

個票データによる性別の交互作用効果を用いた
コウホート分析法に関する研究

坂口 尚文

博士（統計科学）

総合研究大学院大学

複合科学研究科

統計科学専攻

平成30（2018）年度

個票データによる性別の交互作用効果を用いた
コウホート分析法に関する研究

坂口 尚文

博士（統計科学）

総合研究大学院大学

複合科学研究科

統計科学専攻

平成 30 年度

(2018)

目次

第 1 章	はじめに	1
1.1	研究の目的	1
1.2	論文の構成	2
第 2 章	コウホート分析と識別問題	4
2.1	はじめに	4
2.2	標準コウホート表	5
2.3	コウホート分析モデルのデザイン行列	6
2.4	コウホート分析の識別問題	11
2.5	識別不足を解消する既存のアプローチ	16
2.6	まとめ	18
第 3 章	混合効果モデルとしてのコウホート分析モデル	19
3.1	はじめに	19
3.2	混合効果モデル	20
3.3	HAPC モデル	21
3.4	BAPC モデル	22
3.5	HAPC モデルの問題点	23
3.6	効果パラメータの直線成分と非直線成分	24
3.7	実例：男性大学卒割合への両モデルの適用	25
3.8	まとめ	29
付録 3.A	階差行列・階差パラメータ	32
第 4 章	性・年齢別集計表の分析	33
4.1	はじめに	33
4.2	性・年齢別集計表の分析モデル	34
4.3	パラメータの 1 次階差を変量効果としたモデル	45
4.4	まとめ	52
付録 4.A	$S-A_m A_w$ モデルと $S-A[AS]$ モデルの関係	53

第 5 章	性別と 3 要因の交互作用効果を導入したコウホート分析モデル	57
5.1	はじめに	57
5.2	性別と 3 要因の交互作用効果を導入した BAPC モデル	58
5.3	パラメータの推定	60
5.4	想定するモデル群とモデル選択	63
5.5	適用例 1 : 「日本人の意識調査」	66
5.6	適用例 2 : 性役割分業意識	75
5.7	まとめ	80
第 6 章	結語	81

記法

$\mathbb{R}^{n \times m}$	$n \times m$ 実行列の集合
\mathbb{R}^n	n 次元ベクトルの集合
$\mathbf{0}_n$	n 次元零ベクトル
$\mathbf{O}_{n \times m}$	サイズが $n \times m$ の零行列
$\mathbf{1}_n$	すべての要素が 1 の n 次元ベクトル
\mathbf{E}_n	n 次元 単位行列
\mathbf{e}_j	\mathbf{E}_n の j 列: j 番目の標準基底ベクトル
$\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$	(i, j) 要素が a_{ij} の行列 \mathbf{A}
\mathbf{A}'	行列 \mathbf{A} の転置
$[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$	区分行列 (ブロック行列)
\mathbf{A}^{-1}	$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ の逆行列: $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$
\mathbf{A}^{-}	$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ の一般逆行列: $\mathbf{AA}^{-}\mathbf{A} = \mathbf{A}$
\mathbf{A}^{+}	$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ のムーア・ペンローズ逆行列: $\mathbf{AA}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{+}\mathbf{AA}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{A}^{+}$, $(\mathbf{AA}^{+})' = \mathbf{AA}^{+}$, $(\mathbf{AA}^{+})' = \mathbf{A}^{+}\mathbf{A}$
$\ \mathbf{a}\ $	ベクトル \mathbf{a} のユークリッドノルム: $\ \mathbf{a}\ ^2 = \mathbf{a}'\mathbf{a}$
$\text{vec}(\mathbf{A})$	行列 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ の列を, 行方向に積み上げることによって構成されるベクトル. 行列 \mathbf{A} が m 個の n 次元ベクトル \mathbf{a}_i によって, $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m]$ と表されるとき,

$$\text{vec}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nm}$$

$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ と $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ のクロネッカー積:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \dots & a_{1m}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\mathbf{B} & \dots & a_{nm}\mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{np \times mq}$$

$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$ $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ と $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ の直和:

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \\ & \mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (m+q)}$$

$\det \mathbf{A}$	行列 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ の行列式, $ \mathbf{A} $ とも表記
$\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$	d_1, \dots, d_n を対角要素にもつサイズが $n \times n$ の対角行列
$\mathcal{C}(\mathbf{A})$	行列 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ の列空間: $\mathcal{C}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\}$
$\mathcal{N}(\mathbf{A})$	行列 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ の零空間: $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$
$\mathcal{C}(\mathbf{A})^\perp$	$\mathcal{C}(\mathbf{A})$ の直交補空間: $\mathcal{C}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}')$
\mathbf{n}_n	n 次元インデックスベクトル, $\mathbf{n}_n = [1, 2, \dots, n]' \in \mathbb{R}^n$
\mathbf{D}_n	階差行列: 付録 3.A 参照.
$\mathbb{E}(\mathbf{x})$	確率変数 \mathbf{x} の期待値

第 1 章

はじめに

1.1 研究の目的

コウホート分析は、複数回の横断調査から得られる調査項目について、その時間に関する変化を調査対象者の年齢の違いによる効果（年齢効果）、調査時点の違いによる効果（時代効果あるいは時点効果）、世代・出生年の違いによる効果（世代効果あるいはコウホート効果）の 3 つに分離し、対象とする事象の変化の構造を把握するアプローチである*¹。ただし、コウホート分析には 3 効果を原理的に分離できないという識別問題が存在することが知られており、その克服が統計学的な課題として長らく議論されてきている*²。

近年は多くの調査実施機関によって調査対象者個人レベルでの情報が公開され、研究者が種々の個票データを 2 次利用することが可能になってきた。加えて、計算機の処理能力の向上もあいまって、コウホート分析においても個票データを扱うことへのニーズが高まっている。本研究の主たる目的は、個票データにコウホート分析を適用することを念頭に、性別と、年齢、時点、コウホートそれぞれの要因の交互作用効果をモデルに含んだ分析モデルを構築することである。そのとき、構築したモデルに対してはコウホート分析における識別問題をうまく克服していることが必須の条件として要請される。

個票データの分析を行う際に、現在、標準的モデルとして位置づけられるものが、Yang & Land (2006) による階層によるコウホート（Hierarchical Age-Period-Cohort, HAPC）モデルである。各個人が属する年齢、時点、コウホートの集団を階層とみなし、3 要因のいずれか 1 つ以上の効果を変量効果として扱うものである。HAPC モデルが今日の標準的モデルの地位を確立している要因としては、(1) 各要因のそれぞれに属する個人の集団を階層と捉える文脈が研究者にとって理解しやすいこと、(2) 混合効果モデルとして解釈でき、代表的な統計パッケージにはライブラリが用意されていること、の 2 点が大きいと考えられる。一般の研究者にとっても理解と扱いが容易な

*¹ コウホート分析は、対象とする年齢（age）、時点（period）、コウホート（cohort）のそれぞれの頭文字をとって APC 分析とも呼ばれる。

*² コウホート分析における最新の包括的サーベイを含む書籍として、R. M. O'Brien (2014) と Y. Yang & K. C. Land (2014) の 2 冊の書籍があげられる。O'Brien (2014) は主に集計データについて、Yang & Land (2014) は主に個票データを用いた分析について扱ったものである。

HAPC モデルであるが、同時に HAPC モデルの推定には重大な問題点があることも指摘されている。それは得られるコウホート効果のトレンドの形状が、想定されたもの以上にフラットになることである。HAPC モデルは広く利用はされているものの、このような欠点を有することから、コウホート分析における決定的モデルとまでは言えないのが実情である。

本研究ではこのようなコウホート分析の現状を踏まえ、先にあげた主目的を達成するために次の 2 点を具体的に解決すべき課題として設定する。それは、コウホート分析における識別問題の克服と、性別と 3 要因との交互作用の取扱いについてである。

1 点目の課題は、HAPC モデルがなぜフラットなコウホート効果を導き出しやすいのかを、推定法の観点から明示的に示す。既存の研究では、HAPC モデルのコウホート効果がフラットになる現象自体を確認しているものの (O'Brien 2017; Bell & Jones 2018)、背後にどのようなメカニズムが働いているかはブラックボックスのままである。その上で、中村隆 (1982) によるベイズ型コウホート (Bayesian Age-Period-Cohort, BAPC) モデルが、HAPC モデルの問題点を既に克服しているモデルであることを示す。BAPC モデルは効果パラメータの 1 次階差が従う分布に正規分布を仮定したものであり、効果パラメータそのものが正規分布に従うとした HAPC モデルとは平行な関係にある。

2 点目の課題は、性別と年齢、時点、コウホートの 3 要因それぞれとの交互作用効果を考慮することにより、性別間における 3 要因の効果のバリエーションを検討することである。統計調査のデータには、年齢と時点以外の調査項目が数多く含まれていることが通例である。研究者らはそれら要因の効果についても関心を持っており、個票データではそれらの要因の情報についても利用が可能である。それらの中でも性別は調査対象者の最も基本的な属性の一つであり、それゆえ様々な研究分野で考慮の対象となるものである。本研究では、個票データを用いた BAPC モデルでの交互作用効果の扱い方について検討する。

本研究ではこれら 2 点の課題を解決することによって、個票データを用いる際に妥当なコウホート分析モデルを提案する。

1.2 論文の構成

本論文は 6 つの章から構成される。

第 2 章「コウホート分析における識別問題」では、コウホート分析における識別問題が生じるメカニズムについて、行列表現および図示により明示的に説明を行う。コウホート分析の識別問題を克服するためには、何らかの制約をおいて識別不足を解消するだけでは不十分であり、同じ予測曲面を張るパラメータらのクラスの中から、より妥当と考えられるパラメータを得るための手続きを確立することの必要性を述べる。第 2 章の内容は、後の章を議論する上での基礎となる。

第 3 章「混合効果モデルとしてのコウホート分析モデル」では、BAPC モデルを混合効果モデルの枠組みで捉え直すことにより HAPC モデルとの相違を示す。その上で、HAPC モデルの推定法にはコウホート効果のトレンドをフラットなものにしやすいメカニズムが内在されており、BAPC モデルではその機能不全を克服していることを提示する。さらに、「日本人の国民性調査 (統計数

理研究所)」のデータを用いて行った、男性大学卒の割合の変化について両モデルの推定結果を実例として提示する。男性大学卒割合の変化は、ほぼコウホート効果のみで説明されることが期待される事象である。

第4章「性・年齢別集計表の分析」では、コウホート分析から一旦離れ、一時点の性・年齢別集計表を扱う際の留意点について述べる。男女別の集計表が得られたとき、分析者は、(1) 男女でデータを分けて分析を行うか、(2) 男女のデータを合わせて分析を行うか、のいずれか一つの手続きしか行わないことが通例である。(1) と (2) のそれぞれのモデル群を統合してモデル選択を行うと、片方の手続きだけでは見落とすモデルの存在があることを構成されるモデルのデザイン行列を提示しながら指摘し、「日本人の意識調査 (NHK 放送文化研究所)」における、ほぼすべての収録項目を用いて確認する。さらに、男女という異なる2つの集団のデータを有機的に結びつける方法として、変量効果として扱った男女の年齢効果に対して「近さ」を考慮した交互作用効果を提案する。

第5章「性別と3要因の交互作用効果を導入したコウホート分析モデル」では、個票データを用いる性別の要因を考慮したコウホート分析モデルの定式化を行う。これは第4章で論じた性別と年齢の交互作用効果について、その枠組みを時点とコウホートについても拡張したものとなる。本章では性別と3要因の交互作用効果を含めた豊かな表現を有したモデル群を形成し、情報量規準を用いてモデル選択を行い、現実のデータを説明するのにより妥当な含意を導き出すことを目指す。適用事例としては、第4章で用いた「日本人の意識調査」に加え、「全国家族調査 (日本家族社会学会)」を用い、男女の性別役割分業意識の変化について分析した結果を示す。

最後に、第6章で本論文のまとめと結論を述べる。

第 2 章

コウホート分析と識別問題

2.1 はじめに

コウホート分析において、年齢効果は個々人の加齢や社会経験を重ねたことに起因する効果、あるいはライフステージや社会的地位が変化したことに伴う効果である。時点効果は時代や社会情勢の変化により集団全体の考えや傾向が変化するのを、コウホート効果は出生年など特定のイベントを経験した時期を同じにする集団と異なる集団との間でどのような違いがあるかを捉えたものである (Ryder, N. B. 1965; Glenn, N. D. 2005; Mason, W. M. & Fienberg, S. E. 1985)。

このように概念としては、年齢、時点、コウホートの 3 要因の効果を異なる実体として認識することは可能である。しかしながら、実際に 3 効果を推定することには大きな困難をともなう。Glenn (2005) は、コウホート分析に付随する難題として、(1) データ面の制約、(2) 識別問題、の 2 点をあげている。

(1) のデータ面の制約は、3 効果を識別するには継続調査のデータが必要であり、データの収集には金銭的、時間的費用がかかることである。通常、コウホート分析では同一の調査項目が含まれた横断面調査を重ね合わせた、繰り返し横断面データ (repeated crosssectional data)、あるいはその集計表が用いられる。年齢×時点で、分析の対象とする値を集計した表のことをコウホート表と呼ぶ。単一時点の横断面調査のデータでは、(複数) 時点の効果を当然のことながら推定できない。さらに単一時点の横断面調査のデータだけでは、それを用いて年齢別の効果を推定したとしても、得られる推定値は年齢効果とコウホート効果が混在したものとなる。つまり、ある時点で異なる年齢の集団は、同時に出生年の異なる集団でもあるため、年齢による影響の違いとコウホートによる影響の違いを判別できないのである。

(2) の識別問題は、「コウホート = 時点 - 年齢」の関係に起因するもので、コウホート分析に関するより本質的な問題であり、本章で論じる話題となる。この線形従属の関係によりデザイン行列のランク落ちが生じ、3 要因の効果パラメータの値が一意に定まらないという問題が生じる。コウホート分析における識別問題自体に関する議論や研究は、W. M. Mason & S. E. Fienberg (1985) をはじめとして、これまでに数多くの蓄積がなされているが、本論文においては後の章での議論を理解する上での基礎となるため、あらためて 3 要因の関係性をデザイン行列の関係をもとに提示して

おく。その上で、コウホート分析における識別問題とはどのようなものであるかを、図を用いた視覚的な解説を交えて行う。

本章の構成は、次の通りである。第 2.2 節で、本章で対象とする標準コウホート表の説明と 3 要因のインデックスの関係について簡潔に述べる。第 2.3 節では、各要因のデザイン行列の形状について説明を行う。第 2.4 節では、コウホート分析における識別問題についての説明を行う。

2.2 標準コウホート表

ここでは、一般母集団を対象にした繰り返し横断面調査のデータを用いた分析について述べる^{*1}。一般母集団を対象にした繰り返し横断面調査では、同一の年齢（区分）について、複数時点の情報が得られることから、データの情報集約という観点からは、年齢×時点の集計という発想が自然に出てくる。このように、データを年齢と時点の区分ごとに 2 元表形式の集計表でまとめたものがコウホート表である。「コウホート（出生年）＝時点－年齢」という関係があることから、各年齢と時点について集計することで、黙示的に各コウホートの集計もなされている。コウホート表の種類は大きく 2 つに分けることができ、各年齢区分の幅と調査時点の間隔が同じであるコウホート表は（例えば 5 年、10 年）については標準コウホート表と呼び、年齢区分の幅と時点間隔の幅が一致しないコウホート表は一般コウホート表と呼ばれる。

標準コウホート表の一例を示したものが表 2.1 である。表 2.1 は、統計数理研究所が実施している「日本人の国民性調査」から、男性大学卒の割合について、1993 年から 2013 年の 5 回分の調査を年齢区分ごとに集計したものである。年齢区分を 5 歳幅とし、調査時点の間隔を 5 年としている。行が同一の年齢区分の各時点の集計値を表し、列が同一の調査時点を各年齢区分の集計値を表す。このとき、同一コウホートの集計セルは、右斜め下に伸びたものとなる。3 要因の関係から、コウホートが同じ集団のセルを表すためには、調査時点が 1 単位増加したら、年齢も 1 区分増加する必要があるためである。年齢と時点の増分単位を 5 年で固定していることから、原則、各コウホートの区分幅も同じ 5 年で固定となる^{*2}。また、表 2.1 では、最も古い調査時点（1993 年）の最年長区分（65-69 歳）が最も早生のコウホート（1924-1928 年生まれ）を示しており、最も新しい調査時点（2013 年）の最年少区分（20-24 歳）が最も後生のコウホート（1989-1993 年生まれ）を示している。同一コウホート区分のセルのまともりは、出生年順に右斜め上に移動していく。このように、標準コウホート表では各コウホートが右斜めの対角方向に配置されることから、コウホートの区分数は年齢の区分と時点の数に依存して決まる。表 2.1 の設定では年齢の区分数が 10、時点

^{*1} 同一の対象を複数回にわたり追跡したパネル調査を用いれば、異なるサンプルから合成された擬似的な追跡集団による推論ではなく、真に同じ集団の加齢や時点の効果を推定することができる。ただし、単一コウホートのみを追跡した（single cohort design）パネルデータからでは、対象者の加齢に伴う影響と各調査時点の影響を識別することができず、年齢効果と時点効果とが入り混じった値が推定される。パネルデータを用いる場合には、初回調査で年齢層の異なる複数の集団を追跡した（accelerated longitudinal design）調査が必要となる。

^{*2} 実際の統計調査のデータでは、個人レベルでは「出生年＝時点－年齢」は成り立たず、厳密に言えば各コウホートの区分幅は 10 年より広くなる。例えば、10 月 1 日に調査が行われた場合、同じ出生年の人同士でも 10 月 1 日までに生まれた人と 10 月 2 日以降に生まれた人ではデータに記録されている年齢が異なっている。年齢を基準に考えれば、ある時点の同じ年齢に該当する 2 つの出生年があることになる。

表 2.1 標準コウホート表の例（男性の大学卒割合）

年齢	時点				
	1993	1998	2003	2008	2013
20-24	40.3%	41.9%	51.9%	60.3%	69.3%
25-29	46.8%	54.2%	47.5%	45.5%	63.5%
30-34	53.4%	35.4%	38.6%	54.7%	58.0%
35-39	43.3%	55.6%	47.5%	55.3%	48.5%
40-44	26.6%	39.6%	52.9%	48.2%	46.9%
45-49	26.6%	27.5%	38.4%	45.2%	57.1%
50-54	21.5%	26.2%	28.0%	43.1%	45.6%
55-59	19.9%	16.7%	18.3%	33.7%	41.9%
60-64	16.7%	18.6%	21.4%	28.5%	30.8%
65-69	19.2%	16.7%	24.8%	21.8%	23.2%

出典：統計数理研究所「日本人の国民性調査」

の数が 5 であり，この場合は異なるコウホートの区分数が 14 となる．

一般化して，年齢の区分数を I ，調査時点数を J とする．これらとコウホートの区分数 K は $K = I + J - 1$ という関係にあり，標準コウホート表ではコウホートの区分数が年齢，時点よりも必ず多くなる．また，年齢区分のインデックスを年齢の昇順に $i (= 1, \dots, I)$ とし，時点区分のインデックスも同様に $j (= 1, \dots, J)$ とする．同一コウホートの区分を表すインデックス $k (= 1, \dots, K)$ は，年齢と時点の区分インデックスを用いて， $k = I - i + j$ という関係がある．標準コウホート表において， k 番目のコウホートに対応するセルの数は

$$n_k^C = \min(k, K - k + 1, \min(I, J))$$

である．

2.3 コウホート分析モデルのデザイン行列

2.3.1 モデルの設定

$I \times J$ の標準コウホート表の形式で集計されたデータの使用を考える．

各要因の主効果の線形和によって (i, j) セルの予測子 η_{ij} を構成する，下記の一般化線形モデル (Generalized Linear Model, GLM) の枠組みのもとで説明を行う．また，年齢，時点，コウホートについて，それぞれの区分を基準に要因をダミー変数分解して扱う．

$$\eta_{ij} = \alpha + \beta_i^A + \beta_j^P + \beta_k^C, \quad \begin{aligned} i &= 1, \dots, I, \\ j &= 1, \dots, J, \\ k (= I - i + j) &= 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (2.1)$$

α は定数項であり, β_i^A は年齢区分 i の年齢効果, β_j^P は時点 j の時点効果, β_k^C はコウホート区分 k のコウホート効果である.

標準コウホート表の形式で予測子の値を配置した, サイズが $I \times J$ の行列を $\mathbf{H} = \{\eta_{ij}\}$ とし, 行列を列方向にベクトル化する vec オペレータを用いて, 予測子のベクトルを,

$$\boldsymbol{\eta} = \text{vec}(\mathbf{H}) = [\eta_{11}, \dots, \eta_{I1}, \dots, \eta_{1J}, \dots, \eta_{IJ}]'$$

とする.

2.3.2 3 要因のデザイン行列

年齢要因のデザイン行列

この小節で示す年齢要因のデザイン行列と, 次の小節で示す時点要因のデザイン行列はともに, サイズが $n \times n$ の単位行列 \mathbf{E}_n , 全ての要素が 1 の n 次元列ベクトル $\mathbf{1}_n$, クロネッカー積を表す演算子 \otimes を用いて表すことが可能である.

年齢効果のパラメータベクトル $\boldsymbol{\beta}^A = [\beta_1^A, \beta_2^A, \dots, \beta_I^A]'$ に対応するデザイン行列 \mathbf{X}_A は,

$$\mathbf{X}_A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_I \\ \mathbf{E}_I \\ \vdots \\ \mathbf{E}_I \end{bmatrix} = \mathbf{1}_J \otimes \mathbf{E}_I,$$

であり, 行列のサイズは $IJ \times I$ である. 行列の空白部には 0 の要素が入る.

時点要因のデザイン行列

時点効果のパラメータベクトル $\beta^P = [\beta_1^P, \beta_2^P \dots \beta_J^P]'$ に対応するデザイン行列 X_P は

$$X_P = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & 1 & & & & \\ & \vdots & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & 1 & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & 1 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1_I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1_I \end{bmatrix} = E_J \otimes 1_I,$$

であり、行列のサイズは $IJ \times J$ である。

コウホート要因のデザイン行列

コウホート効果のパラメータベクトル $\beta^C = [\beta_1^C, \beta_2^C, \dots, \beta_K^C]'$ に対応するデザイン行列 X_C を構成する。まず、 X_C の時点 j でのブロックを示す $X_C^{(j)}$ を考える。時点 j において各インデックス $i = 1, \dots, I$ は異なるコウホート区分を表すことから、 $X_C^{(j)}$ は、

$$X_C^{(j)} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

と書くことができる。時点 j のブロックに現れるコウホート効果のパラメータは、 β_j^C から β_{I-1+j}^C の I 個であり、 $X_C^{(j)}$ の第 j 列から第 $I-1+j$ 列まで対応するフラグの 1 が右肩上がり配置されることになる。

ここで、次の補助的な行列らを導入して、 $X_C^{(j)}$ をより明瞭に表しておく。 E_I の第 k 列を $e_k = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]'$ とする。単位行列 E_I を反転した行列（反単位行列: backward identity matrix）を \check{E}_I とする。 \check{E}_I は、

$$\check{E}_I = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} = [e_I \quad \dots \quad e_2 \quad e_1]$$

である*3.

$\check{\mathbf{E}}_I$ の左にサイズが $I \times (K - I)$ の零行列 $\mathbf{O}_{I \times (K-I)}$ を追加した、拡大行列,

$$\check{\mathbf{E}}_{I \times K} = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{E}}_I & \mathbf{O}_{I \times (K-I)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{I \times K}$$

を準備する．時点 j におけるコウホート要因のデザイン行列のブロック $\mathbf{X}_C^{(j)}$ を, $\check{\mathbf{E}}_{I \times K}$ と次のベキ零行列,

$$\mathbf{N}_K = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_{K-1} \\ 0 & \mathbf{0}' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{K \times K},$$

を用いて簡潔に表現する．ただし, $\mathbf{N}_K^0 = \mathbf{E}_K$ とする．ベキ零行列はシフトオペレーターとしての作用を持つため, $\check{\mathbf{E}}_{I \times K}$ との関係から, j 時点のブロックは,

$$\mathbf{X}_C^{(j)} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{I \times (j-1)} & \check{\mathbf{E}}_I & \mathbf{O}_{I \times (K-I-j+1)} \end{bmatrix} = \check{\mathbf{E}}_{I \times K} \mathbf{N}_K^{j-1} \in \mathbb{R}^{I \times K}$$

と表せる．よって, コウホート要因のデザイン行列全体を表す \mathbf{X}_C は,

$$\mathbf{X}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_C^{(1)} \\ \mathbf{X}_C^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_C^{(J-1)} \\ \mathbf{X}_C^{(J)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{E}}_{I \times K} \mathbf{N}_K^0 \\ \check{\mathbf{E}}_{I \times K} \mathbf{N}_K^1 \\ \vdots \\ \check{\mathbf{E}}_{I \times K} \mathbf{N}_K^{J-2} \\ \check{\mathbf{E}}_{I \times K} \mathbf{N}_K^{J-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{IJ \times K},$$

となる．

さらに \mathbf{X}_C は, クロネッカー積を表す演算子 \otimes と行列の直和を表す演算子 \oplus を用いて,

$$\mathbf{X}_C = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{E}}_{I \times K} \mathbf{N}_K^0 & & & \\ & \check{\mathbf{E}}_{I \times K} \mathbf{N}_K^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \check{\mathbf{E}}_{I \times K} \mathbf{N}_K^{J-2} \\ & & & & \check{\mathbf{E}}_{I \times K} \mathbf{N}_K^{J-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_K \\ \mathbf{E}_K \\ \vdots \\ \mathbf{E}_K \\ \mathbf{E}_K \end{bmatrix} = \left(\bigoplus_{j=1}^J \check{\mathbf{E}}_{I \times K} \mathbf{N}_K^{j-1} \right) (\mathbf{1}_J \otimes \mathbf{E}_K),$$

とまとめ直すができる．

*3 $\check{\mathbf{E}}_I$ は交換行列 (exchange matrix) と呼ばれ, 列ベクトル $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_{I-1}, x_I]'$ に対して, 左から $\check{\mathbf{E}}$ をかけると,

$$\check{\mathbf{E}}_I \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{I-1} \\ x_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_I \\ x_{I-1} \\ \vdots \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

となり, $\check{\mathbf{E}}_I$ には \mathbf{x} の行の並びを反転させる作用がある．

モデル全体のデザイン行列

定数項 α 、および、効果パラメータのベクトルをまとめた $\beta = [\alpha, (\beta^A)', (\beta^P)', (\beta^C)']'$ に対するデザイン行列を $\mathbf{X} = [\mathbf{1}_{IJ} \ \mathbf{X}_A \ \mathbf{X}_P \ \mathbf{X}_C]$ として、モデル (2.1) の行列表記は次のようになる。

$$\begin{aligned} \eta &= \mathbf{X}\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{IJ} & \mathbf{X}_A & \mathbf{X}_P & \mathbf{X}_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta^A \\ \beta^P \\ \beta^C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_J \otimes \mathbf{1}_I & \mathbf{1}_J \otimes \mathbf{E}_I & \mathbf{E}_J \otimes \mathbf{1}_I & \left(\bigoplus_j \check{\mathbf{E}}_{I \times K} \mathbf{N}^{j-1} \right) (\mathbf{1}_J \otimes \mathbf{E}_K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta^A \\ \beta^P \\ \beta^C \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2.3.3 個票データを用いた分析でのデザイン行列

ここでは、繰り返し横断面調査の個票データ（マイクロデータ）を用いた分析での、各効果のデザイン行列について考える。総サンプルサイズを N とする。また、すべての個人について年齢の情報が得られるものとし、年齢、時点（したがって、コウホート）に関する値の欠測はないものとする。

各個人 $n (= 1, \dots, N)$ のレベルで、(2.1) に相当する式は、

$$\eta_n = \alpha + \sum_{i=1}^I \beta_i^A x_{n,i}^A + \sum_{j=1}^J \beta_j^P x_{n,j}^P + \sum_{k=1}^K \beta_k^C x_{n,k}^C + \sum_{l=1}^L \gamma_l z_{n,l}, \quad (2.2)$$

となる。 α は定数項である。パラメータ β らの上付き添字は集計表の分析と同じく、 A が年齢、 P が時点、 C がコウホートの主効果を表す。各 x は 2 値変数で、例えば年齢にかかる $x_{n,i}^A$ であれば、

$$x_{n,i}^A = \begin{cases} 1 & (\text{個人 } n \text{ の年齢が年齢区分 } i \text{ に属するとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とする。個票データを扱う場合、その他の調査項目の情報がデータに含まれていれば、モデルにそれらの影響を加味することができる。 z_l はその他の説明変数であり、 γ_l はそれらの効果のパラメータである。

年齢、時点、コウホート効果のパラメータベクトルらとして、集計データの分析のときと同じく β^A 、 β^P 、 β^C らを用いると、個票データを用いた場合での 3 要因のデザイン行列は、(2.2) に現れたダミー変数らを用いて、

$$\mathbf{X}_A^{\text{micro}} = \{x_{n,i}^A\} \in \mathbb{R}^{N \times I}, \quad \mathbf{X}_P^{\text{micro}} = \{x_{n,j}^P\} \in \mathbb{R}^{N \times J}, \quad \mathbf{X}_C^{\text{micro}} = \{x_{n,l-i+j}^C (= x_{n,k}^C)\} \in \mathbb{R}^{N \times K}$$

となる行列を、各要因について生成すればよい。

先に述べた集計表でのデザイン行列、 \mathbf{X}_A 、 \mathbf{X}_P 、 \mathbf{X}_C らを明示的に用いて個票データのデザイン行列を表現する場合は、全ての対象の N 人について、個々の n がどの年齢区分と時点に属してい

るか、すなわち集計表においてどの (i, j) セルに対応しているかの情報が必要となる。個人と集計表のセルの対応を表す線形写像 $f_A: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{IJ}$ を考え、 f_A を表す行列を $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{IJ \times N}$ とする。行列 \mathbf{A} の具体的な構成は、以下によって表されるダミー変数、

$$x_{n,ij} = \begin{cases} 1 & (\text{個人 } n \text{ の年齢が年齢区分 } i, \text{ 時点 } j \text{ に属するとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}), \end{cases}$$

を用いて作成すればよい。 $x_{n,ij}$ は各個人 n について年齢と時点の情報を同時に反映したものとなる。各インデックス i, j について、 $a_{I(j-1)+i,n} = x_{n,ij}$ とし、

$$\mathbf{A} = \{a_{I(j-1)+i,n}\} \in \mathbb{R}^{IJ \times N}$$

となる。この関係から、個票のデザイン行列を集計表のデザイン行列を用いて表すには、 \mathbf{A} を転置させた行列を集計表のデザイン行列に左から掛ければよく、各効果について、

$$\mathbf{X}_A^{\text{micro}} = \mathbf{A}' \mathbf{X}_A, \quad \mathbf{X}_P^{\text{micro}} = \mathbf{A}' \mathbf{X}_P, \quad \mathbf{X}_C^{\text{micro}} = \mathbf{A}' \mathbf{X}_C,$$

で表される。さらに、 $\mathbf{X}_*^{\text{micro}} = [\mathbf{X}_A^{\text{micro}}, \mathbf{X}_P^{\text{micro}}, \mathbf{X}_C^{\text{micro}}]$, $\mathbf{X}_* = [\mathbf{X}_A, \mathbf{X}_P, \mathbf{X}_C]$ とすると、

$$\mathbf{X}_*^{\text{micro}} = \mathbf{A}' [\mathbf{X}_A, \mathbf{X}_P, \mathbf{X}_C] = \mathbf{A}' \mathbf{X}_*,$$

とまとめて表すことができる。

詳細は次節で述べるが、コウホート分析における識別問題は、3 要因の関係から本質的にはデザイン行列 \mathbf{X}_* の列ベクトルの線形従属に起因している。実際、 \mathbf{A} および \mathbf{A}' の作り方から、 $\text{rank } \mathbf{A}' = IJ$ となるため \mathbf{A}' は列フルランクの行列である。よって、コウホート分析における識別問題を議論する際には、デザイン行列 $\mathbf{X}_A, \mathbf{X}_P, \mathbf{X}_C$ らの関係に注視するだけで十分である。コウホート分析の識別問題を扱う以降の節では、集計データを用いたデザイン行列についてのみ論じることとする。

2.4 コウホート分析の識別問題

2.4.1 効果パラメータの識別不足

本節では、コウホート分析においてパラメータがどのような形で識別不足に陥っているかを、先のデザイン行列 \mathbf{X} を用いて説明を行う。さらに、デザイン行列 \mathbf{X} の零空間 $\mathcal{N}(\mathbf{X})$ について、 $\mathcal{N}(\mathbf{X})$ の基底ベクトルの具体的な形状を提示し、コウホート分析固有の識別問題とはどのようなものであるかを説明する。

ここでは、扱いやすさの観点から、誤差項 ε に正規分布 $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{E})$ を仮定した線形モデルを例にとり話をすすめる。すなわち、

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\eta} + \varepsilon = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon$$

である。この線形モデルでは、通常の最小 2 乗法、あるいは最尤法による $\boldsymbol{\beta}$ の推定値は、

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y}$$

によって与えられる．しかしながら，コウホート分析では \mathbf{X} がランク落ちしており， $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ が特異行列となるため，逆行列 $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ は存在せず，推定値 $\hat{\beta}$ が一意に定まらない．

効果パラメータの推定値を一意に定めるためには，パラメータに対して何らかの制約を置く必要があるが，識別不足を解消する制約は無数に考えられ，結果として想定しうる解も無数にある．実際，個々の分析のアプローチによって得られる値が異なるという事実は，各効果の存在が不明瞭で一貫性を欠いたものであると捉えられ，どのアプローチによる解がより良いのかという絶え間ない議論を生み出してきた (Yang & Land 2014)．

デザイン行列 \mathbf{X} がランク落ちしている原因の 1 つは，要因をダミー変数分解して扱ったことに起因するものである．年齢と時点要因のデザイン行列に，対応する大きさの，すべての要素が 1 のベクトル $\mathbf{1}$ を右からかけると，

$$\mathbf{X}_A \mathbf{1}_I = (\mathbf{1}_J \otimes \mathbf{E}_I)(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}_I) = \mathbf{1}_J \otimes \mathbf{1}_I = \mathbf{1}_{IJ}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{X}_P \mathbf{1}_J = (\mathbf{E}_J \otimes \mathbf{1}_I)(\mathbf{1}_J \otimes \mathbf{1}) = \mathbf{1}_J \otimes \mathbf{1}_I = \mathbf{1}_{IJ}, \quad (2.4)$$

となる．コウホート要因のデザイン行列についても，同様に対応する大きさの $\mathbf{1}_K$ を右からかけたものを作成する．各 j について，

$$\check{\mathbf{E}}_{I \times K} \mathbf{N}^{j-1} \mathbf{1}_K = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{I \times (j-1)} & \check{\mathbf{E}}_I & \mathbf{0}_{I \times (K-I-j+1)} \end{bmatrix} \mathbf{1}_K = \mathbf{1}_I,$$

が成り立つことに注意すると，

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_C \mathbf{1}_K &= \left(\bigoplus_{j=1}^J \check{\mathbf{E}}_{I \times K} \mathbf{N}^{j-1} \right) (\mathbf{1}_J \otimes \mathbf{E}_K)(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}_K) \\ &= \begin{bmatrix} \check{\mathbf{E}}_{I \times K} \mathbf{N}^0 \mathbf{1}_K \\ \check{\mathbf{E}}_{I \times K} \mathbf{N}^1 \mathbf{1}_K \\ \vdots \\ \check{\mathbf{E}}_{I \times K} \mathbf{N}^{J-1} \mathbf{1}_K \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{1}_J \otimes \mathbf{1}_I = \mathbf{1}_{IJ}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

となる．

よって，各デザイン行列の列空間 $\mathcal{C}(\mathbf{X}_A)$ ， $\mathcal{C}(\mathbf{X}_P)$ ， $\mathcal{C}(\mathbf{X}_C)$ はすべて， $\mathbf{1}_{IJ}$ の列空間 $\mathcal{C}(\mathbf{1}_{IJ})$ を含んでいる．これらの関係はカテゴリカルデータを扱う際に直面する一般的な話であり，各効果パラメータの総和を 0 にする制約をはじめ，いわゆるダミーコーディングなど，カテゴリカルデータを扱う場合のランク落ちを克服する慣習的な方法が確立されている．ここでは，各効果パラメータにゼロ和の制約，

$$\sum_i \beta_i = \sum_j \beta_j = \sum_k \beta_k = 0,$$

を課して，中心化によるリパラメタリゼーションを施しておく．すなわち，

$$\mathbf{1}'_I \beta^A = \mathbf{1}'_J \beta^P = \mathbf{1}'_K \beta^C = 0,$$

で表される制約をそれぞれの効果パラメータに課す。

コウホート分析において識別不足が生じる固有の要因は、3 効果の間に「コウホート = 時点 - 年齢」の関係があることによる。特に、各要因をダミー変数分解した場合には、インデックス間に $k = I - i + j$ という関係があることで、各効果のデザイン行列の列空間が特定の空間を共有している。

インデックスベクトルを $\mathbf{n}_n = [1, 2, \dots, n]'$ とし、年齢と時点要因のデザイン行列と対応するインデックスベクトルの間には、

$$\mathbf{X}_A \mathbf{n}_I = (\mathbf{1}_J \otimes \mathbf{E}_I)(\mathbf{1} \otimes \mathbf{n}_I) = \mathbf{1}_J \otimes \mathbf{n}_I = [\mathbf{n}'_I, \mathbf{n}'_I, \dots, \mathbf{n}'_I]',$$

$$\mathbf{X}_P \mathbf{n}_J = (\mathbf{E}_J \otimes \mathbf{1}_I)(\mathbf{n}_J \otimes \mathbf{1}) = \mathbf{n}_J \otimes \mathbf{1}_I = [\mathbf{1}'_I, 2\mathbf{1}'_I, \dots, J\mathbf{1}'_I]',$$

という関係が成り立っている。また、コウホート効果とそのインデックスベクトルの間の関係は、各 j について、 $\check{\mathbf{E}}_{I \times K} \mathbf{N}_K^{j-1} \mathbf{n}_K = (I + j)\mathbf{1}_I - \mathbf{n}_I$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_C \mathbf{n}_K &= \left(\bigoplus_j \check{\mathbf{E}}_{I \times K} \mathbf{N}_K^{(j-1)} \right) (\mathbf{1}_J \otimes \mathbf{E}_K) \mathbf{n}_K \\ &= \left(\bigoplus_j \check{\mathbf{E}}_{I \times K} \mathbf{N}_K^{j-1} \mathbf{n}_K \right) (\mathbf{1}_J \otimes \mathbf{E}_K) \\ &= \left[\bigoplus_j \{(I + j)\mathbf{1}_I - \mathbf{n}_I\} \right] (\mathbf{1}_J \otimes \mathbf{E}_K) \\ &= \begin{bmatrix} (I + 1)\mathbf{1}_I - \mathbf{n}_I \\ (I + 2)\mathbf{1}_I - \mathbf{n}_I \\ \vdots \\ (I + J)\mathbf{1}_I - \mathbf{n}_I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

が成り立っている。

よって、コウホート分析モデルのデザイン行列 $\mathbf{X} = [\mathbf{1}_{IJ}, \mathbf{X}_A, \mathbf{X}_P, \mathbf{X}_C]$ 、とインデックスベクトルを拡張した次のベクトル $\mathbf{n} = [-I, \mathbf{n}'_I, -\mathbf{n}'_J, \mathbf{n}'_K]'$ との間には、

$$\mathbf{X} \mathbf{n} = -I\mathbf{1}_{IJ} + \mathbf{X}_A \mathbf{n}_I - \mathbf{X}_P \mathbf{n}_J + \mathbf{X}_C \mathbf{n}_K = \mathbf{0}_{IJ}, \quad (2.6)$$

という関係が成り立ち、 \mathbf{n} は \mathbf{X} の零空間に属している。

以上見てきたように、デザイン行列 $\mathbf{X} = [\mathbf{1}_{IJ}, \mathbf{X}_A, \mathbf{X}_P, \mathbf{X}_C]$ の列空間の次元は、列数 $m = 1 + I + J + K = 1 + I + J + (I + J - 1) = 2(I + J)$ に対して、(2.3), (2.4), (2.5) で表した、3 要因をカテゴリカルデータとして取り扱ったことによる 3 次元と、(2.6) による 1 次元が少なくとも退化している。

2.4.2 コウホート分析における識別問題

デザイン行列の零空間

これまで見てきたように、デザイン行列 \mathbf{X} はランク落ちしているため、 \mathbf{X} の零空間 $\mathcal{N}(\mathbf{X})$ が存在する。特に、コウホート分析には3要因の間に「コウホート = 時点 - 年齢」という具体的な関係があり、この1次従属の関係に基づいた零空間に属するベクトル $\mathbf{v} \in \mathcal{N}(\mathbf{X})$ が考えられる。 \mathbf{v} は、 s を0でない任意の実数として、

$$\mathbf{X}(s\mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0},$$

の関係を満たしている。

\mathbf{v} の具体的表記が最初に示されたのは L. L. Kupper et al. (1983) によってである。ここでは \mathbf{v} の表記を簡潔に表現するため、(中村 2005) に倣い、次のように各効果のインデックスを示すベクトルを中心化したものを用意する。 I 個の区分からなる年齢効果のインデックスは、各 i について $i_* = i - \frac{I+1}{2}$ として中心化できる。年齢の中心化インデックスベクトル \mathbf{i}_* は第 i 成分が i_* であるベクトルとする。時点とコウホートについても同様に、 $j_* = j - \frac{J+1}{2}$ と $k_* = k - \frac{K+1}{2}$ を用いて、インデックスベクトル \mathbf{j}_* と \mathbf{k}_* を構成する。各効果の中心化したインデックスベクトルは、元のインデックスベクトル $\mathbf{n}_n = [1, 2, \dots, n]'$ の表記を用いると、

$$\mathbf{i}_* = \mathbf{n}_I - \frac{I+1}{2}\mathbf{1}_I, \quad \mathbf{j}_* = \mathbf{n}_J - \frac{J+1}{2}\mathbf{1}_J, \quad \mathbf{k}_* = \mathbf{n}_K - \frac{K+1}{2}\mathbf{1}_K \quad (2.7)$$

と表すことができる。このとき、 \mathbf{X} の零空間に属するベクトルの1つ \mathbf{v} は

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= [0, (\mathbf{i}_*)', -(\mathbf{j}_*)', (\mathbf{k}_*)']' \\ &= \left[0, 1 - \frac{I+1}{2}, \dots, I - \frac{I+1}{2}, 1 - \frac{J+1}{2}, \dots, J - \frac{J+1}{2}, 1 - \frac{K+1}{2}, \dots, K - \frac{K+1}{2} \right]' \end{aligned}$$

である。なお、中心化したインデックス間には $k_* = j_* - i_*$ の関係が成り立つことに注意しておく。

実際に、 $\mathbf{X}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ となることを、必要な表記をいくつか準備した上で確認しておく。まず、すべての要素が1のベクトル $\mathbf{1}$ について、そのムーア・ペンローズ逆行列 $\mathbf{1}^+ = (\mathbf{1}'\mathbf{1})^{-1}\mathbf{1}'$ を用いると、

$$\frac{I+1}{2} = \mathbf{1}_I^+ \mathbf{n}_I, \quad \frac{J+1}{2} = \mathbf{1}_J^+ \mathbf{n}_J, \quad \frac{K+1}{2} = \mathbf{1}_K^+ \mathbf{n}_K,$$

であるから、(2.7) は、

$$\mathbf{i}_* = (\mathbf{E}_I - \mathbf{1}_I \mathbf{1}_I^+) \mathbf{n}_I, \quad \mathbf{j}_* = (\mathbf{E}_J - \mathbf{1}_J \mathbf{1}_J^+) \mathbf{n}_J, \quad \mathbf{k}_* = (\mathbf{E}_K - \mathbf{1}_K \mathbf{1}_K^+) \mathbf{n}_K$$

と表され、各効果の中心化されたインデックスベクトルは、それぞれ元のインデックスベクトル \mathbf{n} らに対応するベクトル $\mathbf{1}$ の直交補空間 $\mathbf{E} - \mathbf{1}\mathbf{1}^+$ 上へ写像したものとなる。また、

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_I^+ \mathbf{n}_I - \mathbf{1}_J^+ \mathbf{n}_J + \mathbf{1}_K^+ \mathbf{n}_K &= \frac{I+1}{2} - \frac{J+1}{2} + \frac{K+1}{2} \\ &= \frac{I - J + K + 1}{2} = \frac{I - J + (I + J - 1) + 1}{2} \\ &= I \end{aligned} \quad (2.8)$$

となる。

これら (2.6) と (2.8), および, (2.3), (2.4), (2.5) を用いると,

$$\begin{aligned}
Xv &= \begin{bmatrix} 1_{IJ} & X_A & X_P & X_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ i_* \\ -j_* \\ k_* \end{bmatrix} \\
&= 1_{IJ} \cdot 0 + X_A i_* - X_P j_* + X_C k_* \\
&= X_A (E_I - 1_I 1_I^+) n_I - X_P (E_J - 1_J 1_J^+) n_J + X_C (E_K - 1_K 1_K^+) n_K \\
&= X_A n_I - X_P n_J + X_C n_K + 1_{IJ} 1_I^+ n_I - 1_{IJ} 1_J^+ n_J + 1_{IJ} 1_K^+ n_K \\
&= X_A n_I - X_P n_J + X_C n_K + 1_{IJ} (1_I^+ n_I - 1_J^+ n_J + 1_K^+ n_K) \\
&= I 1_{IJ} - I 1_{IJ} = 0
\end{aligned}$$

が成り立ち, v が $\mathcal{N}(X)$ に属していることが確認できる。

このとき,

$$X(\beta + sv) = X\beta + X(sv) = X\beta \quad (2.9)$$

となり, β と $\beta + sv$ ($s \neq 0$) を識別することができない。すなわち, ある一つのパラメータの値 (特殊解) $\beta^\dagger = [\alpha, (\beta^{A\dagger})', (\beta^{P\dagger})', (\beta^{C\dagger})']'$ をとると, それに sv を付加することで表されるパラメータの値 (一般解) $\beta^\dagger + sv = [\alpha, (\beta^{A\dagger} + si_*)', (\beta^{P\dagger} - sj_*)', (\beta^{C\dagger} + sk_*)']'$ たちはすべて同じ予測曲面を張ることになる。コウホート分析における識別問題とは, 端的に言えば, 零空間に属することの具体的な v に対して, どのような s を設定して得られる一般解を推定するかということになる。

識別問題の視覚化

ここでは, (2.9) の意味するところを, 数値例を用いて視覚的に表してみる。図 2.1 は, 同じ予測局面を張る 3 効果のパラメータらの関係を示したものである。ある特殊解を表す 3 効果の組 (上から 2 番目, $s = 0$ の行方向のパネルら) に対して, (2.9) の関係に基づき, s の値をそれぞれ $s = 1, -1, -2$ に設定したときに得られる一般解の組を求めた。また, v が 1 次元ベクトルであることから, その影響を把握しやすいように, 各効果の形状はほぼ直線であるものを提示している。

パラメータ等について, 値の設定は以下の通りである。年齢区分の数と時点の数をそれぞれ同数の 8 とし, コウホートの区分数を 15 ($= 8 + 8 - 1$) とした。効果パラメータの値は各効果とも, 便宜的に, ほぼ -10 から 10 の間に収まるようにしている。初期値である特殊解 ($s = 0$ のとき) は, 年齢と時点効果の値について, 5 から -5 の範囲を区分数の 1 から 8 の間で線形で等間隔に配置し, ホワイトノイズを付加している。 $v = [0, i_*, -j_*, k_*']'$ の関係から, s に対して v の年齢に関連する要素 i_* と時点に関連する要素 $-j_*$ は符号が反対の向きになっている。この関係が端的に表示されるように特殊解の値は年齢の効果が右肩上がりになるように, 時点の効果が右肩下がりになるように配置した。一方で, コウホートに関連する要素 k_* については, 年齢 i_* と符号の向きが同じとなるため, 年齢効果との違いを把握しやすいように両効果の傾きは異なるものになっている。ここでは, コウホート効果の特殊解を, いずれの区分においてもほぼ 0 であるようなトレンドがフラットな形状のものに設定した。

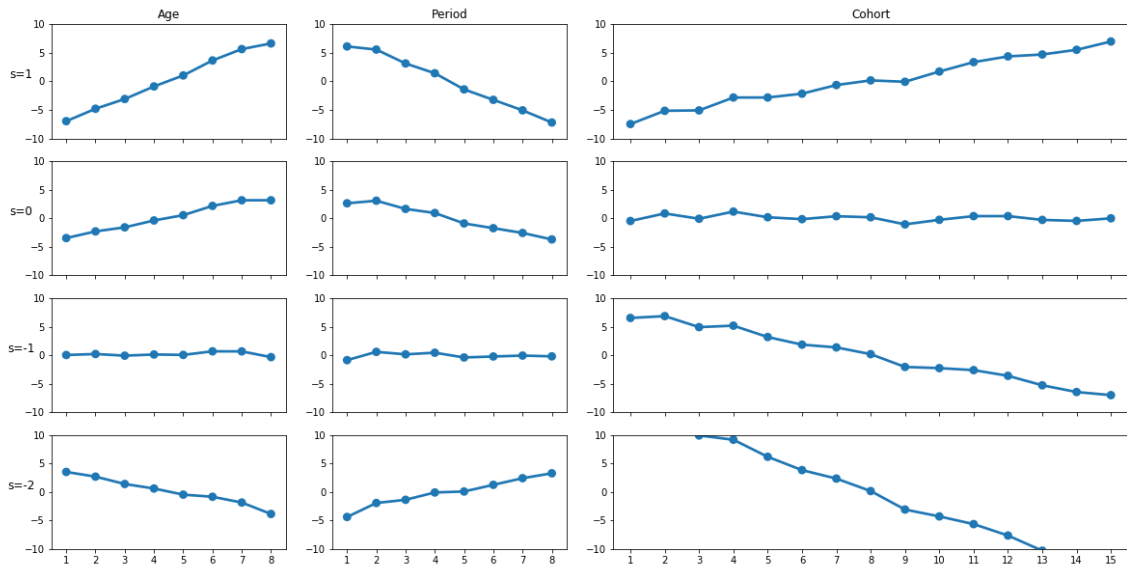


図 2.1 コウホート分析の識別問題

さて、 $s = 0$ から $s = 1$ に動かしたときは、年齢とコウホートの効果のトレンドが正の方向にさらに立ち上がり、時点については負の方向にトレンドがより急なものになっている。すなわち、 s を正の方向に動かすと、年齢とコウホートの効果の曲線は反時計回りに回転し、時点効果を表した曲線は時計回りに回転することになる。逆に、 s を負の方向 ($s = -1, -2$) に動かすと、年齢とコウホートの効果の曲線が時計回りに時点効果の曲線が反時計回りに回転する。このように s を動かすことで、初期値として設定した特殊解 β^{A^+} , β^{P^+} , β^{C^+} が、あたかも 3 つの連動するシーソーの上に乗っているような変化をすることになる。

2.5 識別不足を解消する既存のアプローチ

上述したように、コウホート分析において 3 要因の効果パラメータが一意に定まらない識別不足は、デザイン行列のランク落ちに起因している。よって、扱う推定モデルについて、そのデザイン行列のランク落ちを解消することにより、パラメータの推定自体は可能となる。コウホート分析の包括的サーベイを行っている Yang & Land (2014) では、デザイン行列のランク落ちを解消する従来の直截的なアプローチとして、

1. 分析対象を 2 要因に絞る
2. パラメータに制約を付加
3. パラメータの非線形変換
4. 代理変数の使用

をあげている。

分析対象を2要因に絞る方法は、単純に1つの要因をモデルから除外して推定するものである。特に、社会科学系の実証分析ではコウホートの影響を関心の対象から外し、年齢と時点の要因のみに焦点を合わせたものが多く見られる。3要因をダミー変数分解する場合は、コウホート効果は年齢と時点の交互作用効果の1成分として捉えることができる。先験的にコウホート要因をモデルに含めないケースでは、この交互作用効果が存在しないことを仮定していることに等しい。しかしながら、年齢と時点の2要因のみを俎上に載せた分析において、両者の交互作用効果の有無について検証が行われることはまれであり、多くの分析での推定は定式化の誤りを有する可能性を残したままとなっている。

パラメータに制約を付加する方法は、3効果の識別不足を解消しそれぞれの推定値を求める方法である。標準コウホート表を扱う場合は、デザイン行列の列数に対して4次元分のランクが不足していた。ダミー変数分解する場合における通常のランク落ちへの処置（例えば、3効果それぞれのゼロ和制約）に加えて、効果パラメータの間にさらにもう1つの制約を課すことにより、3要因の効果パラメータを丁度識別にすることが可能となる。この方法は、通常、Constrained Generalized Linear Models (CGLIMs) と呼ばれている (Fienberg & Mason 1979, 1985)。一般的に用いられる制約は、ある要因について隣接する2つの区分を統合することである。例えば、結核による死亡を扱った W. M. Mason & H. L. Smith (1985) の分析では、最年少の2つの年齢区分（0-9歳と10-19歳）を統合する方法がとられている。このことは、0-9歳に対応するパラメータを β_1^A 、10-19歳に対応するパラメータを β_2^A とすると、 $\beta_1^A = \beta_2^A$ という制約を設定したことに等しくなる。ただし、どの区分を統合するかということには、モデルの枠外から何らかの付加的な情報が必要であり、場合によっては設定に分析者の恣意性が含まれることになる。さらに、制約の置き方によって推定されるパラメータの値が大きく異なることも指摘されている (Mason & Smith 1985; Yang et al. 2004)。また、1つの制約を課して丁度識別にした場合は、それらはデータの当てはまりの観点からは無差別となる。隣接する区間の統合を2箇所以上行えば、過剰識別となりデータの当てはまりの面で差がでてくるが、どの2つ以上の区分を統合するかの組み合わせの数は膨大なものとなり、検証は容易ではない。

パラメータの非線形変換によるアプローチは、3要因のいずれか1つ以上の効果について非線形成分のみの推定に限定しようとするものである (Fienberg & Mason 1985)。当該効果について2次、3次などの高階次数の変数をモデルに導入する方法が一般的である。ただし、非線形成分を表す関数について具体的形状を特定する客観的な方法は確立されておらず、線形成分については依然として3効果の識別問題が残されているため、このアプローチだけではコウホート分析の識別問題を根本的に解決することはできない。

代理変数の使用は、年齢、時点、コウホート要因について、それらと関連する1つないし複数の他の変数に置き換えて推定を行うものである。具体的な事例としては、コウホートの代理変数としてコウホートのサイズを用いたもの、時点の代理変数として各時点の失業率や労働力率を用いたものがある。代理変数によるアプローチの問題点としては、用いる変数が時点あるいはコウホート（出生年）に沿ったトレンドを有する場合は、自動的に他の2要因とも相関を持ってしまうこと (Glenn 2005) や、用いた変数が当該効果の動きを必ずしも過不足なく説明できるわけではないこと

(Smith et al. 1982) が指摘されてきている。

2.6 まとめ

本章では、コウホート分析の識別問題がどのようなものであるか、3 要因のデザイン行列による関係、および、図によるグラフィカルな表現を用いて確認した。図 2.1 に示した折れ線らは、データへのあてはまりという意味ではいずれも無差別である。しかしながら、各効果の値は大きく異なっており、どの値を採用するかによって、導かれるインプリケーションも大きく異なったものとなる。コウホート分析において識別問題を克服するということは、このような同じ予測曲面を張るパラメータらのクラスにおいて、より妥当なパラメータの値を推定することであり、当該推定が意図せぬ副作用を有していないかを確認する必要がある。各効果の値を求める手続きにおいて、単にデザイン行列の識別不足を解消するだけでは不十分な理由がここにある。

コウホート分析の識別問題を克服するにあたって、節約原理の観点からは、極端に大きな変化をする推定値は排除されるべきである。先の設定においては、 s の絶対値が大きな値での一般解となる。ただし、節約原理を満たすような緩やかな折れ線が描がかれるパラメータ群に対象を絞っても、解の候補はまだ無数にある。この点において、図 2.1 における、 $s = 0$ と $s = -1$ の違いは興味深い結果を示している。 $s = 0$ は年齢と時点の効果のみで当該事象の変化をほぼ説明できる結果を表している。一方の、 $s = -1$ ではコウホート効果のみで説明でき、年齢と時点の効果がほとんど存在していない結果である。このように両者は、傾きは緩やかという共通点を有しつつも、インプリケーションは全く異なる結果である。もちろん、先験的にはどちらの結果が良いかを判断することはできない。

ただし、分析手法によっては、特定の条件のもとで、各効果の推定結果が一定の傾向を有しているものがある。階層によるコウホート (HAPC) モデルの批判としてあげられている、トレンドがフラットなコウホート効果が得られるという現象は、その典型的な例と考えられる。次の 3 章において、HAPC モデルの推定アルゴリズムにはコウホート効果のトレンドがフラットになるメカニズムが内在されていることを示し、ベイズ型コウホート (BAPC) モデルではその欠点がうまく克服されていることを述べる。

第 3 章

混合効果モデルとしてのコウホート分析モデル

3.1 はじめに

近年では、国内外を問わず、多くの調査機関によって個人レベルの情報を収録したマイクロデータ (個票データ) が研究者に公開されている。計算機の処理能力の向上も相まって、コウホート分析においても個票データを用いた分析が多く見られるようになってきている。個票データを用いたコウホート分析において標準的な手法となっているのが、Yang & Land (2006) による Hierarchical Age-Period-Cohort (HAPC) モデルである。各個人が年齢集団、時点集団、コウホート集団に属すると捉え、それらを階層モデル (マルチレベル分析モデル) のアプローチから扱うものである。「コウホート = 時点 - 年齢」という関係に起因して、コウホート分析には推定の際に 3 つの効果が一意に定まらないという識別問題が存在するが、HAPC モデルでは年齢、時点、コウホートのうち 1 つ以上の効果を変量効果として扱い (すなわち、当該効果のパラメータが正規分布に従うという仮定を設け)、3 効果の識別不足を解消することを可能にしている。モデルに変量効果を導入することから HAPC モデルは混合効果モデルの一種とも捉えられる。HAPC モデルを用いた主な実証研究としては、R. Dassonneville (2013), S. Kwon & M. H. Schafer (2012), F. C. Pampel & L. M. Hunter (2012), E. N. Reither et al. (2009), P. Schwadel (2010) があげられ、日本においても佐々木尚之 (2012), 西野理子・中西泰子 (2016) がある。

しかしながら、HAPC モデルによる推定結果に対して問題点を指摘する声があるのも事実である。A. Bell & K. Jones (2014) では、コウホート効果が大きいと考えられる肥満率について HAPC モデルでは当該効果をほとんど検出できていないことを彼らが行ったシミュレーション結果との比較において指摘し、O'Brien (2017) は、変量効果として扱う要因の効果のトレンドがほぼフラットになることを指摘している。コウホート分析における識別問題は、先に述べた「コウホート = 時点 - 年齢」の関係によって 3 効果が直線成分を共有していることによって生じている。コウホート分析の識別問題を克服するにあたっては、パラメータの推定値を一意に定めるため識別不足を解消することは必要条件に過ぎず、3 効果の推定値が共有する直線成分をどのような形で各効果に再

配分するかにまで注意を向ける必要がある。O'Brien ら既存の研究は HAPC モデルが引き起こす問題の指摘のみにとどまっており、そのメカニズムまでは明らかにされていないが、彼らの指摘は HAPC モデルによる推定法が 3 効果の共有する直線成分を分配する際に致命的な欠点を有していることで生じている。

そこで本章では HAPC モデルによる推定の問題点を識別問題の観点から整理し、なぜ HAPC モデルがコウホート効果のトレンドをフラットなものとして推定する可能性があるかを明らかにする。さらに、その問題点を既に克服しているモデルとして中村 (1982, 2005) のベイズ型コウホート (Bayesian Age-Period-Cohort, BAPC) モデルが用いている 1 次階差制約を使用することが、より妥当であることを述べる。

本章の構成は、次の通りである。3.2 節では、3 要因について 1 つ以上の効果を変量効果として扱うことにより、コウホート分析での識別不足が解消されるメカニズムを示す。3.3 節では HAPC モデルの概説を、3.4 節では BAPC モデルの概説、および、HAPC モデルと BAPC モデルの関係を示す。3.5 節では HAPC モデルによる推定の問題点を整理し、3.6 節でその問題らが生じるメカニズムの詳細を提示する。その上で、HAPC モデルの推定で生じる問題を BAPC モデルがどのように克服しているかを述べる。3.7 節は実例を用いた検証であり、主にコウホート効果で変化の構造を説明することが可能と考えられる男性大学卒の割合を用いて、両モデルの推定結果を比較する。3.8 節では、本章でのまとめを述べる。

3.2 混合効果モデル

個票データでは、集計データと異なり個人が観測単位であるため、モデル式が個人レベルで構成される。各個人は特定の年齢、時点、コウホートに属し (cross-classification)、年齢、あるいは時点、コウホートをそれぞれ同じくする集団は類似の傾向を持つことが予想されるため、年齢、時点、コウホートを階層 (マルチレベル) として捉え、階層モデル分析の枠組みでアプローチしたものが HAPC モデルである。このモデルでは、年齢、時点、コウホートのうち 1 つ以上の効果を変量効果として扱い、3 効果の識別不足を解消した混合効果モデルである。

何らかの線形制約において 3 効果の識別不足を解消する試み、すなわちデザイン行列のランク落ちを解消する試みは従来、数多く行われてきたが、そこには設定する線形制約の恣意性の問題が残されていた。コウホート分析への混合効果モデルの適用は、不良設定 (ill-posed) 問題の L^2 正則化による解決であり、特定の線形制約を想定せずパラメータの 2 乗ノルムの大きさに罰則を課すことによって識別不足の解消を図っている。

本節では、具体的に混合効果モデルとしての HAPC モデルがどのようなメカニズムで識別不足を解消しているかについて、誤差項に正規分布を仮定した線形モデルを例にとり説明する。一般に線形混合効果モデルは、アウトカムを表す N 次元ベクトルを \mathbf{y} 、固定効果のパラメータを p 次元ベクトル $\boldsymbol{\beta}$ 、変量効果のパラメータを q 次元ベクトル \mathbf{b} とし、それぞれのデザイン行列をサイズが $N \times p$ の \mathbf{X} と $N \times q$ の \mathbf{Z} とすれば、

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{b} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.1)$$

と表すことができる．ここで、 ε と \mathbf{b} は、それぞれ N 次元と q 次元の正規分布 $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$ と $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{G})$ に従い、互いに独立とする．

3.3 HAPC モデル

前節での表記をコウホート分析のモデルに適用する．ここでは、年齢、時点、コウホートの値をいくつかのカテゴリーに分類し、その効果をダミー変数を用いて捉えるケースを考える．設定として I 個の年齢区分 ($i = 1, \dots, I$)、 J 個の時点 ($j = 1, \dots, J$)、 K 個のコウホート区分 ($k = 1, \dots, K$) を与え、調査間隔と年齢区分幅が一致するケースを扱う．このとき、 $k = I - i + j$ 、 $K = I + J - 1$ である．また、年齢、時点、コウホートの 3 効果をすべて変量効果とし、かつ変量効果として扱うのはそれら 3 効果のみとする．さらに、ここでの固定効果は切片 β^G のみとし、すべての要素を 1 とした n 次元ベクトルを $\mathbf{1}_n$ 、 N を全サンプルサイズとして、 $\mathbf{X} = \mathbf{1}_N$ とする．年齢、時点、コウホートの各要因に対応するデザイン行列をそれぞれ \mathbf{X}_A 、 \mathbf{X}_P 、 \mathbf{X}_C として^{*1}、対応する効果パラメータを β^A 、 β^P 、 β^C とする．(3.1) に対応させる形で、3 要因のデザイン行列を $\mathbf{Z} = [\mathbf{X}_A, \mathbf{X}_P, \mathbf{X}_C]$ とし、 \mathbf{Z} に対応するパラメータベクトルを $\mathbf{b} = [(\beta^A)', (\beta^P)', (\beta^C)']'$ としておく．このとき前述したインデックス間に $k = I - i + j$ の関係があるため、 \mathbf{Z} はランク落ちした行列となっている^{*2}．

混合効果モデルの分散成分を表すパラメータとして $\sigma = [\sigma_A^2, \sigma_P^2, \sigma_C^2]'$ を用いれば、 $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\sigma)$ であることに注意して、モデルの尤度関数を $L(\beta^G, \mathbf{b}, \sigma^2, \sigma)$ とすると、対数尤度関数の核は次式によって与えられる（例えば、Y. Pawitan (2013) を参照）．

$$\log L(\beta^G, \mathbf{b}, \sigma^2, \sigma) = -\frac{1}{2} \log |\Sigma| - \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \beta^G \mathbf{1} - \mathbf{Z}\mathbf{b})' \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \beta^G \mathbf{1} - \mathbf{Z}\mathbf{b}) - \frac{1}{2} \log |\mathbf{G}| - \frac{1}{2} \mathbf{b}' \mathbf{G}^{-1} \mathbf{b}. \quad (3.2)$$

ここで、 n 次元単位行列を \mathbf{E}_n で表すと、 $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{E}_N$ である．行列の直和を \oplus で表すと、 $\mathbf{G} = (\sigma_A^2 \mathbf{E}_I) \oplus (\sigma_P^2 \mathbf{E}_J) \oplus (\sigma_C^2 \mathbf{E}_K)$ である．また、行列式を $|\cdot|$ で表す．(3.2) の右辺の第 2 項はモデルの残差に関連した部分 (goodness of fit) でデータへのフィッティングを表し、後ろの 2 項は変量効果の変動に関連した部分である．(3.2) の最大化は罰則付最尤法として知られており、最大化はデータへのフィッティングだけではなく、パラメータの重み付き 2 乗和を小さくするというペナルティを課して行われる．(3.2) の罰則項に現れる 2 次形式 $\mathbf{b}' \mathbf{G}^{-1} \mathbf{b}$ は、要素でみると、

$$\mathbf{b}' \mathbf{G}^{-1} \mathbf{b} = \frac{1}{\sigma_A^2} \sum_{i=1}^I (\beta_i^A)^2 + \frac{1}{\sigma_P^2} \sum_{j=1}^J (\beta_j^P)^2 + \frac{1}{\sigma_C^2} \sum_{k=1}^K (\beta_k^C)^2 \quad (3.3)$$

^{*1} 集計データを用いた分析における、各要因のデザイン行列を構成する方法は中村 (2005) を参照のこと．個票データを扱う分析に拡張するには、年齢、時点、コウホートごとに、各個人がそれぞれの要因のいずれのグループに属するかを示したダミー変数の行列を構成し、それらを転置したものを対応する集計データのデザイン行列に左からかければよい．2.3.3 節を参照のこと．

^{*2} カテゴリカルデータとして扱う場合は、3 要因間の関係に加えて、各要因をダミー変数として捉える際に生じる $\mathbf{X}_A \mathbf{1}_I = \mathbf{X}_P \mathbf{1}_J = \mathbf{X}_C \mathbf{1}_K = \mathbf{1}_N$ によっても、 \mathbf{X} のランク不足が引き起こされるが、HAPC モデルでは、効果パラメータが従う正規分布の平均を 0 とおくことにより、自動的に推定値の中心化が行われ、効果パラメータをカテゴリ変数として扱う際のランク落ちは解消される．後述する BAPC モデルの場合は階差パラメータが従う分布に平均 0 の正規分布を仮定しているため、推定値 $\hat{\beta}^A$ 、 $\hat{\beta}^P$ 、 $\hat{\beta}^C$ の中心化は自動的に行われない．これらの推定値がゼロ和を満たしているものを改めて選ぶ操作が必要となる．詳細は中村 (2005) を参照．

と表記される。

変量効果の推定量は縮小推定量であるため、一般に各パラメータの推定値は制約を置かない場合に比べて、平均 0 に近づいたものとなる。モデルの推定に一種の節約原理 (principle of parsimony) を実現させるものといえる。

さて (3.2) は、 $\mathbf{F} = \mathbf{E}_I \oplus \mathbf{E}_J \oplus \mathbf{E}_K = \mathbf{E}_{I+J+K}$ を用いて、

$$\log L = -\frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^G \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \right\}' \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^{-1} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^G \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \right\} - \frac{1}{2} \log \begin{vmatrix} \Sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G} \end{vmatrix}$$

とまとめることができ、デザイン行列 \mathbf{Z} の下に \mathbf{F} を付与したことにより、 \mathbf{Z} のランク落ちの問題は解消されていることが分かる。

3.4 BAPC モデル

BAPC モデルは、その名が示す通り、コウホート分析にベイズ推定の枠組みを用いたものである。具体的には各効果の隣り合うパラメータの 1 次階差に着目し、それらが従う事前分布として平均 0 の正規分布を仮定したモデルである。このことは、HAPC モデルが各効果の従う事前分布に正規分布を仮定したものと考えれば平行な関係にあり、逆に BAPC モデルを混合効果モデルの一類型として捉え直すこともできる。

BAPC モデルにおける (3.1) の変量効果パラメータ \mathbf{b} は、元のパラメータら β^A , β^P , β^C と次式で表される階差行列を用いて表記できる。 $\mathbf{0}_n$ をすべての要素が 0 の n 次元ベクトルとして、付録 3.A の階差行列、

$$\mathbf{D}_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

を用いて、 $\delta^A = \mathbf{D}_I \beta^A$, $\delta^P = \mathbf{D}_J \beta^P$, $\delta^C = \mathbf{D}_K \beta^C$ として、 $\mathbf{b} = [(\delta^A)', (\delta^P)', (\delta^C)']'$ とする。各階差ベクトルの要素はそれぞれ、 $\delta_i^A = \beta_i^A - \beta_{i+1}^A$, $\delta_j^P = \beta_j^P - \beta_{j+1}^P$, $\delta_k^C = \beta_k^C - \beta_{k+1}^C$ である。

変量効果のデザイン行列 \mathbf{Z} についても \mathbf{D} の適当な一般逆行列 \mathbf{D}^- を用いて、 $\mathbf{Z} = [\mathbf{X}_A \mathbf{D}_I^-, \mathbf{X}_P \mathbf{D}_J^-, \mathbf{X}_C \mathbf{D}_K^-]$ とする。

BAPC モデルと HAPC モデルではパラメータへの罰則の与え方が異なっている。HAPC モデルの罰則項に現れる 2 次形式である (3.2) に対して、BAPC モデルのもとで対応する式は、

$$\begin{aligned} \mathbf{b}' \mathbf{G}^{-1} \mathbf{b} &= \frac{1}{\sigma_A^2} \sum_{i=1}^{I-1} (\delta_i^A)^2 + \frac{1}{\sigma_P^2} \sum_{j=1}^{J-1} (\delta_j^P)^2 + \frac{1}{\sigma_C^2} \sum_{k=1}^{K-1} (\delta_k^C)^2, \\ &= \frac{1}{\sigma_A^2} \sum_{i=1}^{I-1} (\beta_i^A - \beta_{i+1}^A)^2 + \frac{1}{\sigma_P^2} \sum_{j=1}^{J-1} (\beta_j^P - \beta_{j+1}^P)^2 + \frac{1}{\sigma_C^2} \sum_{k=1}^{K-1} (\beta_k^C - \beta_{k+1}^C)^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

となる。(3.4) はパラメータの漸進的変化の条件として知られ、罰則項は各効果で隣り合うパラメータの値の変動を小さくするように機能する。BAPC モデルは集計データの分析を行う上で考案され

たものであったためデータにおける階層性は意識されていないが、パラメータに滑らかさを求める節約原理によって識別不足を解消する点から両モデルは共通点を有している。

3.5 HAPC モデルの問題点

HAPC モデルは今日のコウホート分析において標準的な手法となっているが、実データあるいはシミュレーションデータを用いた HAPC モデルの検証からは、想定される値よりもコウホート効果のトレンドがフラットになりやすいことが指摘されている。HAPC モデルによる推定でコウホート効果のトレンドがフラットになる原因は大きく 2 点あり、本節ではその数理的メカニズムを明らかにする。

コウホート効果のトレンドがフラットになる原因の 1 つは、分析者が HAPC モデルを定式化する際に生じる手続き上の問題で、具体的には推定の際に 3 効果すべてを変量効果として扱わず、少なくとも 1 つ以上の効果を固定効果として扱うことによって生じる問題である。もう 1 つは、HAPC モデルの推定アルゴリズム自体に内在された問題で、 $K = I + J - 1$ の関係により、コウホートの区分数が年齢、時点の区分数より一般に多いことによって生じる。両者とも (3.2) の対数尤度関数を最大化する際のメカニズムが起因しており、より本質的には HAPC モデルにおける罰則項としての (3.3) 式の形状が、これらの問題を生じさせている。

1 点目の分析における手続き上の問題であるが、HAPC モデルを用いたほとんどの分析では年齢効果を固定効果として扱い、時点とコウホートの効果を変量効果としてモデルに投入している。これは年齢を個人の属性として、時点とコウホートを集団として捉える文脈的な認識に起因している。ただ、混合効果モデルのもとでも、3 効果は直線成分を共有しており、さらに変量効果は縮小推定量であるため、時点とコウホートを変量効果として扱い、分布を仮定することによってパラメータの変動に制限を加えると、固定効果にした年齢効果の傾きは相対的に立ち上がり、変量効果とした時点とコウホートの傾きはフラットになることが予想される。O'Brien (2017) においても、HAPC モデルで変量効果とにおいて効果がフラットになる現象までは認識されているが、その数理的なメカニズムは以上に述べたことに基づいている。コウホート分析のモデルに変量効果を組み込む場合は、3 効果をすべて変量効果として扱う必要がある、さもないと、直線成分が変量効果として扱った効果から逃げていくことになる。

しかしながら、たとえ 3 効果すべてを変量効果として扱った場合でも、上で 2 点目にあげたコウホートの区分数 K が年齢の区分数 I 、時点数 J よりも大きいことにより、HAPC モデルでは 3 効果のうちコウホート効果のトレンドをよりフラットにする強い圧力がかかる。これは HAPC モデルの推定法に内在された問題である。一方、BAPC モデルではコウホート効果のトレンドをフラットにする圧力は弱いものとなっている。両モデルでは (3.2) に現れる 2 次形式 $\mathbf{b}'\mathbf{G}^{-1}\mathbf{b}$ について、具体的な形状が (3.3) と (3.4) でみたように異なる。2.4 節で示した、 β_i^A , β_j^P , β_k^C によって与えられる一般解の組は同じ予測曲面を張り、データへのフィッティングの観点からは無差別である。話を単純化して説明すれば、(3.2) の最大化は、それら一般解の組の中から罰則項をより小さくする値で実現することになり、重みの σ を固定すれば、HAPC モデルでは (3.3) を、BAPC モデルでは

(3.4) を最小とする値が選ばれる。本章では以降、この 2 点目の問題について深く掘り下げていくことにする。

3.6 効果パラメータの直線成分と非直線成分

効果パラメータの成分は直線成分と非直線成分に分けて考えることができる。零空間 $s\mathbf{v}$ は直線成分によって張られているため、コウホート分析において識別できないのは各効果の直線成分である。直線成分は中心化したインデックスに対して、効果パラメータを回帰させることによって得られる。例えばコウホート効果の場合、ある特殊解 $\beta^{C\ddagger}$ に対して、傾き $s_C = (\mathbf{k}'_*\mathbf{k}_*)^{-1}\mathbf{k}'_*\beta^{C\ddagger}$ を得る。直線成分ベクトルを $\beta^{C[L]\ddagger} = s_C\mathbf{k}_*$ とおけば、非直線成分ベクトルは、 $\beta^{C[C]} = \beta^{C\ddagger} - \beta^{C[L]\ddagger}$ となる*3。非直線成分は直線成分と直交しており、また特殊解のとり方に依存しないことに注意する。

要素でみると、特殊解は $\beta_k^{C\ddagger} = s_C k_* + \beta_k^{C[C]}$ となり、2.4 節で示したように、一般解は、

$$\beta_k^C = \beta_k^{C\ddagger} + s k_* = s_C k_* + \beta_k^{C[C]} + s k_* = (s_C + s) k_* + \beta_k^{C[C]}, \quad k = 1, \dots, K, s \in \mathbb{R} \quad (3.5)$$

と表される。年齢と時点についても、それぞれ対応する特殊解について直線成分の傾きを s_A と s_P で表せば、一般解は、(3.5) と同じ s を用いて、

$$\begin{aligned} \beta_i^A &= (s_A + s) i_* + \beta_i^{A[C]}, \quad i = 1, \dots, I, \\ \beta_j^P &= (s_P - s) j_* + \beta_j^{P[C]}, \quad j = 1, \dots, J \end{aligned}$$

で表される。これら $\{\beta_i^A\}$, $\{\beta_j^P\}$, $\{\beta_k^C\}$ の組は任意の s に対して同じ予測曲面を与える。

さて、このとき HPAC モデルの罰則項に現れる 2 次形式 $\mathbf{b}'\mathbf{G}^{-1}\mathbf{b}$ は、例えばコウホート効果の部分については、

$$\sum_{k=1}^K (\beta_k^C)^2 = \sum_{k=1}^K (\beta_k^{C[L]})^2 + \sum_{k=1}^K (\beta_k^{C[C]})^2 = (s_C + s)^2 \sum_{k=1}^K k_*^2 + \sum_{k=1}^K (\beta_k^{C[C]})^2$$

を重みの σ_C^2 で除したものである。年齢と時点の項についても同様に計算ができ、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^I (\beta_i^A)^2 &= (s_A + s)^2 \sum_{i=1}^I i_*^2 + \left(\sum_{i=1}^I \beta_i^{A[C]} \right)^2, \\ \sum_{j=1}^J (\beta_j^P)^2 &= (s_P - s)^2 \sum_{j=1}^J j_*^2 + \left(\sum_{j=1}^J \beta_j^{P[C]} \right)^2 \end{aligned}$$

をそれぞれ重みの σ_A^2 と σ_P^2 で除したものとなる。

識別問題に影響を与える直線部分だけに議論を絞り、単純化のためすべての重みを等しく固定すると、HAPC モデルにおける罰則項の最小化は、

$$(s_A + s)^2 \sum_{i=1}^I i_*^2 + (s_P - s)^2 \sum_{j=1}^J j_*^2 + (s_C + s)^2 \sum_{k=1}^K k_*^2 \quad (3.6)$$

*3 [L] の L は Linear, [C] の C は curvature の意。

を小さくするもので実現される。

一般に $K > I, J$ とコウホートの区分数が年齢の区分数、時点数よりも大きく、 $\sum_{i=1}^2 i_*$ と $\sum_{j=1}^2 j_*$ に比して $\sum_{k=1}^2 k_*$ の値はかなり大きくなる。(3.6) を最小化するためにコウホート効果の直線成分の傾きを小さくする圧力がより強くなり、 $(s_A + s)^2$ ならびに $(s_P - s)^2$ との相対で $(s_C + s)^2$ をより小さくする s が選ばれることになる。すなわち、直線成分がコウホート効果から他の効果に流れてしまい、コウホート効果のトレンドがフラットになる傾向がある。

一方で 1 次階差を考える BAPC モデルの 2 次形式は、各効果について、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{I-1} (\beta_i^A - \beta_{i+1}^A)^2 &= (s_A + s)^2(I-1) - 2(s_A + s)(\beta_1^{A[C]} - \beta_I^{A[C]}) + \sum_{i=1}^{I-1} (\beta_i^{A[C]} - \beta_{i+1}^{A[C]})^2, \\ \sum_{j=1}^{J-1} (\beta_j^P - \beta_{j+1}^P)^2 &= (s_P - s)^2(J-1) - 2(s_P - s)(\beta_1^{P[C]} - \beta_J^{P[C]}) + \sum_{j=1}^{J-1} (\beta_j^{P[C]} - \beta_{j+1}^{P[C]})^2, \\ \sum_{k=1}^{K-1} (\beta_k^C - \beta_{k+1}^C)^2 &= (s_C + s)^2(K-1) - 2(s_C + s)(\beta_1^{C[C]} - \beta_K^{C[C]}) + \sum_{k=1}^{K-1} (\beta_k^{C[C]} - \beta_{k+1}^{C[C]})^2, \end{aligned}$$

によって表される 2 乗和をそれぞれの重み $\sigma_A^2, \sigma_P^2, \sigma_C^2$ で除した上で足し合わせたものである。各効果の直線成分の傾きを小さくする圧力は、それぞれ $I-1, J-1, K-1$ であり、HAPC モデルの場合よりもかなり弱いことが分かる。また各効果の区分数の違いによる影響も HAPC モデルに比べて小さく、コウホート効果を他の効果より過剰にフラットにする圧力も抑制されたものとなっている。

なお、上記の議論では分散成分である $\sigma_A^2, \sigma_P^2, \sigma_C^2$ を固定して考えたが、各効果の形状はこれら分散成分の大きさにも依存する。一般に分散成分の値が大きいときは当該効果が立ち上がり、分散成分の値が小さいときはその効果がフラットなものとなる。ただし、分散成分に大きい値を設定した場合は (3.2) のペナルティの $\log |G|$ が大きなものとなるため、上述したコウホート効果をフラットにする圧力を相殺するほど分散成分の値は自由に動けるわけではない。分散成分 σ の推定は、一般には (3.2) について β^G, \mathbf{b} の推定値を用いて表現した制限付最尤法 (REML) あるいは周辺尤度、

$$\log L(\sigma) = \log L(\hat{\beta}^G, \hat{\mathbf{b}}, \sigma) - \frac{1}{2} \log |\mathbf{Z}' \Sigma^{-1} \mathbf{Z} + \mathbf{G}^{-1}|$$

の形にしてから、 σ を最大化することによって行われる (Pawitan 2013; 中村 2005)。ここでは分散成分の推定の詳細には立ち入らず、次節の実例を用いてコウホート効果をフラットに対する圧力に対して分散成分の動きが限定的であることを確認するにとどめる。

3.7 実例：男性大学卒割合への両モデルの適用

3.7.1 検証の方針

本節ではコウホート効果が明確にあることが期待される実データを用いて、HAPC モデルと BAPC モデルの推定結果の違いを検証する。ここで着目する両モデルの相違は 2 つある。1 つは、3

要因をすべて含むフルモデル同士の比較である、もう1つは、3要因の有無で想定できるコウホート分析のモデル群を構成し、モデル選択により両モデルで選ばれた上位モデル間の相違である。

1点目の年齢、時点、コウホートの3要因を含めたフルモデル同士でのHAPCモデルとBAPCモデルの比較は次のように行う。3.5節で述べたように、HAPCモデルとBAPCモデルでは、それらの推定法において、直線成分を3要因の効果に割り振りふるメカニズムが異なっていた。HAPCモデルではコウホート効果をフラットにする圧力が強く働くのに対し、BAPCモデルではその圧力が緩和されている。HAPCモデルは、そもそもの発想が個票データを分析することを想定して設計された。個々人が年齢、時点、コウホートに属し、それぞれの集団を構成することに着目して、それらに階層性を導入したものである。このようなモデル構築の経緯から、HAPCモデルでは3要因の存在を所与として分析されるケースが多い。HAPCモデルの問題点を明確にするために、まずフルモデル同士での推定結果を比較する。

2点目の、モデル選択の枠組みを用いた3効果の一貫性についての検証は次のように行う。コウホート分析には識別問題が存在するため、年齢、時点、コウホートのそれぞれの要因を分析モデルに含めるか否かで、各効果の推定結果が大きく異なる場合も想定される。コウホート分析において、どの要因を含めるかについてのモデルの定式化を行う際に用いられるアプローチの一つは、想定しうるモデル群の中から何らかの情報量規準を用いてモデル選択を行うことである。また、3要因のうち、ある要因の効果が支配的である場合は、モデル間で当該要因の効果について推定値の形状が類似していることが望まれ、加えて他の要因の有無によって当該要因の効果の値が大きく変動しないことも望まれる。このような支配的な要因について、その効果の一貫性を確認する上でも、モデル選択の手続きを踏むことが重要である。

3.7.2 使用したデータ

検証に用いた事例は、男性の大学卒割合である。日本では大学に進学する人の年齢幅は限られており、20歳代以降に最終学歴が変更される割合は大きくはない。そのため、大学卒割合の上昇は世代の違いによるコウホート効果でほぼ説明でき、加齢や調査時点の影響をほとんど受けていないと考えられる。

使用したデータは、統計数理研究所が長期にわたり継続実施している「日本人の国民性調査」である。「日本人の国民性調査」は、20歳以上の男女を対象に、日本人のものの見方や考え方とその変化を捉えることを目的とし、1953年に開始された全国規模の調査である。調査は現在まで5年おきに、ほぼ同一の調査手法を用いて行われてきている。ここでは、本論文執筆時点で利用可能な1953年から2013年までの13回分の調査データを用いた。また対象とする年齢は20歳から69歳までとし、これを5歳幅でカテゴライズし10個の年齢区分を扱う。この設定のもとで、構成される対象者の出生年は1884年生まれから1993年生まれであり、22個のコウホート区分を扱う。

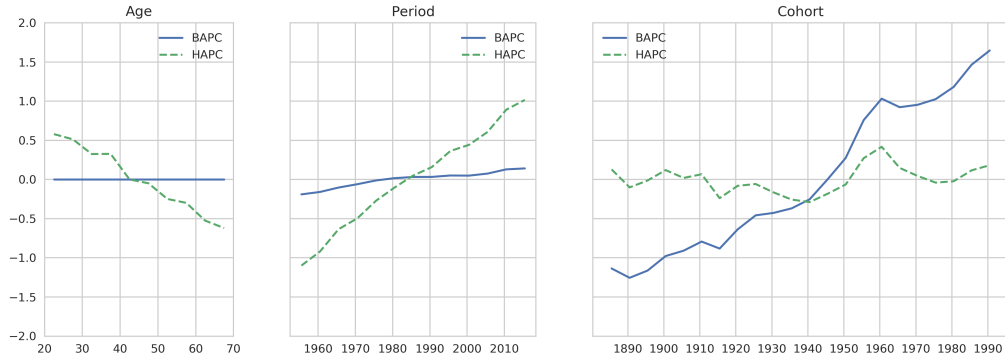


図 3.1 大学卒割合（男性）のコウホート分析: HAPC モデルと BAPC モデルにおけるフルモデル間の比較

3.7.3 フルモデル同士の比較

HAPC モデルと BAPC モデルをそれぞれ用いて，男性の大学卒割合にロジット・コウホートモデルを適用した結果を図 3.1 に提示する．ここでは，3 効果すべてを変量効果として扱った．点線が HAPC モデルを用いた推定結果，実線が BAPC モデルを用いた推定結果であり，プロットの点は各区分の中央値に合わせている．

図 3.1 をみると，HAPC モデル（点線）ではコウホート効果のトレンドがフラットになっているのに対し，BAPC モデル（実線）では当該効果を明確に捉えていることが確認できる．このデータの場合，それぞれ $I = 10$, $J = 13$, $K = 22$ であるから，(3.6) で HAPC モデルでの直線成分にかかる係数は，具体的に，

$$\sum_{i=1}^I i_*^2 = 82.5, \quad \sum_{j=1}^J j_*^2 = 182, \quad \sum_{k=1}^K k_*^2 = 885.5,$$

となる．一方，BAPC の場合は， $I - 1 = 9$, $J - 1 = 12$, $K - 1 = 21$ となる．HPAC モデルでは，最小化の際に，コウホート効果に圧力がより大きくかかっている． s を動かし， $(s_c + s)^2$ を小さくすることで，ほぼフラットなトレンドのコウホート効果が得られ，直線成分が年齢効果と時点効果に逃げたことが分かる．

なお，非直線成分は識別可能なため，HAPC モデルの各効果の推定値を動かすと，BAPC モデルの結果におおむね一致することも，図 3.1 からは確認できる．2.4.2 節で示した関係から，効果パラメーターの推定値らに， $s > 0$ である適当な sv を足して，HAPC モデルのコウホート効果を反時計回りに回転させて立ち上げてみると，年齢効果も反時計回りに回転してフラットに，時点効果は時計回りに回転してフラットになることが想定される．このように，HAPC モデルはコウホート分析の識別問題，すなわち直線成分の 3 効果への割り振りがうまく処理できていないことも，図 3.1 ではグラフィカルに示されている．

表 3.1 男性大学卒割合：モデル選択の結果

モデル		ABIC	h	Δ ABIC	
BAPC	HAPC			BAPC	HAPC
PC	-	820.25	3	0.00	-63.69
AC	-	821.40	3	1.15	-62.54
APC	-	822.25	4	2.00	-61.69
C	-	826.25	2	6.00	-57.69
-	AC	883.94	3	63.69	0.00
-	C	886.24	2	65.99	2.30
-	PC	887.94	3	67.69	4.01
-	APC	908.71	4	88.46	24.77
AP	-	926.28	3	106.03	42.35

3.7.4 モデル選択によって選ばれる上位モデル

3 要因の有無によってコウホート分析のモデル群を構成し，HAPC モデルと BAPC モデルの推定それぞれでモデル選択によって選ばれるモデルを提示する．ここではモデル群を構成するモデルらの表記を以下のようにする．A を年齢要因，P を時点要因，C をコウホート要因をそれぞれ表すものとして，A，P，C の有無で当該モデルに含まれる要因の有無を表す．例えば，A モデルであれば年齢要因のみのモデル，APC モデルであれば 3 要因すべてを含むモデルである．また，いずれの要因も含まない定数項（総平均）のみのモデルは G で表す．3 要因の効果の有無で，HAPC モデルと BAPC モデルのいずれとも，それぞれ 8 個のモデルを構成することができる．モデルの選択に用いる情報量規準として，ここでは赤池ベイズ情報量規準（ABIC）を用いる (Akaike 1980)．ABIC は，周辺尤度を用いて表される情報量規準である．

$$\text{ABIC} = -2 \log(\text{周辺尤度}) + 2h.$$

ここで， h は周辺尤度のパラメータ数である．本節では，その効果を変量効果とした扱った要因の数に定数項分の 1 を加えたものである．

表 3.1 は，BAPC のモデル群と HAPC のモデル群とをあわせ，ABIC の値が小さいモデルの順に上から並べて掲載したものである．表 3.1 には G モデルの両モデル群での重複を除いた計 15 個のモデルの中から，上位 9 個のモデルまでを掲載している．表 3.1 に示した Δ ABIC は，各モデルの ABIC と，HAPC モデル群，あるいは BAPC モデル群における最適モデルの ABIC との差である．HAPC モデル群の最適モデルは AC モデルであり，BAPC モデル群の最適モデルは PC モデルである．

表 3.1 をみると，上位 4 つのモデルは BAPC モデルが占めており，その後に HAPC モデルの 4 つのモデルが続いている．このデータに関しては，ABIC の観点から，BAPC モデルが HAPC モデ

ルよりも選好される結果を示している。同一の要因を含むモデル間の比較（例えば APC モデル同士）のみにとどまらず、構成されるモデル全体を通して BAPC モデルがより良いモデルを生成しているといえよう。また、HAPC モデル群、BAPC モデル群ともに、それぞれで上位 4 つのモデルは、コウホート要因（C）を含んだモデルである。両モデル群とも、選好される順位の違いはあるが、C、AC、PC、APC のモデルらで構成されている。このことは、コウホート効果が HAPC モデル群と BAPC モデル群のいずれにおいても支配的であることを意味している。

これらそれぞれの上位モデル（C モデル、AC モデル、PC モデル）について、HAPC モデルと BAPC モデルの推定結果を同じ要因で構成されるモデル同士で重ねてプロットしたものが、図 3.2 になる。HAPC モデルによる推定値を破線で、BAPC モデルによる推定値を実線で表記している。図 3.2 の上から、C モデル、AC モデル、PC モデルを提示している。3 要因すべてを含む APC モデルの結果は図 3.1 を参照されたい。

図 3.2 をみると、HAPC モデルの推定においても、フルモデルの APC モデル以外では、コウホート効果が立ち上がっており、男性大学卒の割合の変化を説明しうる妥当な結果が得られている。例えば、AC モデルであれば、時点の効果がすべて 0 であるという制約を置いたことに等しい。そのため 3 効果の識別不足は解消されており、3 効果の直線成分をどのように配分するかという識別問題には直面しない。しかしながら、3 要因をすべて含む APC モデルでは識別問題に直面することになり、コウホート効果のトレンドがフラットになっている（図 3.1）。一方の BAPC モデルでは、4 つのモデルを通してコウホート効果が立ち上がっており、また年齢効果と時点の効果のトレンドはフラットである。BAPC モデルで群は各効果の一貫性が保たれ、いずれのモデルにおいても妥当な結果が得られている。

今回用いた男性大学卒の割合の事例では、コウホート効果が支配的であったため、想定できるモデル群から適切にモデル選択を行えば、HAPC モデルにおいても妥当な結果を導き出せることが示されていた。先験的にモデルの定式化を行うことが危険であり、モデル選択の手続きを踏むことの重要性を改めて示した結果と言える。ただし、実際のデータには年齢効果と時点効果の存在が無視できない事象も存在する。その場合、フルモデルである APC モデルが最適モデルとなることもあり、識別問題をうまく克服できていない HAPC モデルによる APC モデルの推定はコウホート効果を想定よりフラットなものとして導出することになる。

3.8 まとめ

HAPC モデルは今日のコウホート分析において標準的な手法となっているが、フラットなコウホート効果を導き出しやすいという問題点も同時に指摘されてきた。本稿では、HAPC モデルにおいてコウホート効果のトレンドがフラットになるメカニズムを識別問題の観点から説明し、BAPC モデルはその問題点をすでに克服しているモデルであることを、推定値の導出のメカニズム、および、実データへの適用から確認した。

両モデルとも混合効果モデルとして捉えることができ、 L^2 正則化により 3 効果の識別不足を解消している点では共通している。ただし、HAPC モデルでの尤度関数における罰則項の形状は各効



図 3.2 コウホート効果を含む上位モデルらの結果
(HAPC モデル群と BAPC モデル群の C モデル、C モデル、AC モデル、PC モデルの比較)

果の区分数に直接的な影響を受けるものであった。コウホート分析においては、一般にコウホートの区分数が、年齢の区分数、時点数よりも多い。そのため HAPC モデルでは、区分数の多いコウホートの効果のトレンドをよりフラットなものにする圧力が働くことになる。一方で、パラメータの 1 次階差に着目する BAPC モデルでは、区分数の違いが罰則項に与える影響が HAPC モデルほど顕著なものではない。実際に、男性の大学卒割合といった、ほぼコウホート効果のみで説明できる事象において、3 要因を含んだフルモデルでは BAPC モデルのみが明確なコウホート効果を検出していることも確認できた。

HAPC モデルは、コウホート分析において個票データを取り扱うために考案され、それぞれの個人が年齢、および、時点、コウホートの集団を構成することに着目して、3 要因のそれぞれの集団について階層性を導入したものである。このようにモデルを構成した経緯から、HAPC モデルを用いた分析では3 要因の存在を所与として扱うことが多い。しかしながら、HAPC モデルにおいてフルモデルを適用することは、モデルの定式化の誤りにつながる可能性があることを本稿の結果は示唆している。また、HAPC モデルの多くの分析では、加齢による影響はすべての個人に普遍的なものであるとして、年齢効果のみを固定効果として扱うことが多い。このこともまた、コウホート効果のトレンドをフラットなものに近づける作用がある。3 効果の識別問題は極めて数学的な関係であり、分析者の想定に基づいた文脈による解決が大きな危険性を有することを、この HAPC モデルの不全は物語っている。

BAPC モデルは集計データの分析を念頭に経験ベイズ流の視点で構築されたモデルであるが、混合効果モデルの枠組みで捉えなおすことにより HAPC モデルと多くの共通点を有していた。個票データへの拡張も含め、従来、HAPC モデルが適用されてきたほぼ全てのシチュエーションにおいて、パラメータの1 次階差のノルムに着目した推定を適用することが可能である。

付録 3.A 階差行列・階差パラメータ

効果パラメータ $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_n]'$ について, 1 次階差パラメータ $\delta = [\delta_1, \dots, \delta_{n-1}]'$ を考える. ここで $\delta_i = \beta_i - \beta_{i+1}$ である. 1 次階差をとる行列を階差行列 D_n とすると,

$$D_n = [E_{n-1}, \mathbf{0}_{n-1}] - [\mathbf{0}_{n-1}, E_{n-1}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times n}$$

であり,

$$\delta = D_n \beta \quad (3.7)$$

と表すことができる.

階差行列の 1 つの一般逆行列として, 例えば,

$$D_n^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)},$$

で表される, 最下行の要素をすべて 0 とした, 上三角行列を拡張した行列をとることができる.

$$D_n D_n^- = E_{n-1},$$

であるから, 一般逆行列の条件 $D_n D_n^- D_n = D_n$ を満たしていることがわかる.

$$D_n^- D_n = \begin{bmatrix} E_{n-1} & -\mathbf{1}_{n-1} \\ \mathbf{0}'_{n-1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_n - D_n^- D_n = \begin{bmatrix} E_{n-1} & \mathbf{0}_{n-1} \\ \mathbf{0}'_{n-1} & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_{n-1} & -\mathbf{1}_{n-1} \\ \mathbf{0}'_{n-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{(n-1) \times n} & \mathbf{1}_n \end{bmatrix},$$

さらに,

$$\mathbf{1}'_n D_n^- D_n = [\mathbf{1}'_{n-1} \quad -(n-1)]$$

$$\mathbf{1}'_n (E_n - D_n^- D_n) = [\mathbf{0}'_{n-1} \quad n]$$

である.

一般に, 方程式 $Ax = b$ の解は, A の一般逆行列の 1 つを A^- として, $AA^-b = b$ を満たすとき, x と同じ次元の任意のベクトル ξ に対して, $x = A^-b + (E - A^-A)\xi$ と得られる. したがって, (3.7) の一般解は, 任意のベクトル $\xi = [\dots, \xi]'$ に対して,

$$\beta = D_n^- \delta + (E_n - D_n^- D_n) \xi = D_n^- \delta + \xi \mathbf{1}_n \quad (3.8)$$

で与えられる.

第 4 章

性・年齢別集計表の分析

4.1 はじめに

本章では年齢，時点，コウホートの 3 要因を扱うコウホート分析の枠組みから一旦離れ，性別と年齢のクロス集計表（性・年齢別集計表）データについての議論を行う．ここでの性・年齢集計表とは，単一時点の横断面調査のデータをもとに，男女それぞれ回答結果について年齢区分別の集計を行ったものである．コウホート分析の関連で言えば，3 要因のうち扱う要因を年齢に絞り，性別という位相の異なる新たな要因を導入することになる．性別という要因をスコープに入れる際には，男女という 2 つの異なるデータをどのように有機的に統合するかという視点が必要になってくる．性別の要因を考慮したコウホート分析モデルについては後の 5 章において議論するが，本章では 3 要因のうち年齢要因だけを考慮した単純なモデルの検討を行い，コウホート分析モデルへの拡張の前段階として位置づける．性別と年齢の交互作用についての本章での考察は，続くコウホート分析のモデリングにおいて，時点，コウホートともにパラレルに拡張することが可能である．

もちろん，性・年齢別集計表という特定の形式のデータを扱うことは，コウホート分析への拡張の足がかりとしての位置づけだけにとどまらず，それ自体も研究の対象としての価値を有している．先に述べたように性別は多くの学術分野において，その効果が興味の対象となる要因である．それゆえ当該集計表は，調査や実験の結果公表において最も代表的な集計形式の一つである．特に，公的統計調査を初めとした多くの社会調査では当該機関が結果公表を行う際に，必ず提示されるものといって過言ではない．また，継続調査を前提としない一時点の集計表であることから，コウホート表に対して対象とするデータの範囲も大きく広がることになる．このように性・年齢別集計表は研究者がデータを入手して利用することが容易である．本章で提示する内容は，このような形式の集計表を用いて二次分析を行う多くの研究者に対して，有益な情報を提供することが期待できる．

性・年齢別集計表について，本章で主として扱うトピックは次の 2 点である．1 点目は当該集計表を扱う際に研究者らが看過しやすい問題点についての指摘である．集計表データが得られた場合に，研究者の多くは男女別にデータを分けて分析を行うか，男女のデータを合わせて分析を行うか，いずれか一方の方法しかとらないケースが多い．このとき，見落とすモデルの存在があること

を本章では指摘する。

もう 1 点は、年齢の主効果および性と年齢の交互作用効果のそれぞれにパラメータの 1 次階差に変量効果を適用し、当該集計表を分析する上での柔軟なモデルとして新たに提案することである。年齢の主効果および、性別と年齢の交互作用効果のパラメータに 1 次階差制約を変量効果としたモデルでは、各効果について滑らかな曲線を表現でき、統計的モデルとして実質的パラメータ数を節約できる利点がある。また、本章で示すように、固定効果では区別できないモデル同士を、変量効果を導入することにより別のモデルとして扱うことが可能となり、豊かなモデル群を構成できる。

4.2 性・年齢別集計表の分析モデル

4.2.1 問題の所在

一般的に、性・年齢別の集計表を扱う際に分析の主眼に置かれることは、年齢区分間で目的とする事象に対する回答傾向や反応に違いがあるかを男女それぞれについて検証することである。あわせて、男女のデータが同時に揃うことから、年齢効果の傾向が男女によって違いがあるかということにも目が向けられる。すなわち、年齢という要因に対して男女という 2 つの水準間の比較である。このような年齢効果の有無を検証する際に、通常とられるアプローチは、分散分析 (Analysis of Variance: ANOVA) の枠組みのもとで、各性別について年齢の 1 要因分析 (one-way analysis) を行うか、性と年齢の 2 要因分析 (two-way analysis) を行うことである。前者は男女でデータを分けた分析になり、後者は男女双方のデータを合わせた分析となる。

男女別の年齢の 1 要因分析 (以下、本論文では簡単に 1 要因分析と呼ぶ) では、それぞれの性別での年齢効果が得られ、各性別について年齢区分ごとに回答や反応に違いがあるか無いかが焦点となる。対象とする要因が年齢だけであるため、結果の解釈が明快であることが何よりの利点である。ただし、そこでは男女を先験的に異質なものとして捉えてデータを分割しているため、分析から得られた結果は男女での回答傾向や反応に違いがあることを前提としたものとなる。

一方の男女のデータを合わせた年齢と性別の 2 要因分析 (以下、本論文では簡単に 2 要因分析と呼ぶ) は、性という要因を考慮することで、男女間に年齢による効果の異質性があることを視野に入れつつも、年齢効果に性差がほとんどないという可能性も受容することができる。また性と年齢の交互作用効果は、各年齢による性差の違いを反映したものであるが、見方を変えれば、各年齢間における男女の傾向の近さや遠さを捉えたものと解釈することもできる。

ここで我々が注目したい性・年齢別集計表を用いた分析を行う際の問題点は、多くの分析では往々にして 1 要因分析と 2 要因分析のいずれか一方のみが行われており、両者を同時に、あるいは統合したアプローチがとられることは少ないことである。男女別に年齢の 1 要因分析のみ行う場合は、前述したように、男女の年齢効果が同等である可能性を見落としがちである。さらにデータをほぼ 2 分割することによる検出力の低下も考慮すべきである。一方、性別と年齢の 2 要因分析のみ行う場合は、交互作用効果の有無にのみ関心が向かいがちである。そのとき、年齢について主効果と性別との交互作用効果を足し合わせた、年齢の総効果自体を評価することがおろそかになりやす

い．年齢の総効果でみた場合，性差自体はあるものの，いずれかの性では実質的に年齢効果がないケースを見落としている可能性がある．本節では 1 要因分析と 2 要因分析を一般化線形モデルの枠組みで統一的に扱い，提示した回帰モデル群からモデル選択を行う．モデル選択の結果から各効果の有無について判断を行い，1 要因分析と 2 要因分析のいずれかのみしか行わない場合の問題点を実際のデータへの適用例を交えて指摘する．

4.2.2 男女別に行う年齢の 1 要因分析

男女別に年齢の 1 要因分析を行うことを，簡単に 1 要因分析と呼ぶことを改めて確認しておく．

1 要因分析は，サンプルを男女で分割して男女別々に年齢効果を推定することに等しい．ここでは何らかの質問について，その回答割合に焦点をあてたロジット・モデルを例にとり説明する．

I 個の年齢区分 ($i = 1, \dots, I$) を与えられたとき，それぞれの区分を基準に年齢要因をダミー変数分解する場合を考える．男性を表す添字を m ，女性を表す添字を w を導入して，男女それぞれの回答選択肢の選択確率を π_i^m ($0 < \pi_i^m < 1$)， π_i^w ($0 < \pi_i^w < 1$) とし，それらをロジット変換したものをそれぞれ η_i^m ， η_i^w とする．男性の第 i 年齢区分の効果を $\beta_i^{A,m}$ ，女性の第 i 年齢区分の効果を $\beta_i^{A,w}$ とし，男女のモデルにおける定数項をそれぞれ $\beta^{G,m}$ ， $\beta^{G,w}$ とする

男女のそれぞれのモデル式は，

$$\begin{aligned}\eta_i^m &\equiv \log \frac{\pi_i^m}{1 - \pi_i^m} = \beta^{G,m} + \beta_i^{A,m}, \\ \eta_i^w &\equiv \log \frac{\pi_i^w}{1 - \pi_i^w} = \beta^{G,w} + \beta_i^{A,w},\end{aligned}\tag{4.1}$$

と表される．男女それぞれの年齢効果には，ゼロ和制約を課しておく．

$$\sum_{i=1}^I \beta_i^{A,m} = 0, \quad \sum_{i=1}^I \beta_i^{A,w} = 0.$$

このとき， $\beta^{G,m}$ と $\beta^{G,w}$ は男女それぞれの総平均効果となる．

次に，(4.1) をベクトルと行列を用いた表記にしておく．年齢要因において基本となるデザイン行列を

$$\tilde{\mathbf{X}}_A = \mathbf{E}_I\tag{4.2}$$

とおく．男女それぞれの年齢効果を表す I 次元パラメータベクトルらを

$$\boldsymbol{\beta}^{A,m} = \begin{bmatrix} \beta_1^{A,m} \\ \vdots \\ \beta_I^{A,m} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}^{A,w} = \begin{bmatrix} \beta_1^{A,w} \\ \vdots \\ \beta_I^{A,w} \end{bmatrix},$$

とし，ロジットおよび選択確率を表す I 次元ベクトルらを

$$\boldsymbol{\eta}^m = \begin{bmatrix} \eta_1^m \\ \vdots \\ \eta_I^m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}^w = \begin{bmatrix} \eta_1^w \\ \vdots \\ \eta_I^w \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\pi}^m = \begin{bmatrix} \pi_1^m \\ \vdots \\ \pi_I^m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\pi}^w = \begin{bmatrix} \pi_1^w \\ \vdots \\ \pi_I^w \end{bmatrix},$$

とすると、男女それぞれのモデルは、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}^m &\equiv \log \boldsymbol{\pi}^m - \log(\mathbf{1}_I - \boldsymbol{\pi}^m) = \boldsymbol{\beta}^{G,m} \mathbf{1}_I + \tilde{\mathbf{X}}_A \boldsymbol{\beta}^{A,m}, \\ \boldsymbol{\eta}^w &\equiv \log \boldsymbol{\pi}^w - \log(\mathbf{1}_I - \boldsymbol{\pi}^w) = \boldsymbol{\beta}^{G,w} \mathbf{1}_I + \tilde{\mathbf{X}}_A \boldsymbol{\beta}^{A,w}, \end{aligned}$$

と表せる。ここで \log は要素ごとに自然対数をとるものとする。

男女それぞれの総平均と年齢効果のパラメータを合わせた、

$$\boldsymbol{\beta}^{G,mw} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}^{G,m} \\ \boldsymbol{\beta}^{G,w} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}^{A,mw} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}^{A,m} \\ \boldsymbol{\beta}^{A,w} \end{bmatrix},$$

および、 $2I$ 次元のロジットのベクトル

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^m \\ \boldsymbol{\eta}^w \end{bmatrix},$$

を用いて、男女のモデルを統一的に表せば、1 要因分析において全ての効果を含んだモデルは

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I & \mathbf{1}_I \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta}^{G,mw} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_A & \tilde{\mathbf{X}}_A \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta}^{A,mw} = (\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{1}_I) \boldsymbol{\beta}^{G,mw} + (\mathbf{E}_2 \otimes \tilde{\mathbf{X}}_A) \boldsymbol{\beta}^{A,mw},$$

となる。ここで、行列の空白で表された要素にはすべて 0 が入り、 \otimes はクロネッカー積を表している。

年齢と性別の 2 要因分析

年齢と性別の 2 要因を考慮に入れて分析することを、簡単に 2 要因分析と呼ぶことを確認しておく。

2 要因分析についても 1 要因分析と同様の設定でモデル式を構成する。1 要因分析では明示的に考慮されていなかった性別の主効果、および、性別と年齢の交互作用効果を導入することができる。性別については男性を 1、女性を 2 として、各要因の効果を捉える。性別 s 、第 i 年齢区分について、回答選択肢の選択確率を π_{is} ($0 < \pi_{ij} < 1$) とし、それをロジット変換したものを η_{is} とする。 η_{is} を各効果の線形和に分解した 2 要因分析のモデルは次のようになる。

$$\eta_{is} \equiv \log \frac{\pi_{is}}{1 - \pi_{is}} = \beta^G + \beta_s^S + \beta_i^A + \beta_{is}^{AS}. \quad (4.3)$$

ここで、 β たちの上付きの添字は、 G が総平均効果、 S が性別の主効果、 A が年齢の主効果を示し、 AS が性別と年齢の交互作用効果を表す。

パラメータの推定値を一意に定めるために、性別と年齢の主効果には次のゼロ和制約を課しておく。

$$\sum_{s=1}^2 \beta_s^S = \sum_{i=1}^I \beta_i^A = 0,$$

同様に性別と年齢の交互作用効果には、性別 s 、年齢区分 i ごとに、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^I \beta_{is}^{AS} &= 0 \quad (s = 1, 2), \\ \sum_{s=1}^2 \beta_{is}^{AS} &= 0 \quad (i = 1, \dots, I) \end{aligned} \quad (4.4)$$

のゼロ和の制約を課す。

モデル (4.3) をベクトルと行列を用いた表記にする。性別要因のデザイン行列 \mathbf{X}_S 、年齢要因のデザイン行列 \mathbf{X}_A 、性別と年齢交互作用要因のデザイン行列 \mathbf{X}_{AS} は、それぞれ

$$\mathbf{X}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I & \\ & \mathbf{1}_I \end{bmatrix} = \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{1}_I,$$

$$\mathbf{X}_A = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_A \\ \tilde{\mathbf{X}}_A \end{bmatrix} = \mathbf{1}_2 \otimes \tilde{\mathbf{X}}_A,$$

$$\mathbf{X}_{AS} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_A & \\ & \tilde{\mathbf{X}}_A \end{bmatrix} = \mathbf{E}_2 \otimes \tilde{\mathbf{X}}_A,$$

で表される。ここで、 $\tilde{\mathbf{X}}_A$ は (4.2) で示した 1 要因分析において男女それぞれの年齢要因のデザイン行列を表す際に用いた行列である。これらのデザイン行列に対応するパラメータらは

$$\boldsymbol{\beta}^S = \begin{bmatrix} \beta_1^S \\ \beta_2^S \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}^A = \begin{bmatrix} \beta_1^A \\ \vdots \\ \beta_I^A \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}^{AS} = \begin{bmatrix} \beta_{11}^{AS} \\ \vdots \\ \beta_{I1}^{AS} \\ \beta_{12}^{AS} \\ \vdots \\ \beta_{I2}^{AS} \end{bmatrix},$$

となる。

これらの表記、および、1 要因分析と同じくロジットを表すベクトル $\boldsymbol{\eta}$ を用いると、(4.3) は、

$$\boldsymbol{\eta} \equiv \log \boldsymbol{\pi} - \log(\mathbf{1}_{2I} - \boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{\beta}^G \mathbf{1}_{2I} + \mathbf{X}_S \boldsymbol{\beta}^S + \mathbf{X}_A \boldsymbol{\beta}^A + \mathbf{X}_{AS} \boldsymbol{\beta}^{AS}$$

と表せる。

4.2.3 モデル選択を用いた性・年齢効果の有無

モデル群の表記

与えられた性・年齢別の集計表を説明する際に、どのモデルが妥当なモデルであるかを判断するには、想定しうるモデル群の中から何らかの情報量規準を用いて最適モデルを選択することにより行う。そこで選ばれたモデルをもとに、各効果の有無を判別する。モデル選択の対象とするモデル

群は、性別、年齢のそれぞれの主効果および交互作用効果をモデルに含めるかどうかにより構成することができる。以下に各要因分析で想定されるモデルらを具体的に列挙するが、統計モデルの表記として、性別の主効果を S、年齢の主効果を A であらわす。

まず、1 要因分析に相等するモデルを考えると、男女それぞれについて、

$$\beta^G \mathbf{1}_I, \quad \text{および} \quad \beta^G \mathbf{1}_I + \tilde{\mathbf{X}}_A \beta^A,$$

で表される年齢効果の有無で 2 つのモデルを構成できることから、男女を組み合わせて次の 4 つのモデルになる。

1 要因分析モデル群

(モデル名)	(モデル式)	
S モデル	$\eta^m = \beta^{G,m} \mathbf{1}_I,$	$\eta^w = \beta^{G,w} \mathbf{1}_I;$
S- A_m モデル	$\eta^m = \beta^{G,m} \mathbf{1}_I + \tilde{\mathbf{X}}_A \beta^{A,m},$	$\eta^w = \beta^{G,w} \mathbf{1}_I;$
S- A_w モデル	$\eta^m = \beta^{G,m} \mathbf{1}_I,$	$\eta^w = \beta^{G,w} \mathbf{1}_I + \tilde{\mathbf{X}}_A \beta^{A,w};$
S- $A_m A_w$ モデル	$\eta^m = \beta^{G,m} \mathbf{1}_I + \tilde{\mathbf{X}}_A \beta^{A,m},$	$\eta^w = \beta^{G,w} \mathbf{1}_I + \tilde{\mathbf{X}}_A \beta^{A,w};$

1 要因分析の場合は、男女でサンプルを分けることになり、男女それぞれで異なる年齢効果が考えられる。S モデルは男女とも年齢効果がない切片のみのモデルである。それぞれの総平均効果 $\beta^{G,m}$ と $\beta^{G,w}$ の差を性別の効果 (S) として捉えることができ、 $\beta^{G,m}$ と $\beta^{G,w}$ の平均を男女を合わせた総平均と捉えることができるため、このモデルは 2 要因分析における S モデル、すなわち性別の主効果のみあるモデルと同等のモデルとなる。S- A_m モデルと S- A_w モデルは、一方の性にのみ年齢効果があり、他方の性には年齢効果がないモデルである。S- $A_m A_w$ モデルは、男女ともに年齢効果があるモデルであり、1 要因分析においてすべての要因が含まれたモデルとなる。

次に、2 要因分析に相等するモデルを列挙すると、下記 5 つのモデルになる。モデル名の上で性別と年齢の交互作用効果の表記は [AS] としている。

2 要因分析モデル群

(モデル名)	(モデル式)
G モデル	$\eta = \beta^G \mathbf{1}_{2I},$
S モデル	$\eta = \beta^G \mathbf{1}_{2I} + \mathbf{X}_S \beta^S,$
A モデル	$\eta = \beta^G \mathbf{1}_{2I} + \mathbf{X}_A \beta^A,$
S-A モデル	$\eta = \beta^G \mathbf{1}_{2I} + \mathbf{X}_S \beta^S + \mathbf{X}_A \beta^A,$
S-A[AS] モデル	$\eta = \beta^G \mathbf{1}_{2I} + \mathbf{X}_S \beta^S + \mathbf{X}_A \beta^A + \mathbf{X}_{AS} \beta^{AS}.$

G モデルは総平均効果のみで年齢と性別のそれぞれの主効果、年齢と性別の交互作用効果の双方と

もないモデルである。S モデルは性別の主効果のみがあるモデルである。このモデルは、リパラメタライズを行えば、1 要因分析での S モデルと同等のものとなる。A モデルは年齢の主効果のみがあるモデルで、S-A モデルは性別と年齢の主効果がともにあるモデルである。S-A[AS] モデルは、性別と年齢それぞれの主効果と交互作用効果があるモデルであり、2 要因分析のもとにおいて想定しうるすべての要因が含まれたモデルとなる。なお、性別と年齢の交互作用効果には、(4.4) で示したゼロ和制約を課しているため、交互作用効果を単体で用いるモデルは、各年齢区分について男女で年齢効果を完全に打ち消しあう状況を想定することになる。現実の世界においてそのような状況を想定することは難しいため、交互作用効果を単体で用いるモデルは比較するモデル群からはあらかじめ除外しておく。

4.2.4 1 要因分析と 2 要因分析の統合

最終的に 1 要因分析モデルと 2 要因分析モデルを統一して分析することを考慮して、各モデル間のデザイン行列とパラメータの関係がわかるように整理しておく。 $\boldsymbol{\eta} = [(\boldsymbol{\eta}^m)', (\boldsymbol{\eta}^w)']'$ であることに注意して、モデル群は以下のように列挙できる。モデル名の後の数字は、ゼロ和の制約を差し引いた各モデルに含まれる自由なパラメータの数である。

1 要因分析モデル群

(モデル名)	(自由な パラメータ数)	(モデル式)
S モデル	2	$\eta = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I & \\ & \mathbf{1}_I \end{bmatrix} \beta^{G,mw},$
S- A_m モデル	$I + 1$	$\eta = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I & \\ & \mathbf{1}_I \end{bmatrix} \beta^{G,mw} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_A \\ \mathbf{0}_I \end{bmatrix} \beta^{A,m}, \quad (\beta^{A,w} = \mathbf{0}),$
S- A_w モデル	$I + 1$	$\eta = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I & \\ & \mathbf{1}_I \end{bmatrix} \beta^{G,mw} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_I \\ \tilde{\mathbf{X}}_A \end{bmatrix} \beta^{A,w}, \quad (\beta^{A,m} = \mathbf{0}),$
S- $A_m A_w$ モデル	$2I$	$\eta = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I & \\ & \mathbf{1}_I \end{bmatrix} \beta^{G,mw} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_A & \\ & \tilde{\mathbf{X}}_A \end{bmatrix} \beta^{A,mw},$

2 要因分析モデル群

(モデル名)	(自由な パラメータ数)	(モデル式)
G モデル	1	$\eta = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I \\ \mathbf{1}_I \end{bmatrix} \beta^G,$
S モデル	2	$\eta = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I \\ \mathbf{1}_I \end{bmatrix} \beta^G + \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I & \\ & \mathbf{1}_I \end{bmatrix} \beta^S,$
A モデル	I	$\eta = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I \\ \mathbf{1}_I \end{bmatrix} \beta^G + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_A \\ \tilde{\mathbf{X}}_A \end{bmatrix} \beta^A,$
S-A モデル	$I + 1$	$\eta = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I \\ \mathbf{1}_I \end{bmatrix} \beta^G + \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I & \\ & \mathbf{1}_I \end{bmatrix} \beta^S + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_A \\ \tilde{\mathbf{X}}_A \end{bmatrix} \beta^A,$
S-A[AS] モデル	$2I$	$\eta = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I \\ \mathbf{1}_I \end{bmatrix} \beta^G + \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I & \\ & \mathbf{1}_I \end{bmatrix} \beta^S + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_A \\ \tilde{\mathbf{X}}_A \end{bmatrix} \beta^A + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_A & \\ & \tilde{\mathbf{X}}_A \end{bmatrix} \beta^{AS}.$

なお、パラメータベクトルら、 $\beta^{A,m}$, $\beta^{A,w}$, $\beta^{A,mw}$, β^S , β^A , β^{AS} には、それぞれ適当なゼロ和の制約を課しておく。

このように、性別要因のデザイン行列 $\mathbf{1}_I$ および年齢要因のデザイン行列 $\tilde{\mathbf{X}}_A$ と、それらに対応するパラメータベクトルをうまく組み合わせることにより、1 要因分析と 2 要因分析のモデルらを同じ枠組みのもとで、モデル選択の対象として扱うことが可能となる。このうち、S モデルは両要因分析のモデル群に重複して含まれており、また、リパラメタライズを行うことによって、1 要因分析のフルモデルである S- $A_m A_w$ モデルと 2 要因分析のフルモデルである S-A[AS] モデルは同等のものとなる (付録 4.A.1 参照)。そのため、両要因を考慮した分析では、合計 7 個のモデルからモデル群は形成されることになる。

さて、1 要因分析と 2 要因分析のそれぞれに現れるモデルを見比べると、片方の要因分析しか行

表 4.1 1 要因分析モデル群と 2 要因分析モデル群

		2 要因分析モデル					
		G	S	A	S-A	S-A[AS]	計
1 要因分析モデル	S	4	8	3	0	0	15
	S-A _m	2	1	1	1	0	5
	S-A _w	1	0	4	6	0	11
	S-A _m A _w	0	0	17	36	8	61
	計	7	9	25	43	8	92

わない場合の問題点が分かる。1 要因分析では男女で共通の年齢の主効果を想定したモデル（A モデルと AS モデル）がないため、男女で年齢効果が同等であるという検証が行われない。一般に推定値では $\hat{\beta}^{A,m} \neq \hat{\beta}^{A,w}$ であるので、結果として男女で年齢の効果が異なるというインプリケーションを導きだしやすい。一方で、2 要因分析を行う場合の専らの関心は交互作用効果の有無であり、S-A[AS] モデルが選ばれるか否かということである。ただし 2 要因分析だけを行い S-A[AS] モデルが選ばれた場合でも、性別と年齢交互作用効果に年齢の主効果を足し合わせた年齢の総効果というべき $\beta^A + \beta^{AS}$ が、片方の性については、ほぼ 0 となることもありうる。例えば女性の年齢総効果がほぼ 0 の場合、1 要因分析では男性の年齢効果のみが含まれ、女性の年齢効果が含まれない S-A_m モデルが選ばれる可能性がある。パラメータ数の観点からは、S-A_m モデルは S-A[AS] モデルよりも節約的なモデルである。そのため、2 要因分析のみを行った場合は、最適なモデルの存在を見落とす可能性がある。

4.2.5 適用事例：「日本人の意識調査」NHK 放送文化研究所

前節では、1 要因分析か 2 要因分析のいずれか一方しか考慮しなかった場合、想定できるモデルの中での最適なモデルの存在を見落とす可能性について指摘したが、実際に最適なモデルを見落とす可能性がどの程度あるかを実際のデータを用いて確認してみる。確認に用いたデータは NHK 放送文化研究所が実施している「日本人の意識調査」（2008 年調査）である*1。この調査は、人々の意識や考え方について網羅的に調査しているもので、16 歳以上の国民を対象にした全国調査である。総サンプルサイズは 3,103 である。一般公開されているデータからは性、年齢階級別の集計が可能である。回答方式は、質問に対して「そう思う」など、3 から 6 程度のカテゴリーを示して当てはまるものを選ぶ方式である。ここでは、収録されているほぼすべての質問にあたる 92 項目から第 1 選択肢の値を対象にした。

この実際のデータをもとに、1 要因分析モデル群と 2 要因分析モデル群を双方考慮して分析を行う場合と、いずれか片方のモデル群だけを対象にした場合で、選ばれるモデルにどのような相違が

*1 東京大学社会科学研究所附属社会調査・データアーカイブ研究センター SSJ データアーカイブから「日本人の意識調査（NHK 放送文化研究所）」の個票データの提供を受けました

現れるかを提示する。モデルの選択には赤池情報量規準（AIC）を用いた。以下では、1 要因分析モデル群と 2 要因分析モデル群を合わせたモデル群を、「すべてのモデル群」と表記する。結果の提示は、

- 1) 1 要因分析モデル群と 2 要因分析モデル群のそれぞれで選ばれた最適モデルの比較
- 2) 1 要因分析モデル群ないし 2 要因分析モデル群で選ばれた最適モデルと、すべてのモデル群で選ばれた最適モデルの比較

の 2 点を行う。1) の結果は、各要因分析モデル群で選ばれるモデルの傾向の違いを提示するものである。2) の結果は、いずれか一方の要因分析しか行わない場合、想定しうるモデル群の中により良いモデルが他にあるか否かを示すものである。

1 要因分析モデル群と 2 要因分析モデル群のそれぞれで選ばれた最適モデルの比較

1 要因分析モデル群と 2 要因分析モデル群の、それぞれで選択されたモデルの結果をクロス集計したものが、表 4.1 である。両モデル群で同等のモデルとなるのは、S モデル、および、両モデル群でのフルモデル（1 要因分析モデルの $S-A_m A_w$ モデルと 2 要因分析モデルの $S-A[AS]$ モデル）である。両モデル群で S モデルが選ばれたケースは 8 項目である。また、1 要因分析モデル群で $S-A_m A_w$ が選ばれ、2 要因分析モデル群で $S-A[AS]$ モデルが選ばれたケースも 8 項目であった。よって、対象とした質問項目全体で同等モデルが選ばれた割合は、全 92 項目中 16 項目で 17% に過ぎず、多くの質問項目では両モデル群で異なるモデルが選ばれていたことになる。

それでは、1 要因分析のモデルだけを対象行った場合と 2 要因分析モデル群を対象にした場合とで、選ばれたモデルには具体的にどのような相違があるだろうか。ここでは、1 要因分析モデルを基準に、表 4.1 を行方向にみていく。

まず、1 要因分析の S モデル、15 項目についてである。S モデルは性差のみを有し、年齢効果がないことを含意するモデルである。ただし、男女でデータを分けて分析を行う 1 要因分析モデルの文脈では、S モデルは男女それぞれの総平均のみで構成されるモデルであることを示しているに過ぎず、性差の存在そのものを明示的に表したモデルというわけではないことに注意する。1 要因分析で S モデルが選ばれた項目では、うち 8 項目が 2 要因分析でも S モデルが選ばれており、他のモデルらに比べて最も多く選ばれた結果となっている。ただし、残りの 7 項目では S モデル以外が 2 要因分析モデルで選ばれており、両モデル群で同一のモデルが選ばれたか否かという観点からは、その割合はほぼ同等程度ということになる。S モデル以外のモデルとして選ばれていたのは、G モデル、および、A モデルである。これらは、両者ともに性差がない（男女の総平均を同一とする）モデルである。先に述べたように、1 要因分析モデルの枠組みでは、2 要因分析モデルまで想定の対象を広げると、性差があるとはいえないことを結論づけるモデルが選ばれうることを示唆している。また、A モデルは年齢効果が含まれることを含意したモデルである。男女それぞれに弱い年齢効果がある場合、男女個別のデータで分析を行う 1 要因分析ではその効果を認めることができず、男女でデータを統合して分析を行う 2 要因分析では、データのサイズが大きくなることで、その効果が認められる可能性があるといえよう。

次に、男女いずれかの年齢効果があることを含意した、 $S-A_m$ モデルと $S-A_w$ モデルの 16 項目についてである。これらのモデルは 2 要因分析モデル群に同等のモデルは存在せず、2 要因分析モデルでは男女ともに年齢効果があるか、双方にないかのいずれかを示すことしかできない。1 要因分析モデル群でこれらのモデルが選ばれた場合、2 要因分析モデルにおいて、男女年齢効果がないことを含意した G モデル、および、S モデルが選ばれたのは 4 項目についてである。一方、年齢効果があることを含意した A モデル、S-A モデルが選ばれたのは 12 項目であった。1 要因分析において、いずれかの性で年齢効果があるモデルが選ばれている場合は、2 要因分析では両者に年齢効果があるとするモデルが選ばれる傾向にあるといえよう。

最後に、男女それぞれに異なる年齢効果があることを含意する $S-A_m A_w$ モデルが該当した 61 項目についてみる。 $S-A_m A_w$ モデルは 1 要因分析モデルの中で最も多く選ばれたモデルであった。1 要因分析で $S-A_m A_w$ モデルが選ばれた場合は、2 要因分析モデルで年齢効果がないことを含意した G モデル、および、S モデルが選ばれた項目はなかった。1 要因分析で男女ともに年齢効果が認められる場合は、2 要因分析でも男女に年齢効果の存在を含意したモデルが選ばれていることになる。男女の年齢効果が同等となる A モデル、S-A モデルが選ばれた項目は、それぞれ 17 項目と 36 項目である。男女で年齢効果が異なるモデルである S-A[AS] モデルが選ばれた項目は 8 項目である。1 要因分析においては年齢効果の男女差は明示的に提示されないが、男女差を考慮する 2 要因分析では男女間で効果を同等とする傾向が強いようである。

以上の結果をまとめると、この実データを用いた例では、1 要因分析モデルでは男女ともに年齢効果があり、かつそれらが異なることを含意した $S-A_m A_w$ モデルが選ばれていた。一方の 2 要因分析モデル枠組みでみると、男女に年齢効果があり、かつその効果が等しい S-A モデル、A モデルが、男女で年齢効果が異なることを含意する S-A[AS] モデルよりも多く選ばれている。データへの当てはまりの点からは、男女で異なる年齢効果を設定した方が当てはまりはよくなる。ただし、パラメータ数は、同一モデルの方が異なるモデルよりも、当然のことながら少なくなる。例えば、S-A モデルのパラメータ数は $I+1$ (ここでは、14) であるのに対し、S-A[AS] モデルは $2I$ ($= 26$) となる。2 要因分析モデルでは、フィッティングとパラメータのペナルティとの相対で、男女の年齢効果を同一として扱うモデルが選好されていたことになる。S モデルの場合も、該当する項目の総数は少ないものの、傾向は同様である。1 要因分析で性差がある（男女でそれぞれの総平均が異なる）S モデルが選ばれていた項目でも、2 要因分析では性差がない（男女それぞれの総平均を同一とする）モデルである G モデル、A モデルが少なからず選ばれていた。

1 要因分析モデル群ないし 2 要因分析モデル群で選ばれた最適モデルと、すべてのモデル群で選ばれた最適モデルの比較

ここでは、1 要因分析モデル群ないし 2 要因分析モデル群で選ばれた最適モデルと、すべてのモデル群で選ばれた最適モデルの比較、の結果を提示する。これは、いずれか片方の要因分析しか行わない場合に、どのようなモデルや状況を見落とす可能性があるかを示したものとなる、表 4.2 が、想定するモデル群として、1 要因分析モデル群のみとすべてのモデル群を設定したときの、それぞれで選択された最適モデルの比較である。同様に、表 4.3 が、2 要因分析モデル群のみとすべての

表 4.2 1 要因分析モデル群とすべてのモデル群

		すべてのモデル群							
		G	S	A	S-A	S-A _m	S-A _w	S-A _m A _w	計
1 要因分析モデル	S	4	8	3	0	0	0	0	15
	S-A _m	1	0	1	1	2	0	0	5
	S-A _w	1	0	3	5	0	2	0	11
	S-A _m A _w	0	0	17	36	0	0	8	61
	計	6	8	24	42	2	2	8	92

表 4.3 2 要因分析モデル群とすべてのモデル群

		すべてのモデル群							
		G	S	A	S-A	S-A _m	S-A _w	S-A[AS]	計
2 要因分析モデル	G	6	0	0	0	1	0	0	7
	S	0	8	0	0	1	0	0	9
	A	0	0	24	0	0	1	0	25
	S-A	0	0	0	42	0	1	0	43
	S-A[AS]	0	0	0	0	0	0	8	8
	計	6	8	24	42	2	2	8	92

モデル群で、それぞれ選択されたモデルである。

まず、1 要因分析モデルについての結果である、表 4.2 をみてる。すべてのモデル群を対象にした場合でも、1 要因分析モデル群のみを対象にした最適モデルと一致しているのは、S モデルの 8 項目、S-A_m と S-A_w のあわせて 4 項目、S-A[AS] モデルの 8 項目である。計 20 項目であり、全 92 項目に占める割合は、22% である。1 要因分析モデルで最も選ばれたモデルは S-A_mA_w モデルであるが、すべてのモデル群を対象にすると、その多くでは男女で年齢効果が同等であるとする S-A モデルか A モデルが最終的に選ばれている。本節の冒頭で述べたように、男女のデータを分けて 1 要因分析のみを行った場合は、男女で年齢効果に差があるとは言えない可能性を見落とすことを指摘した。この実際のデータにおいては、そのような状況が多く見られたことになる。

次に、2 要因分析モデルについての結果を示した表 4.3 をみてる。2 要因分析のみのモデル群から選ばれたモデルが、すべてのモデル群を対象にした場合でも選ばれていた項目は、表 4.3 において G モデルから S-A モデルまでの対角線上、および、S-A[AS] モデルで一致している箇所に配置されている。合計 88 項目であり、全 92 項目に占める割合は 96% で、ほぼすべての項目で 2 要因分析モデル群が最終的に選ばれたことになる。

先に我々が指摘した 2 要因分析モデルのみを対象に分析を行う問題点は、性と年齢の交互作用効果の有無のみに関心が向かい片方の性の年齢効果が実質的にないことを見逃すことであった。片方

の性にのみ年齢効果が認められモデルは、 $S-A_m$ モデルと $S-A_w$ モデルである。性と年齢の交互作用効果が認められる $S-A[AS]$ モデルが 2 要因分析モデル群で選ばれた項目で、最終的に $S-A_m$ モデル、あるいは $S-A_w$ モデルが選ばれた項目は存在しなかった。

4.3 パラメータの 1 次階差を変量効果としたモデル

4.3.1 男女の年齢効果に近さを考える

本節では、年齢の主効果および年齢と性別の交互作用効果のパラメータについてその 1 次階差を変量効果として扱うモデルを導入する。年齢の主効果のパラメータの 1 次階差を変量効果としたものは、考え方としては前章で扱った BAPC モデルの年齢効果と同じものである。年齢主効果のパラメータに 1 次制約を変量効果としたモデルは、当該効果を固定効果として扱ったモデルに対して、実質的にパラメータ数が大きく節約されるという利点を有している。モデルのパラメータ数を節約する観点からは、年齢の主効果に直線や 2 次曲線など、特定の関数形を仮定する方法やいくつかの年齢区分を統合して再カテゴライズする方法もあげられるが、仮定の制約が強すぎたり、仮定そのものが恣意的すぎる問題が残されている。またパラメータのノルムに着目した推定としては、前章の HAPC モデルと同様に、効果パラメータそのものの変量効果とするモデルも考えられる。ここでのパラメータの階差に着目したモデルは、年齢という変数に順序性が備わっていることを積極的に活用したものであり、隣り合う年齢区分の効果が近いことを先験的に仮定することで、推定される効果により滑らかさをもたらすことが期待できる（漸進的変化の条件）。

一方、年齢と性別の交互作用効果について、そのパラメータの 1 次階差を変量効果として扱うモデルは、本節で初めて取り扱うものになる。その具体的構成は後に詳しく説明するが、年齢の主効果に課した 1 次階差制約を援用する形で行う。性と年齢の交互作用効果は、それぞれの性に対して男女共通の年齢の主効果で説明できない部分として捉えられ、交互作用効果を導入する意図はまさにその違いを測ることにある。ただし、男女間で年齢の効果が完全に一致しない場合でも、年齢に沿った反応の変化はある程度、男女間で近い動きをしているケースも想定される。例えば、就職や結婚などのライフイベントは、男女間である程度同じ時期に起こる。それらのイベントが個人の意識や考え方へ与える影響は、効果の大きさは男女間で異なるものの、意識等が変化するという点では共通している。本節で扱う交互作用効果に変量効果を導入するモデルは、年齢による変化（階差）の男女間の差に着目し、この階差の差が従う分布に正規分布を仮定するものである。結果的に、この手続きは男女それぞれの年齢（総）効果に近さという概念を導入することになっている。

このように年齢と性別の交互作用効果に対して男女間での近さを導入することは、モデルで表すことができる表現の幅を従来の固定効果のモデル群よりも大きく拡張することにもつながる。本節ではその概要についても詳しく述べることにする。

4.3.2 モデルの設定

以下では、2 要因分析のフルモデルである S-A[AS] モデルのパラメータの 1 次階差に、変量効果を入れる手続きについて説明を行う。ここで変量効果としてあつかう効果は、年齢の主効果 (A)、および性と年齢の交互作用効果 ([AS]) になる。前節までと同様に、扱うデータは性・年齢別の集計表を想定し、昇順に並んだ年齢区分についてインデックスを表す添字を $i (= 1, \dots, I)$ 、性別を表す添字を $s (\in \{1, 2\})$ とし、 s について男性を 1、女性を 2 とする。なお、性別の主効果は固定効果として扱い、

$$\sum_{s=1}^2 \beta_s^S = 0$$

のゼロ和制約を効果パラメータに課しておく。

年齢の主効果に関するする手続きは以下の通りである。年齢主効果のパラメータ β_i^A は男女で共通であり、

$$\sum_i \beta_i^A = 0$$

で表されるゼロ和の制約を効果パラメータらに課す。その上で、年齢主効果の階差パラメータとして、

$$\delta_i^A = \beta_i^A - \beta_{i+1}^A$$

を考え、パラメータベクトル $\delta^A = [\delta_1^A, \dots, \delta_{I-1}^A]'$ が従う分布について、

$$\delta^A \sim \mathcal{N}(0, \sigma_A^2 E_{I-1})$$

を設定する。

次に、年齢と性別の交互作用効果について考える。効果パラメータの表記は、これまでと同様に $\beta_{is}^{AS} = [\beta_{11}^{AS}, \dots, \beta_{1I}^{AS}, \beta_{12}^{AS}, \dots, \beta_{2I}^{AS}]'$ を用いる。交互作用効果については、パラメータの値を一意に定めるため、年齢と性別それぞれの方向についてゼロ和の制約を課しておく必要がある。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^I \beta_{is}^{AS} &= 0, \quad (s = 1, 2), \\ \sum_{s=1}^2 \beta_{is}^{AS} &= 0, \quad (i = 1, \dots, I). \end{aligned} \tag{4.5}$$

この β_{is}^{AS} を用いて、年齢と性別の交互作用効果の階差パラメータ δ_i^{AS} を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \delta_i^{AS} &= (\beta_{i,1}^{AS} - \beta_{i+1,1}^{AS}) - (\beta_{i,2}^{AS} - \beta_{i+1,2}^{AS}) \\ &= (\beta_{i,1}^{AS} - \beta_{i,2}^{AS}) - (\beta_{i+1,1}^{AS} - \beta_{i+1,2}^{AS}) \end{aligned} \tag{4.6}$$

すなわち、交互作用効果の階差パラメータ δ_i^{AS} は、男女それぞれで隣り合う年齢区分 i と $i+1$ のパラメータの階差をとった上で、男女の（階）差をとったものである。男女それぞれの年齢に沿った

変化の男女間での差ということになる．あるいは、年齢と性別のパラメータのインデックスは各々の総和をとる操作について対称な関係にあるため、先に同一の年齢区分 i のパラメータについて男女で差をとった上で、隣り合う年齢区分 i と $i+1$ の階差をとる手続きでも同じ値が得られる．性差の年齢に沿った変化としても解釈できる．いずれの解釈においても、この階差パラメータ δ_i^{AS} は男女の年齢効果の近さを表す量として捉えることができよう．このように構成した S-A[AS] モデルは、男女間での年齢効果の近さが滑らかに変化することを想定したモデルとなる．

ここで、後の議論の見通しをよくするため、年齢と性別の交互作用効果の階差パラメータらをベクトルと行列を用いた表記を用意しておく．交互作用効果の元来のパラメータについて、男性にかかるものを $\beta_1^{AS} = [\beta_{11}^{AS}, \dots, \beta_{1I}^{AS}]'$ 、女性にかかるものを $\beta_2^{AS} = [\beta_{12}^{AS}, \dots, \beta_{I2}^{AS}]$ とし、これらを列として構成される行列、

$$\mathbf{B}^{AS} = \begin{bmatrix} \beta_1^{AS} & \beta_2^{AS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11}^{AS} & \beta_{12}^{AS} \\ \vdots & \vdots \\ \beta_{I1}^{AS} & \beta_{I2}^{AS} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{I \times 2}$$

を考える．交互作用効果の階差パラメータは、その作り方を示した (4.6) から、行列 \mathbf{B}^{AS} の要素について、行方向に階差をとってから列方向に差をとったもの、あるいは列方向の差をとってから階差をとるものである．行列をベクトライズするオペレーターを vec とすると、 $\text{vec } \mathbf{B}^{AS} = \boldsymbol{\beta}^{AS}$ であることに注意する．

次の階差行列ら（付録 3.A 参照），

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(I-1) \times I},$$

を用いると、階差パラメータベクトル $\boldsymbol{\delta}^{AS}$ は、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^{AS} &= \text{vec}(\mathbf{D}_I \mathbf{B}^{AS} \mathbf{D}_2') \\ &= (\mathbf{D}_2 \otimes \mathbf{D}_I) \text{vec}(\mathbf{B}^{AS}) \\ &= (\mathbf{D}_2 \otimes \mathbf{D}_I) \boldsymbol{\beta}^{AS} \end{aligned}$$

と、元のパラメータベクトル $\boldsymbol{\beta}^{AS}$ との関係で表せる．

この $\boldsymbol{\delta}^{AS}$ が従う分布について、

$$\boldsymbol{\delta}^{AS} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_{AS}^2 \mathbf{E}_{I-1})$$

であることと、先の年齢主効果の階差パラメータ $\boldsymbol{\delta}^A$ と $\boldsymbol{\delta}^{AS}$ が互いに独立であること ($\boldsymbol{\delta}^A \perp \boldsymbol{\delta}^{AS}$) を仮定する．

付録 3.A より、

$$\mathbf{D}_2^- = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_I^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{I \times (I-1)},$$

で表される行列をそれぞれ構成することができる。また、 $(D_2 \otimes D_I)^- = D_2^- \otimes D_I^-$ であることに注意する。

これら階差行列の一般逆行列を用いることで、 D^- を用いることで、階差パラメータベクトル δ^{AS} から、元のパラメータベクトル β^{AS} の一般解を構成することができる (付録 3.A 参照)。任意の $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}^I$ 、に対して、

$$\beta^{AS} = \begin{bmatrix} \beta_1^{AS} \\ \beta_2^{AS} \end{bmatrix} = (D_2^- \otimes D_I^-) \delta^{AS} + \left[(E_2 \otimes E_I) - (D_2^- \otimes D_I^-)(D_2 \otimes D_I) \right] \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

である。より具体的には、

$$D_2^- \otimes D_I^- = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes D_I^- = \begin{bmatrix} D_I^- \\ O \end{bmatrix},$$

$$(D_2^- \otimes D_I^-)(D_2 \otimes D_I) = (D_2^- D_2) \otimes (D_I^- D_I) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes (D_I^- D_I) = \begin{bmatrix} D_I^- D_I & -D_I D_I \\ O & O \end{bmatrix},$$

$$(E_2 \otimes E_I) - (D_2^- \otimes D_I^-)(D_2 \otimes D_I) = \begin{bmatrix} E_I & O \\ O & E_I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_I^- D_I & -D_I^- D_I \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_I - D_I^- D_I & D_I^- D_I \\ O & E_I \end{bmatrix},$$

であるから、

$$\begin{aligned} \beta^{AS} &= \begin{bmatrix} D_I^- \\ O \end{bmatrix} \delta^{AS} + \begin{bmatrix} E_I - D_I^- D_I & D_I^- D_I \\ O & E_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} D_I^- \delta^{AS} \\ O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (E_I - D_I^- D_I) \gamma_1 + D_I^- D_I \gamma_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

となる。これら一般解の中から、ゼロ和の制約 (4.5) を同時に満たす解を求める。

$$\gamma_1 = [(\gamma_{1*})', \gamma_1']', \quad \gamma_2 = [(\gamma_{2*})', \gamma_2']'$$

とおく。

まず、(4.5) の上の制約より、

$$\sum_{i=1}^I \beta_{is}^{AS} = 0 \quad (s = 1, 2) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{0}_2 = \text{vec } \mathbf{1}_I' \mathbf{B}^{AS} = (E_2 \otimes \mathbf{1}_I') \beta^{AS} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I' & \mathbf{0}' \\ \mathbf{0}' & \mathbf{1}_I' \end{bmatrix} \beta^{AS},$$

であり、 β^{AS} に (4.7) を代入すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{0}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I' & \mathbf{0}' \\ \mathbf{0}' & \mathbf{1}_I' \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} D_I^- \delta^{AS} \\ O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (E_I - D_I^- D_I) \gamma_1 + D_I^- D_I \gamma_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I' D_I^- \delta^{AS} \\ O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{0}_{I-1}' & I] \gamma_1 + [\mathbf{1}_{I-1}' & -(I-1)] \gamma_2 \\ \mathbf{1}_I' \gamma_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I' D_I^- \delta^{AS} + I \gamma_1 + \mathbf{1}_{I-1}' \gamma_{2*} - (I-1) \gamma_2 \\ \mathbf{1}_{I-1}' \gamma_{2*} + \gamma_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であるから、

$$\mathbf{1}_{I-1}' \gamma_{2*} = -\gamma_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{1}_I' \gamma_2 = 0, \quad (4.8)$$

および,

$$0 = \mathbf{1}_I' \mathbf{D}_I^- \delta^{AS} + I\gamma_1 - \gamma_2 - (I-1)\gamma_2 = \mathbf{1}_I' \mathbf{D}_I^- \delta^{AS} + I(\gamma_1 - \gamma_2) \Leftrightarrow \gamma_1 = \gamma_2 - \frac{1}{I} \mathbf{1}_I' \mathbf{D}_I^- \delta^{AS} \quad (4.9)$$

を得る.

次に, (4.5) の下の制約より,

$$\sum_{s=1}^2 \beta_{is}^{AS} = 0 \quad (i = 1, \dots, I) \Leftrightarrow \mathbf{0}_I = \text{vec } \mathbf{B}^{AS} \mathbf{1}_2 = (\mathbf{1}_2' \otimes \mathbf{E}_I) \beta^{AS} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_I & \mathbf{E}_I \end{bmatrix} \beta^{AS}, \quad (4.10)$$

であり, β^{AS} に (4.7) を代入すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{0}_I &= \begin{bmatrix} \mathbf{E}_I & \mathbf{E}_I \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{D}_I^- \delta^{AS} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{E}_I - \mathbf{D}_I^- \mathbf{D}_I) \gamma_1 + \mathbf{D}_I^- \mathbf{D}_I \gamma_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \mathbf{D}_I^- \delta^{AS} + (\mathbf{E}_I - \mathbf{D}_I^- \mathbf{D}_I) \gamma_1 + (\mathbf{E}_I + \mathbf{D}_I^- \mathbf{D}_I) \gamma_2 \\ &= \mathbf{D}_I^- \delta^{AS} + \gamma_1 \mathbf{1}_I + (\mathbf{E}_I + \mathbf{D}_I^- \mathbf{D}_I) \gamma_2 \end{aligned}$$

を得る. (4.9) を代入すれば,

$$\mathbf{0}_I = \mathbf{D}_I^- \delta^{AS} + \gamma_2 \mathbf{1}_I - \frac{1}{I} (\mathbf{1}_I' \mathbf{D}_I^- \delta^{AS}) \mathbf{1}_I + \begin{bmatrix} \gamma_{2*} \\ \gamma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{2*} - \gamma_2 \mathbf{1}_{I-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{D}_I^- \delta^{AS} - \frac{1}{I} \mathbf{1}_I \mathbf{1}_I' \mathbf{D}_I^- \delta^{AS} + 2\gamma_2,$$

となり,

$$\gamma_2 (= \beta_2^{AS}) = -\frac{1}{2} \left(\mathbf{D}_I^- - \frac{1}{I} \mathbf{1}_I \mathbf{1}_I' \mathbf{D}_I^- \right) \delta^{AS} = -\frac{1}{2} (\mathbf{E}_I - \mathbf{1}_I \mathbf{1}_I') \mathbf{D}_I^- \delta^{AS}$$

と求まる. (4.10) は,

$$\beta_1^{AS} + \beta_2^{AS} = \mathbf{0}_I,$$

であるから,

$$\beta_1^{AS} = -\beta_2^{AS}$$

であり, これらは (4.8) から確かにゼロ和を満たしていることも分かる.

4.3.3 S-A_mA_w モデルと S-A[AS] モデルの相違

年齢の主効果, および, 性と年齢の交互作用効果を固定効果として扱うモデルでは, リパラメタライズを行うことによって, S-A_mA_w モデルと S-A[AS] モデルが同等のモデルであることを示した (付録 4.A.1). 一方で, パラメータの 1 次階差を変量効果として扱うモデル群では, S-A_mA_w モデルと S-A[AS] モデルが異なるモデルとして表現できる. ここでは, 両モデルが異なることを具体的に示しておく.

年齢の 1 要因分析モデルである S-A_mA_w モデルについても, 男女それぞれの年齢効果のパラメータについて, その 1 次階差制約を変量効果とすることで S-A[AS] モデルの対応物を構成することができる. S-A_mA_w モデルに現れる男女の年齢効果のパラメータらをそれぞれ, $\beta_i^{A,m}$, $\beta_i^{A,w}$ とおき,

これまでと同様にゼロ和の制約を課しておく．男女の年齢効果の階差パラメータら $\delta_i^{A,m}$, $\delta_i^{A,w}$ を、それぞれ

$$\begin{aligned}\delta_i^{A,m} &= \beta_i^{A,m} - \beta_{i+1}^{A,m}, \\ \delta_i^{A,w} &= \beta_i^{A,w} - \beta_{i+1}^{A,w},\end{aligned}$$

と設定して、 $\delta^{A,m} = [\delta_1^{A,m}, \dots, \delta_{I-1}^{A,m}]'$, $\delta^{A,w} = [\delta_1^{A,w}, \dots, \delta_{I-1}^{A,w}]'$ とする．このとき、 $\delta^{A,m}$ と $\delta^{A,w}$ が従う分布として、

$$\delta^{A,m} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_{A,m}^2 \mathbf{E}_{I-1}), \quad \delta^{A,w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_{A,w}^2 \mathbf{E}_{I-1}), \quad \delta^{A,m} \perp \delta^{A,w}$$

を仮定したものが、S-A_mA_w モデルについて、パラメータの 1 次階差を変量効果としたものである．これら男女のパラメータベクトルを統合したものを、 $\delta^{A,mw} = [(\delta^{A,m})', (\delta^{A,w})']'$ としておく．

元来のパラメータベクトル $\beta^{A,mw} = [(\beta^{A,m})', (\beta^{A,w})']'$ との関係は、 $B^{A,mw} = [\beta^{A,m}, \beta^{A,w}]$ と階差行列 D_I を用いて、

$$\begin{aligned}\delta^{A,mw} &= \text{vec}(D_I B^{A,mw}) \\ &= (\mathbf{E}_2 \otimes D_I) \text{vec}(B^{A,mw}) \\ &= \begin{bmatrix} D_I & \\ & D_I \end{bmatrix} \beta^{A,mw},\end{aligned}$$

である． $\beta^{A,mw}$ の一般解は、(3.8) の関係を用いて求めることができる．

以上の表記を用いると S-A_mA_w モデルと S-A[AS] モデルのモデル式は、それぞれ次のように表される．

S-A_mA_w モデル

$$\begin{aligned}\eta &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I & \\ & \mathbf{1}_I \end{bmatrix} \beta^{G,mw} + \begin{bmatrix} \tilde{X}_A & \\ & \tilde{X}_A \end{bmatrix} \beta^{A,mw} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I & \\ & \mathbf{1}_I \end{bmatrix} \beta^{G,mw} + \begin{bmatrix} \tilde{X}_A & \\ & \tilde{X}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_I^- & \\ & D_I^- \end{bmatrix} \delta^{A,mw} \\ &= (\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{1}_I) \beta^{G,mw} + (\mathbf{E}_2 \otimes \tilde{X}_A) (\mathbf{E}_2 \otimes D_I^-) \delta^{A,mw}, \\ &= (\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{1}_I) \beta^{G,mw} + (\mathbf{E}_2 \otimes \tilde{X}_A D_I^-) \delta^{A,mw}, \\ \delta^{A,mw} &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma), \quad \Sigma = (\sigma_{A,m}^2 \mathbf{E}_{I-1}) \oplus (\sigma_{A,w}^2 \mathbf{E}_{I-1}).\end{aligned}$$

S-A[AS] モデル

$$\begin{aligned}
\eta &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I \\ \mathbf{1}_I \end{bmatrix} \beta^G + \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I & \mathbf{1}_I \end{bmatrix} \beta^S + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_A \\ \tilde{\mathbf{X}}_A \end{bmatrix} \beta^A + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} & \tilde{\mathbf{X}} \end{bmatrix} \beta^{AS} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I \\ \mathbf{1}_I \end{bmatrix} \beta^G + \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I & \mathbf{1}_I \end{bmatrix} \beta^S + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_A \\ \tilde{\mathbf{X}}_A \end{bmatrix} D_I^- \delta^A + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} & \tilde{\mathbf{X}} \end{bmatrix} (D_2 \otimes D_I)^- \delta^{AS} \\
&= (\mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_I) \beta^G + (E_2 \otimes \mathbf{1}_I) \beta^S + (\mathbf{1}_2 \otimes \tilde{\mathbf{X}}_A) (\mathbf{1} \otimes D_I^-) \delta^A + (E_2 \otimes \tilde{\mathbf{X}}_A) (D_2^- \otimes D_I^-) \delta^{AS} \\
&= (\mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_I) \beta^G + (E_2 \otimes \mathbf{1}_I) \beta^S + (\mathbf{1}_2 \otimes \tilde{\mathbf{X}}_A D_I^-) \delta^A + (D_2^- \otimes \tilde{\mathbf{X}}_A D_I^-) \delta^{AS}, \\
\begin{bmatrix} \delta^A \\ \delta^{AS} \end{bmatrix} &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma), \quad \Sigma = (\sigma_A^2 E_{I-1}) \oplus (\sigma_{AS}^2 E_{I-1}).
\end{aligned}$$

変量効果モデルに拡張することにより、S-A_mA_w モデルと S-A[AS] モデルを異なる 2 つのモデルとして捉えることができるのは、パラメータへの 1 次階差制約の入れ方が異なるためである (付録 4.A.2 参照). 具体的には、両モデルでは最大化すべき尤度に現れる罰則項の形状が異なる。

S-A_mA_w モデルでの罰則項の 2 次形式は、 $\delta_* = [(\delta_{A,m})', (\delta_{A,w})']'$, $\Sigma = (\sigma_A^2 E_{I-1}) \oplus (\sigma_{AS}^2 E_{I-1})$ として

$$\delta_*' \Sigma^{-1} \delta_* = \frac{1}{\sigma_{A,m}^2} \sum_{i=1}^{I-1} (\delta_i^{A,m})^2 + \frac{1}{\sigma_{A,w}^2} \sum_{i=1}^{I-1} (\delta_i^{A,w})^2 = \frac{1}{\sigma_{A,m}^2} \sum_{i=1}^{I-1} (\beta_i^{A,m} - \beta_{i+1}^{A,m})^2 + \frac{1}{\sigma_{A,w}^2} \sum_{i=1}^{I-1} (\beta_i^{A,w} - \beta_{i+1}^{A,w})^2,$$

である。

S-A[AS] モデルでの罰則項の 2 次形式は、 $\delta_* = [(\delta_A)', (\delta_{AS})']'$, $\Sigma = (\sigma_A^2 E_{I-1}) \oplus (\sigma_{AS}^2 E_{I-1})$ として

$$\delta_*' \Sigma^{-1} \delta_* = \frac{1}{\sigma_A^2} \sum_{i=1}^{I-1} (\delta_i^A)^2 + \frac{1}{\sigma_{AS}^2} \sum_{i=1}^{I-1} (\delta_i^{AS})^2 = \frac{1}{\sigma_A^2} \sum_{i=1}^{I-1} (\beta_i^A - \beta_{i+1}^A)^2 + \frac{1}{\sigma_{AS}^2} \sum_{i=1}^{I-1} (\beta_i^{AS} - \beta_{i+1}^{AS})^2$$

である。

このように、効果パラメータらの 1 次階差を変量効果とすることで、S-A_mA_w モデルと S-A[AS] モデルとを区別することが可能となり、両モデルが含意する内容も明確に区別できるようになっている。年齢効果を男女で共通とした S-A モデルも含めて、各モデルの含意を列挙すると次のようになる。

- S-A_mA_w モデルは、男女それぞれの年齢効果に類似性を想定していない
- S-A[AS] モデルは、A で男女の年齢効果の類似性を、[AS] で男女間の異質性を表したモデルである。異質性に関しても男女間で動きが「近い」ことを想定している。
- S-A モデルは、男女の年齢効果が同等であることを想定したモデルである。

いずれのモデルが現実の事象を説明するのに妥当であるかは、モデル選択の結果を用いて判断することが必要になる。

通常の分析で想定されている固定効果のモデル群のみを扱う場合は、S-A_mA_w モデルと S-A[AS] モデルを区別できないため、年齢効果が男女で共通であるか、異なるかの二者択一しか主張ができ

なかった。このように、1 次階差制約を導入したモデル群では、男女で年齢効果が異なりはするものの、その動きが男女間で近いことも示すことができ、固定効果のモデル群に対して扱えるグラデーションの幅が確実に広がっている。

4.4 まとめ

本章ではコウホート分析から離れ、一時点の性・年齢別集計表を扱う際の問題点について述べた。扱った課題は 2 点ある。

1 点目は、男女それぞれのデータの扱い方の手続きの問題、および、それに付随して構成されるモデル群の問題である。男女別の集計データが得られた場合に、分析者は、(1) 男女でデータを分けて分析を行うか、(2) 男女のデータを合わせて分析を行うか、のいずれか一つの手続きしか行わないことが多い。(1) と (2) の手続きによってそれぞれのモデル群を統合してモデル選択を行うと、片方の手続きだけでは見落とすモデルの存在があることを構成されるモデルのデザイン行列を提示しながら指摘した。

2 点目は、性別間における年齢効果の扱いのバリエーションを増やすことである。ここでは男女という異なる 2 つの集団のデータを有機的に結びつける方法としての変量効果を用いた、男女の年齢効果に「近さ」を考慮した交互作用効果を提案した。性別と年齢交互作用効果を固定効果として扱った場合は、年齢効果を男女別に推定したものと同等であった。これに対して、交互作用効果を変量効果として扱うモデルはパラメータへの制約の入れ方が年齢効果を男女別に推定するモデルとは異なるため、両者を別のモデルとして区別することが可能になった。

続く第 5 章では、本章で提案した性別と年齢の交互作用効果を、性別と時点、及び性別とコウホートとの交互作用効果に拡張し、コウホート分析で扱うモデルの範囲を大きく広げることにする。

付録 4.A S-A_mA_w モデルと S-A[AS] モデルの関係

4.A.1 固定効果モデルでの S-A_mA_w モデルと S-A[AS] モデルの同等性

固定効果モデルでは、1 要因分析のフルモデルである S-A_mA_w モデルと 2 要因分析のフルモデルである S-A[AS] モデルは同等なモデルとなる。ここでは、S-A_mA_w モデルをリパラメタライズすることによって、両モデルが同等であることを示す。

2 要因分析のフルモデルである S-A[AS] モデルは、

$$\begin{aligned}\eta &= \beta^G \mathbf{1}_{2I} + \mathbf{X}_S \beta^S + \mathbf{X}_A \beta^A + \mathbf{X}_{AS} \beta^{AS} \\ &= (\mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_I) \beta^G + (\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{1}_I) \beta^S + (\mathbf{1}_2 \otimes \tilde{\mathbf{X}}_A) \beta^A + (\mathbf{E}_2 \otimes \tilde{\mathbf{X}}_A) \beta^{AS} \\ &= \mathbf{X}_{\text{S-A[AS]}}^{(0)} \beta^{\text{S-A[AS]}},\end{aligned}$$

と表された。ここで、

$$\tilde{\mathbf{X}}_A = \mathbf{E}_I, \quad \beta^S = [\beta_1^S, \beta_2^S]', \quad \beta^A = [(\beta_1^A)', (\beta_2^A)']', \quad \beta^{AS} = [(\beta_1^{AS})', (\beta_2^{AS})']',$$

であり、

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{\text{S-A[AS]}}^{(0)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I & \mathbf{1}_I & \tilde{\mathbf{X}}_A & \tilde{\mathbf{X}}_A & \tilde{\mathbf{X}}_A \\ \mathbf{1}_I & & \mathbf{1}_I & \tilde{\mathbf{X}}_A & \tilde{\mathbf{X}}_A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2I \times 3(1+I)}, \\ \beta^{\text{S-A[AS]}} &= [\beta^G, (\beta^S)', (\beta^A)', (\beta^{AS})']',\end{aligned}$$

である。

一方で、1 要因分析のフルモデルである S-A_mA_w モデルは、

$$\begin{aligned}\eta &= (\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{1}_I) \beta^{G,mw} + (\mathbf{E}_2 \otimes \tilde{\mathbf{X}}_A) \beta^{A,mw} \\ &= \mathbf{X}_{\text{S-A}_m\text{A}_w}^{(0)} \beta^{\text{S-A}_m\text{A}_w},\end{aligned}$$

と表された。ここで、

$$\beta^{G,mw} = [(\beta^{G,m})', (\beta^{G,w})']', \quad \beta^{A,mw} = [(\beta^{A,m})', (\beta^{A,w})']'$$

であり、

$$\mathbf{X}_{\text{S-A}_m\text{A}_w}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I & \tilde{\mathbf{X}}_A \\ & \mathbf{1}_I & \tilde{\mathbf{X}}_A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2I \times 2(1+I)}, \quad \beta^{\text{S-A}_m\text{A}_w} = [(\beta^{G,m})', (\beta^{G,w})', (\beta^{A,m})', (\beta^{A,w})']',$$

である。

さて、S-A[AS] モデルのパラメータに、

$$\mathbf{1}_2' \beta^S = 0, \quad \mathbf{1}_I' \beta_1^A = \mathbf{1}_I' \beta_2^A = 0, \quad \mathbf{1}_I' \beta_1^{AS} = \mathbf{1}_I' \beta_2^{AS} = 0, \quad \beta_1^{AS} + \beta_2^{AS} = \mathbf{0}_I,$$

のゼロ和制約を課すと,

$$\mathbf{X}_{\text{S-A[AS]}}^{(0)} \rightarrow \mathbf{X}_{\text{S-A[AS]}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I & \mathbf{1}_I & \tilde{\mathbf{X}}_A & \tilde{\mathbf{X}}_A \\ \mathbf{1}_I & -\mathbf{1}_I & \tilde{\mathbf{X}}_A & -\tilde{\mathbf{X}}_A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2I \times 2I},$$

とすることができる. ここで,

$$\tilde{\mathbf{X}}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{I-1} \\ -\mathbf{1}'_{I-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{I \times (I-1)},$$

である. 対して, S-A_mA_w モデルのパラメータに,

$$\mathbf{1}'_I \boldsymbol{\beta}^{A,m} = \mathbf{1}'_I \boldsymbol{\beta}^{A,w} = 0,$$

のゼロ和制約を課すと,

$$\mathbf{X}_{\text{S-A}_m\text{A}_w}^{(0)} \rightarrow \mathbf{X}_{\text{S-A}_m\text{A}_w}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I & \tilde{\mathbf{X}}_A \\ & \mathbf{1}_I & \tilde{\mathbf{X}}_A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2I \times 2I},$$

とすることができる.

$\mathbf{X}_{\text{S-A[AS]}}^{(1)}$ の全 $2I$ 列と $\mathbf{X}_{\text{S-A}_m\text{A}_w}^{(1)}$ の全 $2I$ 列は, それぞれが $2I$ 次元のベクトル空間の異なる基底を構成している. このとき, 次の正則行列

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ & \mathbf{E}_{I-1} & \mathbf{E}_{I-1} \\ & \mathbf{E}_{I-1} & -\mathbf{E}_{I-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{I \times I}, \quad (4.11)$$

をとれば,

$$\mathbf{X}_{\text{S-A}_m\text{A}_w}^{(1)} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I & \tilde{\mathbf{X}}_A \\ & \mathbf{1}_I & \tilde{\mathbf{X}}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ & \mathbf{E}_{I-1} & \mathbf{E}_{I-1} \\ & \mathbf{E}_{I-1} & -\mathbf{E}_{I-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I & \mathbf{1}_I & \tilde{\mathbf{X}}_A & \tilde{\mathbf{X}}_A \\ \mathbf{1}_I & -\mathbf{1}_I & \tilde{\mathbf{X}}_A & -\tilde{\mathbf{X}}_A \end{bmatrix} = \mathbf{X}_{\text{S-A[AS]}}^{(1)},$$

となって, S-A[AS] モデルと S-A_mA_w モデルは適当なりパラメタライズを行うことにより, 相互に行き来できる同等なモデルであることがわかる.

4.A.2 変量効果モデルにおける S-A_mA_w モデルと S-A[AS] モデルの相違

階差ベクトルモデルについて, 付録 4.A.1 と同様のことを考える.

一般に, パラメータ $\boldsymbol{\beta}$ と階差ベクトル $\boldsymbol{\delta}$ の間には, 階差行列 \mathbf{D} を用いれば,

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{D}\boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{D}^+ \boldsymbol{\delta} + \alpha \mathbf{1},$$

という関係がある (付録 3.A の (3.8) 参照).

S-A[AS] モデルのデザイン行列は,

$$\mathbf{X}_{\text{S-A[AS]}}^{(\delta-0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I & \mathbf{1}_I & \tilde{\mathbf{D}}_A & \tilde{\mathbf{D}}_A \\ \mathbf{1}_I & & \mathbf{1}_I & \tilde{\mathbf{D}}_A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2I \times 3I},$$

となる。ここで,

$$\tilde{D}_A = \tilde{X}_A D_I^-,$$

である。

$$\mathbf{1}'_2 \beta^S = 0, \quad \delta_1^{AS} + \delta_2^{AS} = \mathbf{0}_{I-1},$$

のゼロ和制約を追加すれば,

$$\mathbf{X}_{S-A[AS]}^{(\delta-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I & \mathbf{1}_I & \tilde{D}_A & \tilde{D}_A \\ \mathbf{1}_I & -\mathbf{1}_I & \tilde{D}_A & -\tilde{D}_A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2I \times 2I}$$

となる。

一方の S-A_mA_w モデルのデザイン行列は,

$$\mathbf{X}_{S-A_m A_w}^{(\delta-0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I & & \tilde{D}_A \\ & \mathbf{1}_I & \tilde{D}_A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2I \times 2I}$$

となる。(4.11) と同じ \mathbf{P} を用いれば,

$$\mathbf{X}_{S-A_m A_w}^{(\delta-0)} \mathbf{P} = \mathbf{X}_{S-A[AS]}^{(\delta-1)},$$

となって, ここで両モデルの同等性が示される。

S-A[AS] モデルと S-A_mA_w モデルについて, δ たちを変量効果として扱う場合は, それぞれのデザイン行列は,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{S-A[AS]}^{(\delta-2)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I & \mathbf{1}_I & \tilde{D}_A & \tilde{D}_A \\ \mathbf{1}_I & -\mathbf{1}_I & \tilde{D}_A & -\tilde{D}_A \\ & & \mathbf{E}_{I-1} & \\ & & & \mathbf{E}_{I-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2(2I-1) \times 2I}, \\ \mathbf{X}_{S-A_m A_w}^{(\delta-2)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I & & \tilde{D}_A & \\ & \mathbf{1}_I & \tilde{D}_A & \\ & & \mathbf{E}_{I-1} & \\ & & & \mathbf{E}_{I-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2(2I-1) \times 2I}, \end{aligned}$$

と, 単位行列が下に追加されたものになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{S-A_m A_w}^{(\delta-2)} \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I & & \tilde{D}_A & \\ & \mathbf{1}_I & \tilde{D}_A & \\ & & \mathbf{E}_{I-1} & \\ & & & \mathbf{E}_{I-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ & \mathbf{E}_{I-1} & \mathbf{E}_{I-1} \\ & \mathbf{E}_{I-1} & -\mathbf{E}_{I-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_I & \mathbf{1}_I & \tilde{D}_A & \tilde{D}_A \\ \mathbf{1}_I & -\mathbf{1}_I & \tilde{D}_A & -\tilde{D}_A \\ & & \mathbf{E}_{I-1} & \mathbf{E}_{I-1} \\ & & \mathbf{E}_{I-1} & -\mathbf{E}_{I-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2(2I-1) \times 2I}, \end{aligned}$$

であり, これと $\mathbf{X}_{S-A[AS]}^{(\delta-2)}$ の最初の 2 列は同じだから, 簡単のため, それぞれ最初の 2 列を落とした行列を,

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_A & \tilde{D}_A \\ \tilde{D}_A & -\tilde{D}_A \\ \mathbf{E}_{I-1} & \mathbf{E}_{I-1} \\ \mathbf{E}_{I-1} & -\mathbf{E}_{I-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_A & \tilde{D}_A \\ \tilde{D}_A & -\tilde{D}_A \\ \mathbf{E}_{I-1} & \\ & \mathbf{E}_{I-1} \end{bmatrix}$$

として、両者の列が張る部分空間の関係を調べる。

一般に、連立方程式 $\mathbf{X}\mathbf{b} = \mathbf{y}$ の解の存在条件は、 $\mathbf{X}\mathbf{X}^-\mathbf{y} = \mathbf{y}$ であった。 $\mathbf{y} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\gamma}$ として、 $\mathbf{X}\mathbf{X}^-\mathbf{Z}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\gamma}$ となるかを調べ、これが成り立たなければ、 \mathbf{Z} と \mathbf{X} の列が張る部分空間は同一とはいえず、S-A[AS] と S-A_mA_w の変量効果モデルは別のものであることがわかる。

$$\tilde{\mathbf{D}}_A = \tilde{\mathbf{X}}_A \mathbf{D}_I^- = \mathbf{E}_I \mathbf{D}_I^- = \mathbf{D}_I^-,$$

であるから、

$$(\mathbf{D}_I^-)^+ = \{(\mathbf{D}_I^-)' \mathbf{D}_I^-\}^{-1} (\mathbf{D}_I^-)',$$

をとれば、 $(\mathbf{D}_I^-)^+ \mathbf{D}_I^- = (\mathbf{D}_I^-)^+ \tilde{\mathbf{D}}_A = \mathbf{E}_{I-1}$ となっていることに注意する。

$$\mathbf{X}^- = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\mathbf{D}_I^-)^+ & (\mathbf{D}_I^-)^+ & \mathbf{O}_{I-1} \\ (\mathbf{D}_I^-)^+ & -(\mathbf{D}_I^-)^+ & \mathbf{O}_{I-1} \end{bmatrix},$$

ととる。

$$\mathbf{X}^- \mathbf{X} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\mathbf{E}_{I-1} & \mathbf{O}_{I-1} \\ \mathbf{O}_{I-1} & 2\mathbf{E}_{I-1} \end{bmatrix} = \mathbf{E}_{2(I-1)}, \quad \mathbf{X} \mathbf{X}^- \mathbf{X} = \mathbf{X},$$

であるから、確かに、 \mathbf{X}^- は一般逆行列の条件を満たしている。

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \mathbf{X}^- &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_I^- & \mathbf{D}_I^- \\ \mathbf{D}_I^- & -\mathbf{D}_I^- \\ \mathbf{E}_{I-1} & \mathbf{E}_{I-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{D}_I^-)^+ & (\mathbf{D}_I^-)^+ & \mathbf{O}_{I-1} \\ (\mathbf{D}_I^-)^+ & -(\mathbf{D}_I^-)^+ & \mathbf{O}_{I-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\mathbf{D}_I^- (\mathbf{D}_I^-)^+ & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & 2\mathbf{D}_I^- (\mathbf{D}_I^-)^+ & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ (\mathbf{D}_I^-)^+ & (\mathbf{D}_I^-)^+ & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ (\mathbf{D}_I^-)^+ & -(\mathbf{D}_I^-)^+ & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{X} \mathbf{X}^- \mathbf{Z} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\mathbf{D}_I^- (\mathbf{D}_I^-)^+ & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & 2\mathbf{D}_I^- (\mathbf{D}_I^-)^+ & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ (\mathbf{D}_I^-)^+ & (\mathbf{D}_I^-)^+ & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ (\mathbf{D}_I^-)^+ & -(\mathbf{D}_I^-)^+ & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_A & \tilde{\mathbf{D}}_A \\ \tilde{\mathbf{D}}_A & -\tilde{\mathbf{D}}_A \\ \mathbf{E}_{I-1} & \mathbf{E}_{I-1} \\ \mathbf{E}_{I-1} & -\mathbf{E}_{I-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_A & \tilde{\mathbf{D}}_A \\ \tilde{\mathbf{D}}_A & -\tilde{\mathbf{D}}_A \\ \mathbf{E}_{I-1} & \mathbf{E}_{I-1} \\ \mathbf{E}_{I-1} & -\mathbf{E}_{I-1} \end{bmatrix} = \mathbf{X} \neq \mathbf{Z}, \end{aligned}$$

となって、任意の $\boldsymbol{\gamma}$ に対して、 $\mathbf{X} \mathbf{X}^- \mathbf{Z} \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{Z} \boldsymbol{\gamma}$ が成り立っていない。すなわち、変量効果モデルにおける S-A[AS] モデルと S-A_mA_w モデルは別のモデルであることが示された。

第 5 章

性別と 3 要因の交互作用効果を導入したコウホート分析モデル

5.1 はじめに

第 3 章では、コウホート分析を線形混合効果モデルの枠組みでとらえ、その一環としてコウホート分析の個票データへの拡張可能性について言及した。分析者が横断面調査等の個票データを使用できる場合は、対象者の年齢以外の情報についても同時に入手できるケースが一般的である。分析の対象とする事象に対して影響を与えうる要因をモデル式に取り込むことによって、コウホート分析におけるモデリングの幅は大きく広がることになる。

本章では、コウホートモデルに含める新たな要因として「性別」に着目して、3 要因との交互作用効果の扱い方について検討する。男女間の差異はいずれの学術分野においてもその影響が考慮され、重要度が高い要因である。一方で、見方を変えれば、多くの分野において性差が議論にあがるということは、男女間に何らかの本質的な差異が想定されるケースがほとんどであることを反映した結果とも考えられる。異質性を有する男女について、それぞれ固有の効果や特性を推定する最も簡便な方法は、男女にデータを分けて推定を行うことであろう。ただし、たとえ男女の間に明確な差異がある場合であっても、年齢、時点、コウホートをともにする男女個人らの間には、ある一定の共通性が存在しうる可能性がある。男女でデータを分けて分析を行うことは、その可能性を見過ごしてしまうことにもなる。

4 章で議論した、性と年齢の交互作用効果の階差パラメータに 1 次階差制約を課したモデルは、男女間の効果に近さという概念を導入したものであり、男女個別の年齢効果を持つモデルと区別することが可能になった。本章では男女間での効果の近さという概念を他の 2 要因にも拡張することによって、男女のデータを有機的に結びつけるコウホート分析モデルを構成する。

5.2 性別と 3 要因の交互作用効果を導入した BAPC モデル

5.2.1 設定

ベイズ型コウホート (BAPC) モデルは、すべての一般化線形モデルにおいて定式化が可能であるが、ここではアウトカムが 2 値のデータに適用した例を示す。対象とするデータは複数時点の調査を含めた総観測数が N である個票データである。

I 個の年齢区分 ($i = 1, \dots, I$), J 個の時点 ($j = 1, \dots, J$), K 個のコウホート区分 ($k = 1, \dots, K$) が与えられたとき、これらの要因をダミー変数分解したコウホートモデルを考える。性別についても男性を 1, 女性を 2 とし、カテゴリカルデータとして各効果の影響を捉える。

個人 n ($= 1, \dots, N$) について、ある回答選択肢の選択確率を π_n とし、それをロジット変換したものを η_n とする。 η_n を各効果の線形和に分解したモデルは次のようになる。

$$\begin{aligned} \eta_n &= \log \frac{\pi_n}{1 - \pi_n} \\ &= \alpha + \sum_{s=1}^2 \beta_s^S x_{n,s}^S + \sum_{i=1}^I \beta_i^A x_{n,i}^A + \sum_{s=1}^2 \sum_{i=1}^I \beta_{is}^{AS} x_{n,s}^S x_{n,i}^A + \sum_{j=1}^J \beta_j^P x_{n,j}^P + \sum_{s=1}^2 \sum_{j=1}^J \beta_{js}^{PS} x_{n,s}^S x_{n,j}^P \\ &\quad + \sum_{k=1}^K \beta_k^C x_{n,k}^C + \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^K \beta_{ks}^{CS} x_{n,s}^S x_{n,k}^C + \sum_{l=1}^L \gamma_l z_{n,l}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

ここで、 α は定数項である。 β たちはコウホートモデルに関連するパラメータを示し、上付きの添字は S が性別の主効果、 A , P , C がそれぞれ年齢、時代、コウホートの主効果に関するパラメータであることを示している。同様に、 AS , PS , CS は性別とそれぞれ年齢、時代、コウホートの交互作用効果を表す。各 x は 2 値変数で、例えば年齢にかかる $x_{n,i}^A$ であれば、

$$x_{n,i}^A = \begin{cases} 1 & (\text{個人 } n \text{ の年齢が年齢区分 } i \text{ に属するとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とする。 z_l はその他の説明変数であり、 γ_l はそれらの効果のパラメータである

パラメータの推定値を一意に定めるために、年齢と各主効果には次のゼロ和制約を課しておく。

$$\sum_{s=1}^2 \beta_s^S = \sum_{i=1}^I \beta_i^A = \sum_{j=1}^J \beta_j^P = \sum_{k=1}^K \beta_k^C = 0.$$

同様に性別と年齢、時点、コウホートの各交互作用効果には、

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^2 \beta_{is}^{AS} &= 0 \quad (i = 1, \dots, I), & \sum_{i=1}^I \beta_{is}^{AS} &= 0 \quad (s = 1, 2), \\ \sum_{s=1}^2 \beta_{js}^{PS} &= 0 \quad (j = 1, \dots, J), & \sum_{j=1}^J \beta_{js}^{PS} &= 0 \quad (s = 1, 2), \\ \sum_{s=1}^2 \beta_{ks}^{CS} &= 0 \quad (k = 1, \dots, K), & \sum_{k=1}^K \beta_{ks}^{CS} &= 0 \quad (s = 1, 2), \end{aligned} \quad (5.2)$$

で表されるように、性別、および、各要因の方向についてそれぞれゼロ和の制約を課しておく。

年齢の主効果に対応するデザイン行列は、 (n, i) 成分が $x_{n,i}^A$ のサイズが $N \times I$ の行列で表すことができ、これを \mathbf{X}_A とする。性別、時代、コウホートの主効果についても同様に表現でき、それぞれ \mathbf{X}_S , \mathbf{X}_P , \mathbf{X}_C と表記する。性別と年齢の交互作用効果については、 \mathbf{e}_n を第 n 要素が 1 の N 次元の標準基底ベクトル、 \otimes をクロネッカー積とすれば、 $\sum_{n=1}^N \mathbf{e}_n \{(\mathbf{e}_n' \mathbf{X}_S) \otimes (\mathbf{e}_n' \mathbf{X}_A)\}$ と表現でき、 $(n, (s-1)I + i)$ 要素が $x_{n,s}^S x_{n,i}^A$ の行列となる。これを \mathbf{X}_{AS} で表す。なお、ここでプライム (') は、ベクトルおよび、行列の転置を表す。性別と時点、および、性別とコウホートの各交互作用効果のデザイン行列についても同様に表すことができ、それぞれ \mathbf{X}_{PS} , \mathbf{X}_{CS} とおく。 \mathbf{Z} は他の説明変数のデザイン行列とする。

ロジットと選択確率のベクトルを、それぞれ、

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_N \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_N \end{bmatrix}$$

とする。また、性別、および、年齢、時点、コウホート 3 要因の主効果に対するデザイン行列について、対応するパラメータベクトルを、それぞれ、

$$\boldsymbol{\beta}^S = \begin{bmatrix} \beta_1^S \\ \vdots \\ \beta_I^S \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}^A = \begin{bmatrix} \beta_1^A \\ \vdots \\ \beta_I^A \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}^P = \begin{bmatrix} \beta_1^P \\ \vdots \\ \beta_J^P \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}^C = \begin{bmatrix} \beta_1^C \\ \vdots \\ \beta_K^C \end{bmatrix},$$

とし、性別と 3 要因の交互作用効果のデザイン行列に対応するパラメータベクトルについても、それぞれ、

$$\boldsymbol{\beta}^{AS} = \begin{bmatrix} \beta_{11}^{AS} \\ \vdots \\ \beta_{I1}^{AS} \\ \beta_{12}^{SA} \\ \vdots \\ \beta_{I2}^{AS} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}^{PS} = \begin{bmatrix} \beta_{11}^{PS} \\ \vdots \\ \beta_{J1}^{PS} \\ \beta_{12}^{PS} \\ \vdots \\ \beta_{J2}^{PS} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}^{CS} = \begin{bmatrix} \beta_{11}^{CS} \\ \vdots \\ \beta_{K1}^{CS} \\ \beta_{12}^{CS} \\ \vdots \\ \beta_{K2}^{CS} \end{bmatrix},$$

とする。他の説明変数のパラメータについては、 $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \dots, \gamma_L]'$ としておく。

これらを用いると、(5.1) は、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta} &= \log \boldsymbol{\pi} - \log(1 - \boldsymbol{\pi}) \\ &= \alpha \mathbf{1}_N + \mathbf{X}_S \boldsymbol{\beta}^S + \mathbf{X}_A \boldsymbol{\beta}^A + \mathbf{X}_{AS} \boldsymbol{\beta}^{AS} + \mathbf{X}_P \boldsymbol{\beta}^P + \mathbf{X}_{PS} \boldsymbol{\beta}^{PS} \\ &\quad + \mathbf{X}_C \boldsymbol{\beta}^C + \mathbf{X}_{CS} \boldsymbol{\beta}^{CS} + \mathbf{Z} \boldsymbol{\gamma}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

と表記することができる。

5.2.2 階差パラメータを用いた表現

BAPC モデルでは, 各効果とも隣り合うパラメータ間の 1 次階差について, それらが従う分布として正規分布を仮定する. 年齢, 時点, コウホートは順序の情報を持っているため, それらの 1 次階差を自然な形で導入できる. 性別については, 男女間に先験的な順序関係はないものの, 両者の差を階差としてとらえれば十分である.

まず各区分の元来の効果パラメータ β たちを, それらの階差を表すパラメータ δ らにリパラメタライズして (5.3) を表現し直しておく. 具体的な設定は, 以下の通りである. 各要因の主効果の階差パラメータは, 従来の BAPC モデルと同様に, 階差行列 (付録 3.A) を用いて,

$$\delta^S = D_2\beta^S, \quad \delta^A = D_I\beta^A, \quad \delta^P = D_J\beta^P, \quad \delta^C = D_K\beta^C,$$

である.

性別との 3 要因の交互作用効果のデザイン行列は, 例えば年齢については年齢区分の方向に階差を取った上で性差をとることになるため, D_I を D_2 に埋め込めばよい. よって各交互作用効果の階差パラメータは,

$$\delta^{AS} = (D_2 \otimes D_I)\beta^{AS}, \quad \delta^{PS} = (D_2 \otimes D_J)\beta^{PS}, \quad \delta^{CS} = (D_2 \otimes D_K)\beta^{CS}$$

となる.

D_n の一般逆行列を D_n^- として, (5.3) を階差パラメータを用いた表現をすると, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \eta &= \log \pi - \log(1 - \pi) \\ &= \alpha \mathbf{1}_N + X_S D_2^- \delta^S \\ &\quad + X_A D_I^- \delta^A + X_{AS} (D_2^- \otimes D_I^-) \delta^{AS} \\ &\quad + X_P D_J^- \delta^P + X_{PS} (D_2^- \otimes D_J^-) \delta^{PS} \\ &\quad + X_C D_K^- \delta^C + X_{CS} (D_2^- \otimes D_K^-) \delta^{CS} \\ &\quad + Z\gamma. \end{aligned} \tag{5.4}$$

5.3 パラメータの推定

5.3.1 ベイズ推定によるアプローチ

ここではベイズ推定の枠組みで各パラメータの推定を行う. まず, 年齢, 時代, コウホートに関するパラメータに事前分布を導入する. これら 3 要因に関するパラメータはコウホート分析の識別問題に関係するため, 識別不足を解消するためには, パラメータへの制約が必要となる.^{*1}. それぞれパラメータベクトルをまとめたものを, 改めて,

$$\delta_* = [(\delta^A)', (\delta^{AS})', (\delta^P)', (\delta^{PS})', (\delta^C)', (\delta^{CS})']'$$

^{*1} 性別の主効果は識別問題に関係しないため, ここでは性別の階差パラメータ δ^S を固定効果として扱う.

とおき、 δ_* の事前分布として、

$$\sigma = [\sigma_A^2, \sigma_{AS}^2, \sigma_P^2, \sigma_{PS}^2, \sigma_C^2, \sigma_{CS}^2]'$$

を超パラメータとする平均 $\mathbf{0}$ 、分散 Σ の多変量正規分布を仮定する。その密度関数は

$$\pi(\delta_*|\sigma) = (2\pi)^{-\frac{M}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{1}{2} \delta_*' \Sigma^{-1} \delta_*)$$

である。ここで、 M はモデルに現れる階差パラメータの総数で、 $M = 2(= I + J + K - 3)$ である。分散 Σ は δ_* の各要素が互いに独立な

$$\Sigma = (\sigma_A^2 \mathbf{E}_{I-1}) \oplus (\sigma_{AS}^2 \mathbf{E}_{I-1}) \oplus (\sigma_P^2 \mathbf{E}_{J-1}) \oplus (\sigma_{PS}^2 \mathbf{E}_{J-1}) \oplus (\sigma_C^2 \mathbf{E}_{K-1}) \oplus (\sigma_{CS}^2 \mathbf{E}_{K-1})$$

であるモデルを考える。 \oplus は行列の直和を示す。

y_n を 1, 0 のいずれかをとる 2 値変数の観測値として、そのベクトル \mathbf{y} を応答変数ベクトルとして扱う。(5.4) 式に現れるパラメータのベクトルを $\theta = [\alpha, \delta^S, \delta_*', \gamma']'$ とする。同時確率関数 $f(\mathbf{y}|\pi(\theta))$ とすれば、(5.4) の対数尤度の核 $\ell(\theta)$ は

$$\ell(\theta) = \log f(\mathbf{y}|\pi(\theta)) - (\text{const.}) = \mathbf{y}' \log \pi(\theta) + (\mathbf{1}_N - \mathbf{y})' \log(\mathbf{1}_N - \pi(\theta)) - (\text{const.})$$

となる。

超パラメータを所与とした際、パラメータの推定は以下 (5.6) の最大化、すなわち事後密度の最大化 (MAP 推定) で行う。事後密度 $\phi(\theta)$ は

$$\phi(\theta) \propto f(\mathbf{y}|\pi(\theta))\pi(\delta_*|\sigma) \quad (5.5)$$

であるから、その最大化は (5.5) 式右辺の対数をとった

$$\begin{aligned} \log f(\mathbf{y}|\pi(\theta)) \pi(\delta_*|\sigma) &= \ell(\theta) + \log \pi(\delta_*|\sigma) - (\text{const.}) \\ &= \ell(\theta) - \frac{M}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} |\Sigma| - \frac{1}{2} \delta_*' \Sigma^{-1} \delta_* - (\text{const.}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

を最大化すればよい。(5.6) の最後の 2 次形式の項 $\delta_*' \Sigma^{-1} \delta_*$ は、元来の効果パラメータ β たちを用いて表すと下記ようになる。

$$\begin{aligned} \delta_*' \Sigma^{-1} \delta_* &= \frac{1}{\sigma_A^2} \sum_{i=1}^{I-1} (\beta_i^A - \beta_{i+1}^A)^2 + \frac{1}{\sigma_{AS}^2} \sum_{i=1}^{I-1} \{(\beta_{i2}^{AS} - \beta_{i+1,2}^{AS}) - (\beta_{i1}^{AS} - \beta_{i+1,1}^{AS})\}^2 \\ &\quad + \frac{1}{\sigma_P^2} \sum_{j=1}^{J-1} (\beta_j^P - \beta_{j+1}^P)^2 + \frac{1}{\sigma_{PS}^2} \sum_{j=1}^{J-1} \{(\beta_{j2}^{PS} - \beta_{j+1,2}^{PS}) - (\beta_{j1}^{PS} - \beta_{j+1,1}^{PS})\}^2 \\ &\quad + \frac{1}{\sigma_C^2} \sum_{k=1}^{K-1} (\beta_k^C - \beta_{k+1}^C)^2 + \frac{1}{\sigma_{CS}^2} \sum_{k=1}^{K-1} \{(\beta_{k2}^{CS} - \beta_{k+1,2}^{CS}) - (\beta_{k1}^{CS} - \beta_{k+1,1}^{CS})\}^2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

(5.6) の最大化は σ の重みベクトルを所与としたとき、パラメータの 1 次階差の 2 乗和を罰則として付与した対数尤度の核 $\ell(\theta)$ の最大化となっている。 $\ell(\theta)$ との相対で各効果の階差を小さくす

ることにより (5.6) 式の最大化は実現され、各 δ の事前分布について正規分布を仮定したことが、パラメータ β を漸進的に変化させることにつながっている。

(5.7) で階差パラメータ、例えば年齢について、 $\delta_i = \beta_i^A - \beta_{i+1}^A$ を元来の効果パラメータ β_i^A に置き換えたものは、各 β_i^A の事前分布に平均 0 の正規分布を仮定したモデルとなり、それは年齢の主効果について正規分布に従う変量効果と似た HAPC モデルとなる。その場合、(5.7) は各 β を平均である 0 の方向にシュリンクさせる作用があるため、第 3 章で示したように、効果の傾きは全体としてフラットなものに近づくことになる。一方で階差パラメータを用いた本稿で提案する BAPC モデルでは、各 β について、その変化の方向を 0 にシュリンクさせる。年齢、時点、コウホートの各効果は何らかのトレンドを持っているケースが多いことは経験的に知られており、またフラットなトレンドも包含できるため、パラメータの階差を変量効果として扱うことは、その水準を変量効果として扱うよりも、緩やかな付加条件といえる。なお、(5.7) で、年齢効果のパラメータを個々人の年齢に比例させたものを与えれば、年齢効果として直線を用いたモデルを表現することが可能である。

5.3.2 超パラメータの決定

(5.6) の最大化は超パラメータ σ の与え方により影響を受ける。 σ の要素である σ^2 たちに小さな値が設定されれば、階差パラメータの 2 乗値が増幅されることになり、わずかなパラメータの変動に対しても罰則項の値が相対的に大きくなる。つまり、小さな σ^2 の値は β たちの変動を抑える方向に働く。逆に大きな σ^2 のもとでは、最大化問題における罰則項の役割は小さくなり、 β たちの変動も許容されやすくなる。各 σ^2 の大きさの決定は尤度との相対において統計学的に決定する必要があり、ここでは次式で表される赤池のベイズ型情報量規準 (ABIC) の最小化で決定する (Akaike 1980)。

$$\text{ABIC} = -2\log(\text{周辺尤度}) + 2h = -2\log \int f \cdot \pi d\delta_* + 2h.$$

h は超パラメータの個数と、定数項を含めた固定効果のパラメータの個数を足したものである。ここで扱っているロジスティックモデルでの ABIC は、近似的に

$$\text{ABIC}(\hat{\theta}, \sigma) \simeq -2\ell(\hat{\theta}) + \hat{\delta}'_* \Sigma^{-1} \hat{\delta}_* + \log \left| \Sigma X_*' \widehat{W} X_* + E \right| + 2h, \quad (5.8)$$

となる*2。ここで

$$X_* = [X_A D_I^-, X_{AS} (D_2^- \otimes D_I^-), X_P D_J^-, X_{PS} (D_2^- \otimes D_J^-), X_C D_K^-, X_{CS} (D_2^- \otimes D_K^-)],$$

$$\widehat{W} = (\text{diag } \hat{\pi})(E - \text{diag } \hat{\pi}),$$

である。(5.8) の第 1 項の $-2\ell(\hat{\theta})$ と対応する飽和モデルでの $-2\ell(y)$ との差は、パラメータ $\hat{\theta}$ でのデータの当てはまりを示し、 $-2\ell(\hat{\theta})$ の値が小さいほど当てはまりがよいことになる。第 2 項の二

*2 導出の詳細は、中村 (2005) を参照

次形式 $\hat{\delta}'_*\Sigma^{-1}\hat{\delta}_*$ は、その値が小さいほど、各効果が滑らかであることを示す。超パラメータの σ^2 たちに大きな値を設定するほど、この二次形式の値は小さくなるが、第3項に示した行列式の値は大きくなる。第3項は ABIC の最小化に関し、 σ^2 たちに大きな値を与えることのペナルティ項と考えることができる。

5.4 想定するモデル群とモデル選択

5.4.1 想定するモデル群

本章でこれまで考えてきたモデルは、性別および3要因の主効果、および性別と3要因の交互作用効果をすべて考慮した、いわばフルモデルと呼べるものである。性別、年齢、時代、コウホートについて、これら各要因の効果の有無により、コウホート分析モデルのバリエーションをさらに考えることができる。加えて、4.3.3 節で論じた、男女それぞれの年齢効果に相当する効果 (A_m , A_w) を、時点とコウホートについても考え、それらをモデルに取り込むことも可能である。

さて、コウホート分析では3効果の間に識別問題が横たわっており、3要因のうち、ある特定の要因をモデルから除外すると、その要因の効果が他の効果に振り分けられるのであった。他方で、3.7 節で扱った男性大学卒割合のように、特定の要因の効果のみで説明できる事象については、他の要因を含めたモデルには冗長性が含まれることになる。各要因の有無によって構成されるモデル群の中から最適なモデルを選択することが重要となる。また、当該要因のモデルへの包除により残りの要因の効果の値が大きく変わることがないか、各要因の効果の一貫性を確認しておくことも適切なモデリングのために重要な作業となる。

以下、これまで論じてきた枠組みで想定できるモデル群を具体的に考える、統計モデルの表記として、性別の主効果を S, 年齢、時点、コウホートの男女で共通の主効果をそれぞれ A, P, C であらわし、性別と各要因それぞれの交互作用効果を [AS], [PS], [CS] であらわすことにする。また、節と同様に、男女それぞれの年齢効果に1次階差制約をいれたものを A_m , A_w で表し、時点とコウホートについてもそれぞれ同様の方法で各効果を生成し、それぞれ P_m , P_w , C_m , C_w と表す。

これら効果の有無を列挙することで想定するモデル群は構成できるが、性別と各要因の交互作用効果である [AS], [PS], [CS] については、各要因の主効果であるそれぞれ A, P, C とともに用いることにする。性別と各要因の交互作用効果には (5.2) で示したゼロ和制約を課しているため、各要因の主効果を含めずに、それ単体でモデルに含めた場合に結果の解釈が難しいためである。性別と年齢の交互作用効果を例にとると、交互作用を単体で用いたモデルは、各年齢区分について男女で年齢効果を打ち消しあう状況を想定することになり、現実的なものとは言えない。

そこで、本章ではこのような交互作用効果を単体で導入したモデルを除外し、例えば年齢に関する効果については、

- 1) 年齢効果なし
- 2) 男女共通の年齢主効果のみ (A)
- 3) 年齢の主効果と性別と年齢の交互作用効果をあわせた A[AS]

- 4) 男女個別の年齢効果 ($A_m A_w$)
- 5) 男性の年齢効果のみ (A_m)
- 6) 女性の年齢効果のみ (A_w)

の 6 つの効果を考えることになる。時点，コウホートについても同様である。

よって，年齢，時点，コウホートについて各効果の形状の組み合わせにより， $\underbrace{6}_{\text{年齢}} \times \underbrace{6}_{\text{時点}} \times \underbrace{6}_{\text{コウホート}}$ の 216 通りのモデルが構成できる。これら 216 通りのモデルに対して，さらに性別の主効果 S の有無を考慮する必要がある。[AS]，[PS]，[CS] が含まれるモデルについては，各要因の主効果と同様，常に性別の主効果として S が含まれるようにする。また， A_m ， A_w など，各要因について男女個別に 1 次階差制約をいれた効果も，性別 \times 各要因の効果を表したものに他ならず，交互作用効果モデルの一類型である。そのため，当該効果が含まれるモデルについても性別効果 S が常に含まれるようにする。これらのことを考慮すると，性別効果 S が含まれないモデルは，年齢の効果については上記の 1) と 2) の場合のみを考えればよい。時点とコウホートも同様に考えて， $2 \times 2 \times 2 = 8$ 通りである。ゆえに，本章で想定するモデルの総数は，性別の主効果 S が含まれるモデル 216 個と S が含まれないモデル 8 個を合わせた 224 個となる。

5.4.2 ステップワイズによるモデル選択

続く 5.5 節と 5.6 節では，実際のデータに対して，想定するモデル群の中から ABIC を用い最適なモデルを選択する。224 個すべてのモデルについてそれぞれの ABIC を計算するには多大な時間を要するため，次の手続きで示すステップワイズによる方法を用いて，モデル選択を行う。

■処理の流れ

第 1 ステップ

性別および 3 要因の主効果の有無によって構成される 16 個のモデル,
G, A, P, C, AP, PC, AC, APC, S, S-A, S-P, S-C, S-AP, S-AC, S-PC, S-APC
の中から ABIC が最小になる最適モデルを選択する。これを暫定的最適モデルとする。

第 2 ステップ

暫定的最適モデルをもとに後述する方法で比較モデル群を生成する。生成すべき比較モデルがなければステップを終了し、暫定的最適モデルを最適モデルとして終了する。

第 3 ステップ

比較モデル群に含まれるすべてのモデルの ABIC を算出する。

第 4 ステップ

比較モデル群の最小 ABIC モデルと暫定的最適モデルの ABIC を比較し、暫定的最適モデルの ABIC が小さければステップを終了し、暫定的最適モデルとする。さもなければ、比較モデル群の最小 ABIC モデルを暫定的最適モデルとし、第 2 ステップに戻る。

比較モデル群の生成方法

第 1 ステップ直後の暫定的最適モデルを考える（このモデルは、年齢、時点、コウホートの 3 要因のいずれについても性別との交互作用効果をもっていない）。3 効果のいずれか 1 つ（A, P, C を代表して X と書くことにする）について、暫定的最適モデルに主効果が含まれているか否かにかかわらず、タイプ 1 からタイプ 4 までの交互作用効果（X[XS], X_mX_w , X_m , X_w ）に置き換えたモデルを生成する。このとき、性別の主効果 S は必ずモデルに含めるようにする。X=A, P, C と考えると、いずれかの要因についてのみ性別との交互作用効果をもつ $4 + 4 + 4 (= 12)$ のモデルからなる比較モデル群が生成されることになる。S-AP モデルを例にとると、S-A[AS]P, S- A_mA_w P, S- A_m P, S- A_w P, S-AP[PS], S- AP_mP_w , S- AP_m , S- AP_w , S-APC[CS], S- APC_mC_w , S- APC_m , S- APC_w が比較モデル群を構成する。

次に比較モデル群を生成する段階では、暫定的最適モデルのどれか 1 つの要因についてはいずれかの交互作用効果を持っているので、交互作用効果をもたない残りの 2 つの要因についてタイプ 1 からタイプ 4 までの交互作用効果に置き換えた $4 + 4 (= 8)$ のモデルを比較モデル群として生成する。S- AP_m を例にとると、S-A[AS] P_m , S- $A_mA_wP_m$, S- A_mP_m , S- A_wP_m , S- $AP_mC[CS]$, S- $AP_mC_mC_w$, S- AP_mC_m , S- AP_mC_w が比較モデル群を生成することになる。

さらに次に比較モデル群を生成する段階では、暫定的最適モデルのどれか 2 つの要因はいずれかの交互作用効果をもっているため、残りの 1 つの要因についてタイプ 1 から 4 までの交互作用効果に置き換えた 4 つのモデルを比較モデル群として生成する。S- $A_mA_wP_m$ を例にとると、S- $A_mA_wP_mC[CS]$, S- $A_mA_wP_mC_mC_w$, S- $A_mA_wP_mC_m$, S- $A_mA_wP_mC_w$ が比較モデル群を構成することになる。

5.5 適用例 1 : 「日本人の意識調査」

5.5.1 使用したデータ

本節では、実際のデータを用いて性別と 3 要因それぞれの交互作用効果を含んだモデルが最適モデルとして選ばれる傾向があるかを確認する。その上で、性別と各要因の交互作用効果がどのような形で描かれるかを、特定の質問に適用した推定結果を用いて図示する。

検証に用いるデータは、4.2.5 節で用いた NHK 放送文化研究所が実施している「日本人の意識調査」である*3。「日本人の意識調査」は繰り返し横断面調査であり、5 年間隔で実施されている。ここでは、1983 年から 2008 年までの 6 回分の調査を用いる。また、調査データとして年齢区分は 5 歳幅で提供されており、本節の検証では「20-24 歳」から「75 歳以上」までの 12 個の区分を対象にする。年齢区分の幅と調査時点の間隔は 5 年で一致しており、検証データに含まれるコウホート

*3 東京大学社会科学研究所附属社会調査・データアーカイブ研究センター SSJ データアーカイブから「日本人の意識調査（NHK 放送文化研究所）」の個票データの提供を受けました

区分の数は「1904 年生まれ以前」から「1988-1992 年生まれ」の 17 個である．総サンプルサイズは 21,775 である．検証には，当該調査期間にすべて実施されている 94 個の質問項目を用いた．各項目の第 1 選択肢を選んだ人の反応を 1，その他の選択肢を選んだ人の反応を 0 とした．

5.5.2 分析結果

対象とした 94 個の質問群に対して，5.4 で提示したステップワイズによる方法により最適モデルを選び，選ばれた最適モデルについてそれぞれの数をカウントしたものが表 5.1 である．モデルの選択には情報量規準として ABIC を用いた．

表 5.1 からは，すべての最適モデルにおいて，性差が認められていることが確認できる．また，いずれの最適モデルにおいても，1 つ以上の要因に性別との交互作用効果が認められている．性別と年齢との交互作用効果を含むモデルの数は 28 件で質問全体の 30% である，性別と時点の交互作用効果を含むモデルの数は 22 件で全体の 23% である．性別とコウホートの交互作用効果を含むモデルの数は 58 件で全体の 62% である．今回用いた検証データでは，年齢間や時点間よりもコウホート間による性差が見られる質問項目が多かったことになる．

以下では，これら質問の中から興味深い推定結果を 1 つ取り上げ詳細を述べることにする．取り上げるのは，男女の権威・平等に対する意識で，具体的には「台所の手伝い等は、男子のすること

表 5.1 最適モデル別項目数

モデル	選ばれた数
S-A[AS]C	9
S-A[AS]C[CS]	4
S-A[AS]P	1
S-A[AS]P[PS]C	3
S-A[AS]PC	9
S-A[AS]PC[CS]	2
S-AC[CS]	7
S-AP[PS]	4
S-AP[PS]C	7
S-AP[PS]C[CS]	4
S-APC[CS]	30
S-P[PS]C	3
S-P[PS]C[CS]	1
S-PC[CS]	10
計	94

ではない」という意見に賛成かどうかを尋ねたものである。ここでは上記の質問に対して賛成した人の値を 1，そうでない回答をした人の値を 0 とした 2 値変数にして分析を行った。

表 5.2 ステップサイズによるモデル選択の結果

順位	モデル	h	ABIC	Δ ABIC	順位	モデル	h	ABIC	Δ ABIC
1	S-AP[PS]C[CS]	6	17429.34	0.00	21	S-AP _m P _w C	5	17497.31	67.96
2	S-A[AS]P[PS]C[CS]	7	17431.34	2.00	22	S-A _m PC	4	17499.85	70.50
3	S-AP _m P _w C[CS]	6	17433.07	3.73	23	S-AP _w C	4	17511.69	82.34
4	S-A _m A _w P[PS]C[CS]	7	17435.82	6.47	24	S-AP _m C	4	17539.49	110.14
5	S-APC[CS]	5	17440.35	11.01	25	S-APC	4	18627.25	1197.91
6	S-A[AS]PC[CS]	5	17441.45	12.11	26	S-AC	3	18662.46	1233.11
7	S-A _m P[PS]C[CS]	6	17442.23	12.89	27	S-PC	3	18663.72	1234.37
8	S-APC _m C _w	5	17443.00	13.65	28	S-AP	3	18664.60	1235.25
9	S-A _m A _w PC[CS]	6	17445.01	15.66	29	APC	3	18722.20	1292.86
10	S-A _w P[PS]C[CS]	6	17445.94	16.59	30	AC	2	18756.70	1327.35
11	S-AP _w C[CS]	5	17448.67	19.32	31	PC	2	18757.32	1327.98
12	S-A _m PC[CS]	5	17451.23	21.89	32	AP	2	18760.70	1331.36
13	S-A _w PC[CS]	5	17456.82	27.47	33	S-C	2	18995.55	1566.20
14	S-APC _m	4	17460.47	31.12	34	C	1	19092.11	1662.77
15	S-AP _m C[CS]	5	17473.71	44.36	35	S-P	2	19115.18	1685.84
16	S-A[AS]PC	5	17480.13	50.79	36	P	1	19204.47	1775.12
17	S-A _m A _w PC	5	17481.49	52.15	37	S-A	2	19580.75	2151.40
18	S-A _w PC	4	17484.91	55.57	38	A	1	19671.28	2241.94
19	S-APC _w	4	17485.30	55.95	39	S	1	19818.74	2389.40
20	S-AP[PS]C	5	17493.60	64.26	40	G	0	19904.13	2474.79

表 5.2 はステップワイズにより最適モデルを探索した際に生成した比較モデル群の一覧と，それらの ABIC について記載したものである．まず，表 5.2 を用いて，どのような効果を持つモデルが ABIC の観点から良いモデルとして評価されているかを確認しておく．最適モデルとして選ばれたのは S-AP[PS]C[CS] であった．このモデルでの各効果の推定結果は図 5.1 に示している．図 5.1

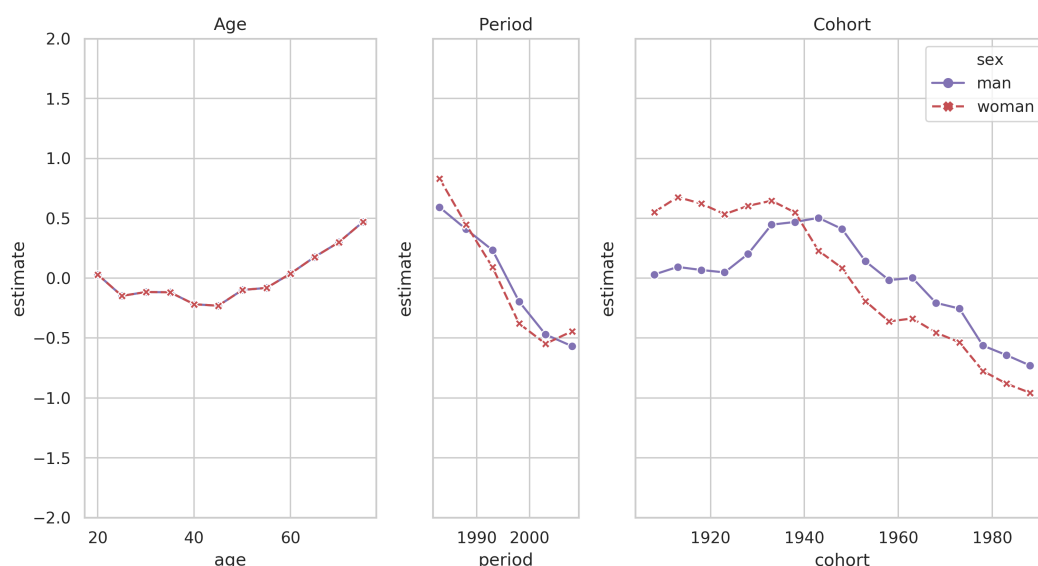


図 5.1 S-AP[PS]C[CS] モデルによる男女の権威・平等に対するコウホート分析の結果

では年齢については主効果を，時点とコウホートについてはそれぞれの主効果に性別と各要因の交互作用効果を足したものを示している．実線が男性の値を破線が女性の値を示している．

最適モデルでは年齢については男女共通の効果が選ばれ，時点とコウホートについては性別との交互作用効果が含まれている．表 5.2 における上位モデルらには，年齢，時点，コウホートのそれぞれの効果がすべて何らかの形で含まれており，3 効果とも男女の権威・平等に対する意識の変化に対して説明力を有していることがうかがえる．年齢については上位モデルでは主効果 A 単体で含まれているケースが多く，男女間で年齢方向に沿った変化の動きは同一とみなした方がよいと言えよう．時点とコウホートについては性別との交互作用効果が概ね含まれており，当該質問については男女で異なる時点とコウホートの効果が認められている．性別と時点，性別とコウホートの交互作用効果の形としては，[PS] や [CS] の男女間の近さを考えた効果の方が (P_m, P_w) ， (C_m, C_w) の組み合わせによる効果よりも概ね上位にきている．このように，表 5.5 からは 3 効果の一貫性も保たれた結果が得られている．

次に，男女別にデータを分けて APC モデルの推定を行ったことに等しい $S-A_m A_w P_m P_w C_m C_w$ モデルの推定結果を示し，男女のデータを統合した最適モデルである S-AP[PS]C[CS] との比較をしておく． $S-A_m A_w P_m P_w C_m C_w$ モデルの ABIC は 17442.11 である． $S-A_m A_w P_m P_w C_m C_w$ モデルは今回の比較モデル群には現れていないが，表 5.5 の結果で評価すると 6 番目と 7 番目の間に位置し，

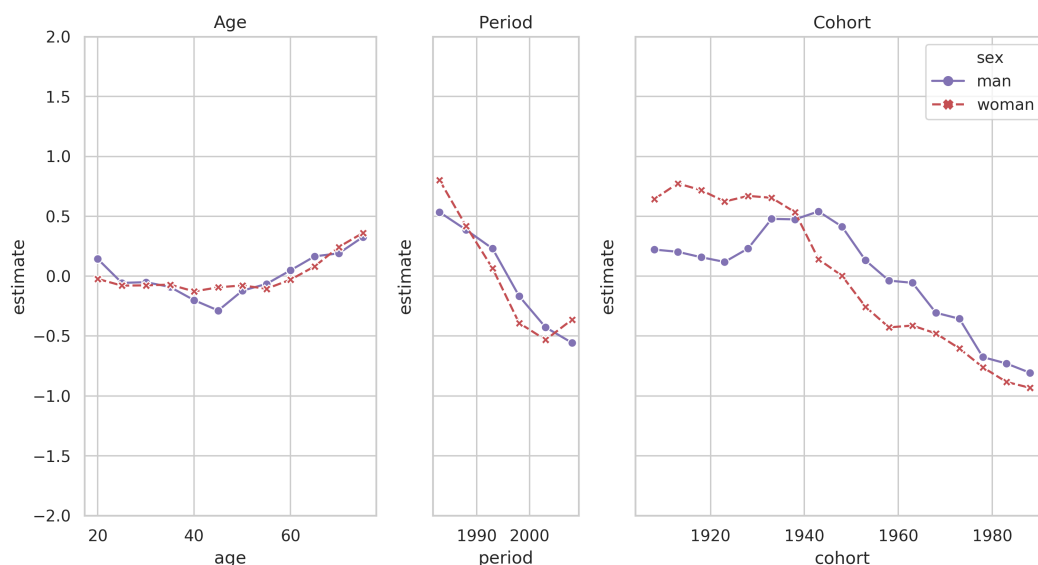


図 5.2 S- $A_m A_w P_m P_w C_m C_w$ モデルによる男女の権威・平等に対するコウホート分析の結果

最適モデルとの ABIC の差は 12.77 である．このことから，男女のデータを統合し豊富なモデル群を形成することにより，ABIC の観点からさらに良いモデルを選択できる可能性が示された．

S- $A_m A_w P_m P_w C_m C_w$ について各効果の推定結果を示したものが図 5.2 である．年齢効果について男女に僅かな差が見られる．男女別にデータを分けて推定した場合はこの僅かな差については男女の年齢効果が個別のものとして捉えるしかなかった．しかしながら，男女のデータを統合することにより，差異があるとはいえない結果を得られることになる．また性別と時点，性別と年齢の交互作用効果についても，男女でデータを分けた場合は，それらの効果が男女個々が独立した動きをしているとの解釈しかできなかったが，男女のデータを統合した場合は，男女の動きに近さを考慮してモデリングを行った方が良いとの解釈が可能となっている．

最後に，最適モデルである S-AP[PS]C[CS] モデルの推定結果から，権威・平等に対する男女の意識変化についての含意を述べておく．ここでは男女間での効果の違いがより明確に分かるように，図 5.3 では各要因の効果に性別の効果を加えて改めて提示し直した．性別の主効果は男性の方が高い値であるため，図 5.1 の結果から男性の折れ線が上に女性の折れ線が下にシフトしたものとなる．早生のコウホートを除き，概ねどの点においても男性の効果が女性の効果を上回っている．

まず，年齢についてみると，時点要因，コウホート要因を統制して，どの年齢においても男性の方が女性よりも当該意見に賛成する傾向が高くなっている．また男女ともに高齢層で賛成する傾向がある．ただし，後述するように，戦中・戦前生まれの世代では若い世代に比べてこの意見に賛成する傾向が高く，使用したデータ・セットにおいて 60 歳代以降の対象者は戦中・戦前生まれの世代に限られている．戦後生まれの世代も含め，権威・平等に対する意識が純粋に加齢の影響だけにより変化するかを判断するには，さらなるデータの蓄積が必要となる．

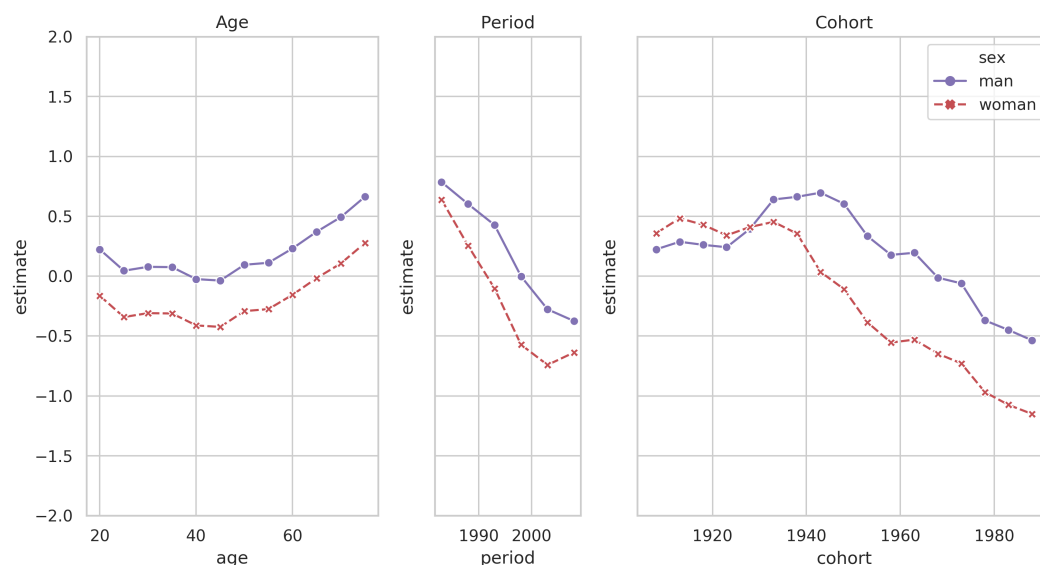


図 5.3 最適モデルによる男女の権威・平等に対するコウホート分析の結果（性別＋各要因の効果）

次に、時点について着目すると、近年の調査になるほど急速に社会全体の意識変化が進んでいることが分かる。男女雇用機会均等法の成立や女性の大学進学率の上昇など女性の社会進出が進んだ時代の動きを反映している。また、トレンドとしては男女差が拡大している。女性全体の意識変化が男性よりも速かったことがうかがえる。ただし、2008 年調査では女性の値がやや上昇しており、男女間の差が縮まっている。今後の調査結果の動向が注目される。

最後に、コウホートの結果について着目すると、1927 年以前の生まれ世代では同一コウホート内で男女間での意識差がほとんどなかったことが分かる。その後、男性の戦後生まれの世代では男女ともに後の世代になるほど、急速に意識変化が進んでいることがうかがえる。男女間の意識差は、戦後生まれのどの世代においても一定程度、存在している。

コウホート効果については、男性では折れ線の形状が戦争を挟んだ前後の世代で峰ができており、一方で女性では概ね世代が下がるにつれて右肩下がりとなっている。

表 5.3 男女の権威・平等：男女別時点×時点の集計表（賛成した人の割合）

性別	コウホート 時点	1908	1913	1918	1923	1928	1933	1938	1943	1948	1953	1958	1963	1968	1973	1978	1983	1988
		1912	1917	1922	1927	1932	1937	1942	1947	1952	1958	1962	1968	1972	1978	1982	1988	1992
男性	1983	0.37	0.30	0.35	0.30	0.21	0.35	0.23	0.29	0.35	0.28	0.28	0.31					合計
	1988		0.38	0.20	0.18	0.29	0.34	0.33	0.33	0.25	0.19	0.18	0.18	0.21				0.29
	1993			0.32	0.23	0.29	0.28	0.28	0.23	0.20	0.22	0.19	0.18	0.08	0.21			0.26
	1998				0.25	0.20	0.26	0.19	0.23	0.19	0.11	0.08	0.15	0.10	0.09	0.04		0.22
	2003					0.21	0.21	0.19	0.17	0.13	0.10	0.06	0.11	0.06	0.10	0.04	0.11	0.16
	2008						0.15	0.21	0.22	0.18	0.10	0.08	0.04	0.09	0.06	0.06	0.01	0.13
女性	1983	0.41	0.51	0.38	0.31	0.33	0.34	0.31	0.22	0.27	0.16	0.16	0.22					0.11
	1988		0.40	0.40	0.35	0.29	0.25	0.27	0.19	0.14	0.10	0.11	0.08	0.12				0.03
	1993			0.30	0.21	0.22	0.24	0.20	0.13	0.12	0.10	0.06	0.09	0.07	0.07			0.01
	1998				0.20	0.20	0.13	0.15	0.08	0.04	0.07	0.04	0.05	0.06	0.06	0.03		0.08
	2003					0.21	0.15	0.11	0.06	0.04	0.09	0.03	0.04	0.06	0.05	0.02	0.01	0.09
	2008						0.24	0.17	0.11	0.07	0.06	0.06	0.05	0.03	0.04	0.05	0.03	0.02
合計		0.40	0.40	0.33	0.26	0.25	0.25	0.22	0.19	0.17	0.13	0.11	0.12	0.09	0.08	0.04	0.04	0.17

コウホート効果の折れ線がこのような形状を描く理由は、表 5.3 に示した時点 × コウホートクロス集計表をみることにより理解できる。「台所の手伝い等は、男子のすることではない」という意見について、男性では 1980 年台の調査において、戦前生まれの世代（1942 年以前）と戦中・戦後すぐの世代（1943-1947, 1948-1952 年）で概ね同じ割合の人が賛成している。調査時点が進み 2000 年台の調査では、男性全体の賛成割合は減少している。このことは、図 5.3 において、男性の時点効果が右下がりであることと整合的である。ただし、男性の賛成割合の時点の変化に伴う減少は、若い世代において賛成割合が極めて小さな値となっている影響が大きく戦中・戦後すぐ世代の賛成割合は依然として一定数を占めている。特に 1943-1947 年生まれの世代では男女権威・平等についての意識改革があまり進んでいないことがうかがえる。他方、女性の賛成割合については、調査時点および出生年が下がるにつれて賛成の割合が減少しているため、同一コウホート内でも近年では賛成の割合が減少している。このように、調査時点が下がっても戦中・戦後世代の男性で意識改革が大きく進まなかったことは時点効果での説明ができず、また若い世代との対比において当該世代の高いコウホート効果として現れたと考えられる。

5.6 適用例 2：性別役割分業意識

5.6.1 使用したデータと変数

本節では性別と 3 要因の交互作用効果を考慮したコウホート分析の適用例として、男女の性別役割分業意識の変化に関して取り扱った分析結果を示す。性別役割分業意識とは、端的に言えば、「男女ないし夫婦がそれぞれ異なる役割を担うことを肯定／否定する意識」である (西野・中西 2016)。分析に使用したデータは日本家族社会学会が 1998 年から 5 年おきに実施している「全国家族調査 (NFRJ)」である*4。

分析には、当該調査のデータが一般に公開されている 1998 年、2003 年、2008 年調査の 3 期間のデータを用いた。

「全国家族調査」には性別役割分業意識に関する項目として「男性は外で働き、女性は家庭を守るべきである」という質問があり、回答の選択肢として、「そう思う」、「どちらかといえばそう思う」、「どちらかといえばそう思わない」、「そう思わない」の 4 つを調査対象者に提示している。本節の分析では、この質問を用い、「そう思う」と「どちらかといえばそう思う」の回答を 1 に、「どちらかといえばそう思わない」、「そう思わない」の回答を 0 にコーディングした値を応答変数とする。

年齢、時代、コウホートについては、各要因の区分を基にダミー変数分解する。「全国家族調査」のデータでは年齢が 1 歳区分の情報として収録されているがここでは調査の実施間隔の 5 年に合わせて、年齢についても 5 歳幅の区分を設定した。コウホートについても自動的に 5 年の間隔幅となる*5

なお、年齢、時点、コウホートの各区分における性別役割分業意識の回答結果は、「全国家族調査」の同じ質問を用いてコウホート分析を行った西村・中西でまとめられている。西村・中西は回答の「そう思う」から「そう思わない」に 4 点から 1 点を順に振ったものを応答変数として扱った分析である。各区分の集計では、概ね年齢が高くなるにつれ、また出生年が早くなるにつれ保守的な回答をしている結果が図示されている。

モデルに含める性別、年齢、時点、コウホート以外の説明変数は、西村・中西で採用されている変数を援用した。具体的には、調査対象者が居住している都市の規模、対象者の学歴、対象者の婚姻上の地位、世帯収入である。世帯収入はカテゴリー値で尋ねており、ここでは各カテゴリーの中央値を用いている。西村・中西では対象者の就業形態も説明変数として採用しているが、高齢層では多くの対象者が無職となり、一方で男性の場合は 60 歳以下で無職であるケースは多くない。女

*4 東京大学社会科学研究所附属社会調査・データアーカイブ研究センター SSJ データアーカイブから「全国家族調査 (日本家族社会学会)」の個票データの提供を受けました

*5 「全国家族調査」の 1998 年と 2003 年の調査では対象者の年齢が 28 歳から 77 歳であるのに対し、2008 年の調査では 28 歳から 72 歳までである。2008 年調査の高齢の年齢幅は前 2 回の調査に比べて 5 歳分短くなっている。標準コウホート表として見た場合、73 歳から 77 歳までの年齢は他の年齢区分に比べて、セルの数が 1 つ少なる。ここでの分析では使用可能な 28 歳から 77 歳までの年齢、及び各時点でそれらの年齢に対応するコウホートを分析の対象に加えている。

表 5.4 性別役割分業意識についてのコウホート分析 推定結果

順位	モデル	ABIC	h	Δ ABIC	σ_A^2	σ_{AS}^2	σ_P^2	σ_{PS}^2	σ_C^2	σ_{CS}^2
1	S-P[PS]C	20735.5	5	—	—	—	0.000	0.026	0.036	—
2	P[PS]C	20736.4	4	0.90	—	—	0.000	0.030	0.041	—
3	S-P[PS]C[CS]	20739.21	6	3.71	—	—	0.000	0.020	0.007	0.034
4	S-PC	20741.33	3	5.83	—	—	0.020		0.036	
5	P[PS]C[CS]	20741.34	5	5.84	—	—	0.000	0.021	0.008	0.039
26	S-A[AS]P[PS]C[CS]	29766.59	8	31.09	0.031	0.007	0.008	0.000	0.010	0.034

性の場合，専業主婦であるかどうか性別役割分業意識に大きな影響を与える可能性は考えられるものの，上記のように就業状態をそのまま変数として用いると，その効果は年齢，あるいは性別の効果との判別が難しくなる．本節の分析の主目的は3要因およびそれらの性別との交互作用効果を推定することであることから，年齢あるいは性別との就業状態は変数から除外した．

5.6.2 分析結果

前節で提示した年齢，時代，コウホートの各効果の有無の組み合わせと，それぞれの性別の交互作用効果の有無を考えた54個のモデルについて，ABICを最小にする超パラメータを求めた．

表 5.4 には ABIC が小さい順に上位 5 つのモデルと，すべての効果を包含したモデルである S-A[AS]P[PS]C[CS] について，各モデルの ABIC と超パラメータの値を記載した．上位 5 つに選ばれたモデルをみると，性別 (S) と時点 (P)，コウホート (C) による組み合わせ，あるいはそれらの交互作用を付与したモデルとなっている．すなわち ABIC で判断すれば，年齢 (A) の効果をモデルに含めることは積極的に支持されていない．この結果を解釈すると，加齢やライフステージが変わることで，性別役割分業意識は変化することはあまりなく，出生年や時点間による意識や考え方の違いが大きいことになる．今回のデータでは最も若い年齢区分でも 28-33 歳である．多くの人が就職や結婚といった性別役割分業意識に影響を与えるライフイベントを経験している年齢層を対象にしている．このことも年齢の効果が限定的となった一因であると考えられる．なおベースラインとして性差 (S) については，ABIC が最小のモデルである S-P[PS]C にはその効果が含まれているが，2 位になったモデル P[PS]C は他の効果は同等で性差 (S) のみが含まれていない．S-P[PS]C と

P[PS]C の ABIC の差はわずかである。

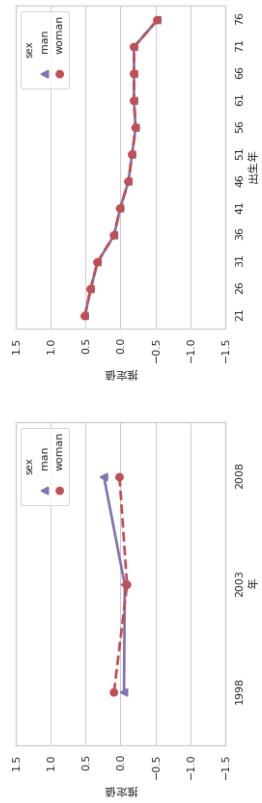
次に、フルモデルである S-A[AS]P[PS]C[CS] の結果を見てみると、ABIC の値は 26 番目で、全モデルの中において優れたモデルとはいえない。図 5.4 は、ABIC が最小となる S-P[PS]C モデルとフルモデルである S-A[AS]P[PS]C[CS] モデルについて、年齢、調査時点、コウホート（出生年）の各効果をプロットしたものである。上段に ABIC の最小モデル S-P[PS]C の結果を、下段にフルモデルである S-A[AS]P[PS]C[CS] の結果を提示した。それぞれ得られた階差パラメータ δ の値を各区分の水準を示す β に変換し直したものを提示している。結果を比較すると、最小モデルではコウホートによる意識の違いが表出しているのに対し、フルモデルでは年齢による違いが顕著に現れコウホートの違いは限定的である。コウホート分析を適用した研究では、年齢、時点、コウホートの各効果の存在は所与のものとして、それらをすべて含めたモデルしか考えない場合が多い。西村・中西による先行研究も年齢、時点、コウホートの 3 効果のすべてをモデルに組み込み、コウホートのみにランダム効果を設定しているため、明確な年齢効果がある結果を結論づけている。しかしながら、すべての効果を所与とした推定は定式化の誤りにつながる可能性があることを今回の結果は示唆している。なおフルモデルにおいて、性別と年齢およびコウホートの交互作用効果の値（男女両曲線の差）は小さなものとどまっている。今回の事例では最小モデルとして S-P[PS]C が選ばれ、ABIC の観点からは同一コウホート内の男女差はほとんどないモデルが好まれる。

最後に、他の説明変数を含め、最小モデル S-P[PS]C におけるパラメータの推定値を事後標準誤差、および、95% 信用区間と合わせて表 5.5 に示す。右端のアスタリスク (*) は 95% 信用区間に 0 が含まれていないことを示している。性差の階差パラメータは男性の値から女性の値を引いたものであり、男性のほうが、やや保守的な傾向があるといえるが、信用区間には 0 が含まれており、さほど顕著とはいえない。先のモデル選択で性別の効果を含まない 2 位のモデル P[PS]C と、ABIC の差はわずかであった。このことから、他の説明変数群をコントロールした上での性差は限定的なものと捉えたほうがよさそうである。時点の効果は 3 時点間で差がある結果であり、性別との交互作用効果も 1998 年から 2003 年にかけては 95% 信用区間に 0 が含まれていない。ただ、3 時点の調査データであることから何らかの長期的傾向があるのかまではわからない。また時点の効果には各回調査でのサンプル特性が含まれ、調査設計やそのもとでの調査時における調査環境の影響も反映されたため、ここでは時点効果の含意については判断を保留しておく。

コウホート効果の階差パラメータは、出生年の先のコウホートから後のコウホートの値を引いている。よってプラスに値が大きいほど、続くコウホートで考え方がよりリベラルになったことになる。結果をみると 3 つのコウホートの階差パラメータで、信用区間に 0 が含まれていない。1936-1940 年、1941-1945 年、1946-1950 年と第二次世界大戦を挟む連続した出生コウホートにおいて意識の変化が進んでいったことがうかがえ、特に小学校期に戦後教育を受け始めた 1936 年生まれのコウホートで、先のコウホートに対して大きく意識が変容している (図 5.4 上段も参照)。また、最適モデルではコウホート効果の交互作用効果が認められなかったことから、世代間による意識変化は男女で同じような動きをしてきたと解釈できる。なお、HAPC モデルを用いた西野・中西 (2016) の推定では、コウホート効果は認められるものの微弱なものであった。

他の変数については、有配偶では性別役割分業について保守的な傾向があり、世帯収入は概ね高

S-PPSIC[CS]



S-ALASPPSIC[CS]

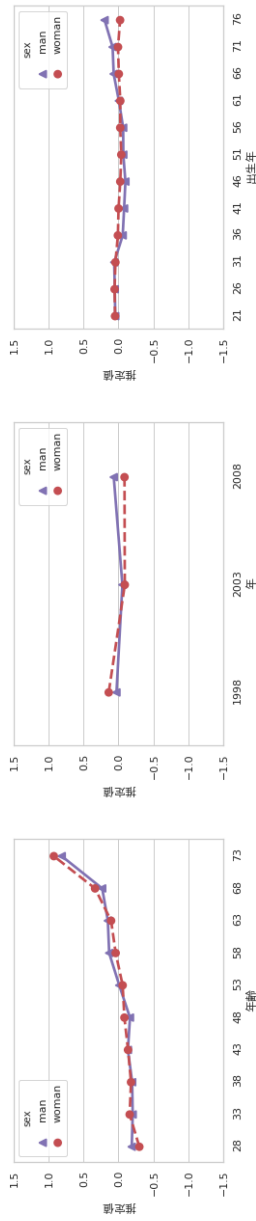


図 5.4 最小モデルとフルモデルの効果 (上段：最小モデル，下段：フルモデル)

表 5.5 最小モデル (S-P[PS]C) の推定結果

	推定値	事後標準誤差	95% 信用下限	95% 信用上限	
切片	-0.025	0.066	-0.155	0.105	
性差（男性－女性）	0.222	0.129	-0.031	0.475	
調査年・主効果					
1998-2003	0.198	0.041	0.117	0.278	*
2003-2008	-0.282	0.043	-0.367	-0.197	*
調査年と性別の交互作用効果					
1998-2003	0.176	0.081	0.017	0.335	*
2003-2008	0.079	0.084	-0.087	0.244	
コウホート主効果					
[1921, 1925]-[1926, 1930]	0.166	0.163	-0.153	0.486	
[1926, 1930]-[1931, 1935]	0.195	0.111	-0.022	0.412	
[1931, 1935]-[1936, 1940]	0.473	0.088	0.300	0.647	*
[1936, 1940]-[1941, 1945]	0.175	0.072	0.034	0.316	*
[1941, 1945]-[1946, 1950]	0.236	0.066	0.107	0.365	*
[1946, 1950]-[1951, 1955]	0.105	0.065	-0.023	0.233	
[1951, 1955]-[1956, 1960]	0.102	0.069	-0.034	0.239	
[1956, 1960]-[1961, 1965]	-0.048	0.059	-0.164	0.069	
[1961, 1965]-[1966, 1970]	0.000	0.000	0.000	0.000	
[1966, 1970]-[1971, 1975]	0.000	0.000	0.000	0.000	
[1971, 1975]-[1976, 1980]	0.138	0.091	-0.041	0.317	
都市規模（基準：人口10万人未満・男女）					
人口10万人以上・男性	0.151	0.047	0.059	0.242	*
人口10万人以上・女性	0.011	0.047	-0.081	0.102	
学歴（基準：高校/専門学校卒・男女）					
中学卒・男性	-0.054	0.065	-0.183	0.074	
大学卒・男性	-0.050	0.052	-0.151	0.051	
中学卒・女性	0.159	0.065	0.032	0.286	*
大学卒・女性	0.016	0.054	-0.091	0.122	
配偶上の地位（基準：未婚・男女）					
有配偶・男性	0.423	0.068	0.289	0.557	*
離別・男性	0.274	0.102	0.074	0.475	*
有配偶・女性	0.278	0.077	0.127	0.429	*
離別・女性	0.018	0.092	-0.161	0.197	
世帯収入・男性対象者	-0.015	0.008	-0.030	0.001	
世帯収入・女性対象者	-0.029	0.008	-0.044	-0.013	*

い収入層でリベラルな意識を持っている傾向にある。世帯収入については相対的に所得が高い共働き世帯で妻が実際に働いていることの影響も少なからずあることが予想される。なお、他の説明変数の効果の方向については、概ね西野・中西 (2016) と一致する結果が得られている。

5.7 まとめ

本章では、個票データを用いたコウホート分析で性別要因を取り扱うことを目的にして、BAPCモデルで用いる性別と3要因の交互作用効果について検討した。ここで用いた性別と3要因の交互作用効果は、第4.3節で論じた性別と年齢の交互作用効果を拡張したものであり、男女間の変化に近さの概念を導入したものである。各要因について性別との交互作用効果の存在を考慮することで、構成できるモデルの数は大幅に増え、分析で扱える含意の幅は広がることになる。年齢効果を例にとれば、

- A：男女で共通の年齢効果がある
- A[AS]：男女で異なる年齢効果がある
- A 要因なし：男女ともに年齢効果がない

の3つの状況を想定するモデル群からは表すことができ、どのようなモデルが選択されるかによって男女間での年齢効果の関係を判断することが可能になっている。

第 6 章

結語

今日では様々な研究分野において個人レベルの情報を収録した個票データの活用が一般的なものになっており、コウホート分析においても個票データへの展開が大きな潮流となっている。このような状況を背景に、本研究では個票データを用いる際により妥当と考えられるコウホート分析モデルを提案することを目指した。この主目的を達成するために取り扱った課題は大きく 2 つある。1 点目の課題は、現在、標準とされているモデルが推定の上で問題点を抱えており、その解消が求められていることである。2 点目の課題は、年齢、時点、コウホート以外の要因をコウホート分析のモデルで取り扱う方法である。

1 点目の課題の具体的な詳細は以下のようなものであった。個票データを扱う際に、現在の標準的モデルとして位置づけられているのが階層によるコウホート（HAPC）モデルである。HAPC モデルが抱える問題は想定以上にフラットなトレンドを有するコウホート効果を導き出しやすいというものである。加えて、フラットになるメカニズム自体も依然としてブラックボックスの中にあっただのが実情である。このような欠点が存在することにより、HAPC モデルはコウホート分析において広く使用されてはいるものの、決定的なモデルとしての地位までは確立できずにいた。本研究では、まずコウホート分析における識別問題がどのようなものであるかを、3 要因の関係から数理的に明確にした上で、HAPC モデルでは尤度関数における罰則項の形状がコウホート効果のトレンドを相対的にフラットにする圧力を有していることを明らかにした。

さらに、本研究では HAPC モデルが抱える問題を既に克服したモデルとしてベイズ型コウホート（BAPC）モデルに焦点をあてた。BAPC モデルは効果パラメータの 1 次階差に着目し、それらの階差が従う分布に正規モデルを仮定したモデルである。BAPC モデルは経験ベイズ流の枠組みから考案されたものであるが、混合効果モデルの一類型としてもとらえることができ、各効果パラメータそのものが正規分布に従うとする HAPC モデルとは平行な関係にある。BAPC モデルでは、効果パラメータの 1 次階差をとる手続きにより、コウホート効果のトレンドをフラットにする圧力が緩和させていることを示した。

2 点目の課題であるが、分析で扱う 3 要因以外の要因として対象者の最も基本的属性の一つである「性別」に着目した。分析に個票データを使用する場合は、年齢、時点、コウホートの以外の情報も活用できるケースがほとんどである。性別のように複数の水準で構成されている要因を扱う場

合、コウホート分析の文脈では3要因それぞれについて各水準間の関係が興味の対象となる。年齢を例にとると、性別の場合は男女に年齢効果が存在する、存在する場合は男女で効果が同一であるか異なるかということに関心が向かう。

本研究では男女で異なる3要因の効果を表すモデルとして、性別と3要因の交互作用効果をBAPCモデルの枠組みで扱う方法について提案した。性別は男女という2つの水準を持っており、3要因の効果の男女間での差をとることで自然に交互作用効果を構成することができる。この交互作用効果を含めたモデル群を形成することで、コウホート分析で扱える効果の範囲を大幅に拡張することを可能にした。

さて、コウホート分析において個票データを用いる際に、本研究の延長で解決すべき残された大きな課題を1つあげるとすれば、性別以外の要因と3要因の交互作用効果を構築するかということである。特に、3つ以上の水準が含まれる要因をどのように扱うかということが、解決すべき優先度が高い課題であろう。本研究で対象にした性別の要因は2水準であるため、男女の差をとるという直感的かつ比較的簡易な手続きにより、性別と3要因の交互作用効果を構成することができた。3水準以上の場合でも、水準が順序性を有したものであれば、水準間の階差をとることが可能であり、本研究で示した交互作用効果の構成を援用することは可能である。しかし、順序性がない要因の場合、「近さ」に準じる新たなフレームワークを考える必要がある。また、多くの要因をモデルに含める場合、あるいは要因に含まれる水準が多い場合は、要因の有無の組み合わせで構成されるモデルの数が膨大なものになる。計算量が多くなることもさることながら、モデル選択の結果を解釈する際に分析者にも大きな負担を強いることになる。それゆえ、ステップワイズにモデルを絞り込む効率的な方法を考える必要がある。

個票データが持つ情報量の多さを活用してコウホート分析を行うには、克服すべき課題が依然として多数残されているは事実である。しかしながら、識別問題が存在するコウホート分析では、分析者の想定した文脈に基づいて先験的に対象とするモデルを絞りこむことが大きな危険性をはらんでいることを本研究では指摘した。様々な表現力を有するモデルを通じ、モデル選択という手続きを踏むことの重要性を最後に改めて指摘したい。

謝辞

本研究は、総合研究大学院大学一複合科学研究科統計科学専攻一博士課程在学中に、総合研究大学院大学中村隆教授（現名誉教授）の指導のもとに行ったものです。中村先生には、遅々として進まない研究を辛抱強く見守っていただきました。時に応じて厳しく、また温かく励ましていただかなければ、怠惰な私が研究を続けることは難しかったと感じております。何より、全くの門外漢であった私をコウホート分析の奥深い世界にいざなってくださり、持てる知識を惜しむことなく授けてくださったことは、私の人生にとって貴重な財産となるものです。

また、総合研究大学院大学吉野諒三教授は、中村先生が総研大を退職後に著者の主任指導教員を快くお引き受けくださり、不自由なく研究を続ける環境を長らく整えていただきました。ここに深く感謝いたします。総合研究大学院大学馬場康維名誉教授、横浜市立大学土屋隆裕教授、総合研究大学院大学前田忠彦准教授のお三方には社会調査についてその実務や調査法の基礎を教えていただきました。さらに、前田先生には私が大学院に在籍した5年余り、土屋先生には先生が統計数理研究所在籍時に副指導教員を務めてくださり、研究内容のみならず総研大での学習、研究を行う上で多大なサポートをしていただきました。

論文審査の委員を務めていただいた総合研究大学院大学川崎能典教授、大阪大学大学院吉川徹教授に感謝の言葉を申し上げます。主査の川崎先生は、私の論文作成を辛抱強く待ってください、論文の取りまとめ方や審査に臨む姿勢など数多くのご助言をくださいました。副査を務めていただいた吉川先生には応用の観点から貴重なご助言をいただき、研究をさらに磨き上げることができました。総合研究大学院大学逸見昌之准教授にも格別のお礼を申し上げなければなりません。逸見先生には、私が総研大に入学する前から10年以上の長きに及び、統計学の基礎を懇切丁寧に教えていただいております。逸見先生や共に学んできた仲間たちとの交流は数学が不得手であった私にいつしか数学の楽しみを抱かせ、統計学の門を叩く決意を持つまでに至りました。論文をまとめていく過程で基礎の持つ大切さを痛感し、今後も数学、統計学の稽古に絶えず精進しなければならないと決意を新たにしております。

最後になりましたが、有職の身で学生を続けた私にとって家族、友人、同僚諸氏らの理解や有形無形のサポートがなければ、研究を続けることはおろか、始めることさえもできませんでした。深く感謝の意を表します。

【文献】

- Akaike, H., 1980, "Likelihood and the Bayesian procedure," D. V. L. J. M. Bernardo, M. H. DeGroot & A. F. M. Smith eds., *Bayesian Statistics*, Valencia: University Press, 143–166.
- Bell, A. & K. Jones, 2014, "Another 'futile quest'? A simulation study of Yang and Land's Hierarchical Age-Period-Cohort model," *Demographic Research*, 30(11): 333–360.
- , 2018, "The hierarchical age-period-cohort model: Why does it find the results that it finds?," *Qual Quant*, 52(2): 783–99.
- Dassonneville, R., 2013, "Questioning generational replacement. An age, period and cohort analysis of electoral volatility in the Netherlands, 1971–2010," *Electoral Studies*, 32(1): 37–47.
- Fienberg, S. E. & W. M. Mason, 1979, "Identification and estimation of age-period-cohort models in the analysis of discrete archival data," *Sociological Methodolgy*, 10: 1–67.
- , 1985, *Specification and Implementation of Age, Period and Cohort Models*, 45–88 New York, NY: Springer New York.
- Glenn, N. D., 2005, *Cohort Analysis*, Thousand Oaks: SAGE Publications Inc. 2nd. edition.
- Kupper, L. L., J. M. Janis, I. A. Salama, C. N. Yoshizawa, B. G. Greenberg, & H. H. Winsborough, 1983, "Age-period-cohort analysis: an illustration of the problems in assessing interaction in one observation per cell data," *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 12(23): 201–17.
- Kwon, S. & M. H. Schafer, 2012, "How Did Work Attitudes Change in Reform-Era China? Age, Period, and Cohort Effects on Work Centrality," *Sociological Perspectives*, 55(4): 557–81.
- Mason, W. M. & S. E. Fienberg, 1985, *Cohort Analysis in Social Research*, New York: Springer-Verlag.
- Mason, W. M. & H. L. Smith, 1985, *Age-Period-Cohort Analysis and the Study of Deaths from Pulmonary Tuberculosis*, 151–227 New York, NY: Springer New York.
- O'Brien, R. M., 2014, *Age-Period-Cohort Models : Approaches and Analyses with Aggregate Data*, Philadelphia, PA: CRC Press.
- , 2017, "Mixed models, linear dependency, and identification in age-period-cohort models," *Stat Med*, 36(16): 2590–600.
- Pampel, F. C. & L. M. Hunter, 2012, "Cohort Change, Diffusion, and Support for Environmental Spending in the United States," *AJS*, 118(2): 420–48.

- Pawitan, Y., 2013, *In All Likelihood : Statistical Modelling and Inference Using Likelihood*, Oxford, UK: Oxford University Press.
- Reither, E. N., R. M. Hauser, & Y. Yang, 2009, “Do birth cohorts matter? Age-period-cohort analyses of the obesity epidemic in the United States,” *Soc Sci Med*, 69(10): 1439–48.
- Ryder, N. B., 1965, “The Cohort as a Concept in the Study of Social Change,” *American Sociological Review*, 30(6): 843–61.
- Schwadel, P., 2010, “Age, Period, and Cohort Effects on U.S. Religious Service Attendance: The Declining Impact of Sex, Southern Residence, and Catholic Affiliation,” *Sociology of Religion*, 71(1): 2–24.
- Smith, H. L., W. M. Mason, & S. E. Fienberg, 1982, “Estimable Functions of Age, Period, and Cohort Effects: More Chimeras of the Age-Period-Cohort Accounting Framework: Comment on Rodgers,” *American Sociological Review*, 47(6): 787–93.
- Yang, Y., W. J. Fu, & K. C. Land, 2004, “A Methodological Comparison of Age-Period-Cohort Models: The Intrinsic Estimator and Conventional Generalized Linear Models,” *Sociological Methodology*, 34(1): 75–110.
- Yang, Y. & K. C. Land, 2006, “A Mixed Models Approach to the Age-Period-Cohort Analysis of Repeated Cross-Section Surveys, with an Application to Data on Trends in Verbal Test Scores,” *Sociological Methodology*, 36(1): 75–97.
- , 2014, *Age-Period-Cohort Analysis : New Models, Methods, and Empirical Applications*, Philadelphia, PA: CRC Press.
- 佐々木尚之, 2012, 「JGSS 累積データ 2000-2008 にみる日本人の性別役割分業意識の趨勢」『日本版総合的社会調査共同研究拠点論文集』, 第 12 章, 69–80.
- 西野理子・中西泰子, 2016, 「家族についての意識の変遷」稲葉昭英・保田時男・田淵六郎・田中重人編『日本の家族 1999-2009 全国家族調査 [NFRJ] による計量社会学』東京大学出版会, .
- 中村隆, 1982, 「ベイズ型コウホート・モデル」『統計数理研究所彙報』29: 77–97.
- , 2005, 「コウホート分析における交互作用効果モデル再考」『統計数理』53(1): 103–32.