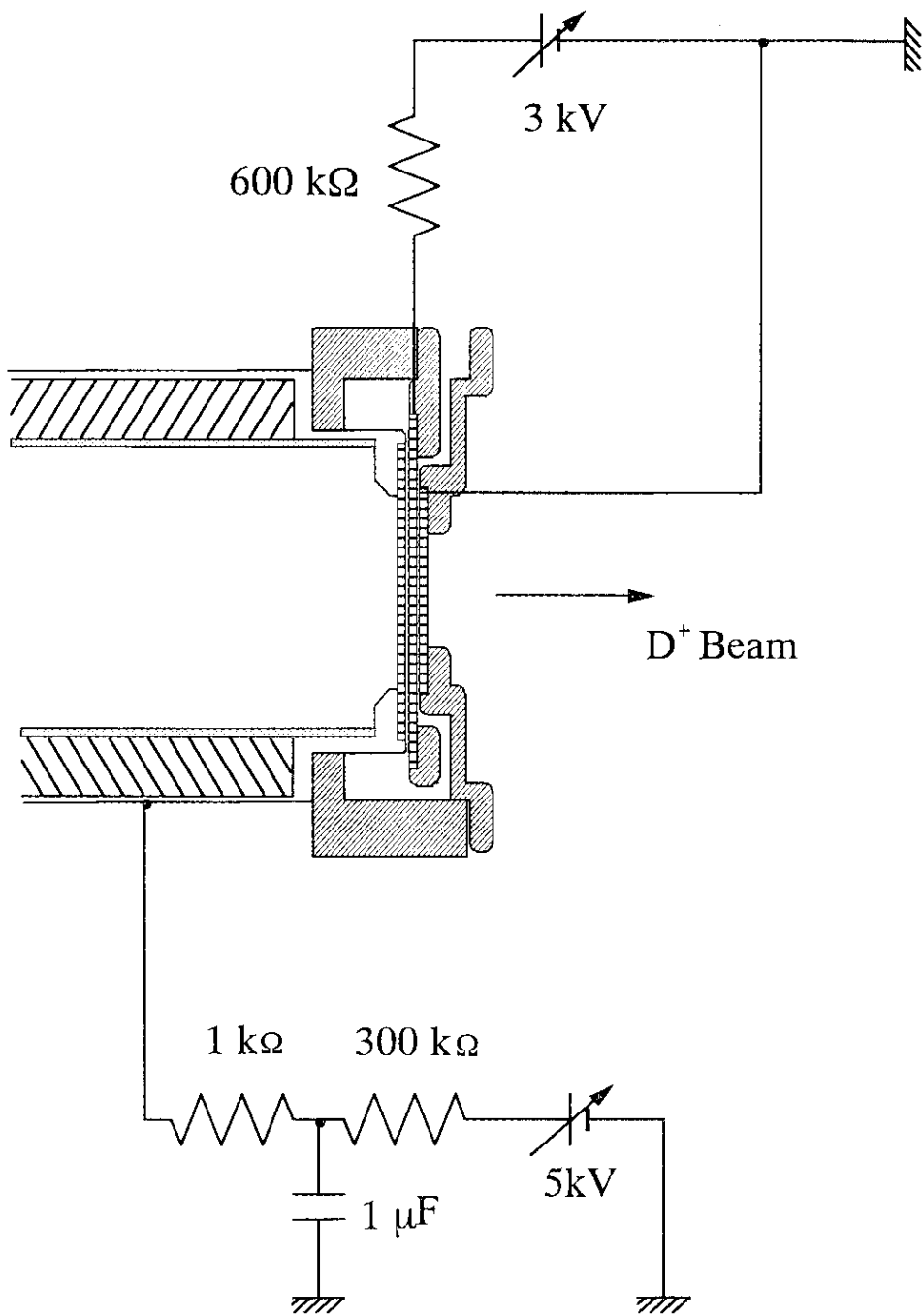
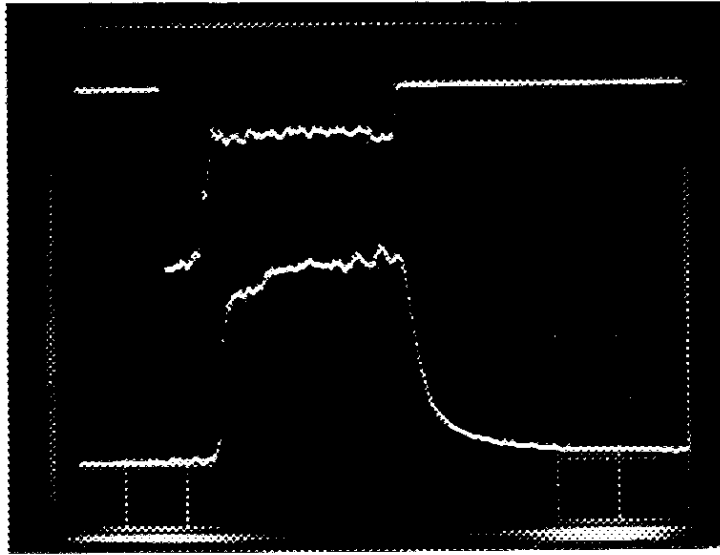


図 4 - 4 ビーム引き出し部の電気回路図



マイクロ波の反射波形

縦軸 0.2 V/div
横軸 0.1msec/div

D⁺ビーム波形

縦軸 0.1 V/div
横軸 0.1msec/div

図 4 - 5 マイクロ波の反射波形と ECR イオン源から引き出された D⁺ビーム波形

(a) マイクロ波の反射波形

縦軸 0.2 V/div , 横軸 0.1msec/div

(b) D⁺ビーム波形

縦軸 0.1 V/div , 横軸 0.1msec/div

二次電子放出を抑制するために、電極の前にタングステンメッシュを取付けた。タングステンメッシュは外径 44 mm, 内径 30 mm のドーナツ状のステンレス板ではさみ込んで支持する。このタングステンメッシュは電極と絶縁してあり、-200 V 程度の電圧を印加することで二次電子を抑制した。電極とタングステンメッシュ全体をステンレス製の容器で取り囲み、電子等の混入を防ぐ構造となっている。

ECR イオン源の引き出し電圧に対する、正重水素イオンビーム (D^+ イオンビーム) と重水素原子ビーム (D^0 ビーム) の強度変化を図 4-7 に示す。 D^0 ビームはイオン源からの重水素ガス等の残留ガス分子との衝突によって、 D^+ イオンが中性化されたものである。 D^0 ビーム強度の測定はタングステンメッシュに +260 V の電圧を印加し、 D^0 ビームがファラデーカップに衝突した際に放出される二次電子を測定することにより行なった。表 3-1 に、実験時における ECR イオン源の各パラメーターの条件を示す。

重水素ガス圧	1.5×10^{-6} Torr (電離真空計値)
マグネトロン (JRC M1408)	電圧 : 9.5 kV, 電流 : 10.5 mA
引き出し電圧	+ 5.0 kV
電極 1 電圧	+ 3.0~3.3 kV
電極 2 電圧	0 V

表 3-1

図 4-7 からわかるように、エネルギーを増すに従って D^+ イオンビーム強度は増加する。しかしながら、 D^0 ビームをつくるためのアルカリ金属原子との荷電交換反応の断面積は、ビームのエネルギー (E) に依存するので、反応断面積のビームエネルギー依存性から最適のビームエネルギーを決定する必要がある。本装置では中性化セルのアルカリ金属原子としてルビジウムを用いた。図 4-8 に Tawara らによって測定された正重水素イオン (D^+) とルビジウム原子との荷電交換反応断面積のエネルギー依存性を示す[23]。横軸は核子当たりのエネルギーである。これからわかるように、中性化の断面積は 2 ~ 5 keV のエネルギーで最大となり、それ以上のエネルギーでは減少する。できるだけエネルギー (E) が高い方が D^0 ビームの強度は大きくなるので、最適のエネルギーとして 5keV を選択した。

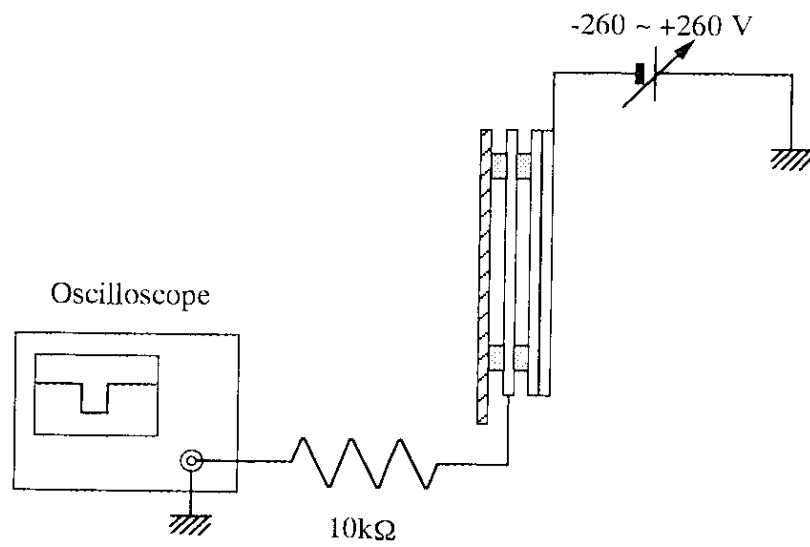
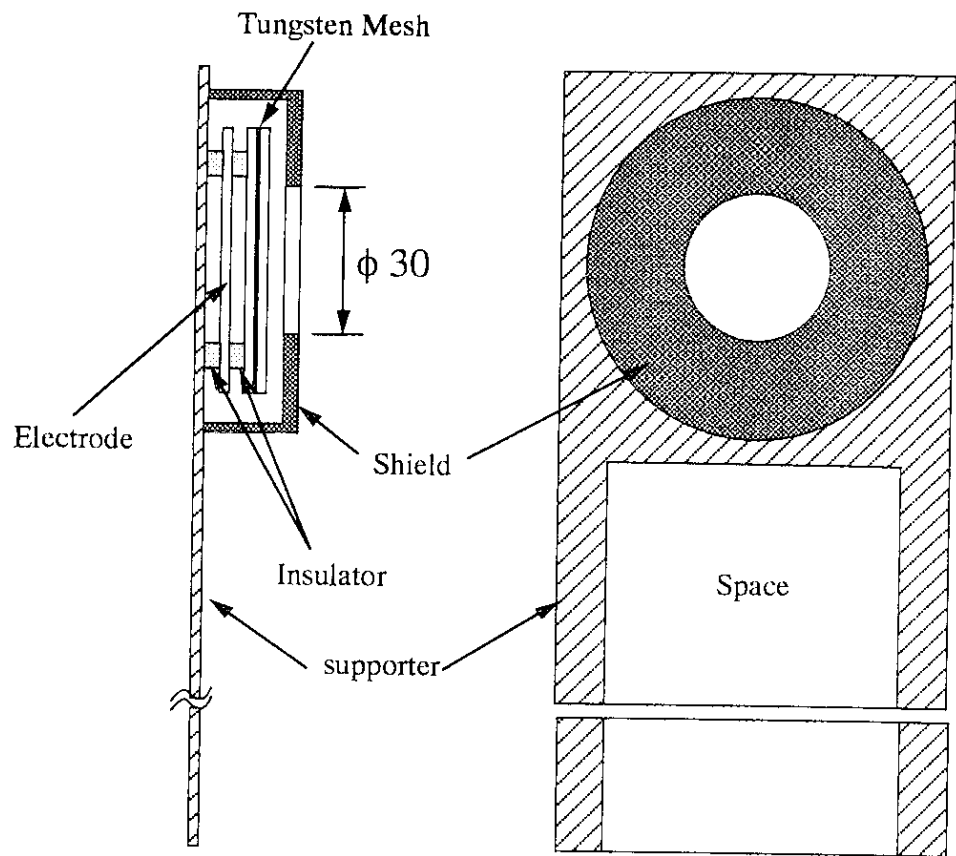


図 4 - 6 ファラデーカップの構造図

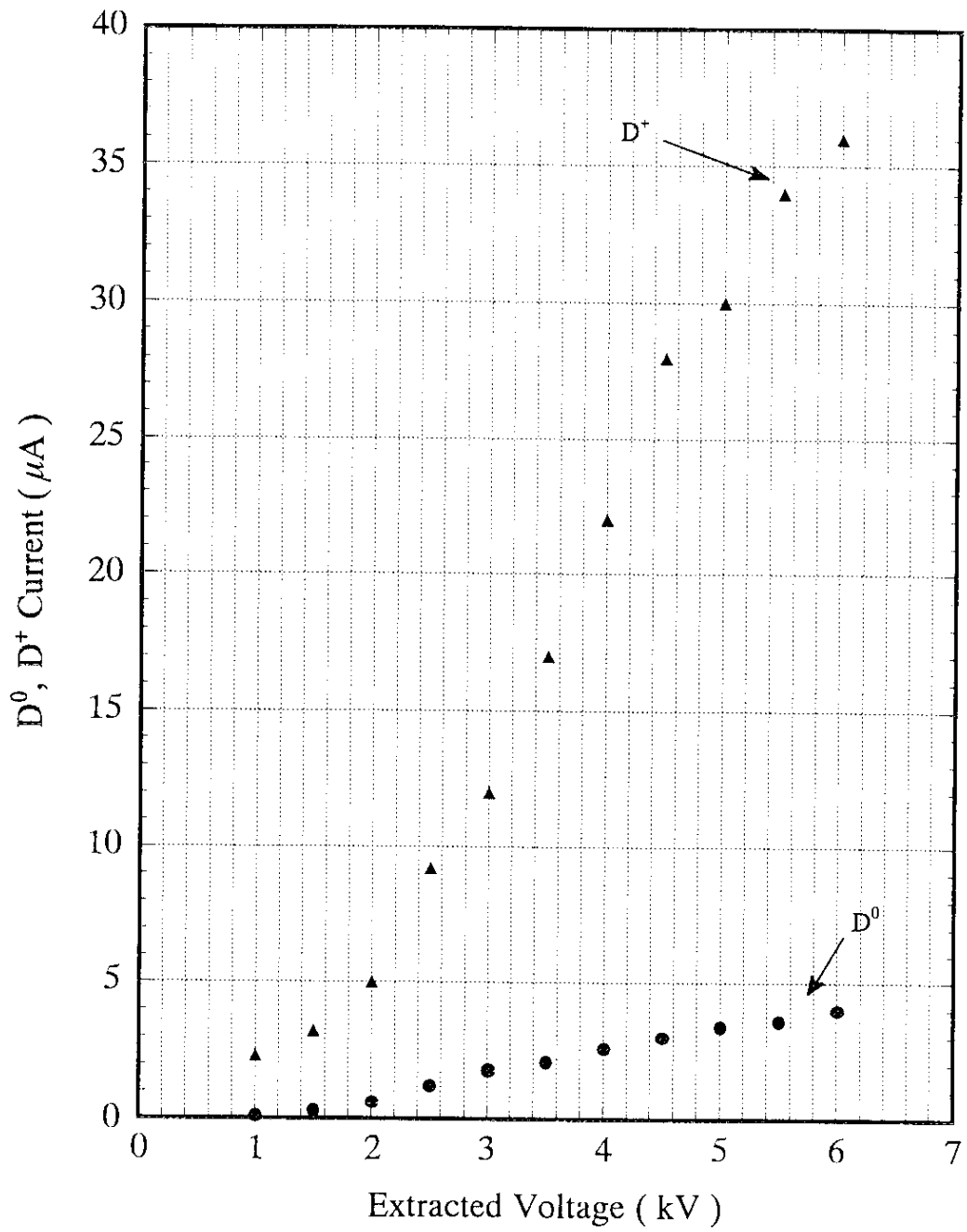


図 4 - 7 引き出し電圧に対するD⁺ ビームとD⁰ ビーム強度変化
 縦軸はD⁺ ビームとD⁰ ビームの強度、
 横軸はECR イオン源からの引き出し電圧を示す。

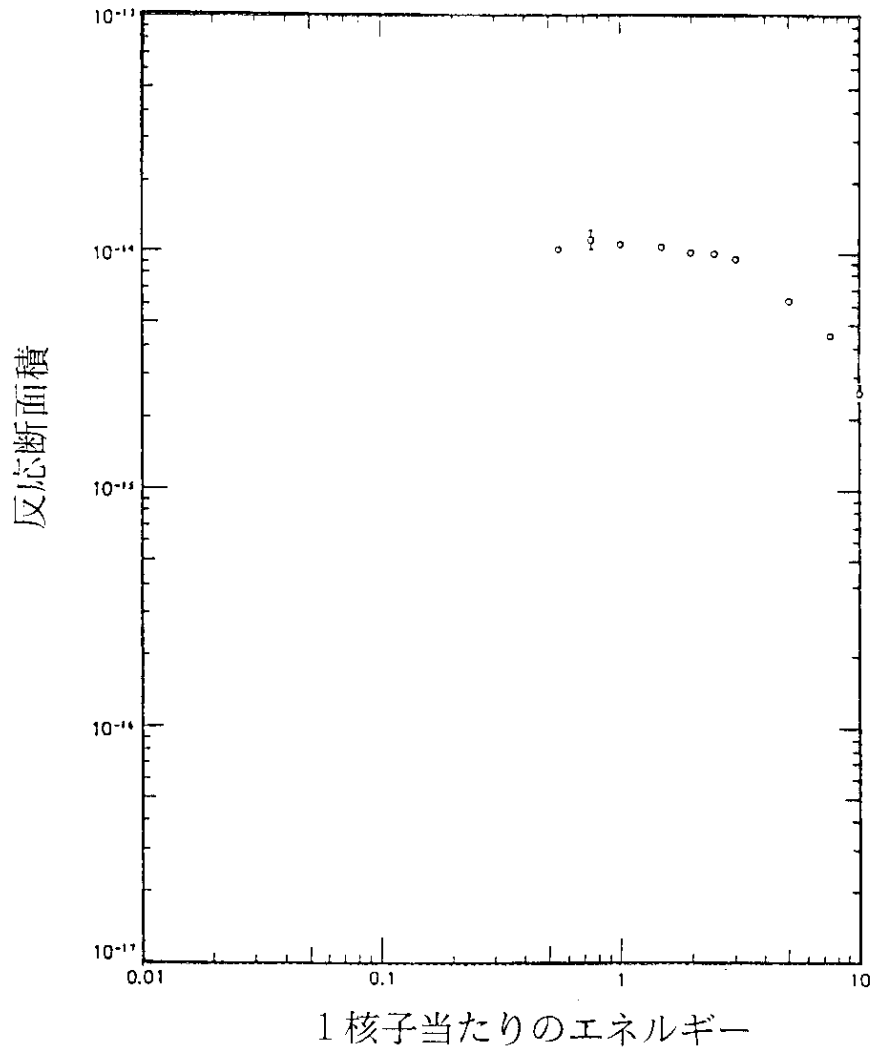
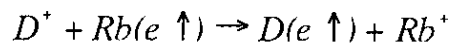


図 4 - 8 エネルギーに対する重水素原子とルビジウム原子の荷電交換反応の反応断面積変化 (文献 2 3)
 縦軸は重水素原子とルビジウム原子の荷電交換反応の反応断面積、
 横軸は 1 核子当たりのエネルギーを示す。

2) 中性化セル

先に述べたように、中性化セルのアルカリ金属原子としてルビジウムを用いた。アルカリ金属としてルビジウムを用いたのは、重水素との荷電交換反応の断面積がセシウム (Cs) について大きく [31]、かつ吸収波長 (D1 線) が 798.4 nm [32] と近赤外であるので、チタンサファイアレーザー (Ti Al₂O₃ レーザー) 等で、光ポンピングが可能のためである。光ポンピングしたルビジウム蒸気ターゲット中で、5 keV の正重水素イオン (D⁺) ビームと電子スピン偏極したルビジウム原子との荷電交換反応により、電子スピン偏極した重水素原子を生成する。



中性化セルの構造、特にセルの長さを決定するには、radiation trapping の効果を考慮することが重要である。

図 4-8 からわかるように、中性化セルの反応断面積は $E = 5 \text{ keV}$ で $\sigma = 1 \times 10^{-14} \text{ cm}^2$ である。従って、D⁰ ビームを効率よくつくるには、中性化セルのターゲットの厚さは $2 \times 10^{14} \text{ atoms / cm}^2$ 程度であればよい。中性化セルの長さを 25 cm とすると密度は $8.0 \times 10^{12} \text{ atoms / cm}^3$ で radiation trapping は殆ど問題とならない [24]。

中性化セルの実際の構造を図 4-9 に示す。このセル中にルビジウムを封入し、温度コントロールにより、ターゲットの厚さを一定に保つ。セルの直径は 38 mm で長さ 19 cm、その中心に直径 10 mm の円筒があり、この部分で荷電交換を行なう。セルは ECR イオン源下流側のソレノイド磁石によりつくられた平坦な強磁場 (常伝導電磁石の場合は磁場強度約 1.2 T、超伝導電磁石の場合は磁場強度約 2.7 T) 中に置かれた。超伝導電磁石を用いた時の磁場強度分布を図 4-10 に示す。

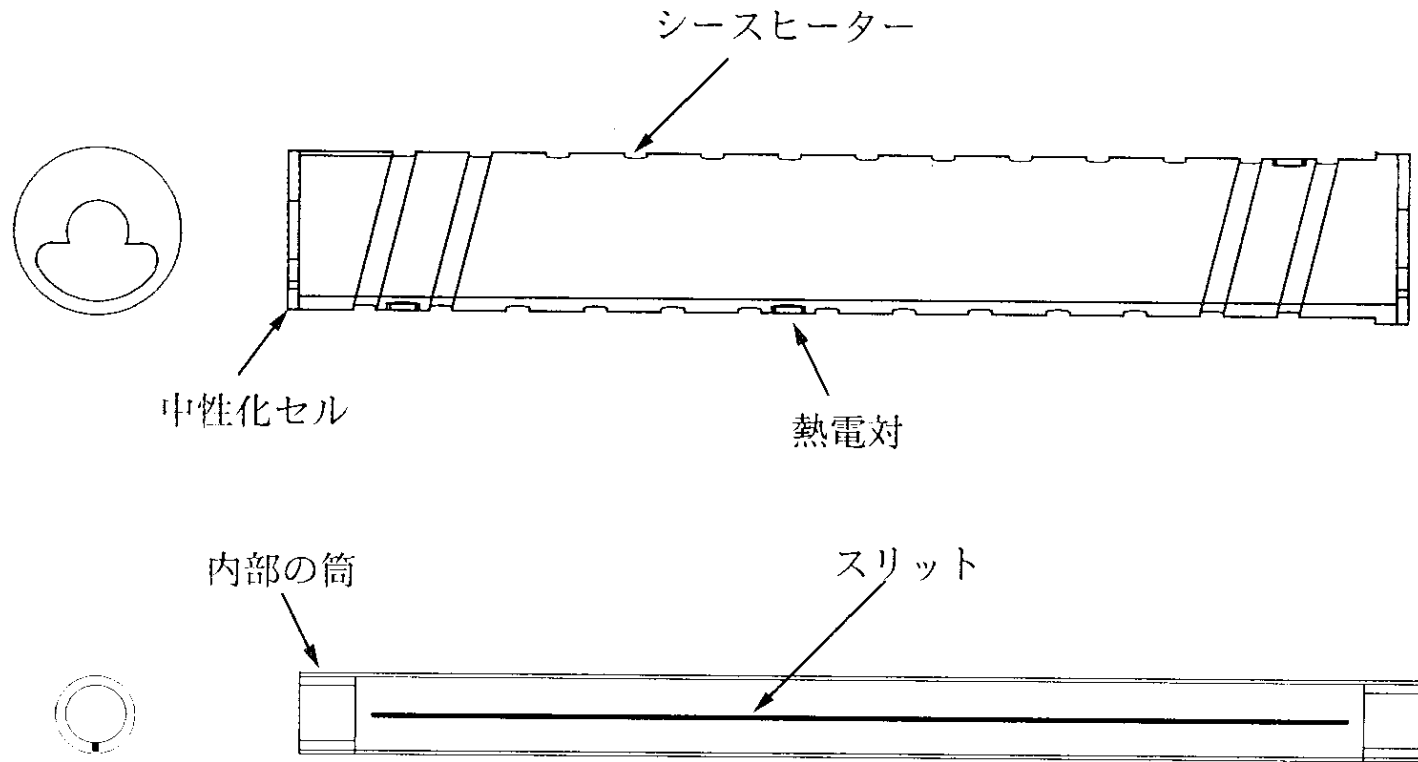


図 4 - 9 中性化セルの構造

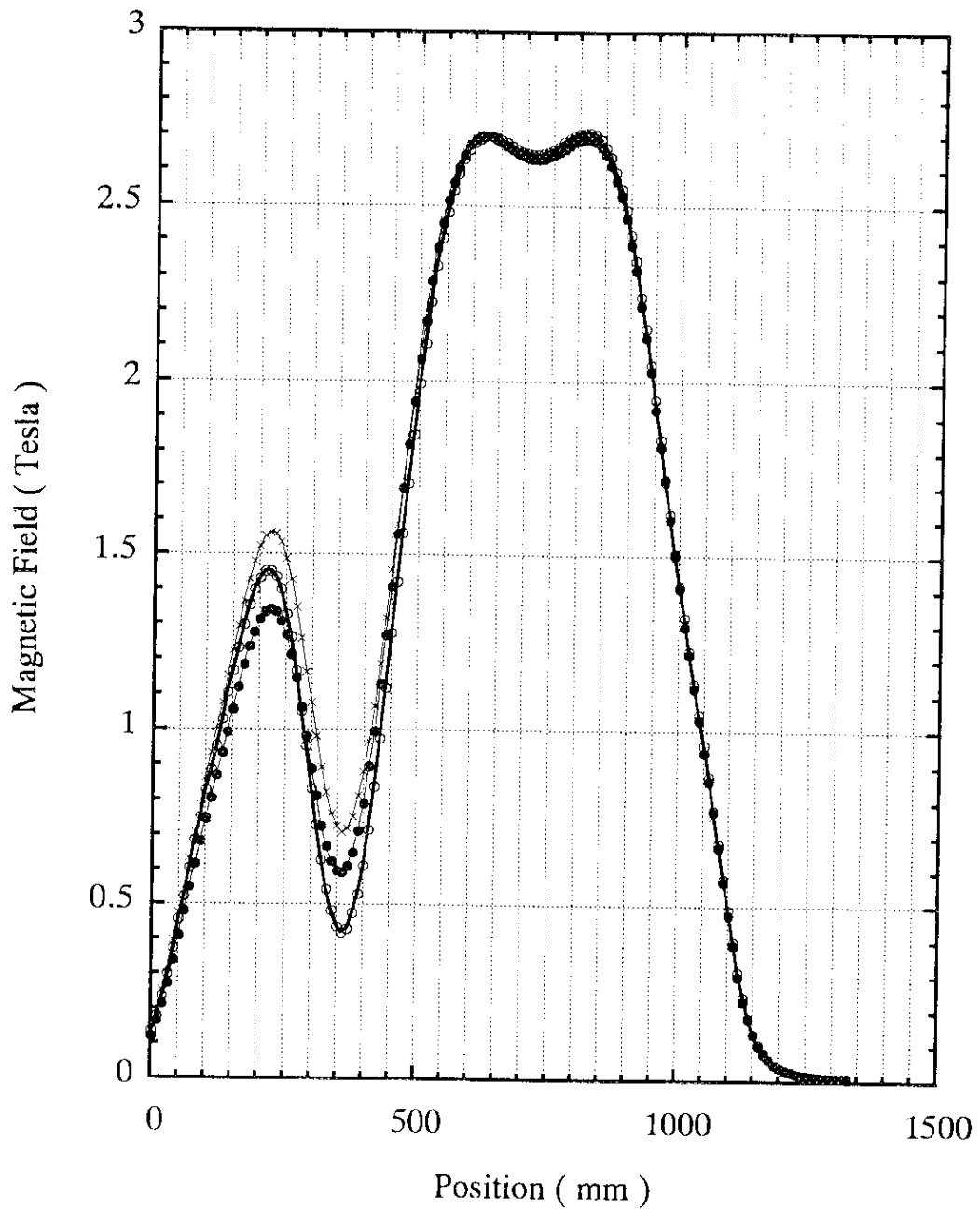


図 4 - 10 超伝導磁石を用いた二重光ポンピング型偏極イオン源の磁場分布

縦軸は磁場強度、

横軸は超伝導磁石の上流側からの距離を示す。

● は S : 100 A, R : -100 A, M : 100 A

○ は S : 111 A, R : -134 A, M : 100 A

x は S : 121 A, R : -96 A, M : 100 A

3) 零交叉磁場 (Sona transition) 領域

光ポンピング型偏極イオン源では、Sona transition が完全に行なわれることは、高い核スピン偏極度を得るために非常に重要である。3.2 節に示したように、Sona transition が完全に行なわれるためには、中性化セルとイオン化セルの間に磁場強度の勾配が 0.5 Gauss / cm 以下で磁場方向が反転する領域を生成する必要がある。

実験装置で実際に零交叉磁場の勾配が 0.5 Gauss / cm 以下を実現させるために、POISSON コード[33]を用いて、種々の磁気シールドに対する中性化セルとイオン化セル間の領域の軸方向の磁場分布の計算を行なった。中性化セルの磁場が 2.7T、イオン化セルのコイルの電流値を 300 A (イオン化セルの磁場強度は 0.3T) とした時の零交叉磁場の磁場勾配は 21 Gauss / cm と大きなものであった。そこで図 4-12 に示すように鉄で磁気シールドをつくり、鉄の厚さ (t) を変化させて零交叉磁場の磁場勾配がどのように変わるかを調べた。その計算結果を図 4-11 及び表 3-2 に示す。

磁気シールド厚さ (cm)	零交叉位置での磁場勾配 (Gauss / cm)
0	21.0
0.5	2.37
1.0	0.68
1.5	0.49

表 3-2

磁気シールドの各厚さに対する磁場形状の計算値を図 4-11 に実線で示す。

実験装置では、厚さ 1.5 cm の鉄の磁場シールドのみを用いて反転磁場を形成した。実際の実験装置での軸方向の磁場分布の測定値を図 4-11 に□で示す。図は中心軸上の磁場分布で、ガウスメーターを用いて測定した。零交叉位置での磁場勾配の測定値は 0.48 Gauss / cm とほぼ計算値と一致している。また、測定値は計算値より絶対値で約 1 G 程度低くなっているが、これは、測定に用いたホール素子の絶対較正による誤差によるものと考えられる。

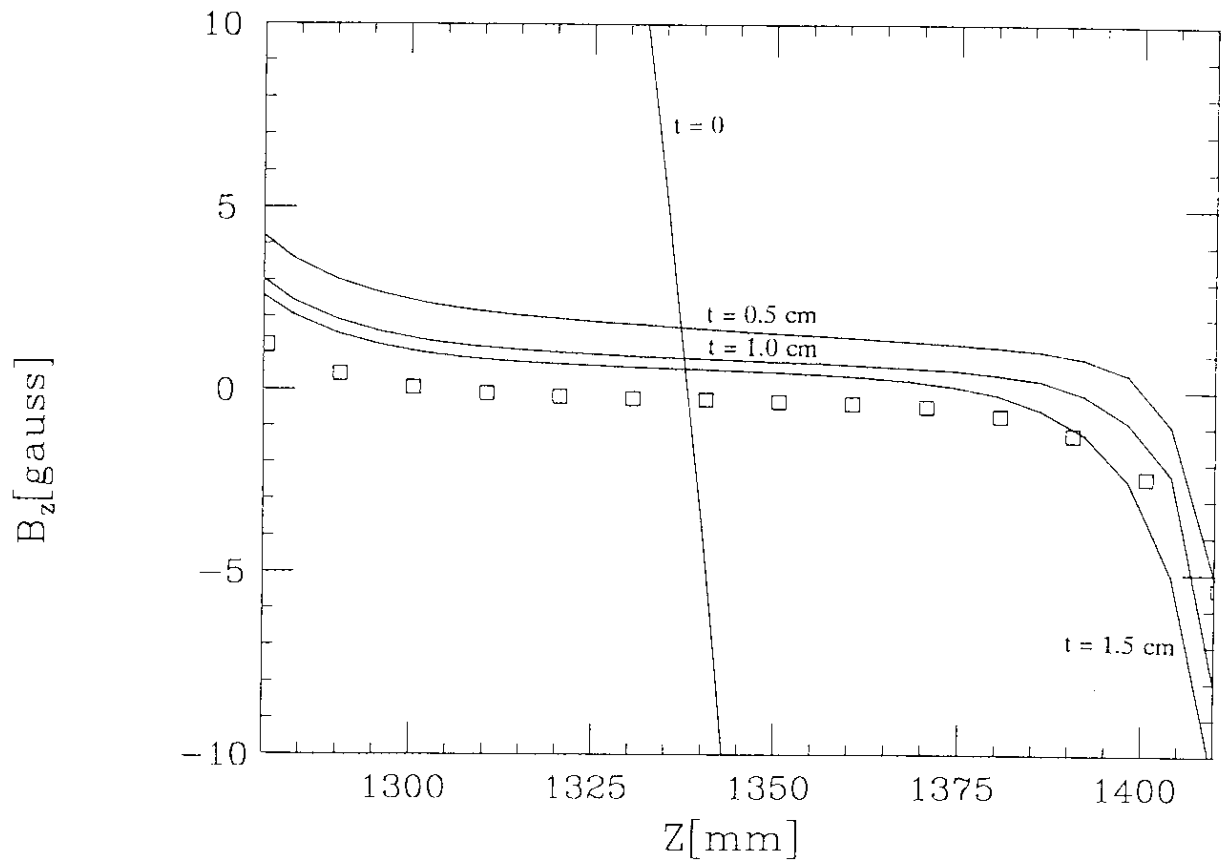


図 4 - 11 磁気シールド厚さに対する零交叉磁場の磁場分布変化の計算値と実験装置の磁場分布測定値

縦軸は磁場強度、

横軸は超伝導磁石の上流側からの距離を示す。

実線は計算値、□は測定値である。

(a) $t = 0$, $dB/dz = 21.0$ G/cm

(b) $t = 0.5$ cm, $dB/dz = 2.37$ G/cm

(c) $t = 1.0$ cm, $dB/dz = 0.68$ G/cm

(d) $t = 1.5$ cm, $dB/dz = 0.49$ G/cm

□は $t = 1.5$ cm の実験装置の測定値 $dB/dz = 0.48$ G/cm

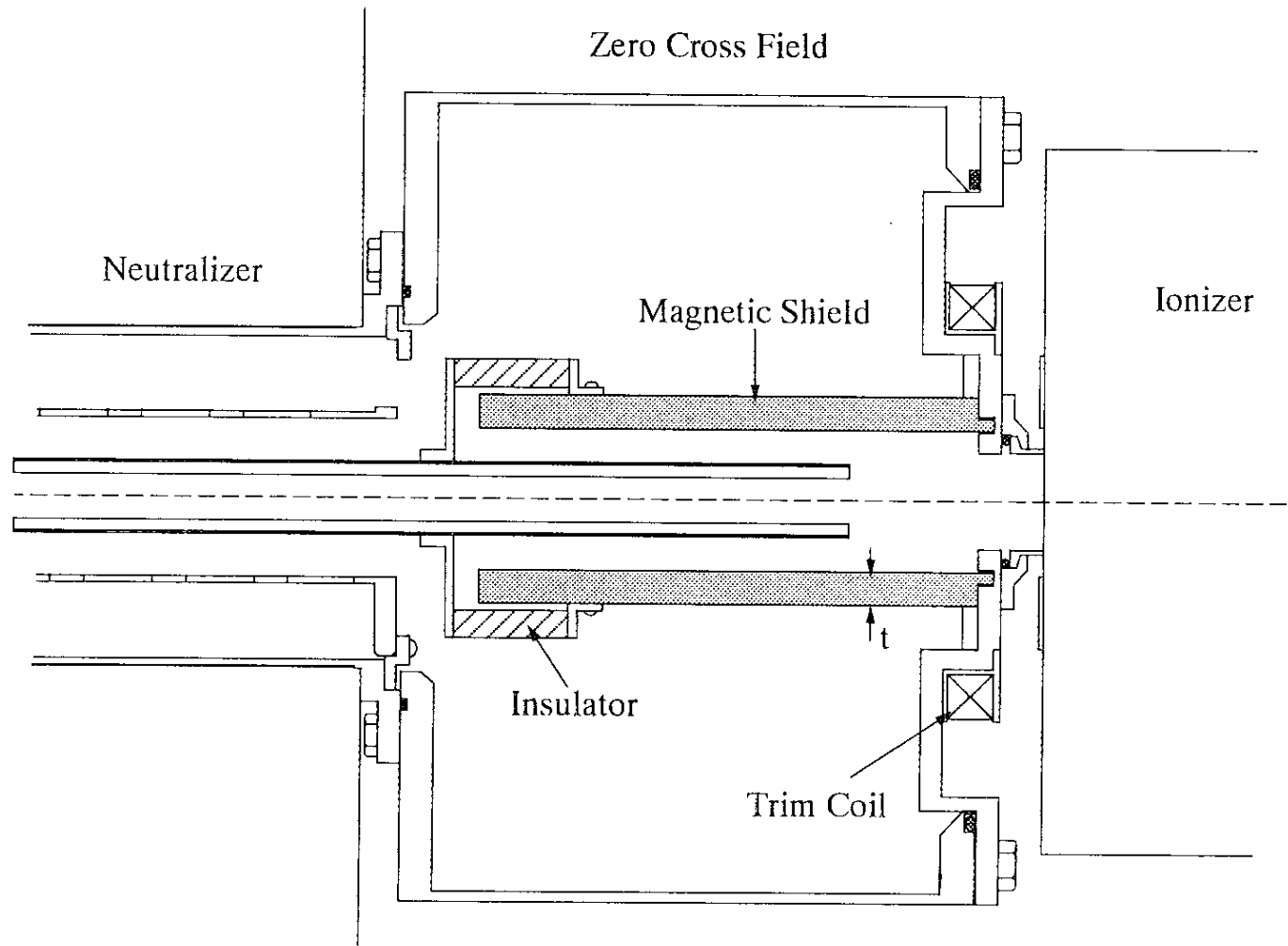
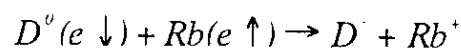


図 4 - 12 零交叉磁場領域の構造

次に、この実際の磁場勾配でのビーム径に対する重陽子核スピンのベクトル偏極度の変化を3.2節に示した方法を用いて計算した。結果を図 4-13 に示す。これからわかるように、実験装置での実際の磁場勾配では、Sona transitionの不完全さによる重陽子核スピンのベクトル偏極度の減偏極は極めて小さいと考えられる。

4) イオン化セル

この領域では、次の反応が起こる。



すなわち、光ポンピングによって電子スピン偏極したアルカリ金属との荷電交換反応により、核スピン偏極した重陽子ビームをイオン化し、核スピン偏極した偏極負重水素イオンビームを生成する。このイオン化セルでも中性化セルと同様に光ポンピングのしやすさから、アルカリ金属としてルビジウムを用いた。

イオン化セルの実際の構造を図 4-14 に示す。セル中央には口径 15 φ のスリットを付けたパイプを取付け、そのパイプの中央部には長さ 90 mm 幅 2 mm のスリットを設けてある。このスリットを通してルビジウム蒸気がセル中に導かれる。イオン化セルのまわりは直径 1.5 mm のシースヒーターが巻いてあり、これによりルビジウムを加熱する。セルの温度は通常 90 ~ 100 °C であった。温度はセルの中央部を熱電対により測定した。セルの両端にはルビジウムの蒸気を液化しセルの中心に戻して再利用するための、ステンレス製の液体バッフル (condensation baffle) が取り付けられている。condensation baffle は、セル本体と薄いステンレス板でつなぎ熱的に絶縁する構造となっている。通常の動作ではその温度は中央のセル部より 50 °C くらい低くなり、液体のルビジウムを効率よくセルの中心に戻せるように、中心に向けて傾きを付けている。中性化セル同様、温度コントロールにより、ルビジウムターゲットの厚さを一定に保つ。外部磁場の強さは、光ポンピングを行なう際の radiation trapping の影響を考慮して約 0.3 T とした。

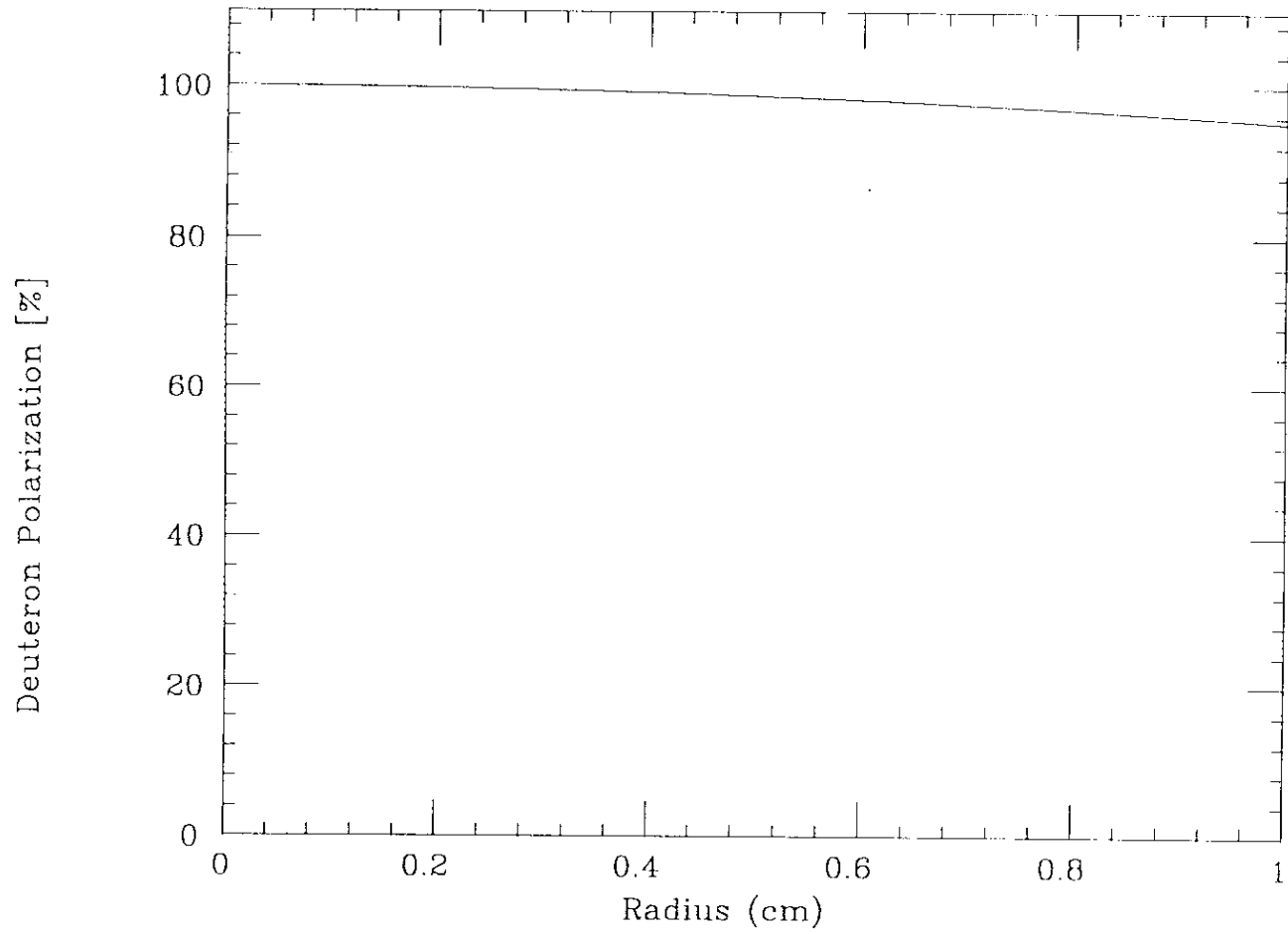


図 4 - 13 反転磁場の磁場勾配が 0.48 G/cm の場合の中心軸からの距離に対する重水素原子の核スピンのベクトル偏極度の変化 (計算値)
縦軸は重水素原子の核スピンのベクトル偏極度、横軸は中心軸からの距離を示す。

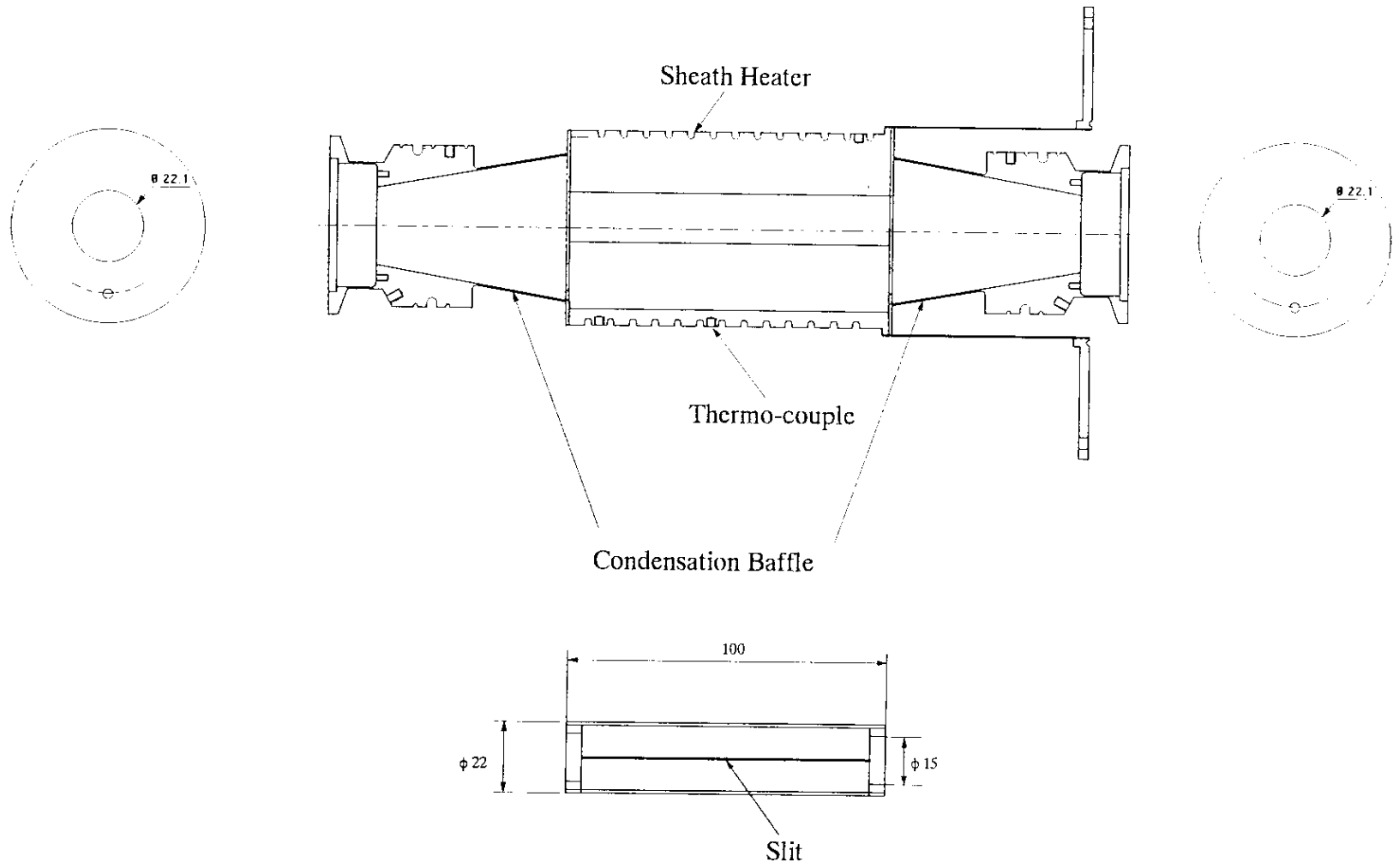


図 4 - 14 イオン化セルの構造

5) ポンピングレーザー

ポンピングレーザーの配置図を図 4-15 に示す。ルビジウム原子の吸収波長 (D1 線) は約 795 nm であるので、中性化セル及びイオン化セルのポンピングレーザーとしては、チタンサファイアレーザー (Ti Al₂O₃ レーザー, Spectra-Physics ; Model 3900S) を用いた。チタンサファイアレーザーは、20 W のアルゴンレーザーのポンピングにより発振する。アルゴンレーザー (Spectra-Physics ; model 2030) のパワーが 20 W の場合、チタンサファイアレーザーのパワーはレーザーの出口で約 4.5 W であった。チタンサファイアレーザーの波長は波数として波長計 (burleigh ; WA-10) で常時モニターする。中性化セルの磁場強度が 1.2 T の場合、波数 (k) は、電子スピンの +1/2 に光ポンピングするためには、 $k=12578.3 \text{ cm}^{-1}$ 、電子スピンの -1/2 では、 $k=12579.7 \text{ cm}^{-1}$ となる。また、中性化セルの磁場強度が 2.7 T の場合、波数 (k) は、電子スピンの +1/2 に光ポンピングするには、 $k=12580.6 \text{ cm}^{-1}$ 、電子スピンの -1/2 では、 $k=12577.4 \text{ cm}^{-1}$ となる。イオン化セルについては、磁場強度が 0.3 T であるので、波数 (k) は、電子スピンの +1/2 では、 $k=12579.2 \text{ cm}^{-1}$ 、電子スピンの -1/2 では、 $k=12578.8 \text{ cm}^{-1}$ となる。レーザーの波数は、エタロンを取付けたガルボ板 (galvo plate) を、レーザー外部から電氣的に制御することにより調整した。

中性化セル及びイオン化セル中のルビジウム原子を光ポンピングするためのポンピング光は、表面を無反射コーティングしたミラーとプリズムを用いて、イオン源の下流側から無反射コーティングした窓を通してそれぞれのセルに入射させた。入射させる直前で $\lambda/4$ 板により円偏光とした。また、経路の途中のレンズによりポンピング光の径を約 10 mm となるように調整した。各セル中のルビジウム蒸気ターゲットの厚さと、ルビジウム原子の電子スピン偏極度を測定するための参照光 (プローブ光) は、イオン源の上流側から入射させた。

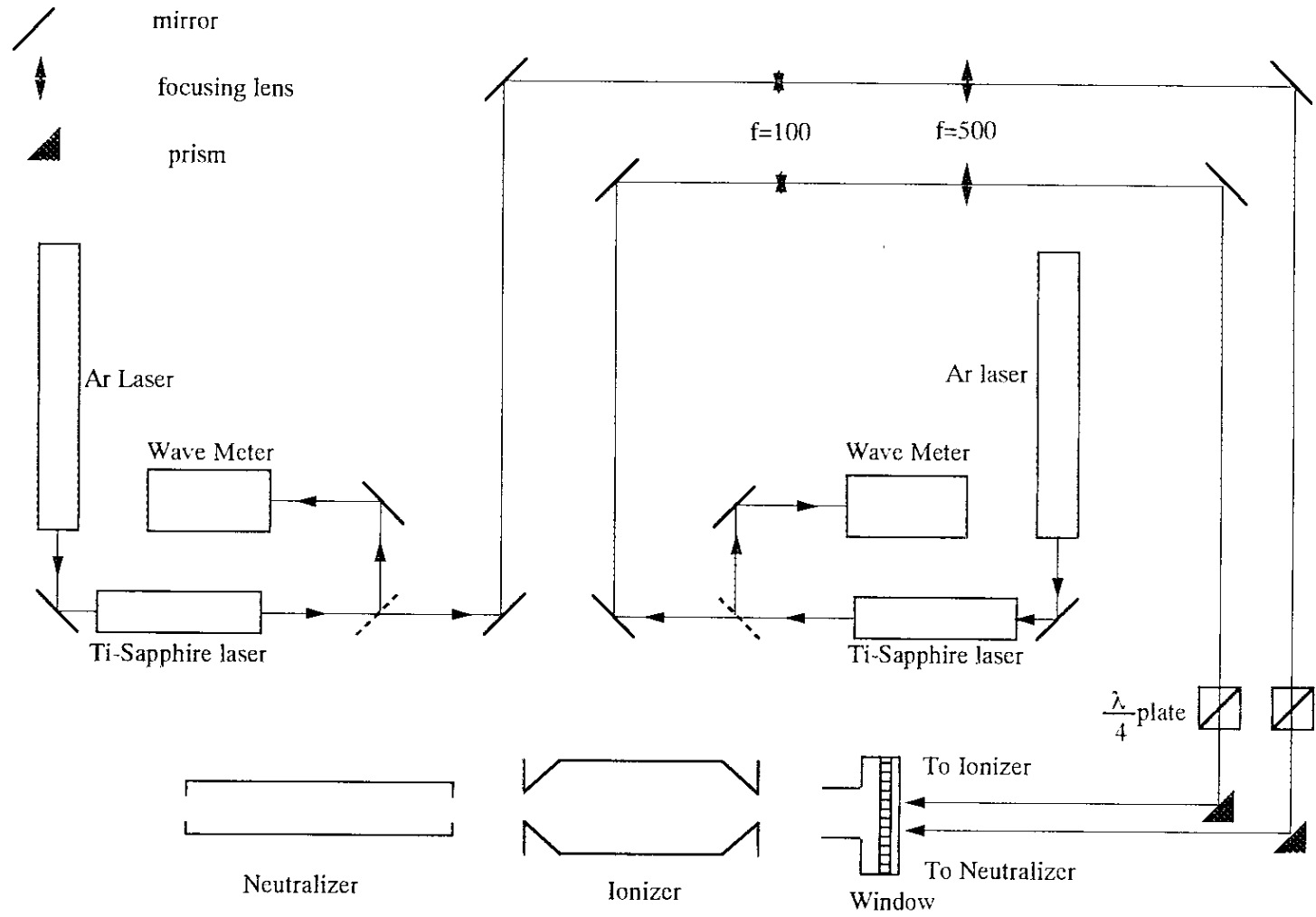


図 4 - 15 ポンピングレーザーの配置図

第5章 二重光ポンピング法における負重水素イオンビームの強度変化による核スピンのベクトル偏極度の評価

二重光ポンピング法の有効性を調べる方法として、アルカリ金属原子の電子スピン偏極度と負重水素イオンのビーム強度の関係を調べるのが可能である。また、この方法は生成された負イオンビームの核スピンのベクトル偏極度の評価にも利用できる。本章では、まず5.1節で二重光ポンピング法における負重水素イオンビームの強度変化とアルカリ金属原子の電子スピン偏極度との関係を説明し、その実験結果について述べる。さらに次の5.2節ではこの強度変化を用いて負重水素イオンビームの核スピンのベクトル偏極度の評価を行なう。

5.1 二重光ポンピング法における負重水素イオンビームの強度変化

二重光ポンピング法により偏極負重水素イオンビームを生成する場合、負重水素イオンのビーム強度は中性化セル及びイオン化セル双方のアルカリ金属原子の電子スピン偏極度に依存する。本節では、まずそれらアルカリ金属原子の電子スピン偏極度と負重水素イオンビーム強度の関係について述べる。次にビーム強度とアルカリ金属原子の電子スピン偏極度の測定方法を説明し、それらの測定により得られた実験結果について議論する。

5.1.1 アルカリ金属原子の電子スピン偏極度と負重水素イオンビーム強度の関係

二重光ポンピング法による偏極負重水素イオンビームの生成では、中性化セルとイオン化セル両方のアルカリ金属原子を、光ポンピングにより電子スピン偏極させる。負重水素イオンの2つの電子は同一電子軌道 ($1S^2$)にあるためにそのスピン状態は Pauli の排他原理により反平行 (スピン方向は互いに逆向き) である[22]。

いま、光ポンピングにより、中性化セル中のアルカリ金属原子の電子スピンの磁気量子数 $m_j = +1/2$ の状態にスピン偏極しているとする。このとき中性化セル中でのアルカリ金属原子と重水素イオンとの荷電交換反応

$(D^+ + Rb(e \uparrow) \rightarrow D^0(e \uparrow) + Rb^+)$ により生成されるそれぞれの状態の重水素原子のビーム強度は次式で表される。

$$\begin{aligned}
 i(1) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{I_{D^0}}{2} (1 + \alpha P_e^n) , \\
 i(2) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{I_{D^0}}{2} (1 + \alpha P_e^n) , \\
 i(3) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{I_{D^0}}{2} (1 + \alpha P_e^n) , \\
 i(4) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{I_{D^0}}{2} (1 - \alpha P_e^n) , \\
 i(5) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{I_{D^0}}{2} (1 - \alpha P_e^n) , \\
 i(6) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{I_{D^0}}{2} (1 - \alpha P_e^n) .
 \end{aligned} \tag{5-1}$$

$i(1), i(2), \dots, i(6)$ は各超微細構造準位 1... 6 (図 2-5 参照) を占める重水素原子ビームの強度を表す。 P_e^n は中性化セル中のアルカリ金属原子の電子スピン偏極度、 α は中性化セルで生成される重水素原子の電子スピン偏極の程度を示し、 αP_e^n が重水素原子の電子スピン偏極度となる。 α の値はスピン-軌道相互作用の影響を受けるので、偏極中性化セルの磁場強度に依存し、また、3.2 節の (c) で詳しく述べた残留ガス (background) 等にも依存する。この重水素原子が零交叉磁場領域を通過することにより、Sona transition の効率が 100% の場合には、重水素原子の各状態は図 2-5 に示すように遷移する。そして、遷移後の各状態のビーム強度は次のように表される。

$$\begin{aligned}
 i(1') &= \frac{1}{3} \cdot \frac{I_{D^0}}{2} (1 + \alpha P_e^n) , & i(2') &= \frac{1}{3} \cdot \frac{I_{D^0}}{2} (1 + \alpha P_e^n) \\
 i(3') &= \frac{1}{3} \cdot \frac{I_{D^0}}{2} (1 + \alpha P_e^n) , & i(4') &= \frac{1}{3} \cdot \frac{I_{D^0}}{2} (1 - \alpha P_e^n) \\
 i(5') &= \frac{1}{3} \cdot \frac{I_{D^0}}{2} (1 - \alpha P_e^n) , & i(6') &= \frac{1}{3} \cdot \frac{I_{D^0}}{2} (1 - \alpha P_e^n) .
 \end{aligned} \tag{5-2}$$

ここで、 $1', 2', \dots, 6'$ は Sona transition 後の各状態を表す。

次に、イオン化セル中のアルカリ金属原子について考える。イオン化セル中のアルカリ金属原子を光ポンピングにより電子スピン偏極させると、アルカリ金属原子の各電子スピン状態 ($m_j = +1/2$, $m_j = -1/2$) の密度 N_+ , N_- はそれぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} N_+ &= \frac{N_0}{2} (1 + P_e^i) \\ N_- &= \frac{N_0}{2} (1 - P_e^i) \end{aligned} \quad (5-3)$$

ここで N_0 は、イオン化セル中の全アルカリ金属原子の密度、 P_e^i はイオン化セル中のアルカリ金属原子の電子スピン偏極度である。

零交叉磁場領域を通過した重水素原子は、イオン化セル中での荷電交換反応 ($D^0(e \uparrow) + Rb(e \downarrow) \rightarrow D^- + Rb^+$) により負重水素イオンとなる。この時負重水素イオンを形成する2つの電子スピンの向きは Pauli の排他原理により反平行でなければならない。従って、生成された負重水素イオンのビーム強度は、イオン化セルのアルカリ金属原子のターゲット厚さがそれほど大きくない時には、負重水素イオンとアルカリ金属原子との衝突による消滅がないと考えられるので、各超微細構造準位に応じて次のようになる。

$$\begin{aligned} I(1') &= \frac{1}{3} i(1') \times \frac{N_0}{2} (1 + P_e^i) \sigma_0 l, \\ I(2') &= \frac{1}{3} i(2') \times \frac{N_0}{2} (1 - P_e^i) \sigma_0 l, \\ I(3') &= \frac{1}{3} i(3') \times \frac{N_0}{2} (1 - P_e^i) \sigma_0 l, \\ I(4') &= \frac{1}{3} i(4') \times \frac{N_0}{2} (1 - P_e^i) \sigma_0 l, \\ I(5') &= \frac{1}{3} i(5') \times \frac{N_0}{2} (1 + P_e^i) \sigma_0 l, \\ I(6') &= \frac{1}{3} i(6') \times \frac{N_0}{2} (1 + P_e^i) \sigma_0 l. \end{aligned} \quad (5-4)$$

(5-4) 式で σ_0 はイオン化セル中でのアルカリ金属原子と重水素原子との荷電交換

反応の衝突断面積、そして l はイオン化セルの長さを示す。

(5-2) 式を (5-4) 式に代入することにより、イオン化セルで生成される全負重水素イオンビーム強度は、

$$I = \frac{I_{D^0} N_0}{6} (3 - \alpha P_e^n P_e^i) \sigma_0 l \quad (5-5)$$

となる。

ここで、イオン化セルの光ポンピングによる負重水素イオンビーム強度の相対的変化 ε を $\varepsilon = (I_{off} - I_{on}) / I_{off}$ と定義する。 I_{on} と I_{off} はそれぞれ、イオン化セルの光ポンピングが *ON* と *OFF* の時の、負重水素イオンのビーム強度を示す。

(5-5) 式から ε は次式のように表せる。

$$\varepsilon \equiv \frac{I_{off} - I_{on}}{I_{off}} = \frac{1}{3} \alpha P_e^n P_e^i \quad (5-6)$$

この式からわかるように、 ε は中性化セル中のアルカリ金属原子の電子スピン偏極度 P_e^n と、イオン化セル中のアルカリ金属原子の電子スピン偏極度 P_e^i に依存して変化することが分かる。また (5-6) 式からわかるように、 ε は P_e^n あるいは P_e^i の偏極の向きが変わることによってその符号を変える。すなわち、もし中性化セル中のアルカリ金属原子と、イオン化セル中のアルカリ金属原子の電子スピンの偏極方向が同じ（例えば、中性化セル、イオン化セルどちらとも $m_j = +1/2$ ）であるならば、 $P_e^n P_e^i > 0$ より $\varepsilon > 0$ であるので、イオン化セルでの光ポンピングを行う場合は、光ポンピングを行わない場合よりもビーム強度は小さくなる。中性化セル中のアルカリ金属原子と、イオン化セル中のアルカリ金属原子の電子スピンの偏極方向が互いに逆方向の場合（例えば中性化セルが $m_j = +1/2$ 、イオン化セルが $m_j = -1/2$ ）には、逆に $P_e^n P_e^i < 0$ より $\varepsilon < 0$ となる。すなわち $I_{off} < I_{on}$ となり、イオン化セルでの光ポンピングを行う場合には、光ポンピングを行わない場合よりもビーム強度は大きくなる。まとめると、二重光ポンピング法で生成される負重水素イオンビームの強度は、中性化セルとイオン化セル中のアルカリ金属原子の電子スピン状態によって、

$$I_{\uparrow\uparrow} < I_{\uparrow 0} < I_{\uparrow\downarrow}$$

の関係をもつ。ただし、式中の添え字 $\uparrow\uparrow$, $\uparrow\downarrow$ はそれぞれ中性化セルとイオン化セル中のアルカリ金属原子の偏極電子スピンの偏極方向がそれぞれ平行、反平行を示し、 $\uparrow 0$ はイオン化セルでのアルカリ金属原子が非偏極の場合を示す。また、Sona transition の効率が 100% という条件では、(5-6) 式から $I_{\uparrow\uparrow}$, $I_{\uparrow\downarrow}$ と $I_{\uparrow 0}$ の変化量の絶対値は等しく、その値は $1/3 \alpha P_e^n P_e^i$ となる。

以上のことより、二重光ポンピング法による偏極負重水素イオンビーム生成では、生成される負重水素イオンビームの強度は(5-6)式に従って変化し、その符号は P_e^n, P_e^i の偏極の向きによって変わるはずである。従ってこの変化を実験的に確かめることにより、二重光ポンピング法による偏極負重水素イオンビーム生成の有効性を調べることができる。次に、この方法による実験と得られた結果について述べる。

5.1.2 実験方法

二重光ポンピング法による偏極負重水素イオンビーム生成の有効性を実験的に確かめるためには、負重水素イオンのビーム強度と、アルカリ金属原子のターゲット厚さと電子スピン偏極度を精度よく測定する必要がある。ここでは、負重水素イオンのビーム強度の測定方法と、アルカリ金属原子のターゲット厚さと電子スピン偏極度の測定方法について述べる。

(a) ビーム強度の測定

ビーム強度の測定はファラデーカップを用いて行なったが、ビーム強度の測定をイオン化セルの中心軸上で行なうと、偏極イオン源の構造上ファラデーカップによりポンピング光を遮断してしまう。そこで、イオン化セルで生成された負重水素イオンビームを、イオン化セルの出口から約 25 cm 下流に置かれた 2 つの静電型偏向電極により、ポンピング光の軸からずらし (図 4-1 参照)、イオン化セルの出口から約 40 cm 下流のファラデーカップによりビーム強度を測定した。ファラデーカップの出力はオシロスコープの波形としてモニターした。測定に使用したファラデーカップは図 4-6 に示したものと同一である。

(b) アルカリ金属原子の電子スピン偏極度測定

中性化セルとイオン化セル中のアルカリ金属原子 (ルビジウム原子) の電子スピン偏極度の測定には Faraday 回転法を利用した。Faraday 回転法の原理について以下で簡単に述べ、その詳細は付録 B にまとめる。

直線偏光のレーザー光を磁場中の媒質へ磁場と平行な方向に入射すると、媒質中を通過したレーザー光の偏光面が回転する。これを Faraday 回転という。この現象は、直線偏光を構成する左円偏光と右円偏光の媒質中での屈折率の違いにより引き起こされる。

ルビジウム蒸気中を、ルビジウム原子の吸収線（D1 及び D2 線）に近い波長の直線偏光したレーザー光が通過したときの Faraday 回転角は次式で与えられる（付録 B (B-23) 式 参照）。

$$\theta_{FR} = \frac{W_{SP} c^2 v_{ij} Nl}{8\pi} \sum_i \sum_j (\psi_{ij}^+ \beta_{ij}^+ P_i^+ - \psi_{ij}^- \beta_{ij}^- P_i^-) \quad (5-7)$$

ここで、 W_{SP} はルビジウム原子の $5P$ 状態の縮退度、 c は光の速度、 v_{ij} は各状態間の振動数の差、 Nl はルビジウムターゲットの厚さ、 β_{ij}^+ と β_{ij}^- は、基底状態（ $5S$ ）の超微細構造の第 i 準位と励起状態（ $5P$ ）の超微細構造の第 j 準位間の右円偏光と左円偏光による遷移の相対強度、そして P_i^+ は基底状態の電子スピン $m_j = +1/2$, $m_j = -1/2$ の状態の占有率である。(5-7) 式の ψ_{ij}^+ と ψ_{ij}^- はそれぞれ次式で表される。

$$\psi_{ij}^{\pm} = \frac{\chi_{ij}^{\pm}}{v_{ij}^{\pm 3} (1 + \chi_{ij}^{\pm 2})} \quad (5-8)$$

ここで、励起状態の寿命を τ 、各状態のエネルギーをそれぞれ振動数 ν_i, ν_j で表すと、 $\chi_{ij}^{\pm} = 4\pi\tau(\nu_j^{\pm 2} - \nu_i^{\pm 2})$ で与えられる。+, - はそれぞれ左、右偏光を示す。

強い磁場中では Zeeman 分離によるエネルギー差が大きくなり、基底状態の各準位は、電子スピンの $+1/2$ の状態と $-1/2$ の状態の 2 つのグループに分かれる。それぞれのグループ内の超微細構造間のエネルギー差は Zeeman 分離しているエネルギー差に比べて小さく無視できるとすると、基底状態の各準位の占有確率は、次のように書き直せる。

$$P_i^+ = P^+ \quad (5-9 a)$$

$$P_i^- = P^- \quad (5-9 b)$$

ここで、 P^+ と P^- はそれぞれ、電子スピンの $+1/2$ の状態と $-1/2$ の状態の占有確

率で、次式の関係が成り立つ。

$$P^+ + P^- = 1 \quad (5-10)$$

そこで、 Ψ_{ij} のうち、基底状態の電子スピンの状態が+1/2の状態であるものを Ψ_{sp}^+ 、電子スピンの状態が-1/2の状態であるものを Ψ_{sp}^- と書くと、次の近似式が成立する。

$$\Psi_{sp}^+ \approx \frac{\chi_{sp}^+}{\nu_{sp}^{+3} (1 + \chi_{sp}^{+2})} \quad (5-11 a)$$

$$\Psi_{sp}^- \approx \frac{\chi_{sp}^-}{\nu_{sp}^{-3} (1 + \chi_{sp}^{-2})} \quad (5-11 b)$$

ここで、 ν_{sp}^+ と ν_{sp}^- はそれぞれ、基底状態(5S)の $m_j = +1/2$ 準位と励起状態5P間のエネルギー差に対応する振動数と、基底状態(5S)の $m_j = -1/2$ 準位と第 j 励起状態(5P)間のエネルギー差に対応する振動数である。

遷移の相対強度についても同様に、電子スピン+1/2の基底状態に関するものを β_{sp}^+ 、電子スピン-1/2の基底状態に関するものを β_{sp}^- とすると、この遷移の相対強度と(5-9)式、および(5-11)式により、(5-7)式は、

$$\theta_{FR} \approx \frac{W_{5P} c^2 \nu_{ij} N I}{8\pi} 2 \{ \Psi_{sp}^+ \beta_{sp}^+ P^+ - \Psi_{sp}^- \beta_{sp}^- P^- \} \quad (5-12)$$

と表される。

ここで、 P^+ と P^- は電子スピン偏極度 P_{Rb} を用いて次式で与えられる。

$$P^+ = \frac{1 + P_{Rb}}{2} \quad (5-13 a)$$

$$P^- = \frac{1 - P_{Rb}}{2} \quad (5-13 b)$$

(5-13) 式を (5-12) 式に代入すると、

$$\theta_{FR} = \frac{W_{SP} c^2 \nu_{ij} NI}{8\pi} \{ (\psi_{sp}^+ \beta_{sp}^+ - \psi_{sp}^- \beta_{sp}^-) + P_{Rb} (\psi_{sp}^+ \beta_{sp}^+ + \psi_{sp}^- \beta_{sp}^-) \} \quad (5-14)$$

となる。ここで、ルビジウム原子が偏極していないときの Faraday 回転角 (θ_0) は $P_{Rb} = 0$ より、(5-7) 式より

$$\theta_0 = \frac{W_{SP} c^2 \nu_{ij} NI}{8\pi} (\psi_{sp}^+ \beta_{sp}^+ - \psi_{sp}^- \beta_{sp}^-) \quad (5-15)$$

となる。よってこの式より、ルビジウム蒸気ターゲットの厚さ NI は、 θ_0 を測定することで次式から求められる。

$$NI = \frac{8\pi}{W_{SP} c^2 \nu_{ij} (\psi_{sp}^+ \beta_{sp}^+ - \psi_{sp}^- \beta_{sp}^-)} \theta_0 \quad (5-16)$$

一方、ルビジウム原子が電子スピン偏極した場合には (5-14) 式からわかるように、非偏極時の Faraday 回転角 θ_0 にさらに偏極分の θ_p が付け加わったものとなる。すなわち、

$$\begin{aligned} \theta_0 + \theta_p &= \frac{W_{SP} c^2 \nu_{ij} NI}{8\pi} \{ (\psi_{sp}^+ \beta_{sp}^+ - \psi_{sp}^- \beta_{sp}^-) \\ &\quad + P_{Rb} (\psi_{sp}^+ \beta_{sp}^+ + \psi_{sp}^- \beta_{sp}^-) \} \\ &= \theta_0 + \frac{W_{SP} c^2 \nu_{ij} NI}{8\pi} P_{Rb} (\psi_{sp}^+ \beta_{sp}^+ + \psi_{sp}^- \beta_{sp}^-) \end{aligned} \quad (5-17)$$

となる。従って、 θ_p を測定することにより P_{Rb} を求めることができる。

以上の議論より、ルビジウム原子が偏極していないときのFaraday 回転角 (θ_0) とルビジウム原子が偏極することで生じるFaraday 回転角 (θ_p) を測定することで、ルビジウム蒸気ターゲットの厚さと、ルビジウム原子の電子スピン偏極度を測定することができる。ルビジウム蒸気ターゲットの厚さは、 θ_0 から (5-16) 式で、ルビジウム原子の電子スピン偏極度は、 θ_p から (5-17) 式でそれぞれ求めることができる。次に実験でFaraday 回転角の測定に用いた装置について述べる。

Faraday 回転角は、直線偏光したプローブ光の偏光角を直線偏光子を回転させることによって測定する。実際の測定の配置図を図 5-1 に示す。ルビジウム原子のFaraday 回転角の測定を行なう場合、プローブ光としてはルビジウム原子の吸収線 (D 2 線, 12820.51 cm^{-1}) に近い波長を持つことが必要である。本研究では、プローブレザーとしてルビジウム原子の吸収線 (D2 線) 近傍で波長可変である半導体レーザー (MELLES GRIOT; 06DLL403) を用いた。レーザー波長の決定については、後に詳しく述べる。Faraday 回転角の測定を行なう場合には、レーザーの波長が安定であることが必要である。そこで、レーザーの波長を波長計 (Burleigh WA-10) で常に測定し、波長の変化が波数で $2 \times 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$ 以内になるように半導体レーザーを調整した。半導体レーザーの場合、レーザーの波長は半導体レーザーヘッドの温度と電流値に依存する。温度制御よりも電流値制御の方が容易であるので、レーザー波長の制御は半導体レーザーヘッドの電流値で行なった。レーザー光の強度はレーザー出口で約15mW と極めて小さく、これによりルビジウム原子の光ポンピングが生じ、Faraday 回転角の測定に影響を与えるということはない。次に、実際測定に用いた、レーザー波長の決定方法について述べる。

ルビジウム原子のFaraday 回転の角度は、磁場強度とプローブ光の波長が一定であると、ルビジウム蒸気ターゲットの厚さ及びルビジウム原子の電子スピン偏極度に依存する。逆に、ルビジウム蒸気ターゲットの厚さと、ルビジウム原子の電子スピン偏極度が一定であるとすると、回転角度は磁場強度とプローブ光の波長に依存することになる。プローブ光の波長を決定する際には、ルビジウム蒸気ターゲットの厚さを求めるための θ_0 の値ができるだけ大きく、かつ、プローブ光の波数に対する回転角の依存性がそれほど大きくないように選ぶことが、測定を精度よく行なうために重要である。

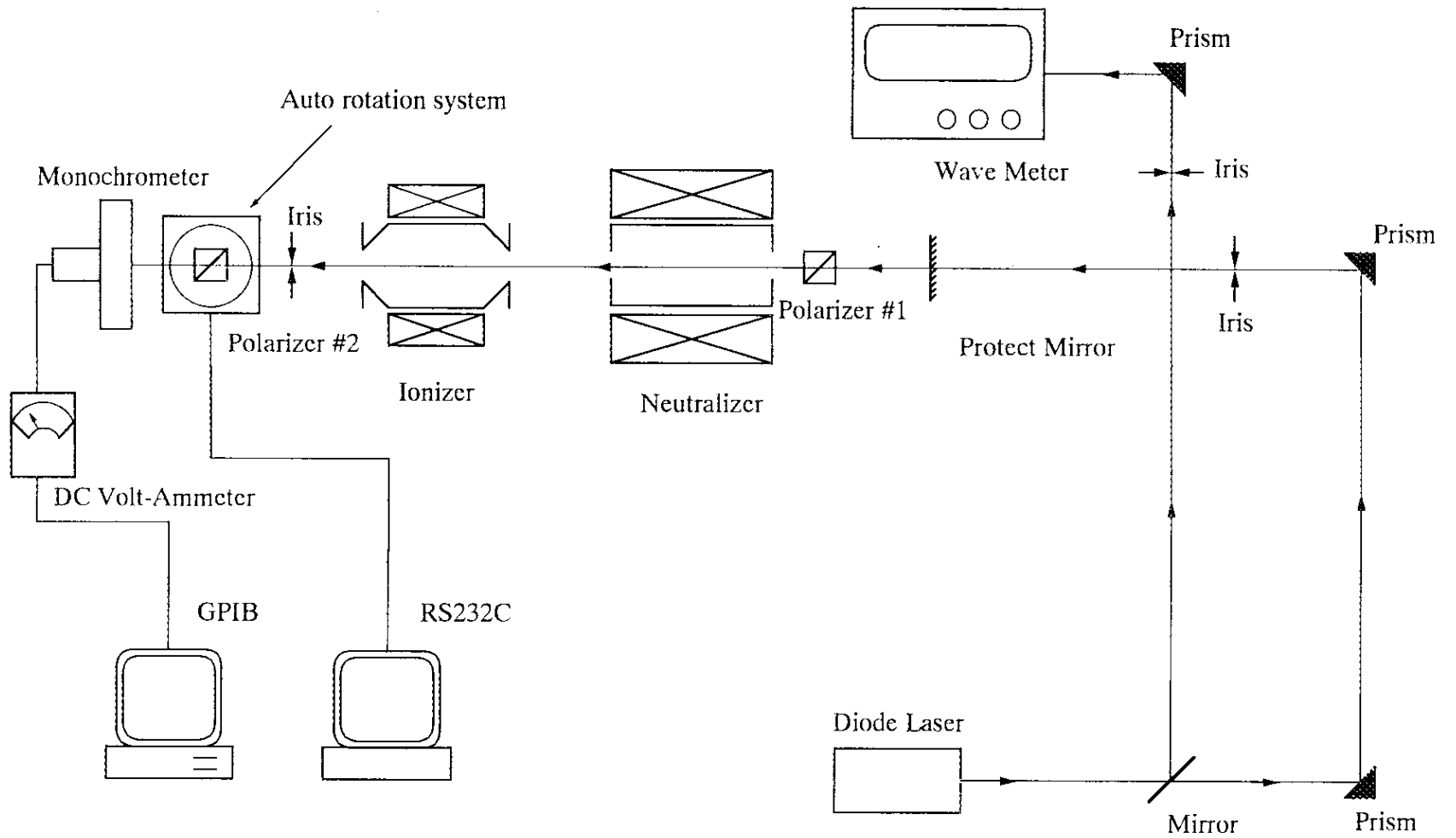


図 5 - 1 Faraday 回転測定装置の配置図

磁場強度が 1.2 T と 2.7 T の場合についてのルビジウム原子の吸収線 (D2線) 近傍の波数に対する、 θ_o と θ_p の値を計算した。この時のルビジウム蒸気ターゲットの厚さは 1×10^{14} atoms / cm² とした。結果を図 5-2 (a)、(b) に示す。横軸はプローブ光の波数で、縦軸は θ_o 及び θ_p を表わす。図 5-2 (a) は磁場強度が 1.2 T の場合、(b) は磁場強度が 2.7 T の場合である。この計算より、 θ_o と θ_p がそれほど小さくなく、かつ急激に変化しないという条件から、磁場強度が 1.2 T の場合にはプローブ光の波数を 12808.42 cm⁻¹、磁場強度が 2.7 T の場合には 12808.04 cm⁻¹ に選んだ。

Faraday 回転によるルビジウム蒸気中を通過してきたプローブ光の偏光の傾きは、偏光子を回転させた時の強度変化から測定した。プローブ光の強度は、光電子増倍管を使用した。光電子増倍管 (浜松ホトニクス R374) をモノクロメータ (日本分光工業 CT-25N) の後ろに取付け、プローブ光以外の光を遮断して測定した。光電子増倍管の出力は増幅器で増幅した後、最大 5V 入力で 1023 ch の解像度を持つ ADC (Analog to Digital Converter) でデジタル化し、パーソナルコンピュータ (NEC PC-9801) でデータ収集した。

次に Faraday 回転角の実際の測定方法について述べる。プローブレザー光は、上流側の固定直線偏光子 (Polarizer #1) を通過することにより直線偏光させた後、中性化セル、イオン化セルの順で通過し、これらのセル中のルビジウム蒸気により Faraday 回転を受ける。この回転角は下流側の直線偏光子 (Polarizer #2) を通過した光の強度が最小になるように設定したときの設定角度を、プローブ光の偏光面の角度と考える。先に述べたように、上流側の直線偏光子 (Polarizer #1) 通過後の直線偏光したプローブ光は、ルビジウム蒸気が存在する場合、ルビジウム蒸気ターゲットの厚さとルビジウム原子の電子スピン偏極度に応じた Faraday 回転を受ける。

ルビジウム蒸気が存在しない状態での、直線偏光子 #2 を通過する光の強度が最小となる角度が、Faraday 回転を測定するための基準となる角度であり、以後、この角度を θ_1 と呼ぶ。ルビジウムセルの温度を上げ、ルビジウム蒸気を生成したときには、ターゲットの厚さに応じて偏光面が回転する。このときの直線偏光子 #2 の角度を θ_2 とする。さらに、光ポンピングによりルビジウム原子が電子スピン偏極したときには、また別の角度で下流側の直線偏光子 (Polarizer #2) を通過する光の強度が最小になる。この角度を θ_3 とする。これらの角度を測定することで、ルビジウム蒸気ターゲットの厚さと、ルビジウム原子の電子スピン偏極度を求めることができる。プローブ光は直線偏向しているため、直線偏光子 #2 を通過す

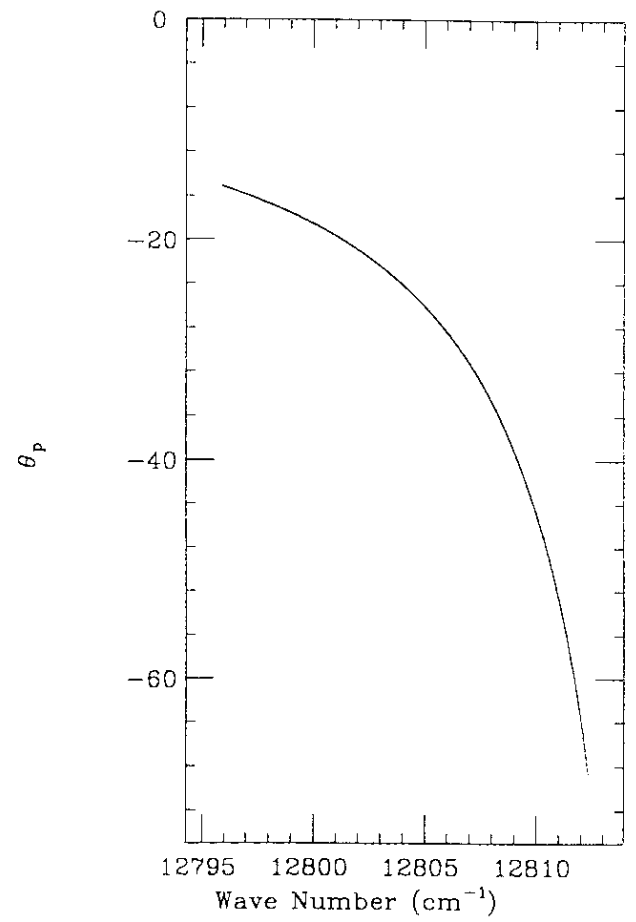
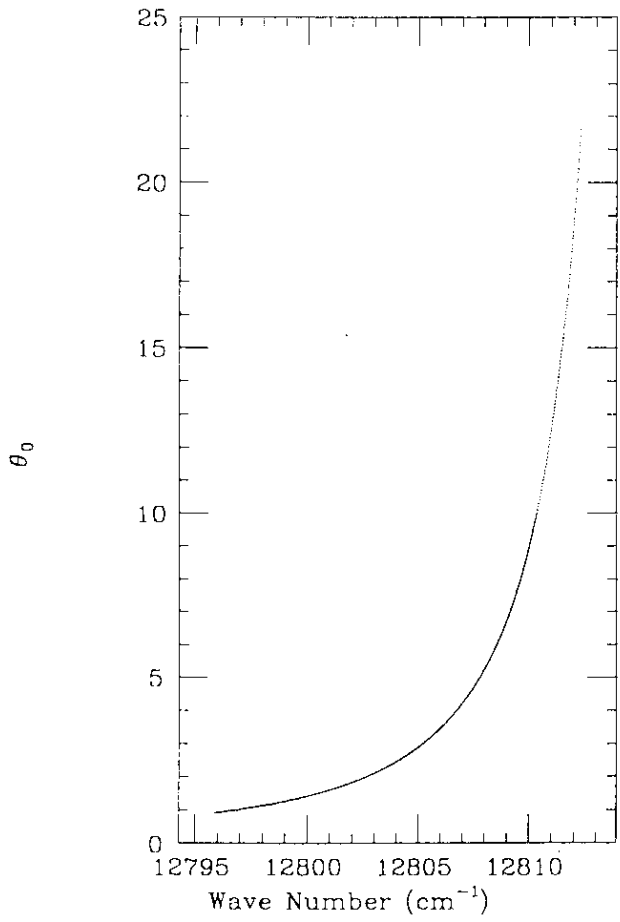


図 5 - 2 (a) 磁場強度が 1.2 T の場合のルビジウム原子の吸収線 (D 2 線) 近傍の Faraday 回転角 (計算値)
 縦軸は Faraday 回転角、横軸はレーザーの波数を示す。

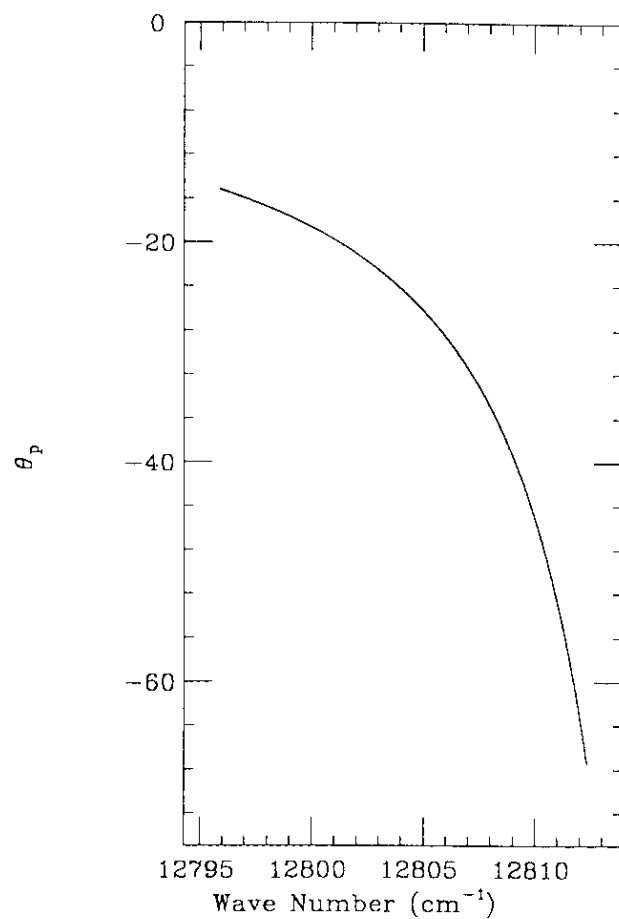
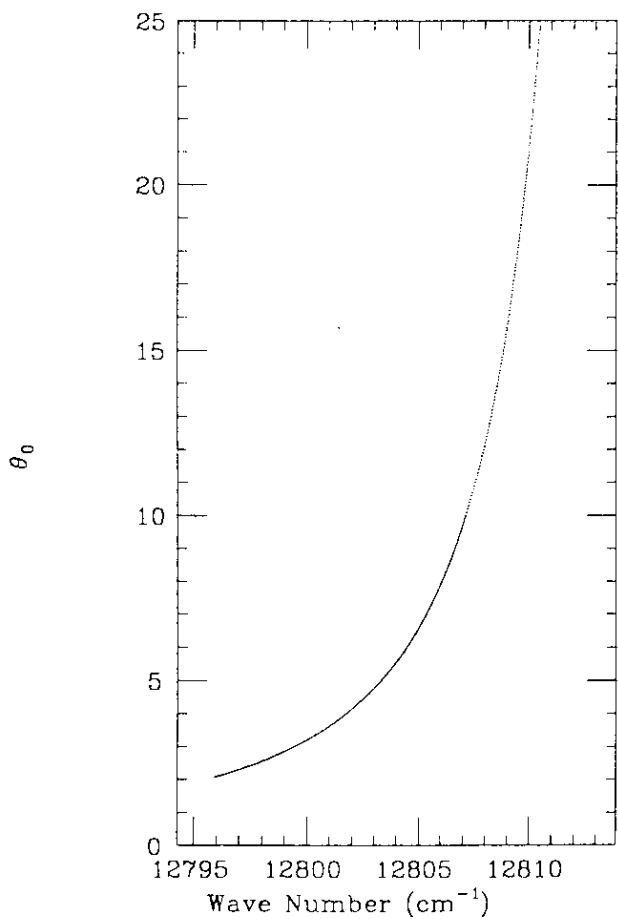


図 5 - 2 (b) 磁場強度が 2.7 T の場合のルビジウム原子の吸収線 (D 2 線) 近傍の Faraday 回転角 (計算値)
縦軸は Faraday 回転角、横軸はレーザーの波数を示す。

る光の強度 I とその設定角度 θ には次の関係がある。

$$I(\theta) = I_0 \sin^2(\theta - \theta_s) \quad (5-18)$$

ここで、 θ_s は、プローブ光の偏光角であり、 I_0 は通過した光の強度の最大値である。 $\theta - \theta_s$ が十分小さいときには、次の近似式が成立する。

$$I(\theta) \approx I_0 \cdot (\theta - \theta_s)^2 \quad (5-19)$$

この式より、理想的には $\theta = \theta_s$ で $I(\theta)$ は 0 になる。実際には、 $I(\theta)$ は光電子増倍管の出力として測定されるので、プローブ光以外の光の影響（バックグラウンド）等によって、 $\theta = \theta_s$ でも $I(\theta)$ は完全に 0 にはならないが、それらのバックグラウンドは直線偏光子の回転角には依存しないので、 $I(\theta)$ は $\theta = \theta_s$ で最小値をとる。

$I(\theta)$ を最小にする $\theta = \theta_s$ を求めるために、下流側の直線偏光子 #2 を回転させた。この直線偏光子 #2 の回転は、図 5-1 に示すように自動回転ステージを RS232C を通して、パーソナルコンピュータ（NEC PC-9801）で制御することで行なった。得られたデータを最小自乗法でフィットさせ、直線偏光子 #2 を通過する光の強度を最小にする角度から、それぞれの Faraday 回転角 θ_1 , θ_2 , θ_3 の値を求める。

図 5-3 に測定された直線偏光子 #2 の設定角 θ と、光電子増倍管の出力 $I(\theta)$ との関係を示す。●は測定値で、それぞれの角度で 100 回読み取った分のデータの平均値である。実線が最小自乗法でフィットした二次曲線である。 θ_1 , θ_2 , θ_3 の測定値により、Faraday 回転角 θ_0 と θ_p は次式で与えられる。

$$\theta_0 = \theta_2 - \theta_1 \quad (5-20 a)$$

$$\theta_p = \theta_3 - \theta_2 \quad (5-20 b)$$

これらの値から、(5-16) 及び (5-17) 式よりルビジウム蒸気ターゲットの厚さと、ルビジウム原子の電子スピン偏極度を求めることができる。

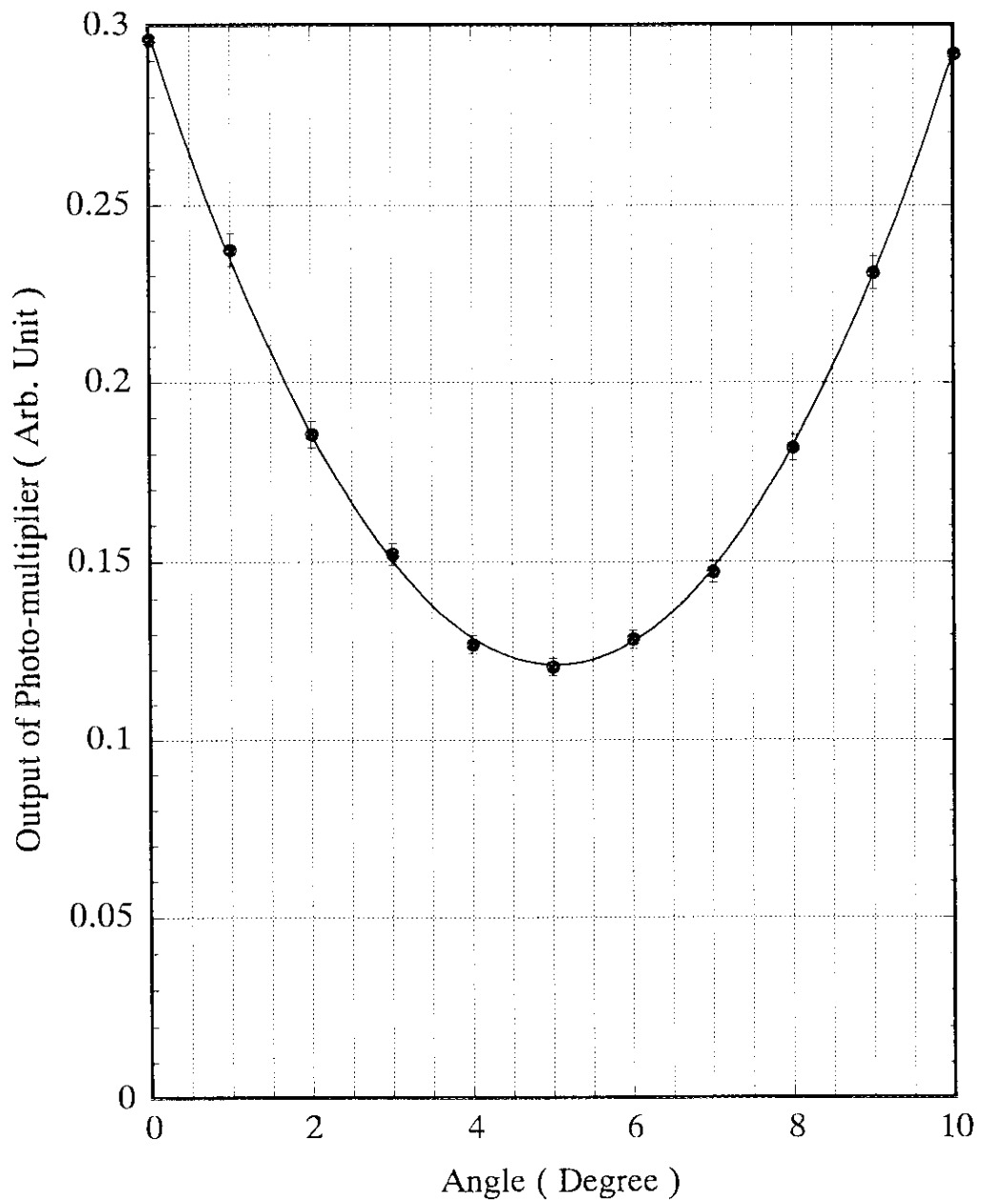


図 5 - 3 Faraday 回転角に対する光電子増倍管の出力
縦軸は光電子増倍管の出力、
横軸は直線偏光子の回転角度を示す。

5.1.3 実験結果と議論

5.1.2 節で説明した方法を用いて、中性化セル中のルビジウム蒸気ターゲット厚さの変化と、ポンピングレーザーパワーの変化に対する、ルビジウム原子の電子スピン偏極度の変化の測定を行なった。レーザーパワーは、イオン源最下流のレーザー入射窓の位置で、パワーメーターにより測定した。結果を図 5-4 に示す。

実験結果から、ポンピングレーザーのパワーが 5.8 W の場合、ルビジウム蒸気ターゲットの厚さが 2×10^{14} atoms / cm² 程度までは、ポンピングレーザーパワーが増加すれば、ルビジウム原子の電子スピン偏極度をほぼ 100 % に保つことができるが、ルビジウム蒸気ターゲットの厚さが 3×10^{14} atoms / cm² 以上になると、ルビジウム原子の電子スピン偏極度は急激に減少することがわかる。これは、光ポンピングにおける光子の再吸収過程である radiation trapping によるものと考えられる。また、この結果は Tupa et al. によって示された計算結果と良く一致している [24]。

中性化セル中のルビジウム蒸気ターゲット厚さに対する、重水素原子ビーム (D^0 ビーム) の強度変化を図 5-5 に示す。ルビジウム蒸気ターゲット厚さが 2×10^{14} atoms / cm² 程度までは、ルビジウム蒸気ターゲット厚さの増加に従ってビーム強度も増加する。

図 5-6 にはイオン化セルのルビジウム蒸気ターゲット厚さに対する、負重水素イオンビーム (D^- ビーム) 強度の変化を示す。これからわかるように、ルビジウム蒸気ターゲット厚さが 5×10^{14} atoms / cm² 程度までは、ルビジウム蒸気ターゲット厚さの増加に従ってビーム強度も増加するが、それ以後は減少する。これはルビジウム蒸気ターゲットの厚さが増加するに従い、負重水素イオンビーム (D^- ビーム) の生成よりも、生成された負重水素イオン (D^-) がルビジウム原子との再衝突により消滅する反応の方が支配的になるためと考えられる。

ポンピングレーザーの波長の変化に対するイオン化セル中のルビジウム原子の電子スピン偏極度変化を測定した結果を図 5-7 に示す。ポンピング光の波長は、波数 $k=12578.88$ cm⁻¹ を原点とし原点からの波数のずれとして示してある。この実験では、波長依存性の精度を上げるためにポンピングレーザーのパワーを小さくしバンド幅を吸収線幅 0.1 cm⁻¹ より十分小さい 0.01 cm⁻¹ 以下にして測定を行なった。ポンピングレーザーパワーはレーザー入射窓の位置で 0.9 W であり、ルビジウム蒸気ターゲットの厚さは $(2.2 \pm 0.2) \times 10^{13}$ atoms / cm² である。ポン

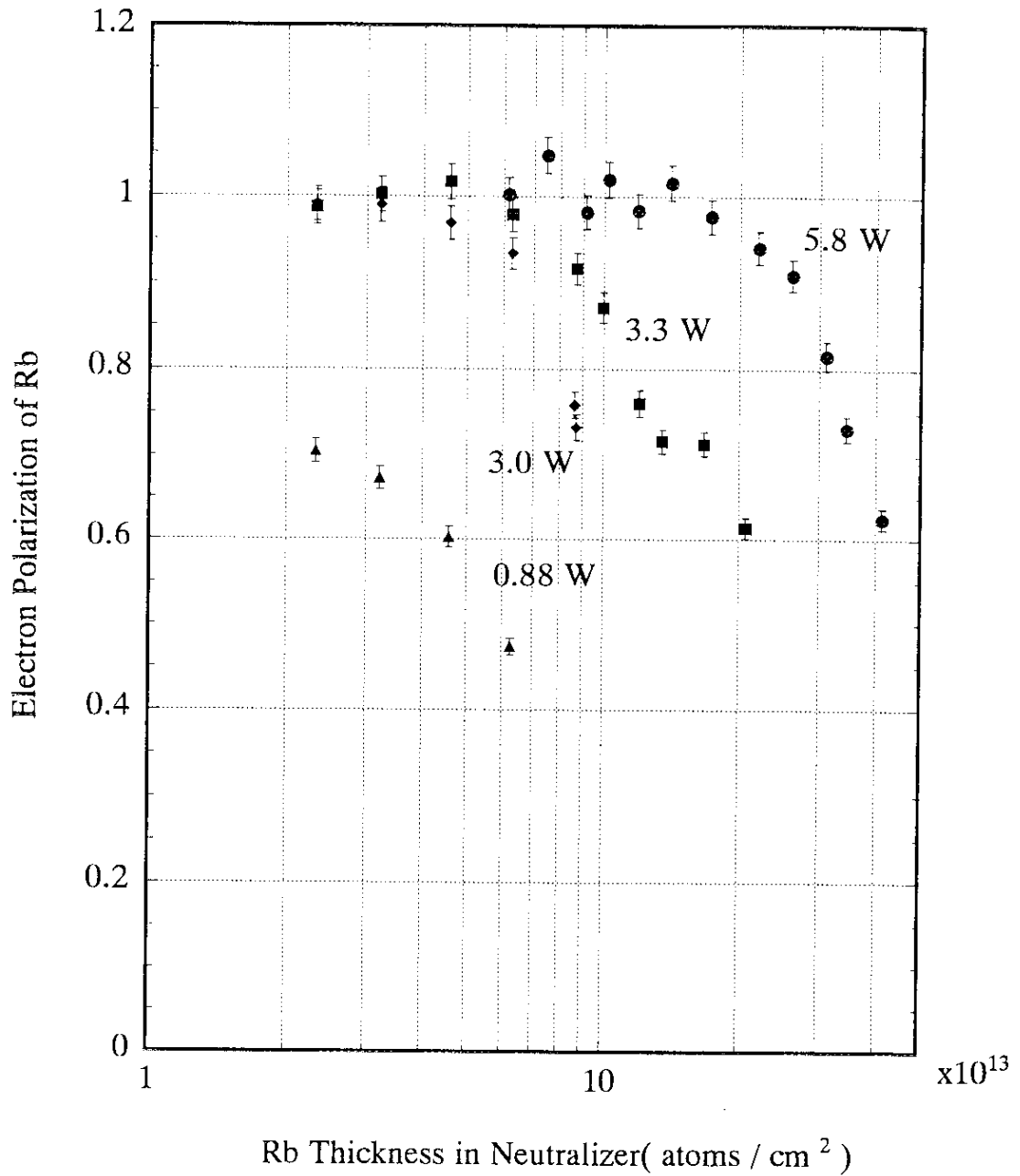


図 5 - 4 中性化セルのルビジウム原子の電子スピン偏極度(P_e^n)のルビジウムターゲット厚さ及びレーザーパワー依存性
 縦軸は中性化セル中のルビジウム原子の電子スピン偏極度、
 横軸は中性化セル中のルビジウム蒸気の厚さを示す。
 レーザーパワーは入射窓の位置での値である。

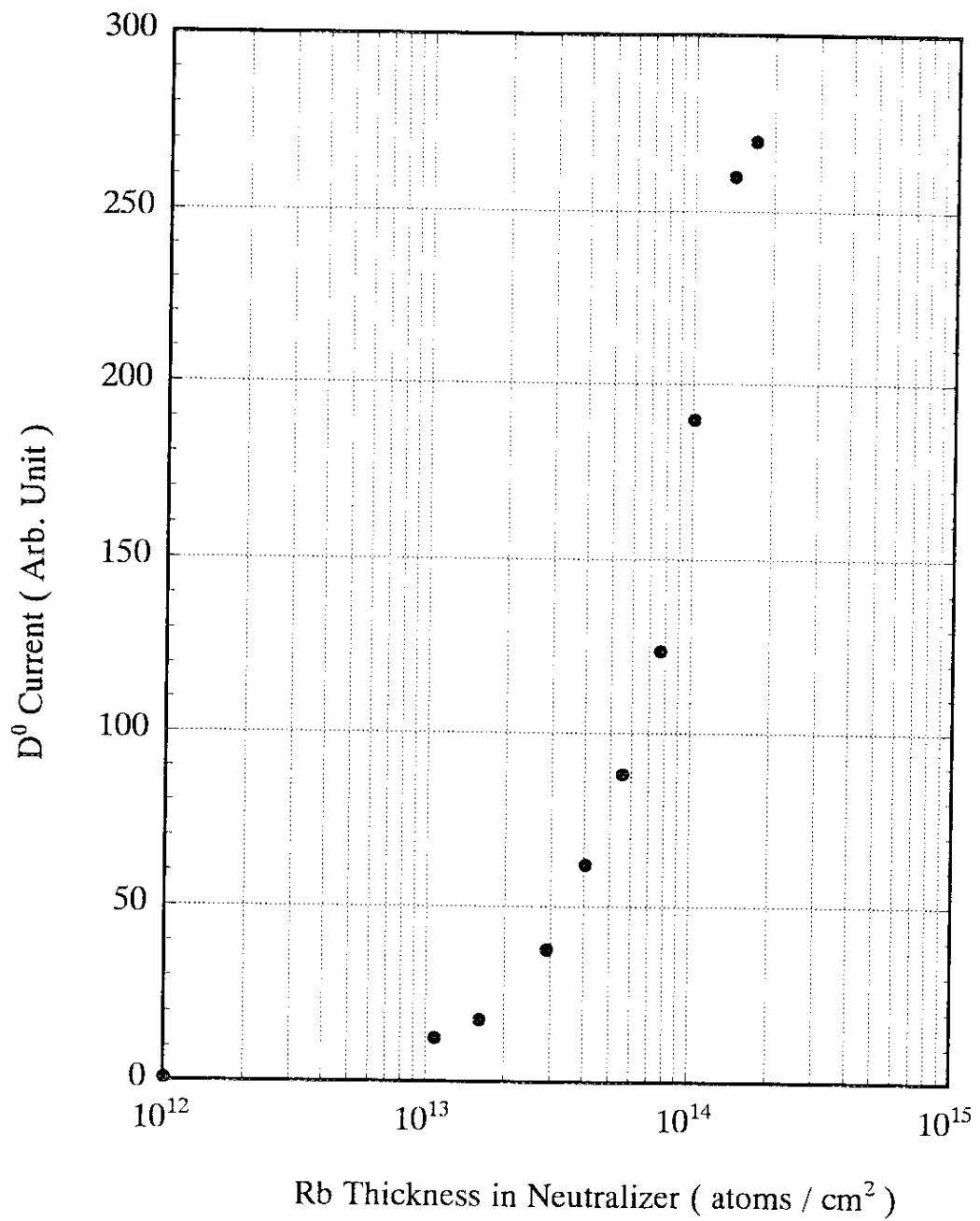


図 5 - 5 中性化セル中のルビジウムターゲット厚さに対する D⁰ ビーム強度変化
 縦軸は D⁰ ビームの強度、
 横軸は中性化セル中のルビジウム蒸気の厚さを示す。

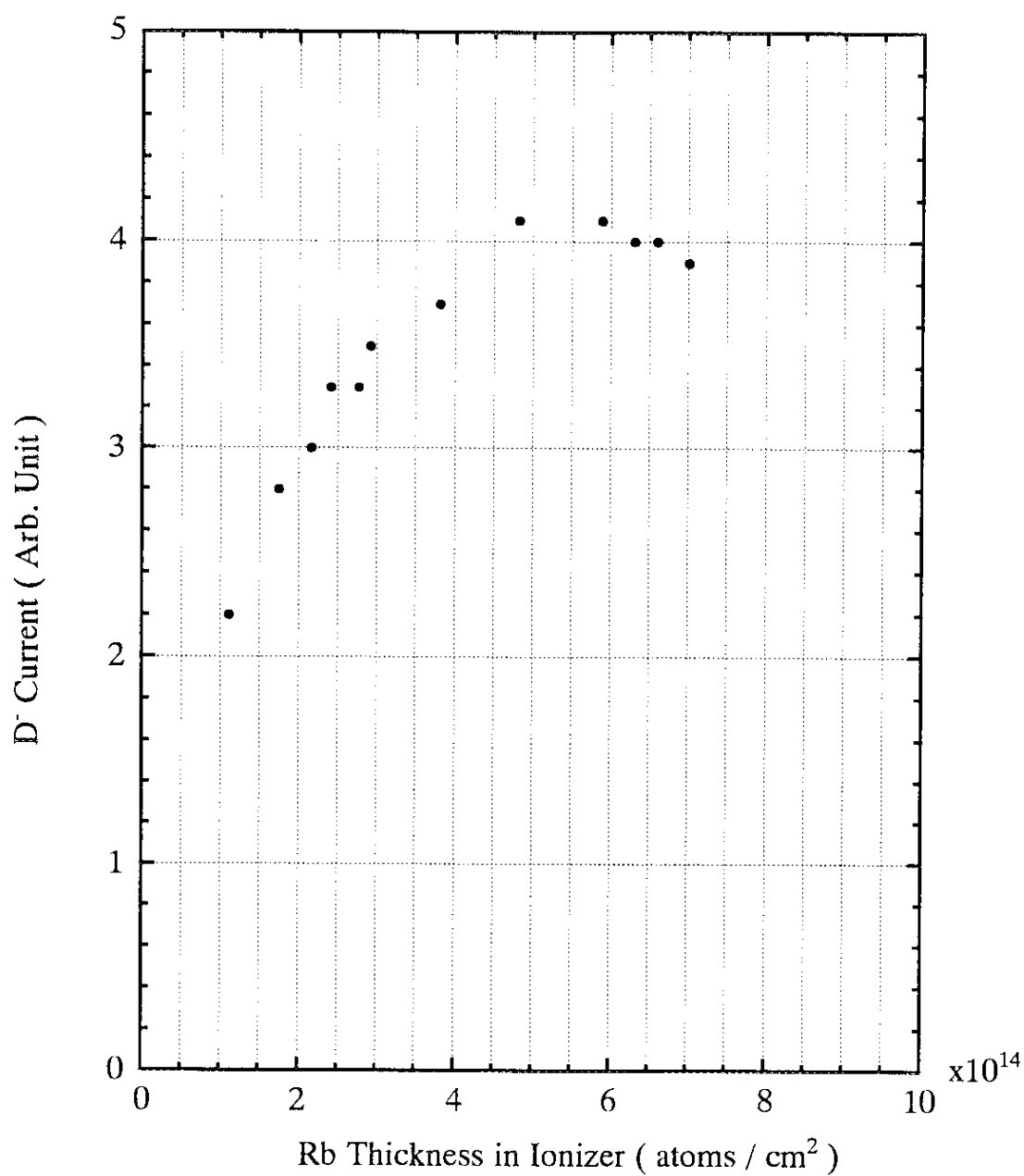


図 5 - 6 イオン化セル中のルビジウムターゲット厚さに対する負重水素イオンビーム (D⁻ビーム) の強度変化
 縦軸はD⁻ビームの強度、
 横軸はイオン化セル中のルビジウム蒸気の厚さを示す。

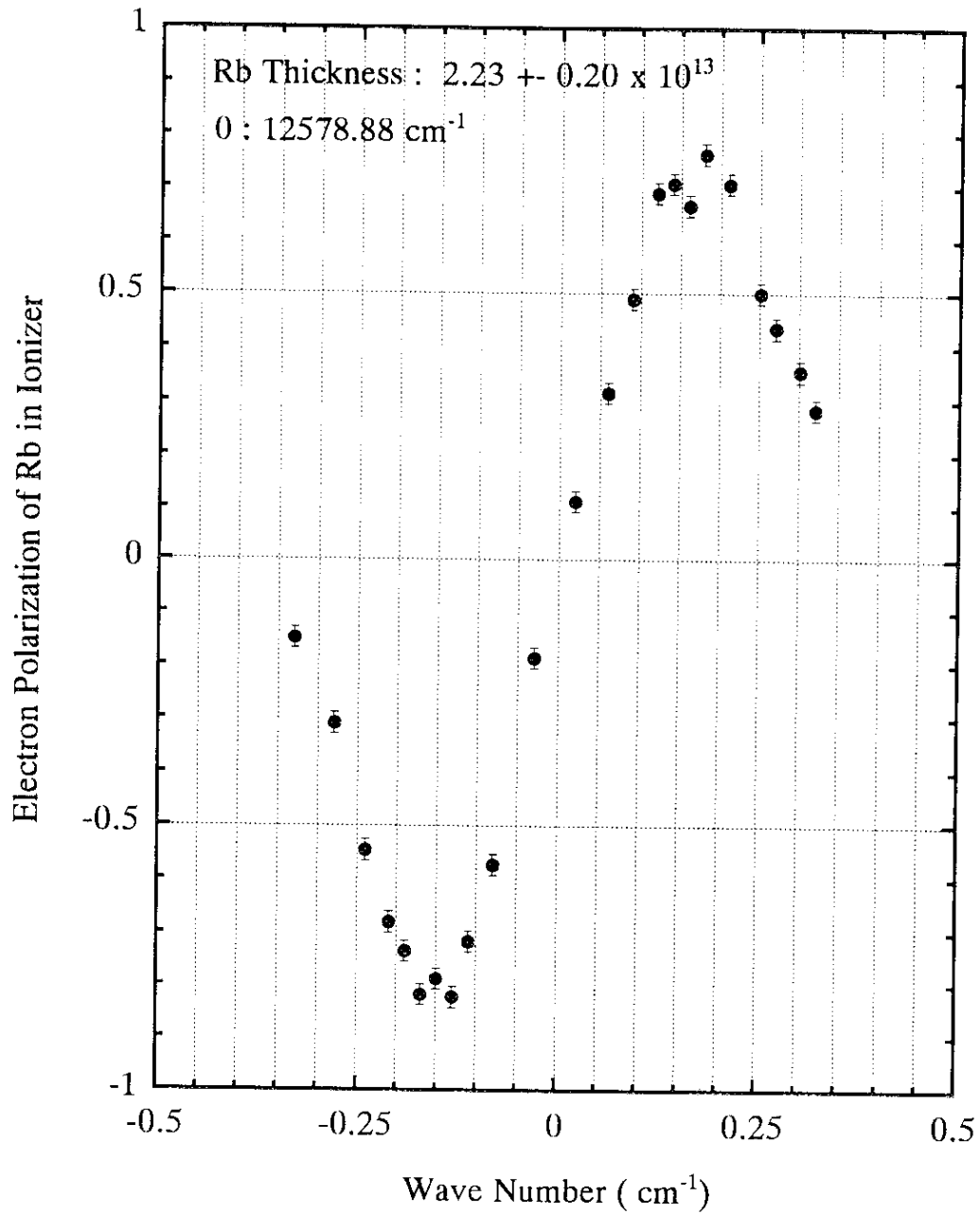


図 5 - 7 ポンピングレーザー光の波長の変化に対するイオン化セル中のルビジウム原子の電子スピン偏極度変化
 縦軸はイオン化セル中のルビジウム原子の電子スピン偏極度、横軸はポンピングレーザー波数を示す。
 ただし、波数が 12578.88 cm^{-1} を 0 とする。
 イオン化セル中のルビジウムターゲット厚さは $2.23 \pm 0.2 \times 10^{13} \text{ atoms / cm}^2$ である。

ピングレーザーのパワーが低いために、得られたルビジウム原子の電子スピン偏極度も小さいが、この実験より、ポンピング光の波長を調節することによりルビジウム原子の電子スピン偏極の方向を変化させ得ることがわかった。

次に、5.1.1 節で説明した方法に従って、偏極負重水素イオンビームの強度変化を測定することにより、二重光ポンピング法による偏極負重水素イオンビーム生成の有効性を実験的に調べた。

中性化セル中のルビジウム原子の電子スピンとイオン化セル中のルビジウム原子の電子スピンの方向を同じ方向に光ポンピングした場合と、逆方向に光ポンピングした場合の、負重水素イオンのビーム強度変化の測定結果を図 5-8 に示す。この図で一番上の波形は、アルカリ金属原子の電子スピンの方向が、中性化セルとイオン化セルを同じ方向に光ポンピングした場合で、一番下の波形は、それぞれを逆方向に光ポンピングした場合を示す。中間の波形は、中性化セルのみを光ポンピングし、イオン化セルを光ポンピングしない時の、負重水素イオンのビーム強度の波形である。この時、中性化セル中のルビジウム原子の電子スピン偏極度 P_e^i は 0.92 ± 0.05 、ルビジウム蒸気ターゲットの厚さは $5.2 \pm 0.3 \times 10^{13}$ atoms / cm^2 で、イオン化セル中のアルカリ金属原子の電子スピン偏極度 P_e^j はそれぞれ、 $+1.00 \pm 0.07$ 、 -1.00 ± 0.07 、そして、ルビジウム蒸気ターゲットの厚さは $4.3 \pm 0.3 \times 10^{13}$ atoms / cm^2 であった。中性化セル中のポンピングレーザーのパワーがレーザー入射窓の位置で約 3.0 W であり、レーザーパワーが低いためにルビジウム原子の電子スピン偏極度が 100% とならなかったと考えられる。アルカリ金属原子の電子スピン偏極度の誤差は、Faraday 回転角の測定誤差により決まり次式で与えられる。

$$\Delta P_e = \left\{ \left(\frac{\partial P_e}{\partial \theta_1} \Delta \theta_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial P_e}{\partial \theta_2} \Delta \theta_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial P_e}{\partial \theta_3} \Delta \theta_3 \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ここで、 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 は前節で述べた偏光子で測定した角度であり、 $\Delta \theta_1$ 、 $\Delta \theta_2$ 、 $\Delta \theta_3$ はそれぞれの測定誤差である。

ビーム強度変化の波形から ε の値を求めると、 $\varepsilon = +0.21$ 、 $\varepsilon = -0.22$ であり、スピンの向きにより ε の値は反転しその変化量の絶対値もほぼ等しく、これは

5.1.1 節での予想したように、中性化セルとイオン化セル中のアルカリ金属原子の電子スピン状態により、生成される負重水素イオンビームの強度が同程度に増加または減少するという結果となった。また、(5-6) 式から推定される ϵ の値は以下のようにして求めた。中性化セル中のルビジウム原子の電子スピン偏極度 P_e^0 は 0.92 ± 0.05 、イオン化セル中のアルカリ金属原子の電子スピン偏極度 P_e^i はそれぞれ、 $+1.00 \pm 0.07$ 、 -1.00 ± 0.07 、そして、減偏極の程度を表す α の値は、個々の要因による個々の減偏極の程度 α_i の積であたえられる。

$$\alpha = \prod_{i=1}^n \alpha_i \quad (\text{n は減偏極の要因数})$$

ここで、スピン-軌道相互作用によるものを α_1 、残留ガス (background) の影響によるものを α_2 とすると、これら2つの要因による α の計算値は、 $\alpha_1 = 0.95$ 、 $\alpha_2 = 0.87$ より、 $\alpha = 0.83$ となる。これを用いると、(5-6) 式から推定される ϵ の値は $\epsilon = \pm 0.256 \pm 0.023$ となる。この結果、実験値は計算値よりやや小さいものの、実験値と (5-6) 式から推定される ϵ の値はほぼ良い一致を示していると考えられる。以上のことより、二重光ポンピング法を用いることによって、核スピン偏極度の大きな偏極負重水素イオンビームの生成が可能であることが実験的に確認されたと考えられる。

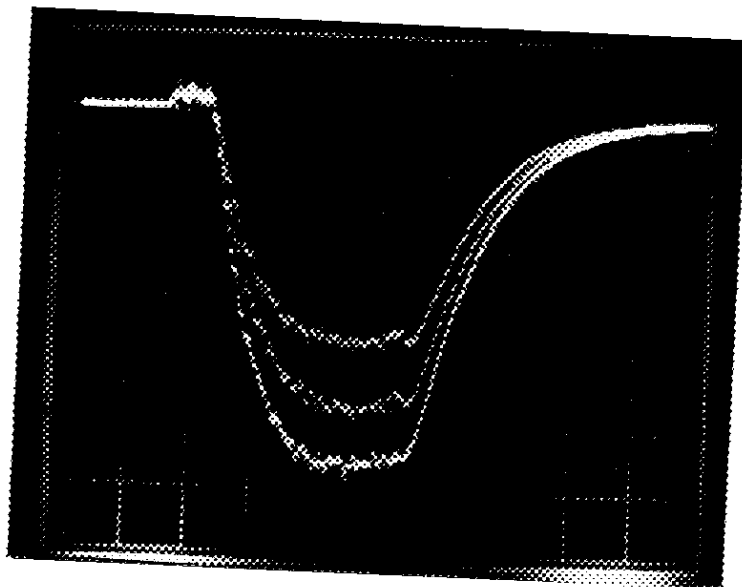


図 5 - 8 イオン化セル中のルビジウム原子の電子スピン偏極状態
に対する負重水素イオンビームの強度変化
中性化セルの電子スピン状態 : $m_j = +1/2$
イオン化セルの電子スピン状態 : $m_j = +1/2, 0, -1/2$
上 : $m_j = +1/2$, 中 : $m_j = 0$, 下 : $m_j = -1/2$
縦軸 5 mV/div , 横軸 0.1msec/div

5.2 負重水素イオンビームの強度変化を用いた 核スピンのベクトル偏極度の評価

前節で述べたように、二重光ポンピング法においては、負重水素イオンのビーム強度は Sona transition 後の重水素原子の各超微細構造状態の存在確率によって変化する。このことを用いると、イオン化後の核スピンのベクトル偏極度をこのビーム強度変化により評価することが可能となる。この節では、まず、二重光ポンピング法における負重水素イオンビームの強度変化による核スピンのベクトル偏極度の評価について述べ、次にこれを用いて評価した、偏極負重水素イオンビームの核スピンのベクトル偏極度の中性化セル及びイオン化セルの磁場強度に対する依存性及びアルカリ金属ターゲット厚さに対する依存性についての測定結果を述べる。

5.2.1 二重光ポンピング法の負重水素イオンビームの 強度変化と核スピンのベクトル偏極度の関係

偏極負重水素イオンの核スピンのベクトル偏極度 (P_D) は次式で定義される。

$$P_D = \frac{I_+ - I_-}{I_+ + I_0 + I_-} \quad (5-21)$$

ここで、 I_+ は負重水素イオンの核スピン状態が $I_z = +1$ であるビーム強度で、 I_-, I_0 はそれぞれ、 $I_z = -1, I_z = 0$ のビーム強度を示す。 I_+, I_0, I_- は (5-4) 式を用いてそれぞれ、 $I_+ = I(4') + I(5')$, $I_0 = I(3') + I(6')$, $I_- = I(1') + I(2')$ として与えられるので、これらに (5-2) 式を代入すると、(5-21) 式の分母、分子はそれぞれ、

$$I_+ + I_0 + I_- = \frac{I_{D^0} N_0}{6} (3 - \alpha P_e^n P_e^i) \sigma_0 l$$

$$I_+ - I_- = -\frac{1}{3} I_{D^0} N_0 \alpha P_e^n \sigma_0 l \quad (5-22)$$

となる。これらを (5-21) 式に代入することにより、

$$P_D = \frac{-2\alpha P_e^n}{3 - \alpha P_e^n P_e^j} \quad (5-23)$$

となる。この式から、偏極負重水素イオンの核スピンのベクトル偏極度は、重水素原子の電子スピン偏極度 (αP_e^n) とイオン化セル中のアルカリ金属原子の電子スピン偏極度 (P_e^j) のみに依存することがわかる。

さらに、(5-6) 式の ε を用いると、 $P_e^j \neq 0$ の場合、偏極負重水素イオンの核スピンのベクトル偏極度 (P_D) は、

$$P_D = \frac{-2\varepsilon}{P_e^j (1 - \varepsilon)} \quad (5-24)$$

で与えられる。

すなわち、イオン化セルのアルカリ金属原子に光ポンピングを行なった時と行なわない時の負重水素イオンビーム強度の相対的变化 (ε) と、イオン化セル中のアルカリ金属原子の電子スピン偏極度 (P_e^j) を測定することで、偏極負重水素イオンの核スピンのベクトル偏極度 (P_D) が求められる。 ε と P_D の関係を、種々の P_e^j について求めると図 5-9 のようになる。図 5-9 で横軸は ε 、縦軸は核スピンのベクトル偏極度 (P_D) を表す。(5-6) 式より、 ε の値は αP_e^n と P_e^j に依存し、 $\alpha P_e^n = 1$ 、 $P_e^j = 1$ のときに最大値 $\varepsilon = 1/3$ をとる。 $P_e^j = 0$ の場合には、(5-23) 式より、 $\alpha P_e^n = 1$ の時に P_D は最大値 $-2/3$ となる。これより、重水素原子の電子スピン偏極度 (αP_e^n) がある決まった値をもつ場合、イオン化セル中のアルカリ金属原子の電子スピン偏極度 (P_e^j) によって、二重光ポンピング法で生成される偏極負重水素イオンの核スピンのベクトル偏極度の最大値が制限されることが分かる。

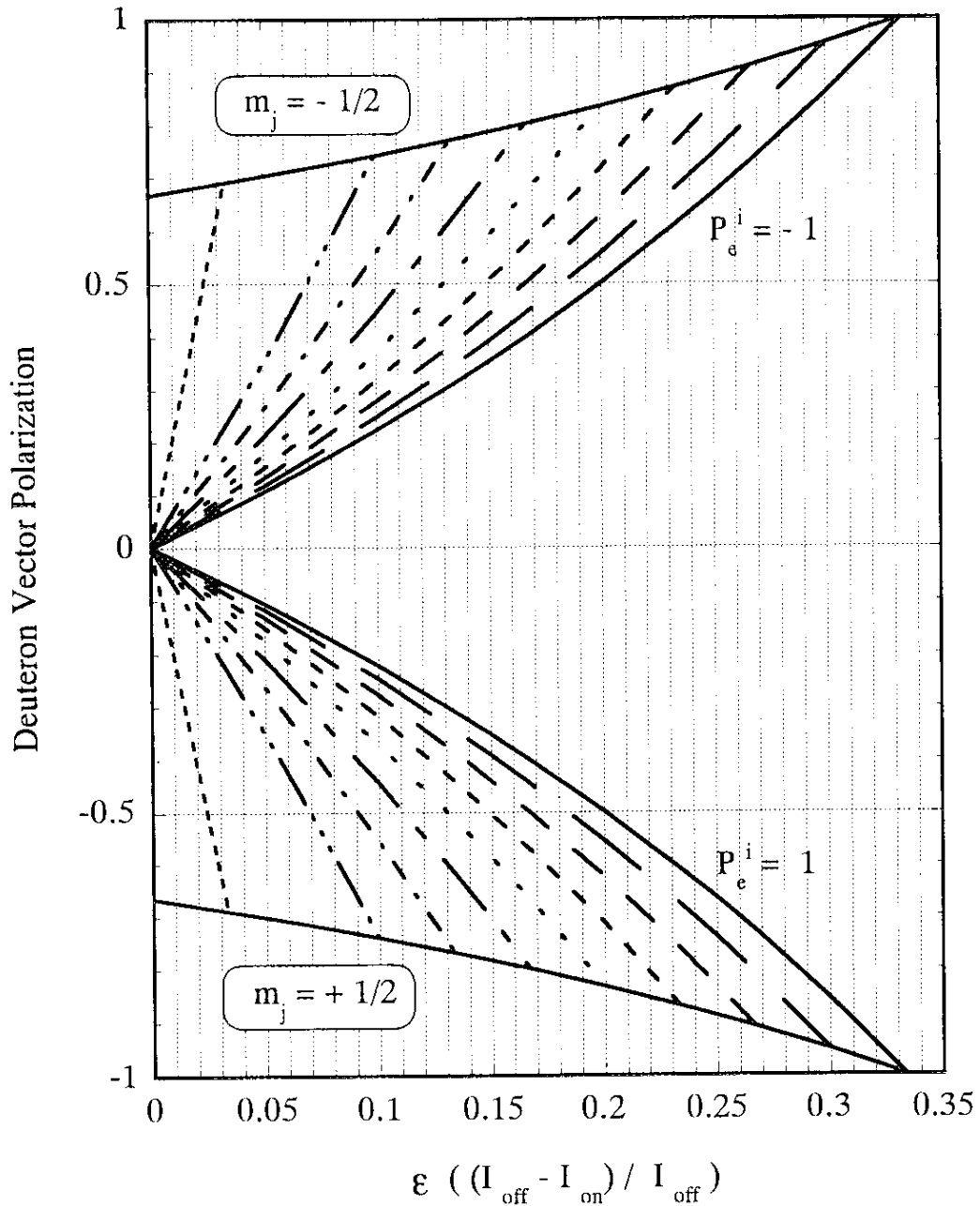


図 5 - 9 負重水素イオンビーム強度の相対変化(ϵ)に対する核スピンのベクトル偏極度変化
 重水素原子の電子スピン状態が $m_j = +1/2$ と $m_j = -1/2$ の場合についてイオン化セル中の電子スピン偏極度(P_e^i)変化に対する計算結果を示す。
 縦軸は負重水素イオンビームの核スピンのベクトル偏極度、横軸はビーム強度の相対変化(ϵ)である。

5.2.2 実験結果と議論

二重光ポンピング法により生成される偏極負重水素イオンビームの核スピンのベクトル偏極度は、ビーム強度とイオン化セル中のアルカリ金属原子の電子スピン偏極度を測定することにより評価できることを前節で示した。ここでは、その評価方法により種々のパラメータに対する核スピンのベクトル偏極度の依存性を測定した結果について述べる。

(a) 中性化セルの磁場強度に対するベクトル偏極度の依存性

第3章で述べたように、光ポンピング型偏極イオン源の偏極度は、中性化セルでの荷電交換反応時のスピン-軌道相互作用により、外部磁場の強度に大きく依存する。

超伝導磁石を用いた偏極イオン源では、中性化セルでの磁場強度が2.7 Tである。このイオン源で生成される偏極負重水素イオンの核スピンのベクトル偏極度は、従来の常伝導磁石(1.2 T)による偏極イオン源による偏極度よりも大きくなることが期待できる。そこで、この両方のイオン源で生成した偏極負重水素イオンの核スピンのベクトル偏極度を、5.2.1節に示した方法により評価し比較した。実験結果を図5-10に示す。図5-10の縦軸は(5-24)式で求められた負重水素イオンの核スピンのベクトル偏極度を示し、横軸は中性化セルの磁場強度を示す。これからわかるように、中性化セル部の磁場強度が1.2 Tの場合約55±5%であった負重水素イオンの核スピンのベクトル偏極度が、中性化セルの磁場強度が2.7 Tに増加すると約67±5%となった。この時の実験条件を次に示す。

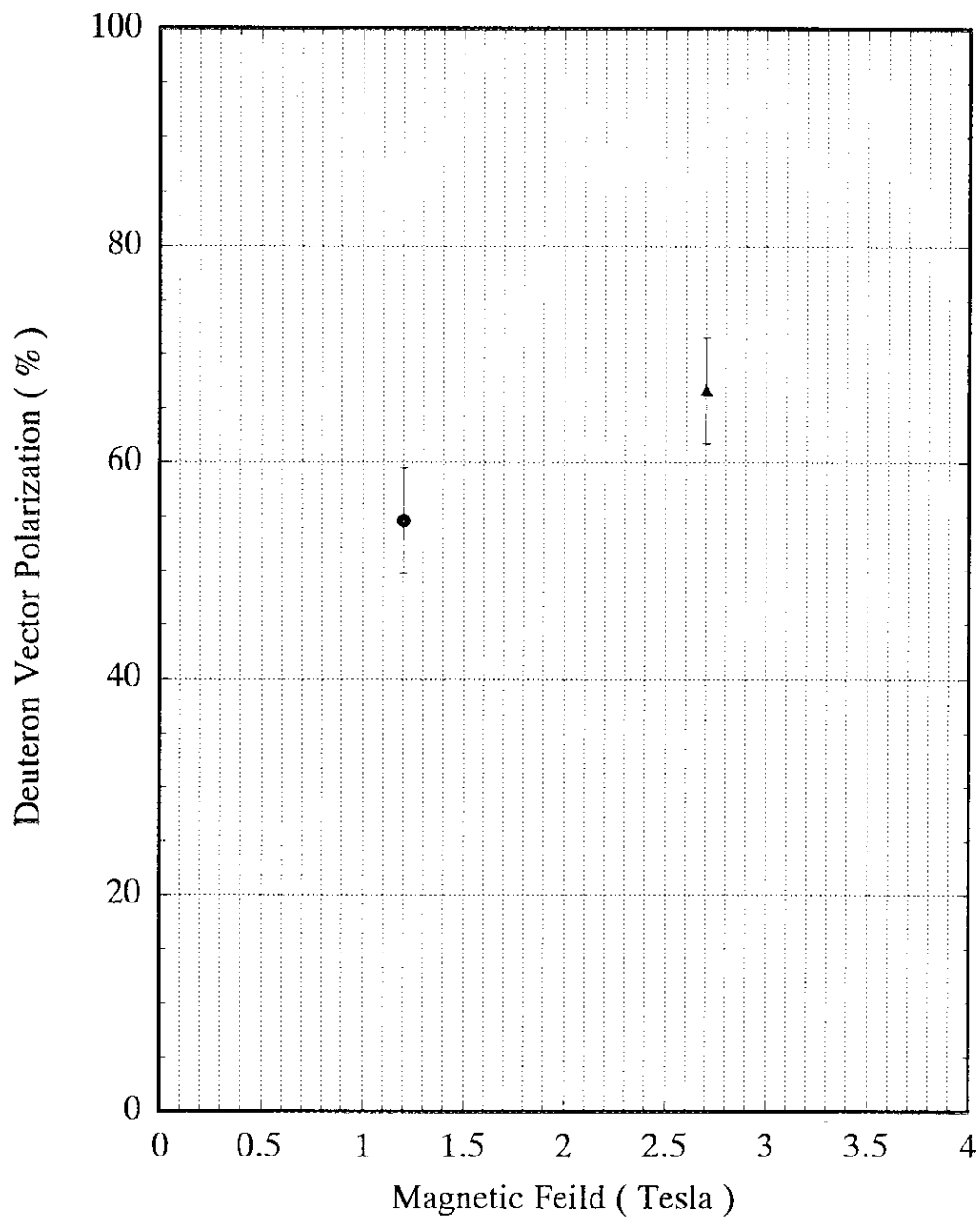


図 5 - 10 中性化セルの磁場強度変化に対する負重水素イオンビームの核スピンのベクトル偏極度変化
 縦軸は負重水素イオンビームの核スピンのベクトル偏極度、
 横軸は中性化セルの磁場強度を示す。

中性化セル

磁場強度	1.2 T	2.7 T
ルビジウム原子の 電子スピン偏極度	0.88+-0.05	0.92+-0.05
ルビジウムターゲット厚さ	4.2 +- 0.3 x 10 ¹³ atoms/ cm ²	4.3 +- 0.3 x 10 ¹³ atoms/ cm ²

イオン化セル

ルビジウム原子の 電子スピン偏極度	0.95+-0.07	0.95+-0.07
ルビジウムターゲット厚さ	6.5 +- 0.5x 10 ¹³ atoms/ cm ²	5.6 +- 0.5 x 10 ¹³ atoms/ cm ²

中性化セルでの重水素原子の電子スピン偏極度は、ルビジウム原子の電子スピン偏極度 P_e^R と、ルビジウム原子の電子スピン偏極から重水素原子の電子スピン偏極への移行度 α とにより、 αP_e^R で与えられる。 α の値は中性化セルの磁場強度に大きく依存する。先に示した実験条件から、Sona transition の効率が同じであるとすると、負重水素イオンビームの核スピンのベクトル偏極度の差は、中性化セルでの重水素原子の電子スピン偏極度 αP_e^R の差によると考えられる。 P_e^R は Faraday 回転法で直接測定されるのでこれを用いると、このベクトル偏極度の差は α を表すといえる。図 3-1 に示した、中性化セルで生成される重水素原子の電子スピン偏極度の磁場依存性の計算結果から求められる $\alpha(2.7\text{T})/\alpha(1.2\text{T})$ の値は 1.173 である。一方、実験結果より求められる $\alpha(2.7\text{T})/\alpha(1.2\text{T})$ の値は 1.165 となり、計算結果と良い一致を示した。従って、負重水素イオンビームの核スピンのベクトル偏極度の増加は、中性化セルでのルビジウム原子の電子スピン偏極から重水素原子の電子スピン偏極への移行度 α の増加によるものだと考えられる。

(b) 中性化セル中のルビジウム蒸気ターゲット厚さに対する
核スピンのベクトル偏極度依存性と減偏極

偏極負重水素イオンの核スピンのベクトル偏極度の中性化セル中のルビジウムターゲット厚さに対する依存性についての実験を行なった。測定結果を図 5-11の●で示す。これより、中性化セル中のルビジウム蒸気ターゲット厚さがある値より小さくなると、急激に偏極重陽子の核スピンのベクトル偏極度が減少することがわかった。理由としては、次のことが考えられる。

核スピンのベクトル偏極度の大きな負重水素イオンビームをつくるには、中性化セルで生成される電子スピン偏極した重水素原子の電子スピン偏極度 (αP_e^n) が大きくなければならない。すなわち、残留ガスとの衝突による荷電交換反応で生成された電子スピン偏極していない重水素原子 (background) ができるだけ少ないことが、高い核スピン偏極度を得るためには重要である。

図 5-12に中性化セル中のルビジウム蒸気ターゲット厚さ (nl) に対する負重水素イオンビーム強度の測定結果を示す。測定結果より、中性化セルのルビジウム蒸気ターゲットの厚さ (nl) を零に外挿しても負重水素イオンビームの強度は零にはならない。background が主として、残留ガス等との荷電交換によるものであるとすれば、それは中性化セルのルビジウム蒸気ターゲットの厚さ (nl) に依らないと考えられる。従って、nl = 0での負重水素イオンビーム強度が非偏極成分のbackground と考えられる。これを用いて図 5-11 に示した測定された負重水素イオンの核スピンのベクトル偏極度の測定値を補正すると、図中の○のようになる。この結果から重陽子の核スピンベクトル偏極度は、background が存在しないと考えると、中性化セル中のルビジウム蒸気のターゲット厚さへの依存性はほぼなくなり、その値は約 80 % となる。

以上のことより、backgroundをなくすことが、重陽子の核スピンベクトル偏極度を増加させる有効な手段であるが、ECR イオン源からのガス流量があり完全になくすことは不可能である。そこで、実際には中性化セル中のルビジウム蒸気ターゲットの厚さを radiation trapping による減偏極が生じない程度まで大きくし、電子スピン偏極した重水素原子に対する非偏極の重水素原子の割合をできるだけ減少させることが高偏極度を得るには必要である。

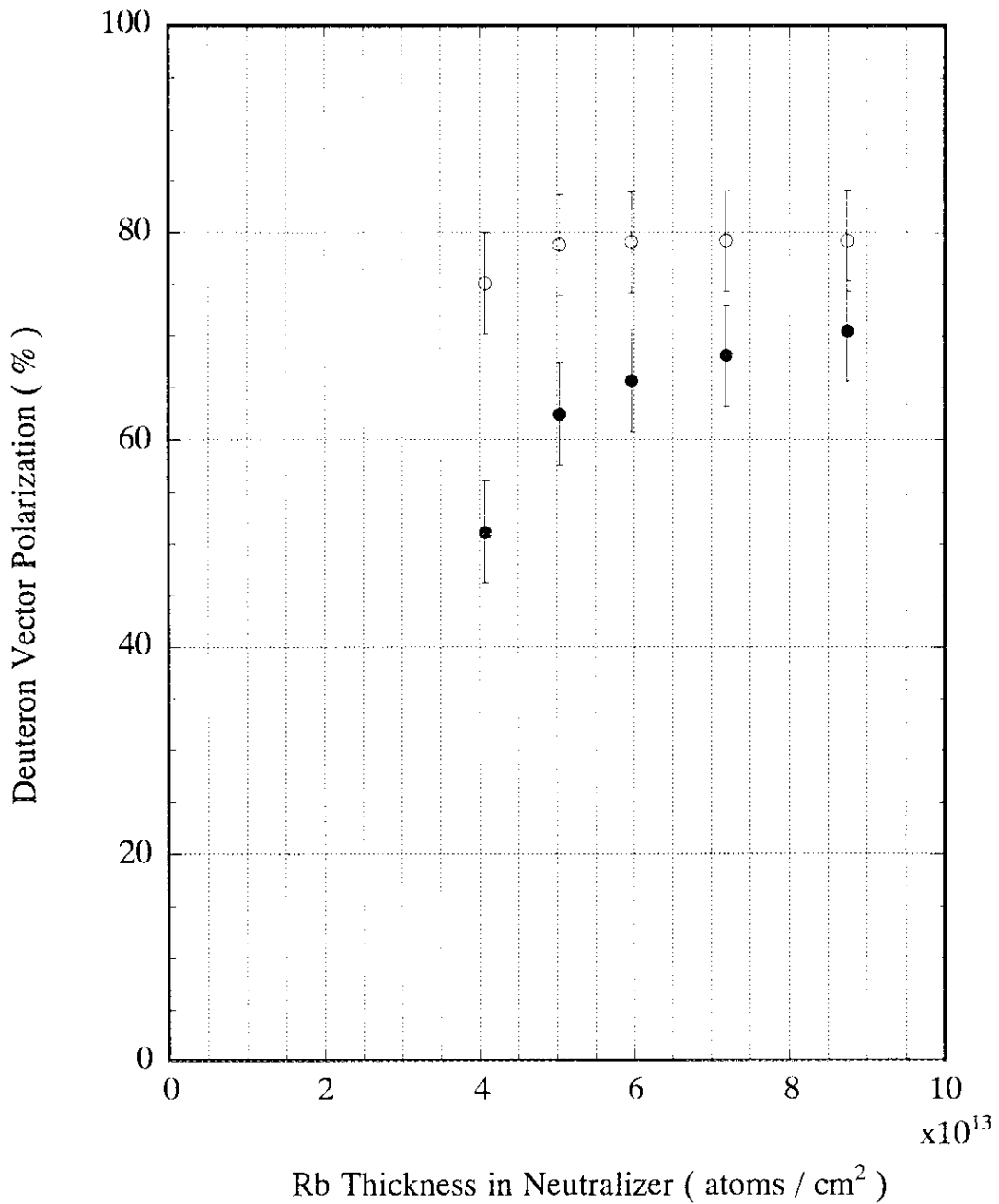


図 5 - 11 中性化セル中のルビジウムターゲット厚さの変化に対する偏極負重水素イオンビームのベクトル偏極度変化
 縦軸は負重水素イオンビームの核スピンのベクトル偏極度、
 横軸は中性化セル中のルビジウム蒸気の厚さを示す。
 ●は実験結果
 ○は残留ガス(background)の影響を考慮した補正值

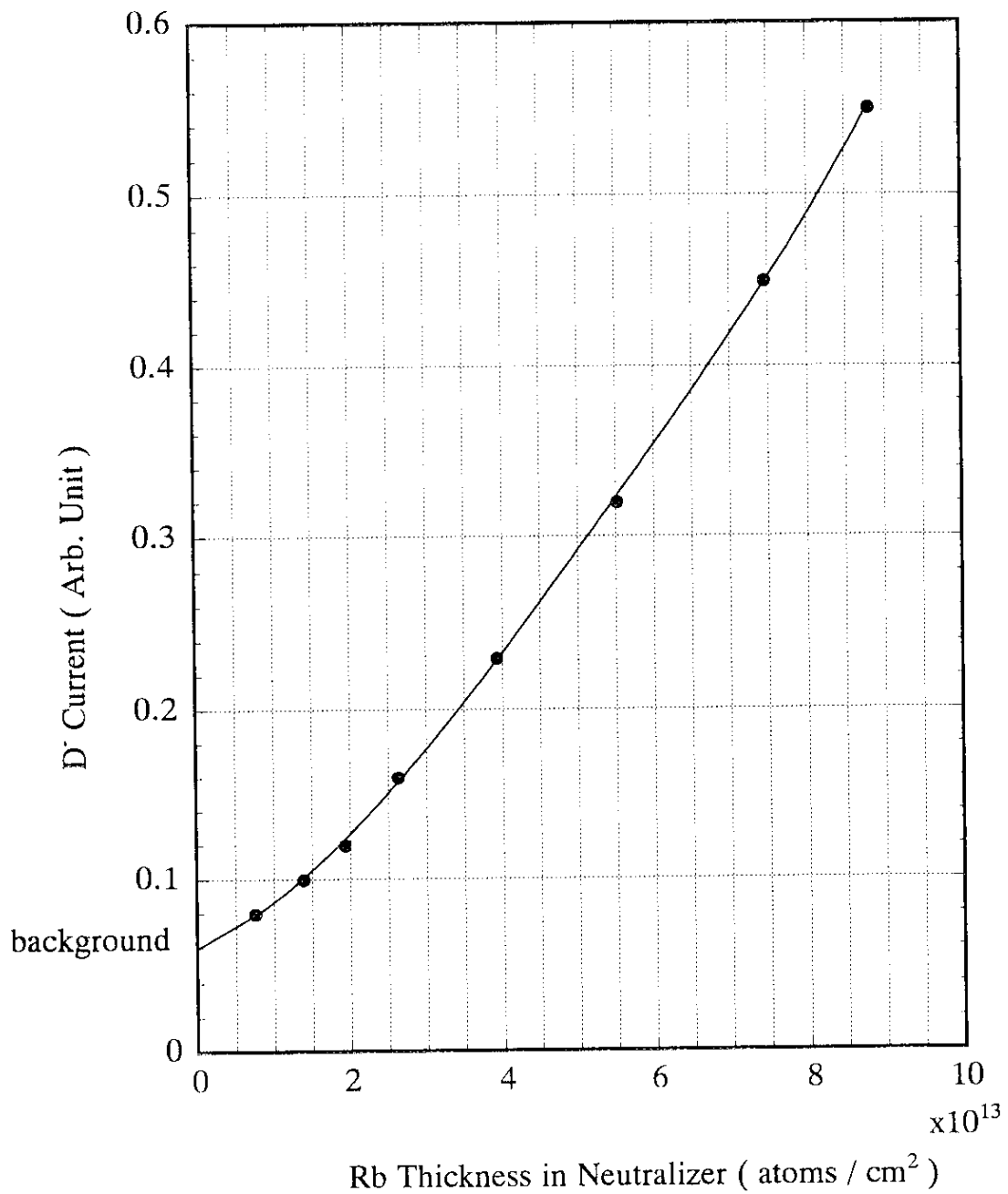


図 5 - 12 中性化セルのルビジウムターゲット厚さの変化に対する負重水素イオンビームの強度変化
 縦軸はD⁻ビームの強度、
 横軸は中性化セル中のルビジウム蒸気の厚さを示す。
 結果より background 0.06 とする。

(c) 偏極の向きを反転させた場合のベクトル偏極度の変化

3.2.2 節で述べたように、Sona transition が完全な場合には、二重光ポンピング法において、中性化セルとイオン化セル中のアルカリ金属原子の電子スピン偏極の方向を変える ($m_j = +1/2 \leftrightarrow m_j = -1/2$) ことにより、核スピンの状態が $I_z = +1$ の状態を選択した場合と、核スピンの状態が $I_z = -1$ の状態を選択した場合とでは、生成される偏極負重水素イオンビームの核スピンのベクトル偏極度は同じ値となる。しかしながら、Sona transition が不完全な場合には、それぞれのセル中のアルカリ金属原子の電子スピン偏極度が同じであっても、核スピン状態の選択する状態 ($I_z = +1$ または $I_z = -1$) によって、生成される偏極負重水素イオンビームの核スピンのベクトル偏極度に違いが生じる。

二重光ポンピングにより、核スピンの状態が $I_z = +1$ の状態を選択した場合と、核スピンの状態が $I_z = -1$ の状態を選択した場合の核スピンのベクトル偏極度の変化をビームのエネルギーを 4 ~ 5.5 keV の範囲で変化させて測定した。測定結果を図 5-13 に示す。測定結果は、各エネルギーでの核スピンの状態が $I_z = +1$ の状態と、核スピンの状態が $I_z = -1$ の状態の核スピンのベクトル偏極度の比として示した。これより、核スピンの状態が $I_z = +1$ の状態と核スピンの状態が $I_z = -1$ の状態の核スピンのベクトル偏極度は、このエネルギー領域では、誤差の範囲内でほぼ一致した。従って、本装置では零交叉磁場領域で Sona transition が十分に効率良く行なわれていることがわかる。また、本装置での零交叉磁場領域の反転磁場の勾配は 0.48 Gauss / cm であり、3.2.2 節で行なった計算結果による核スピン状態の反転に対してはベクトル偏極度の差は、各々極めて小さく、測定結果と良い一致を示している。

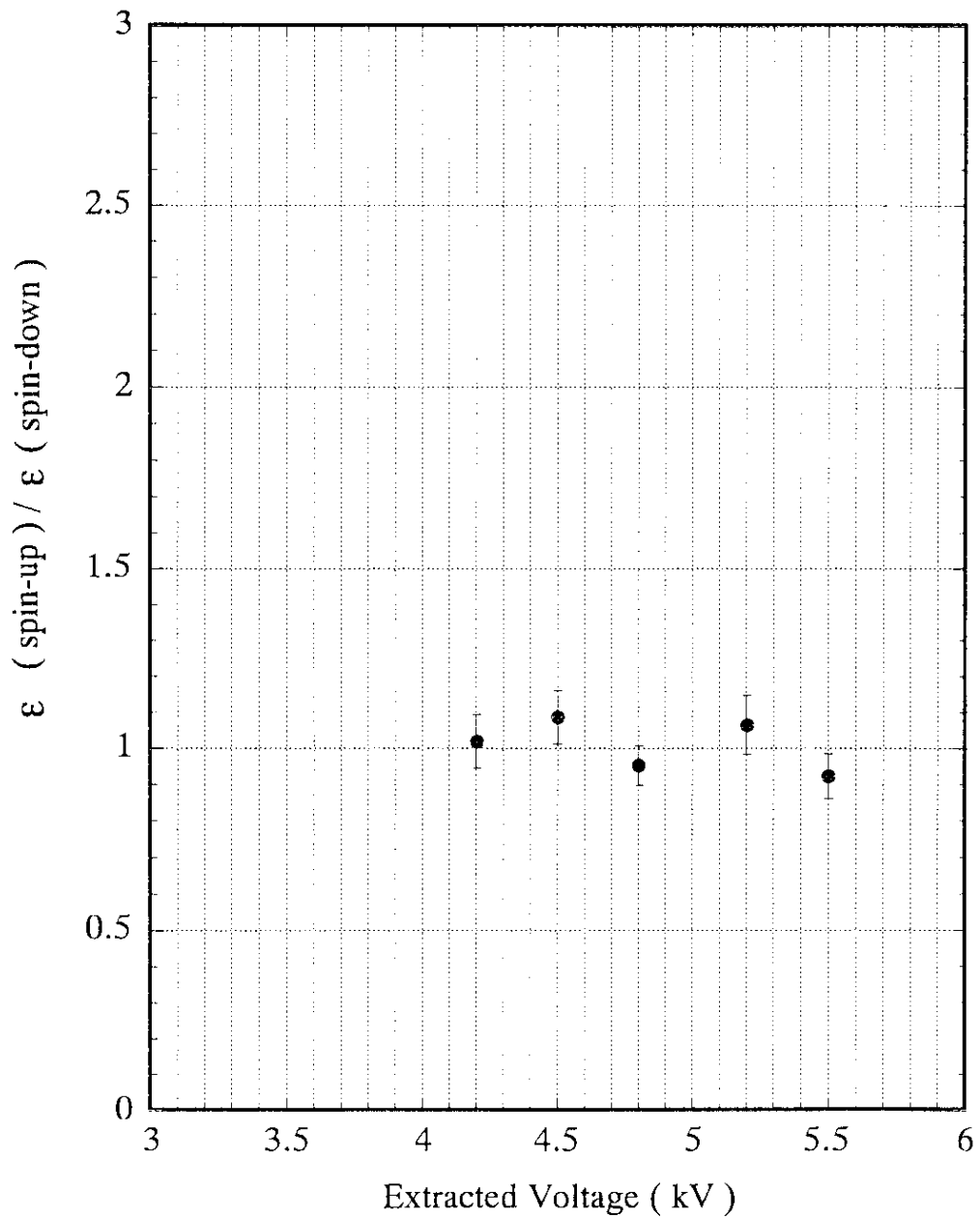


図 5 - 13 偏極負重水素イオンビームの核スピンのベクトル偏極度の正重水素イオン (D^+) ビームエネルギー依存性
 縦軸は核スピンの状態が $I_z = +1$ の場合と $I_z = -1$ の場合の偏極度の比、
 横軸は正重水素イオン (D^+) ビームのエネルギーを示す。

第6章 議論及びまとめ

核スピン偏極した負重水素イオンビームを生成する場合には、光ポンピング型偏極イオン源においては、生成される負重水素イオンビームの核スピンのベクトル偏極度の原理的な最大値は 67% であり、このイオン源では核スピンのベクトル偏極度の高い偏極負重水素イオンビームの生成は期待できないとされてきた。しかしながら、負イオン化の際の電子スピンの働く Pauli の排他原理をうまく利用した二重光ポンピング法を用いると、原理的に 100% の核スピンのベクトル偏極度をもつ負重水素イオンビームの生成が可能であることが指摘された。二重光ポンピング法を実現するためには主として以下の問題点を解決する必要がある。

- 1) 中性化セルでの正重水素イオン (D^+ イオン) とアルカリ金属原子との荷電交換反応により生成される重水素原子 (D^0) の電子スピンの減偏極
- 2) 零交叉磁場領域での重水素原子の電子スピン偏極から核スピン偏極への移行時の減偏極
- 3) 残留ガスにより生成される非偏極重水素ビーム (background) による減偏極

本研究ではこれらの問題点について検討し、さらに二重光ポンピング型偏極イオン源の開発を行ない偏極負重水素イオンビームの生成を行なった。

また偏極イオン源の開発においては、生成されるイオンビームの核スピンの偏極度を測定する必要がある。二重光ポンピング法により偏極負重水素イオンビームの生成を行なう場合、生成された偏極イオンビームの強度変化を測定することで、核スピンのベクトル偏極度の評価が可能であることが本研究で明らかとなった。従って、本研究での核スピンのベクトル偏極度はこの方法により評価した。

二重光ポンピング法を実現するために、まず中性化セルで生成される重水素原子の電子スピンの減偏極についての検討を行なった。中性化セルの磁場強度に対する重水素原子の電子スピン偏極度を理論的に計算した結果、中性化セルの

外部磁場を強くすることで、スピン-軌道相互作用による減偏極が減少することが明らかとなった。二重光ポンピング法により生成される偏極負重水素イオンビームの核スピンのベクトル偏極度は、中性化セルで生成される重水素原子の電子スピン偏極度に依存するので、負重水素イオンビームの核スピンのベクトル偏極度の増加を図るためには、中性化セルの磁場強度を大きくする必要がある。従って、超伝導磁石を用いた偏極イオン源の開発を行ない、中性化セルの磁場強度を大きくし、この偏極イオン源で生成される偏極負重水素イオンビームの核スピンのベクトル偏極度を測定した。その結果、中性化セルの磁場強度が 1.2 T の場合に $55 \pm 5\%$ であった核スピンのベクトル偏極度が、磁場強度が 2.7 T の場合には $67 \pm 5\%$ に増加することがわかった。このことから、中性化セルの磁場強度によって核スピンのベクトル偏極度は影響を受け、磁場が強い方が高偏極度が得られることが実験的に確認できた。さらにこの結果は、中性化セルの磁場強度を大きくすることによって、スピン-軌道相互作用による減偏極が減少するという理論的計算値の傾向とも良い一致を示した。

次に、二重光ポンピング法を実現するための重要な要因の 1 つである零交叉磁場領域での重水素原子の電子スピン偏極から核スピン偏極への移行度を計算により求め、生成される負重水素イオンビームの核スピンのベクトル偏極度を評価した。その結果、零交叉磁場領域の磁場勾配が 0.5 Gauss / cm 以下であれば、径方向磁場による影響がほとんどなく、電子スピン偏極から核スピン偏極への移行 (Sona transition) が完全に行なわれることがわかった。さらにこの計算により、Sona transition が不完全な場合に次のような問題が生じることが明らかとなった。

二重光ポンピング法により偏極負重水素イオンビームの生成を行なう場合、中性化セルとイオン化セル中のアルカリ金属原子の電子スピン偏極の向きにより、生成される負重水素イオンビームの核スピン偏極の向きを変化させることが可能である。この時、Sona transition が完全な場合には、得られる負重水素イオンビームの核スピン偏極の向きはイオン化セル中のアルカリ金属原子の電子スピン偏極の向きに対して対称であるが、Sona transition が不完全な場合にはその対称性が崩れる。従って、二重光ポンピング法により偏極負重水素イオンビーム生成を行なう際には、Sona transition の完全性が二重光ポンピング型偏極イオン源の性能を向上するうえで特に重要な要因であるといえる。

本研究で開発した偏極イオン源での実験では、イオン化セル中のルビジウ

ム原子の電子スピン偏極の方向を反転させることにより、核スピン状態を反転させた場合のベクトル偏極度の違いを4~5.5 keVのエネルギー領域で測定した。その結果、ベクトル偏極度は核スピンの反転に対して、ほとんど差がないということが得られた。これは本装置での零交叉磁場領域の磁場勾配が0.48 Gauss / cmであり、この磁場勾配の場合の計算結果と良い一致を示し、Sona transition が完全であることを示している。

以上のことから、二重光ポンピング法により偏極負重水素イオンビームの生成を行なう場合、零交叉磁場領域での磁場勾配はこの偏極イオン源の性能を高めるうえで重要な要因であり、中性化セルの磁場強度を大きくし、零交叉磁場領域の磁場勾配を0.5 Gauss / cm以下することが、二重光ポンピング法により核スピンのベクトル偏極度を増加させるために必要な条件であることが明らかとなった。

さらに中性化セル中のルビジウム蒸気ターゲット厚さに対する核スピンのベクトル偏極度の依存性を測定した結果、中性化セル中のルビジウム蒸気ターゲット厚さがあるところより小さくなると、偏極負重水素イオンビームの核スピンのベクトル偏極度が急激に減少することがわかった。これは、残留ガスとの荷電交換でつくられた非偏極成分の重水素原子によるものであり、従って、中性化セル中のルビジウムターゲット厚さを大きくし、残留ガスの影響を小さくすることも、偏極負重水素イオンビームの核スピンのベクトル偏極度を増加させる有効な手段であることがわかった。

本研究で得られた二重光ポンピング法により生成される偏極負重水素イオンビームの核スピンのベクトル偏極度は約70%でビーム強度は2~3 μA であった。偏極度に関しては1) 残留ガスによる減偏極が10%、2) 中性化セルでのスピン-軌道相互作用によるものが5%程度(3.2.1節)、3) Sona transitionの不完全さによるものが1%程度であることを考慮すると、84%程度の偏極度が得られてもよいはずであるが、実際の測定では70%程度であった。この差については現在のところ不明であるが、一つの可能性として残留ガスによるbackgroundの割合が、中性化セルのルビジウムの存在による空間電荷の中和効果によって変化することが考えられる。このことは中性化された重水素ビーム強度が、ルビジウム原子のターゲット厚さが大きくなるに従って、非線形的に増加していることから推察される。しかしながら、現時点ではあくまでも推量の域を出ない。従って、今後減

偏極の要因についてのさらなる研究が必要であると考えられる。

ビーム強度に関しては、現在は2~3 μA と小さいが、これは、本研究の主たる目的が二重光ポンピング法による偏極負重水素イオンビーム生成の原理的問題を実験的に明らかにすることであり、そのために検出器のアクセプタンス (acceptance) を小さくし、測定精度に重点を置いたためである。従って、今後ビームの収束系等を整備することにより、ビーム強度はかなり増加すると考えられる。

本研究の結果、従来の光ポンピング型偏極イオン源で偏極負重水素イオンビームを生成する際の最大の問題点であった偏極度の低さが、二重光ポンピング法により解決できた。この二重光ポンピング型偏極イオン源は、高強度で核スピンの偏極が高い偏極負重水素イオンビームを得るための有効な方法であると考えられる。

謝辞

本研究を遂行するにあたり、多大な御指導と御助言を戴いた、高エネルギー物理学研究所 森 義治 助教授、ならびに、本研究の実験をはじめとして多岐にわたり、御指導と御協力を戴いた、高エネルギー物理学研究所 高木 昭 助手、池上 清 氏に心から感謝致します。

また、偏極イオン源の実験に際し、御指導と御協力を賜った、INR (Moscow) A.N.Zelenskii 博士、ならびに、TRIUMF (Canada) C.D.P.Levy 博士に深く感謝致します。

本研究の遂行にあたり様々な形で御世話になった、茂中 俊明 博士はじめ総合研究大学院大学加速器専攻の皆様、高エネルギー物理学研究所の職員の皆様、心より御礼申し上げます。

最後に、大学院博士過程進学に深い理解を示してくださった両親に心から感謝致します。

参考文献

- [1] G.Clausnitzer, R.Fleischmann, H.Schopper : Z.Phys., 144, 336 (1956).
- [2] H.F.Glavish et al., Proc. Symp. Ion Source Brookhaven 1971, BNL-50310, 207 (1971).
- [3] A.Abragam, J.M.Winter : Phys.Rev.Letters.,1,375 (1958).
- [4] A.S.Belov et al., Nucl. Instr. Meth. A 255, 442 (1987)
- [5] W.E.Lamb, Jr.,R.C.Retherford : Phys. Rev., 72, 241 (1950).
- [6] W.E.Lamb, Jr.,R.C.Retherford : Phys. Rev., 79, 549 (1951).
- [7] W.E.Lamb, Jr.,R.C.Retherford : Phys. Rev., 81, 222 (1951).
- [8] J.L.Mckibbin, G.P.Lawrence, G.G.Ohlsen : Phys .Rev. Letters, 20, 1180 (1968).
- [9] P.G.Sona : Energia Nucleare, 14, 295(1967).
- [10] H.G.Robinson et al., Nucl. Instr. Meth. A 278, 655 (1989).
- [11] W.L.Anderson : Nucl. Instr. and Meth. 167, 363 (1979).
- [12] Y.Mori, K.Ikegami, Z.Igarashi, A.Takagi, and S.Fukumoto : AIP Proc. 117, New York, 123 (1983).
- [13] R.L.York, O.B.Van Dyck, D.R.Swenson, and D.Tupa : Proc. of the Int. Workshop on Polarized Ion Sources and Polarized Gas Jets, KEK Report 90-15, 142 (1990).
- [14] A.Zelenskii, S.A.Kokhanovskii, V.G.Polushkin, and K.N.Vishnevskii : Proc. of the Int. Workshop on Polarized Ion Sources and Polarized Gas Jets, KEK Report 90-15, 154 (1990).
- [15] L.Buchmann, C.D.P.Levy, M.McDonald, R.Ruerr, and P.W.Shmor : Proc. of the Int. Workshop on Polarized Ion Sources and Polarized Gas Jets, KEK Report 90-15, 161 (1990).
- [16] Y.Mori,et.al. : IEEE Acc.Conf.93, to be published
- [17] M.B.Schneider, and T.B.Clegg : Nucl. Instr. and Meth.,A 254, 630 (1987).
- [18] Y.Mori : submitted to Nucl. Instr. and Meth.

- [19] G.G.Ohlsen : Los Alamos Sci.,Lab. Report, Los Alamos, LA-3949 (1968).
- [20] M.E.Rose : Elementary Theory of Angular Momentum (J.Willy and Sons, Oxford,1962)
- [21] "Einführung in Die Kernphysik mit Polarisierten Teilchen"
(Hochschultaschenbücher-Verlag,1971)
- [22] Jean Pierre Gauyacq : DYNAMICS OF NEGATIVE IONS, p60.
- [23] H.Tawara : ATOMIC DATA AND NUCLEAR TABLES 22, 491 (1978).
- [24] D.Tupa, L.W.Anderson, D.L.Huber, and J.E.Lawler : Phys. Rev., A 33, 1045 (1986).
- [25] H.S.W.Massay : Rep. Prog. Phys.,12, 248 (1949).
- [26] 高柳和夫 : " 電子・原子・分子の衝突 " 第7章 (培風館) .
- [27] HANS A.BETHE and EDWIN E.SALPETER : QUANTUM MECHANICS OF
ONE-AND TWO-ELECTRON ATOMS, p242 .
- [28] Alan Corney : Atomic and Laser Spectroscopy , p133 .
- [29] Alan Corney : Atomic and Laser Spectroscopy , p98 .
- [30] M.E.Rose 著. 山内恭彦、森田正人 訳 : 角運動量の基礎理論, p61 .
- [31] Ebel and Salyborn : J. Phys. B 20, 4531 (1987).
- [32] Review of Modern Physics.April,218, (1972).
- [33] A.M.Winslow : J.Computer Phys., 1, 149 (1967).
- [34] F.Strumia, Nuovo.Cimento, 44 B, 387, (1966).
- [35] 神戸謙次郎 編 分子科学講座X、光と分子 I p103 (1967, 共立出版) .
- [36] ファインマン、レイトン、サンズ 共著 富山小太郎 訳
ファインマン物理学 II , p59, (1968, 岩波書店)
- [37] メシア 著 小出昭一郎 訳 メシア量子力学 II, p161, (1972, 東京出版)

付録A

状態の超微細構造の分離をもたらす相互作用を表すハミルトニアンは、双極子近似により一般に次のように書ける。

$$H_{IM} = (\mu_o g_J \bar{J} + \mu_N g_I \bar{I}) \cdot \bar{B} + \alpha (\bar{I} \cdot \bar{J}) \quad (\text{A-1})$$

ここで、 μ_o, μ_N はそれぞれ Bohr 磁子および核磁子と呼ばれるものであり、また、 g_J, g_I は電子および核の g-factor である。 \bar{J} は電子の全角運動量ベクトルであり、軌道角運動量ベクトル \bar{l} および電子スピンベクトル \bar{s} により、

$$\bar{J} = \bar{l} + \bar{s}$$

で表される。また、 \bar{I} は原子核のスピンベクトルである。 α は、電子と原子核間の角運動量の結合の強さを表す量で、超微細構造の分離エネルギー ΔE に比例し、次式で与えられる。

$$\alpha = \begin{cases} \Delta E / I (2J + 1), & I \leq J \\ \Delta E / J (2I + 1), & I \geq J \end{cases} \quad (\text{A-2})$$

$1S_{1/2}$ 状態の重水素原子の場合にはより、 $I = 1, J = 1/2$ より、

$$\alpha_{1s} = \frac{2}{3} \Delta E_{1s} = 327.4 \text{ MHz} \text{ である。}$$

(A-1) 式で表されるような摂動が加わった場合の時間を含んだ形での Schrodinger 方程式は次のように表される。

$$(H_o + H_{IM}) | \psi \rangle = i \hbar \frac{\partial}{\partial t} | \psi \rangle \quad (\text{A-3})$$

H_0 は電子の角運動量、核のスピンに依存しないハミルトニアンである。また、 $|\psi\rangle$ は、摂動 $H_{I,M}$ が加わった場合の系の状態ベクトルを表す。

いま、無摂動系のハミルトニアン H_0 に対する時間を含んだ固有状態を

$$|\Phi_n\rangle = |\phi_n\rangle \exp\left(-\frac{iE_0}{\hbar}t\right) \quad (\text{A-4})$$

とおく。ここで、 $|\phi_n\rangle$ および E_0 は、 H_0 の時間を含まない固有状態および固有エネルギーである。各固有状態 $|\phi_n\rangle$ を電子の角運動量 \vec{J} の z 成分 m_j と原子核のスピンベクトル \vec{I} の z 成分 I_z で定まる固有状態で表すと、

$$\begin{aligned} |\phi_1\rangle &= |m_j = 1/2\rangle |I_z = 1\rangle \\ |\phi_2\rangle &= |m_j = 1/2\rangle |I_z = 0\rangle \\ |\phi_3\rangle &= |m_j = 1/2\rangle |I_z = -1\rangle \\ |\phi_4\rangle &= |m_j = -1/2\rangle |I_z = -1\rangle \\ |\phi_5\rangle &= |m_j = -1/2\rangle |I_z = 0\rangle \\ |\phi_6\rangle &= |m_j = -1/2\rangle |I_z = 1\rangle \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

となる。

(A-3) 式を満足する状態ベクトル $|\psi\rangle$ は、(A-4) 式での $|\phi_n\rangle$ の一次結合で表されるので、

$$|\Phi_n\rangle = \sum_n b_n(t) |\phi_n\rangle \exp\left(-\frac{iE_0}{\hbar}t\right) \quad (\text{A-6})$$

と書ける。これを (A-3) 式に代入して左から $\langle\Phi_m|$ を作用させると次式が得

られる。

$$i\hbar \frac{d}{dt} b_m = \sum_n b_n \langle \phi_m | H_{IM} | \phi_n \rangle \quad (\text{A-7})$$

H_{IM} の行列要素 $\langle \phi_m | H_{IM} | \phi_n \rangle$ は、次のようにして求められる。まず、 H_{IM} は (A-1) 式から、

$$\begin{aligned} H_{IM} &= (\mu_o g_J \bar{J} + \mu_N g_I \bar{I}) \cdot \bar{B} + \alpha (\bar{I} \cdot \bar{J}) \\ &= \mu_o g_J \left(\frac{J_x + J_x}{2} B_x + \frac{J_y - J_y}{2i} B_y + J_z B_z \right) \\ &\quad + \mu_N g_I \left(\frac{I_x + I_x}{2} B_x + \frac{I_y - I_y}{2i} B_y + I_z B_z \right) \\ &\quad + \alpha \left(\frac{I_x J_x + I_x J_x}{2} + I_z J_z \right) \end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

となる。ただし、ここで、 B_x, B_y, B_z は磁場の各成分であり、 J_{\pm}, I_{\pm} は、

$$\begin{aligned} J_{\pm} &= J_x \pm iJ_y \\ I_{\pm} &= I_x \pm iI_y \end{aligned} \quad (\text{A-9})$$

である。一方、

$$\begin{aligned} \langle J_z \pm 1 | J_z | J_z \rangle &= \{ (J \mp J_z) (J \pm J_z + 1) \}^{1/2} \\ \langle I_z \pm 1 | I_z | I_z \rangle &= \{ (I \mp I_z) (I \pm I_z + 1) \}^{1/2} \\ \langle I_z \pm 1 | \langle J_z \pm 1 | I_x J_x | J_z \rangle | I_z \rangle & \quad (\text{A-10}) \\ &= \{ (J \mp J_z) (J \pm J_z + 1) \}^{1/2} \times \{ (I \mp I_z) (I \pm I_z + 1) \}^{1/2} \end{aligned}$$

であるから、 H_{IM} を行列表現で表すと、

$$H_{IM} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \left(\frac{1}{2} \mu_0 g_J + \mu_N g_I \right) B_z + \frac{\alpha}{2} & \mu_N g_I (B_x + i B_y) & 0 \\ \mu_N g_I (B_x - i B_y) & \frac{1}{2} B_z & \mu_N g_I (B_x + i B_y) \\ 0 & \mu_N g_I (B_x - i B_y) & \left(\frac{1}{2} \mu_0 g_J - \mu_N g_I \right) B_z - \frac{\alpha}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} (B_x - i B_y) \\ 0 & \mu_N g_I (B_x - i B_y) & \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \\ \mu_N g_I (B_x - i B_y) & \frac{\alpha}{\sqrt{2}} & 0 \\ \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} (B_x + i B_y) \\ 0 & \frac{1}{2} (B_x + i B_y) & \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} (B_x + i B_y) & \frac{\alpha}{\sqrt{2}} & 0 \\ - \left(\frac{1}{2} \mu_0 g_J + \mu_N g_I \right) B_z + \frac{\alpha}{2} & \mu_N g_I (B_x - i B_y) & 0 \\ \mu_N g_I (B_x + i B_y) & - \frac{1}{2} B_z & \mu_N g_I (B_x - i B_y) \\ 0 & \mu_N g_I (B_x + i B_y) & - \left(\frac{1}{2} \mu_0 g_J - \mu_N g_I \right) B_z - \frac{\alpha}{2} \end{array} \right)$$

(A-11)

となる。よって (A-7) 式は

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix} = \mu_0 g_J \begin{pmatrix} (\frac{1}{2} + k)B_z + \frac{B_0}{2} & k(B_x + iB_y) & 0 \\ k(B_x - iB_y) & \frac{1}{2}B_z & k(B_x + iB_y) \\ 0 & k(B_x - iB_y) & (\frac{1}{2} - k)B_z - \frac{B_0}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(B_x - iB_y) \\ 0 & \frac{1}{2}(B_x - iB_y) & \frac{B_0}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}(B_x - iB_y) & \frac{B_0}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}(B_x + iB_y) \\ 0 & \frac{1}{2}(B_x + iB_y) & \frac{B_0}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}(B_x + iB_y) & \frac{B_0}{\sqrt{2}} & 0 \\ -(\frac{1}{2} + k)B_z + \frac{B_0}{2} & k(B_x - iB_y) & 0 \\ k(B_x + iB_y) & -\frac{1}{2}B_z & k(B_x - iB_y) \\ 0 & k(B_x + iB_y) & -(\frac{1}{2} - k)B_z - \frac{B_0}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix}$$

(A-12)

と書ける。

ただし、 $k = \frac{\mu_N g_I}{\mu_0 g_J}$, $B_0 = \frac{\alpha}{\mu_0 g_J}$ である。

いま磁場が一様で、その方向を量子化の軸（z軸）として選ぶならば、

$B_x = B_y = 0, B_z = |\vec{B}|$ であるから、(A-12) 式は次のようになる。

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\frac{1}{2} + k)B_z + \frac{1}{2}B_0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}B_z & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2} - k)B_z - \frac{1}{2}B_0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{B_0}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{B_0}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{B_0}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & \frac{B_0}{\sqrt{2}} & \\
0 & \frac{B_0}{\sqrt{2}} & 0 & \\
-\left(\frac{1}{2} + k\right)B_z + \frac{1}{2}B_0 & 0 & 0 & \\
0 & -\frac{1}{2}B_z & 0 & \\
0 & 0 & -\left(\frac{1}{2} - k\right)B_z - \frac{1}{2}B_0 &
\end{array}
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{array} \right]
\end{array}
\quad (\text{A-13})$$

ここで、 H_{IM} を対角化するようなユニタリー変換 U を考える。(A-13) 式において、 b_1, b_4 の固有値はそれぞれ、

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \left(\frac{1}{2} + k\right)B_z + \frac{B_0}{2} \\
\lambda_4 &= -\left(\frac{1}{2} + k\right)B_z + \frac{B_0}{2}
\end{aligned}
\quad (\text{A-14})$$

であるので、 U は次のようにおける。

$$U = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & U_{22} & 0 & 0 & 0 & U_{26} \\
0 & 0 & U_{33} & 0 & U_{35} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & U_{53} & 0 & U_{55} & 0 \\
0 & U_{62} & 0 & 0 & 0 & U_{66}
\end{pmatrix}
\quad (\text{A-15})$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 U_1' &= \begin{pmatrix} U_{22} & U_{26} \\ U_{62} & U_{66} \end{pmatrix} \\
 U_2' &= \begin{pmatrix} U_{33} & U_{35} \\ U_{53} & U_{55} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{A-16}$$

とすると、永年方程式

$$\det \begin{vmatrix} \frac{B_z}{2} - \lambda & \frac{B_0}{\sqrt{2}} \\ \frac{B_0}{\sqrt{2}} & -(\frac{1}{2} - k)B_z - \frac{B_0}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

の根 λ_2, λ_6 は、

$$U_1' \begin{vmatrix} \frac{B_z}{2} & \frac{B_0}{\sqrt{2}} \\ \frac{B_0}{\sqrt{2}} & -(\frac{1}{2} - k)B_z - \frac{B_0}{2} \end{vmatrix} U_1'^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_6 \end{pmatrix} \tag{A-17}$$

を満足する。同様に、

$$\det \begin{vmatrix} (\frac{1}{2} - k)B_z - \frac{B_0}{2} - \lambda & \frac{B_0}{\sqrt{2}} \\ \frac{B_0}{\sqrt{2}} & -\frac{B_z}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

の根 λ_3, λ_5 は、

$$U_2' \begin{vmatrix} (\frac{1}{2} - k) B_z - \frac{B_0}{2} & \frac{B_0}{\sqrt{2}} \\ \frac{B_0}{\sqrt{2}} & -\frac{B_z}{2} \end{vmatrix} U_2'^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_5 \end{pmatrix} \quad (\text{A-18})$$

を満足する。

$\lambda_2, \lambda_6, \lambda_3, \lambda_5$ は (A-17) 式より、それぞれ、

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left\{ \left(k B_z - \frac{B_0}{2} \right) + \left\{ (1-k)^2 B_z^2 + (1-k) B_0 B_z + \frac{9}{4} B_0^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$\lambda_6 = \frac{1}{2} \left\{ \left(k B_z - \frac{B_0}{2} \right) - \left\{ (1-k)^2 B_z^2 + (1-k) B_0 B_z + \frac{9}{4} B_0^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$\lambda_3 = -\frac{1}{2} \left\{ \left(k B_z + \frac{B_0}{2} \right) - \left\{ (1-k)^2 B_z^2 - (1-k) B_0 B_z + \frac{9}{4} B_0^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$\lambda_5 = -\frac{1}{2} \left\{ \left(k B_z + \frac{B_0}{2} \right) + \left\{ (1-k)^2 B_z^2 - (1-k) B_0 B_z + \frac{9}{4} B_0^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right\}$$

(A-19)

で与えられる。

まず、 U_{22} と U_{26} をもとめる。

(A-17) 式の右から U' を作用させると、

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{l} \frac{B_z}{2} U_{22} + \frac{B_0}{\sqrt{2}} U_{26} - \frac{B_0}{\sqrt{2}} U_{22} - \left\{ (1/2 - k)B_z + B_0/2 \right\} U_{26} \\ \frac{B_z}{2} U_{62} + \frac{B_0}{\sqrt{2}} U_{66} - \frac{B_0}{\sqrt{2}} U_{62} - \left\{ (1/2 - k)B_z + B_0/2 \right\} U_{66} \end{array} \right] \\
& = \begin{bmatrix} \lambda_2 U_{22} & \lambda_2 U_{26} \\ \lambda_6 U_{62} & \lambda_6 U_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{A-20})
\end{aligned}$$

となる。(A-20)式から、

$$\frac{B_z}{2} U_{22} + \frac{B_0}{\sqrt{2}} U_{26} = \lambda_2 U_{22} \quad (\text{A-21})$$

であるので、(A-21)式に(A-19)式を代入し整理すると、

$$U_{26} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ (k-1) \frac{B_z}{B_0} - \frac{1}{2} + \left\{ (1-k)^2 \left(\frac{B_z}{B_0} \right)^2 + (1-k) \frac{B_z}{B_0} + \frac{9}{4} \right\}^{1/2} \right\} U_{22} \quad (\text{A-22})$$

となる。

ここで、 $x = \frac{2}{3} (1-k) \frac{B_z}{B_0}$ とおき、(A-22)式を整理すると、

$$U_{26} = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \left\{ \left(x + \frac{1}{3} \right) - \left\{ x^2 + \frac{2}{3}x + 1 \right\}^{1/2} \right\} U_{22} \quad (\text{A-23})$$

となる。(A-23)式を規格化条件

$$|U_{22}|^2 + |U_{26}|^2 = 1 \quad (\text{A-24})$$

に代入し整理すると、

$$\frac{9}{4} \left\{ x^2 + \frac{2}{3}x + 1 - (x + \frac{1}{3}) \left\{ x^2 + \frac{2}{3}x + 1 \right\}^{\frac{1}{2}} \right\} |U_{22}|^2 = 1 \quad (\text{A-25})$$

となる。(A-25)式より、分母を有理化し整理すると、

$$|U_{22}|^2 = \frac{1}{2} (1 + (x + 1/3) / (1 + 2x/3 + x^2)^{\frac{1}{2}}) \quad (\text{A-26})$$

となる。

よって、 U_{22} と U_{26} は (A-24) 式と (A-26) 式から、

$$U_{22} = \left\{ \frac{1}{2} (1 + (x + 1/3) / (1 + 2x/3 + x^2)^{\frac{1}{2}}) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$U_{26} = \left\{ \frac{1}{2} (1 - (x + 1/3) / (1 + 2x/3 + x^2)^{\frac{1}{2}}) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A-27})$$

となる。

同様にして、 U_{62} , U_{66} , U_{33} , U_{35} , U_{53} , U_{55} を求めると、

$$U_{62} = - \left\{ \frac{1}{2} (1 + (x + 1/3) / (1 + 2x/3 + x^2)^{\frac{1}{2}}) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$U_{66} = \left\{ \frac{1}{2} (1 + (x + 1/3) / (1 + 2x/3 + x^2)^{\frac{1}{2}}) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$U_{33} = \left\{ \frac{1}{2} (1 + (x - 1/3) / (1 - 2x/3 + x^2)^{1/2}) \right\}^{1/2}$$

$$U_{35} = \left\{ \frac{1}{2} (1 - (x - 1/3) / (1 - 2x/3 + x^2)^{1/2}) \right\}^{1/2}$$

$$U_{53} = - \left\{ \frac{1}{2} (1 - (x - 1/3) / (1 - 2x/3 + x^2)^{1/2}) \right\}^{1/2}$$

$$U_{33} = \left\{ \frac{1}{2} (1 + (x - 1/3) / (1 - 2x/3 + x^2)^{1/2}) \right\}^{1/2} \quad (\text{A-28})$$

が得られる。

$$\text{さらに、} \delta_1 = (x + 1/3) / (1 + 2x/3 + x^2)^{1/2},$$

$$\delta_2 = (x - 1/3) / (1 - 2x/3 + x^2)^{1/2}$$

とおくと、ユニタリ変換Uは、

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \{1/2 (1 + \delta_1)\}^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \{1/2 (1 + \delta_2)\}^{1/2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\{1/2 (1 - \delta_2)\}^{1/2} \\ 0 & -\{1/2 (1 - \delta_1)\}^{1/2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \{1/2 (1-\delta_1)\}^{1/2} \\
 0 & \{1/2 (1-\delta_2)\}^{1/2} & 0 \\
 1 & 0 & 0 \\
 0 & \{1/2 (1+\delta_2)\}^{1/2} & 0 \\
 0 & 0 & \{1/2 (1+\delta_1)\}^{1/2}
 \end{pmatrix} \quad (\text{A-29})$$

で表される。このUによって対角化された H_{1M} を使うと (A-13) 式は

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \{1/2 (1+\delta_1)\}^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \{1/2 (1+\delta_2)\}^{1/2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\{1/2 (1-\delta_1)\}^{1/2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \{1/2 (1-\delta_1)\}^{1/2} \\
 0 & \{1/2 (1-\delta_2)\}^{1/2} & 0 \\
 1 & 0 & 0 \\
 0 & \{1/2 (1+\delta_2)\}^{1/2} & 0 \\
 0 & 0 & \{1/2 (1+\delta_1)\}^{1/2}
 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix} \quad (\text{A-30})$$

となる。

付録B Faraday 回転法

B.1 Faraday 回転[34][35]

直線偏光のレーザー光を、磁場中の媒質へ磁場と平行な方向に入射すると、媒質中を通過したレーザー光の偏光面が Faraday 回転する。この現象は、直線偏光を構成する、左回りの円偏光（左円偏光）と右回りの円偏光（右円偏光）の、媒質中での屈折率の違いにより引き起こされる。入射した直線偏光の電場ベクトルの方向を x 軸、磁場ベクトルの方向を y 軸、光の進行方向を z 軸にとる。このとき、入射光は次のように表される。

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y \\ &= E_0 \cos 2\pi \nu \left(t - \frac{\eta}{c} z \right) \vec{e}_x\end{aligned}\quad (\text{B-1.a})$$

$$\begin{aligned}\vec{H} &= H_x \vec{e}_x + H_y \vec{e}_y \\ &= H_0 \cos 2\pi \nu \left(t - \frac{\eta}{c} z \right) \vec{e}_y\end{aligned}\quad (\text{B-1.b})$$

ここで、 E_0 と H_0 はそれぞれ、電場と磁場の振幅である。c は真空中での光の速度、 ν は振動数、そして η は屈折率である。

ここでは、電場ベクトルのみについて考えるが、磁場ベクトルについても全く同様の議論が成り立つ。

(B-1.a) で表される直線偏光は、2つの円偏光、すなわち左円偏光と右円偏光に分解できる。これらは次式で表される。

$$\begin{aligned}\vec{E}^+ &= E_x^+ \vec{e}_x + E_y^+ \vec{e}_y \\ &= \frac{E_0}{2} \cos 2\pi \nu \left(t - \frac{\eta}{c} z \right) \vec{e}_x - \frac{E_0}{2} \sin 2\pi \nu \left(t - \frac{\eta}{c} z \right) \vec{e}_y\end{aligned}\quad (\text{B-2.a})$$

$$\begin{aligned}\vec{E}^- &= E_x^- \vec{e}_x + E_y^- \vec{e}_y \\ &= \frac{E_0}{2} \cos 2\pi \nu \left(t - \frac{\eta}{c} z \right) \vec{e}_x + \frac{E_0}{2} \sin 2\pi \nu \left(t - \frac{\eta}{c} z \right) \vec{e}_y\end{aligned}\quad (\text{B-2.b})$$

ここで、上付き文字の+と-はそれぞれ、左円偏光と右円偏光を示す。

長さ l の媒質を考える。この媒質中では、2つの円偏光の屈折率が異なり、屈折率がそれぞれ、 η^+ , η^- で表されるとする。このとき、(B-2.a) 式と (B-2.b) 式はそれぞれ、次のようになる。

$$\vec{E}^+ = \frac{E_0}{2} \cos 2\pi\nu(t - \frac{\eta^+}{c}z) \vec{e}_x - \frac{E_0}{2} \sin 2\pi\nu(t - \frac{\eta^+}{c}z) \vec{e}_y, \quad (\text{B-3.a})$$

$$\vec{E}^- = \frac{E_0}{2} \cos 2\pi\nu(t - \frac{\eta^-}{c}z) \vec{e}_x + \frac{E_0}{2} \sin 2\pi\nu(t - \frac{\eta^-}{c}z) \vec{e}_y, \quad (\text{B-3.b})$$

これら2つの円偏光を、 $z = l$ の位置で合成すると、電場ベクトルは

$$\begin{aligned} \vec{E} &= (E_x^+ + E_x^-) \vec{e}_x + (E_y^+ + E_y^-) \vec{e}_y \\ &= E_0 \cos \frac{2\pi\nu(\eta^+ - \eta^-)}{2} l \cdot \cos 2\pi\nu(t - \frac{\eta^0}{c}l) \vec{e}_x \\ &\quad + E_0 \sin \frac{2\pi\nu(\eta^+ - \eta^-)}{2} l \cdot \cos 2\pi\nu(t - \frac{\eta^0}{c}l) \vec{e}_y \end{aligned} \quad (\text{B-4})$$

となる。ここで、 $\eta^0 = \frac{(\eta^+ + \eta^-)}{2}$ である。(B-4) 式は、 x と y のそれぞれに対する電場成分が、同じ位相で振動していることを表す。すなわち、直線偏光を表している。そして、入射光の偏光面に対する偏光面の回転角度は、次式で表される。

$$\theta_{\text{FR}} = \frac{\pi l \nu}{c} (\eta^+ - \eta^-) \quad (\text{B-5})$$

以上の議論から、左円偏光と右円偏光の屈折率が異なる媒質中を、直線偏光が通過すると、偏光面が回転 (Faraday 回転) することが分かる。また (B-5) 式より、その偏光面の回転角は、媒質の長さ、左偏光と右偏光の屈折率の差に比例する。

B.2 屈折率[36]

前節で、Faraday 回転角が屈折率に依存することを述べた。そこで、本節では、媒質中の屈折率について述べる。

屈折率は、原子内の電子系の光による遷移の強さに依存する。この遷移の強さは、電子（質量 m 、電荷 q ）の運動を、減衰振動する調和振動子と考えることで、古典的に理解できる。原子が、単位体積中に N 個存在し、そのうち Nf_k ($k=1 \rightarrow \infty$) 個が、ある特定の原子遷移の固有振動数 ν_k を持つと仮定する。ここで、固有振動数 ν_k を持つ原子の割合 f_k は振動子強度 (oscillator strength) と呼ばれ、 $\sum f_k = 1$ で規格化されている。ここに直線偏光が入射されると、その電場 $E = E_0 \exp(i2\pi\nu t)$ によって、強制振動が引き起こされる。原子の中心を原点にとり、電場ベクトルの方向を x 軸にとると、固有振動数 ν_k を持つ振動子の運動方程式は次のように書ける。

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \cdot \frac{dx}{dt} + 2\pi\nu_k x\right) = qE$$

$$= qE_0 \exp(i2\pi\nu t) \quad (\text{B-6})$$

τ は励起状態の寿命で、減衰項 $m(dx/dt) / \tau$ は、自然放出によるエネルギーの減少を表す。この微分方程式の解は、次式の通りである。

$$x = \frac{q}{4\pi^2 m} \cdot \frac{1}{\nu_k^2 - \nu^2 + i\nu/2\pi\tau} E \quad (\text{B-7})$$

これより、固有振動数 ν_k を持つ Nf_k 個の振動子による単位体積当たりの分極 P_k は、次式で与えられる。

$$P_k = qx = \frac{q^2 N}{4\pi^2 m} \cdot \frac{f_k}{\nu_k^2 - \nu^2 + i\nu/2\pi\tau} E \quad (\text{B-8})$$

すべての振動子による分極の総和 P を計算すると、

$$P = \sum_k P_k = \frac{q^2 N}{4\pi^2 m} \sum_k \frac{f_k}{v_k^2 - v^2 + i v/2\pi\tau} E \quad (\text{B-9})$$

となる。従って、電束密度 D は次式のようになる。

$$D = E + 4\pi P = E \left(1 + \frac{q^2 N}{\pi m} \sum_k \frac{f_k}{v_k^2 - v^2 + i v/2\pi\tau} \right) \quad (\text{B-10})$$

一方、屈折率 η と電束密度 D との間には、次式の関係がある。

$$D = \varepsilon E = (\eta - i\kappa)^2 E \quad (\text{B-11})$$

ここで、 ε は誘電率、 κ は吸収係数である。(B-10)、(B-11) 式より、

$$(\eta - i\kappa)^2 = 1 + \frac{q^2 N}{\pi m} \sum_k \frac{f_k}{v_k^2 - v^2 + i v/2\pi\tau} \quad (\text{B-12})$$

屈折率 η が 1 に十分近ければ、(B-12) 式は次式で近似できる。

$$\eta - i\kappa = 1 + \frac{q^2 N}{2\pi m} \sum_k \frac{f_k}{v_k^2 - v^2 + i v/2\pi\tau} \quad (\text{B-13})$$

(B-13) 式の実数部のみを考えると、

$$\eta \approx 1 + \frac{q^2 N}{2\pi m} \sum_k \frac{v_k^2 - v^2}{(v_k^2 - v^2)^2 + (v/2\pi\tau)^2} f_k \quad (\text{B-14})$$

となる。 $v_k \approx v$ の場合には、近似的に次式が成立する。

$$\eta \approx 1 + \frac{q^2 N \tau}{m} \sum_k \frac{\chi_k}{v_k^2 (1 + \chi_k^2)} f_k \quad (\text{B-15})$$

ただし、 $\chi_k = 4\pi v_k^2 (v_k^2 - v^2)$ である。

次に、屈折率を量子論を用いて計算する。基底状態の縮退度を W_{SS} 、励起状態の縮退度を W_{SP} とする。基底状態の各準位が等しく $1/W_{SS}$ の場合、振動子強度 f_k は次式で与えられる。

$$f_k \equiv f_{ij} = \frac{8\pi^2 m W_{SP} v_{ij}}{q^2 h c} \cdot \frac{1}{W_{SS}} \cdot \frac{1}{3} |\langle i|P|j \rangle|^2 \quad (\text{B-16})$$

ここで、 i は基底状態の1つの準位、 j は励起状態の1つの準位を表す。 v_{ij} は、第 i 準位と第 j 準位のエネルギーのエネルギー差に対応する振動数である。 $\langle i|P|j \rangle$ は電気双極子モーメント演算子 P の行列要素である。光が偏極している場合、電気双極子モーメントの期待値は、電場ベクトルの方向に対する角度平均 $|\langle i|P|j \rangle|^2 / 3$ から、 $|\langle i|P|j \rangle|^2$ に置き換えられる。基底状態の各準位の占有確率が異なり、 P_i で表されるとすると、偏光した光に対する振動子強度は、次式で与えられる。

$$f_k \equiv f_{ij} = \frac{8\pi^2 m W_{SP} v_{ij}}{q^2 h c} |\langle i|P|j \rangle|^2 P_i \quad (\text{B-17})$$

Wigner - Eckart の定理により、

$$\sum_i \sum_j |\langle i|P|j \rangle|^2 = |\langle i|P|j \rangle|^2 \sum_i \sum_j \beta_{ij} \quad (\text{B-18})$$

が成立する[37]。 $\langle i|P|j\rangle$ は、電気双極子モーメント演算子 P の換算行列要素で、行列要素の座標系の取り方によらない部分を表す。 β_{ij} は第 i 準位と第 j 準位間の遷移の相対強度で、Clebsch-Gordan 係数 C_{ij} の 2 乗に規格化のための定数 C_n をかけたものである。 β_{ij} を次式に示す。

$$\sum_i \sum_j \beta_{ij} = C_n \sum_i \sum_j C_{ij}^2 = 1 \quad (\text{B-19})$$

励起状態の寿命 τ と $|\langle i|P|j\rangle|^2$ の間には、次のような関係がある。

$$\frac{1}{\tau} = \frac{64\pi^4 \nu_{ij}^3}{hc^3} |\langle i|P|j\rangle|^2 \quad (\text{B-20})$$

この式は、(B-18) 式と (B-19) 式を用いると、次式で近似できる。

$$\frac{1}{\tau} \approx \frac{64\pi^4 \nu_{ij}^3}{hc^3} |\langle i|P|j\rangle|^2 \quad (\text{B-21})$$

以上より、(B-17)、(B-18)、(B-21) 式を用いて、(B-15) 式は次のように書き直すことができる。

$$\eta \approx 1 + \frac{W_{SP} c^3 N}{8\pi^2} \sum_i \sum_j \frac{\chi_{ij}}{\nu_{ij}^3 (1 + \chi_{ij}^2)} \beta_{ij} P_i \quad (\text{B-22})$$

この式から、屈折率は媒質の密度 N に比例し、基底状態の各準位の占有確率 P_i に依存する。(B-22) 式を (B-5) 式に代入すると、

$$\theta_{FR} = \frac{W_{SP} c^2 \nu_{ij} N l}{8\pi} \sum_i \sum_j (\psi_{ij}^+ \beta_{ij}^+ P_i^+ - \psi_{ij}^- \beta_{ij}^- P_i^-) \quad (\text{B-23})$$

ただし、

$$\psi_{ij}^{\pm} = \frac{\chi_{ij}^{\pm}}{v_{ij}^{\pm 3} (1 + \chi_{ij}^{\pm 2})}$$

(B-24)

となる。