

加速器のアラインメントにおける精密測定の研究

三 島 研 二
博 士（工 学）

総合研究大学院大学
数物科学研究科
加速器科学専攻

平成 14 年度
2002 年

目次

第1章 序 論	9
1.1 加速器設置における測量とアラインメント	9
1.2 加速器のアラインメントにおける問題点と解決法	11
1.2.1 座標の精度と測定の精度および測量網	12
1.2.1.1 測量網平均計算とフリーネットワーク解法	13
1.2.2 座標の精度を向上させる	13
1.2.2.1 測定精度の向上	13
1.2.3 \sqrt{Q} による測量網の設計	14
1.3 本研究の特徴	14
第2章 荷電粒子の軌道と加速器のアラインメント	15
2.1 荷電粒子の軌道方程式	15
2.2 ミスアラインメントとビームの運動	16
2.2.1 ミスアラインメントがビームの運動に与える影響	16
2.2.2 軌道の変形	18
2.2.2.1 摂動磁場が加わった場合	18
2.2.2.2 ミスアラインメントによる軌道の変形	19
2.3 ミスアラインメントによる軌道歪みの計算例	23
第3章 精密測量と \sqrt{Q} による測量網の最適化	25
3.1 角度と距離の測定による精度の特徴	25
3.1.1 測量機材の精度	25
3.1.2 測量機材による精度の方向	27
3.2 トラバース測量	28
3.2.1 トラバース測量とは	28
3.2.2 トラバース測量の問題点	29
3.2.2.1 方向角による誤差の偏在	29
3.2.2.2 誤差の累積	32
3.2.3 トラバース測量の問題点の解決策	34
3.3 測量網平均計算	35
3.3.1 観測方程式と正規方程式	35

3.3.1.1	観測方程式	35
3.3.1.2	正規方程式	36
3.3.1.3	正規方程式の解法	37
3.3.2	一般逆行列	37
3.3.3	Moore-Penrose 型一般逆行列	39
3.3.3.1	Moore-Penrose 型一般逆行列は 4 種類の条件を満たす	39
3.3.3.2	Moore-Penrose 型一般逆行列は一意的に決定される	40
3.3.4	ランク低減による解法と一般逆行列解法の比較	41
3.3.4.1	ランク低減解法	42
3.3.4.2	一般逆行列解法	44
3.3.5	測定距離の観測方程式	45
3.3.6	正規方程式と \sqrt{Q}	46
3.3.7	誤差楕円	51
3.3.7.1	誤差楕円の大きさ	51
3.3.7.2	誤差楕円の傾斜角	52
3.3.7.3	誤差楕円を回転させた場合の不変性の検討	52
3.4	\sqrt{Q} による測量網の最適化	54
3.4.1	最適な測量網のデザイン	55
3.4.2	測定精度 m_o の仮定値	55
第 4 章	仮想した加速器における測量網平均計算の計算例	57
4.1	固定網平均計算例	60
4.2	自由網平均計算例 (フリーネットワーク計算例)	65
4.3	固定網平均計算と自由網平均計算の比較, 検討	72
4.3.1	測量結果	72
4.3.2	誤差楕円	74
4.4	\sqrt{Q} による測量網の最適化例	75
第 5 章	測定精度 m_o の改善	77
5.1	測距儀一般	77
5.1.1	光波測距儀一般	78
5.1.2	光波測距儀の一般的な問題点	80
5.2	MEKOMETER ME5000	81
5.2.1	MEKOMETER 測定の問題点と解決法	83
5.2.2	MEKOMETER の測定原理	83
5.2.3	MEKOMETER の変調周波数の問題と解決法	85
5.2.4	MEKOMETER の周波数補正	86
5.3	MEKOMETER 測定システムの改良	87
5.4	MEKOMETER 測定システムの効果	91

第 6 章	測量とアライメントの実施例による検証	93
6.1	Siam Photon Project のストレージリングの場合	93
6.1.1	Siam Photon Project の概要	93
6.1.2	ストレージリングの測量とアライメントの概要	95
6.1.3	ストレージリングの \sqrt{Q} による測量網のシミュレーションと実 測結果	97
6.1.3.1	ストレージリングの特徴にともなう測量網の特徴	98
6.1.3.2	\sqrt{Q} による測量網のシミュレーション	99
6.1.3.3	各測量網の実測値による計算結果	108
6.2	HIMAC におけるアライメント	116
6.2.1	HIMAC の概要	116
6.2.2	HIMAC を構成する主要機器のパラメータ	117
6.2.3	シンクロトロンのアライメントの許容値	121
6.2.4	アライメントに使用した器械およびソフトウェア	122
6.2.5	アライメントの方法	123
6.2.5.1	偏向電磁石のアライメント	123
6.2.5.2	4 極電磁石, 他の機器のアライメント	124
6.2.6	測量網のデザイン	126
6.2.7	入射系, 出射系との整合	136
6.2.8	アライメント測量の結果	137
6.3	測量とアライメントの実施例の検討評価	145
6.3.1	SPS の場合	145
6.3.2	HIMAC の場合	145
6.3.3	SPS と HIMAC における実施例の総括	146
第 7 章	総括結論	149
7.1	測量網のデザインにおける \sqrt{Q} の有効性	149
7.2	MEKOMETER ME5000 の測定精度の改善	150
7.3	測量データの処理方法にフリーネット解法を用いることの有効性	150
第 8 章	謝 辞	151
	Appendix	153
付 録 A	磁場中の荷電粒子の運動	157
A.1	偏向電磁石中の荷電粒子の軌道方程式	157
A.2	4 極電磁石中の荷電粒子の軌道方程式	158

付 録 B 曲線の表現の一般論	161
B.1 パラメータによる曲線の表現	161
B.2 曲線を表現する基線ベクトル間の関係	162
付 録 C 磁場の方向成分	165
C.1 磁場の方向成分表示	165
C.2 磁場を方向成分に分解した効果	168
付 録 D 荷電粒子の軌道方程式の一般化	169
D.1 磁場中の荷電粒子の運動の一般化	169
D.2 ベータトロン振動の一般解	172
D.3 Emittance	176
D.4 マトリックスによる軌道計算	177
D.4.1 直 線 部	178
D.4.2 偏向電磁石	178
D.4.3 4 極電磁石	178
付 録 E 測距方式と精密測距儀	179
E.1 代表的な位相の計測方法	180
E.1.1 Phase Resolution	180
E.1.2 Path Length Modification	181
E.1.3 Frequency Modification	182
E.2 MEKOMETER ME5000 の短い波長と分解能	183
付 録 F 最小 2 乗法による測量網平均計算	187
F.1 観測方程式	187
F.2 観測方程式の行列表示	188
F.3 重み付き観測方程式	189
F.3.1 重み付けの方法	189
F.3.2 重み付き観測方程式	190
F.4 正規方程式	191
F.5 最確値 (最小 2 乗推定値)	192
F.6 測定値 \mathbf{L} の精度 σ_o	193
F.7 最確値 \mathbf{X} の精度 σ_x	196
F.8 一般逆行列 \mathbf{A}^+	198
F.8.1 正則行列 \mathbf{U} を組成する方法	198
F.8.2 対角行列を用いる方法	201
F.8.3 近似的に求める方法	203
F.9 正規分布	205
F.9.1 n 次元の正規分布の密度関数	205

F.9.2	1次元の正規分布の密度関数	206
F.9.3	2次元の正規分布の密度関数	206
F.9.4	確率長円	208

第1章 序 論

1.1 加速器設置における測量とアラインメント

加速器において、アラインメントの最大の目的は加速器内の粒子を安定して周回させることであり、最終的な目的は、各機器の理論的なレイアウトデザインを、現実の地球上の空間に再現することである。

加速器を周回する荷電粒子の平衡軌道が歪む原因として、主に次の3つの原因が考えられる。これらは互いに独立した原因であるが、ビームに対しては同じ影響を及ぼす*。

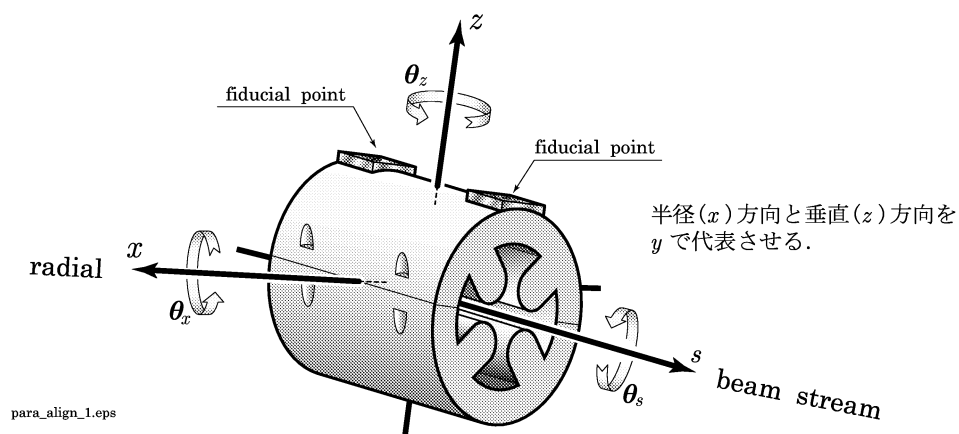
- 電磁石を支持する基礎地盤あるいはコンクリート構造物の変形
- ビームを誘導する磁場の誤差
- 電磁石のアラインメント誤差

などがビームの設計軌道を歪ませる主な原因であり、これらの誤差により電磁石の軸と理想的な閉軌道との間にズレが生じ、ビーム軌道を不安定にさせる。

基礎地盤、コンクリート構造物の変形については、十分な地質調査、対策工事などが要求される。

また、ビームを誘導する磁場の誤差は、電磁石の製作技術および磁場測定精度によるところが大きい。電磁石などの磁場測定の方法の改善、精度の向上から、電磁石の機械的中心からの磁場中心のオフセット量が0.01mmのオーダーでデータベース化されて利用が可能となってきた。すなわち、各電磁石の測量基準点 (fiducial point) と磁場中心のオフセットが精密に明示されてくるようになった。従来、直線区間のアラインメントは、セオドライトで光学的に、あるいはワイヤを張って、直線を設定して電磁石の測量基準を直線上に誘導する方法でアラインメントしてきた。アラインメントは理想的な閉軌道上に電磁石の磁場中心を正確に並べることが目的である。各電磁石の機械的中心からの磁場中心のオフセットが明確にされている現在では、オフセット分を考慮してアラインメントしており、コンピュータと連動して3次元座標でアラインメント可能であるレーザトラッカーが今後アラインメントの主流になる。

*参考文献 [5]



x と z の変位が軌道に影響を与える． s の方向の影響は微小である．
 θ_s の回転は対象外としている．

図 1.1: 4 極電磁石のミスアラインメントの方向

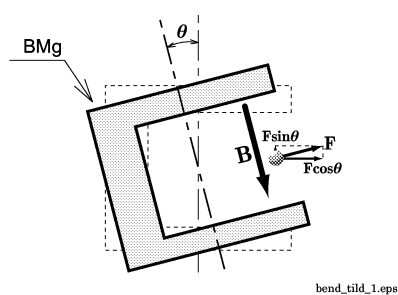


図 1.2: 偏向電磁石の傾き

表 1.1: 軌道の歪みの原因

電磁石 のタイプ	キック の源	キック源 の rms 値	キック角 又はキック量	軌道歪み の現れる面
4 極電磁石	変位	$\langle \Delta y \rangle$	$\frac{Gl_Q}{B\rho} \langle \Delta y \rangle$	$x - s$ $z - s$
偏向電磁石	傾き	$\langle \theta \rangle$	$\frac{Bl_B}{B\rho} \langle \Delta \theta \rangle$	$x - s$ $z - s$

アラインメントの誤差で主なものは、表 1.1 のような影響をビームに及ぼす。表 1.1 中、 $(Gl_Q/B\rho) \cdot \langle dy \rangle$, $(Bl_B/B\rho) \cdot \langle \Delta \theta \rangle$ がアラインメント誤差が原因で発生するビームに対するキック量である。ここで、 l_Q と l_B はそれぞれ 4 極電磁石と偏向電磁石の長さである。

軌道歪みの原因のうち、アラインメントに関連するのは、4 極電磁石の変位（半径方向 (x 方向) と垂直方向 (z 方向) ; 図 1.1 参照) と偏向電磁石の中心軸廻りの傾き (図 1.2 参照) である。この他、ビーム方向の電磁石の変位も考えられるが、上述の変位に比べてビームに対する影響は少ない。

4 極電磁石の中心軸廻りの回転 θ_s (図 1.1 参照) はビームの水平方向と垂直方向の運動のカップリングを発生させビームの安定に支障をきたすが、高精度の傾斜計を用いて傾きを補正すれば、補正用のスキュー 4 極電磁石を用いてカップリングを制御することが可能であるので、本研究の対象外とした。

1.2 加速器のアラインメントにおける問題点と解決法

最終的にレーザトラッカーで測量する前に、シンクロトロンホールだけでなく、ビーム輸送系を含めた加速器施設全体に均一で精度の高い 1 次基準点を設置し、さらに 1 次基準点を基にして 2 次基準点、2 次基準点を基にして 3 次基準点、加速器施設の規模に合わせて最終的に n 次基準点まで配置する。その理由は、レーザトラッカーは高精度であるが、有効な測定範囲が 15m 程度であり、狭い範囲でしかその性能を発揮できないからである。基準点の精度を偏らせないために、全体に均一な精度の高次の基準点を配点することが必要となる。

高次の基準点を配点する場合、従来の測量の方法で基準点を設置することになる。しかし、角度と距離の測定による単純なトラバース測量では、アラインメントにおけるわずかな許容誤差をクリアすることは難しい。角度と距離を測定する器械では、

方向によってそれぞれの精度が異なるためである（図 3.2 : 27 頁参照）。

要求される精度を十分に満たすためには、各測量機器の精度の特徴を熟知し、精度の弱い方向を補うような測定の組み合わせが必要となる。すなわち、測量網（Survey Network）を組まなければならない。測量網を組むことによって、測定データを最小 2 乗法によって処理することが可能となる。その結果、各基準点座標の標準偏差が得られ、方向をもった座標の精度で、誤差を評価することが可能となる。したがって、光学的な加速器の設計に基づく性能を確保するためにはそれぞれの加速器に適した測量網を組むことが必要となる (34 頁)。

1.2.1 座標の精度と測定の精度および測量網

測量によって得られたデータに基づく観測方程式は、

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{L} \quad (1.1)$$

である。ここに、 \mathbf{V} は残差ベクトル、 \mathbf{X} は座標の修正量ベクトル、 \mathbf{L} は観測値ベクトル、 \mathbf{A} は係数行列である。

最小 2 乗法の原理は、観測方程式から誤差の 2 乗の和を最小にすることであるから、転置行列を乗じて微分がゼロになることである。

$$\mathbf{V}^t \mathbf{V} = \min. \quad (1.2)$$

その結果、次の正規方程式を得る。

$$\mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{A}^t \mathbf{L} \quad (1.3)$$

$\mathbf{N} = \mathbf{A}^t \mathbf{A}$ とし、 \mathbf{N}^{-1} の各測点に対応する 2 重対角の部分行列、

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

によって、測定精度と座標精度の関係は式(1.5) で表される。

$$m_s = m_o \sqrt{Q} \quad (1.5)$$

ここに、

m_s : 座標の精度

m_o : 測定精度

である。

1.2.1.1 測量網平均計算とフリーネットワーク解法

最小2乗法で観測データを平均計算して座標を決定するとき、正規方程式の係数行列が正則でない場合、逆行列を求めることはできない。正規方程式が正則でないということは、すなわち既知点がない場合に相当する。

既知点がない場合、すなわち係数行列のランクに欠陥がある行列に対して逆行列を求める「一般逆行列」によって観測方程式を解く方法をフリーネットワーク解法といい、この解法を加速器リングの測量に応用した。

観測データを最小2乗法で解いて座標を決定する場合、既知点を必要としないフリーネットワーク解法は、測量網のデザインに用いた \sqrt{Q} の値をそのまま温存して座標を決定できるため、シンクロトロンの測量には有効である (74 頁)。

1.2.2 座標の精度を向上させる

Q は、最小2乗法の解を得るときの正規方程式の逆行列の対角要素である。この Q は、測量網を幾何学的な図形とみなしたときに決定される量であり、測定データの精度を座標の精度に変換する係数と解釈できる。式(1.5)に着目すると、座標の精度 m_s を小さくするためには、測定精度 m_o と \sqrt{Q} を小さくすればよいことになる。

1.2.2.1 測定精度の向上

測定精度 m_o を小さくする、すなわち測定精度を向上させるためには、測定機材の性能を十分に引き出す測定方法を適用すればよく、加速器のアラインメントの1次基準点から n 次基準点の設置のために次のような改善を行い、システム化した (図 5.7 : 89 頁参照)。

現在、可搬型で精度の高い光波測距儀である MEKOMETER ME5000 (以下「ME5000」とする。) は位相がゼロになる変調周波数をシンセサイザーで組み立てて距離に換算する方式である。測距儀の分解能の基準となる周波数は、測距儀内部で同じ発信器で変調と復調をおこなう。したがって、発信器の精度に誤差があっても測定された距離は誤差を含んだまま表示され、観測を繰り返しても測定値の分散は小さい。すなわち、正しい距離からわずかに異なる距離で測定距離の再現性が良好 (相対精度が良好) な場合がある。

このような誤差を排除し、正しい距離に近づけるために、外部に ME5000 の内部発信器よりも高精度な周波数カウンターで内部発信器による変調周波数を計測し、周波数の誤差を補正することによって測定を高精度化した (86 頁参照)。

1.2.3 \sqrt{Q} による測量網の設計

一方、 \sqrt{Q} は図形としての測量網によって決まる係数であるため、辺数を調整する、すなわち有効な測定辺を増やすことで小さくすることができる。しかし、実際の加速器のアラインメントの場合、加速器の中心に電源設備などの視通障害がある場合が多く、測定辺に制約がある。

したがって、測量効率と目標精度の関係から最適の測量網を組成し \sqrt{Q} を決定する必要がある (54 頁)。

1.3 本研究の特徴

以上のような測量の精度をあらかじめ予測できる方法で測量およびアラインメントする方法を考案した。現代測量法では座標とその誤差を 2 次元分布として表現する誤差楕円で座標の精度を評価することが多い。 \sqrt{Q} は、誤差楕円を計算する過程で現れる係数である。しかし、これまで測量網のデザインに用いられることはなかった。一般的な基準点測量の現場では、建造物、植生などの状況が予測できないため、図面上で計画した測量網を現地に忠実に再現することは不可能であり、またそれは要求されていない。一般的な基準点測量で要求されているのは、基準点が均等に配点されていることである。

加速器のアラインメントおよび測量において \sqrt{Q} による方法で測量網を設計するのは、あらかじめ決められた座標に精度の高い測点の設置が要求されることと、何よりもシンクロトロンの場合、限られた空間に効率的な測量網を組成することが要求されるためである。この方法は加速器の測量で可能となり、実現できた方法である。

本論文では、まず測量機材から得られたデータの処理方法としての最小 2 乗法と \sqrt{Q} の関係および一般逆行列による正規方程式の解法、さらに測量網のデザイン、最適化に関して述べる。

次に、 m_o を小さくするための測定機材の特徴を記述する。主に、精密光波測距儀である MEKOMETER ME5000 を中心に、周波数補正によって高精度化した方法を述べる。

それらの実用例として文部科学省放射線医学総合研究所の HIMAC、タイ王国王立加速器研究所の放射光施設 (Siam Photon Source) のストレージリングをあげて、 \sqrt{Q} によって測量網を設計する方法の有効性を調べた。

第2章 荷電粒子の軌道と 加速器のアラインメント

2.1 荷電粒子の軌道方程式

電磁場中の荷電粒子の軌道方程式は、

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.2)$$

によって記述される．ここで、

\mathbf{p} : 運動量ベクトル

\mathbf{F} : 荷電粒子が電場 \mathbf{E} および磁場 \mathbf{B} から受けるローレンツ力

である．式 (2.2) の

- 第1項は荷電粒子が電場から受ける力で力の大きさは粒子の速度とは無関係である．
- 第2項は荷電粒子が磁場から受ける力で、力の大きさは粒子の速度と磁束密度に比例し、力の方向は運動と磁場方向に直角である（ベクトルの外積）．

式 (2.1), (2.2) から、力の方向が運動の方向と直角の場合、粒子の運動量はこの力によって変化を受けない．式 (2.1) の両辺に $\mathbf{p}\Delta t$ を乗じると

$$\Delta(p^2) = 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{F}\Delta t \quad (2.3)$$

となる．

これは、微小時間 Δt のあいだに力 \mathbf{F} を受けて、運動量の絶対値が変化する量を示している．磁場から受ける力の場合、力が運動の方向と直角であるから運動量は変化しない．したがって、加速には必ず電場 \mathbf{E} が必要である．

ここまでは、磁場中の荷電粒子の軌道方程式は時間 t の関数として表現してきた．しかし、荷電粒子の運動をその軌道上の位置の関数で表現する方が便利である．したがって、荷電粒子の軌道方程式を『中心軌道上の s の関数』として表す．時間 t による軌道方程式の導出は、Appendix A (157 頁) に示す．

まず，座標系を空間上の 3 次元座標系から中心軌道上の座標系に変換するため，荷電粒子の軌道を曲線とみなし，Serret-Frenet の公式によってその曲線を接線と法線と曲率によって表現する．式の導出は，Appendix B (161 頁) に『曲線の表現の一般論』に示す．

次に，荷電粒子の軌道方程式を中心軌道上の s の関数として取り扱い，軌道方程式を一般化する．式の導出は，Appendix D(169 頁) 『荷電粒子の軌道方程式の一般化』に示す．

さらに，機器の設置誤差がビーム軌道に与える影響を検討し，高精度な機器設置の必要性を示す．

2.2 ミスアラインメントとビームの運動

実際の加速器では磁場の強さや電磁石の据え付け位置に誤差があり，荷電粒子は設計値と異なる磁場を受けて運動する．その結果，閉軌道やベータトロロン振動 (図 2.1 参照) に影響が現れる*．

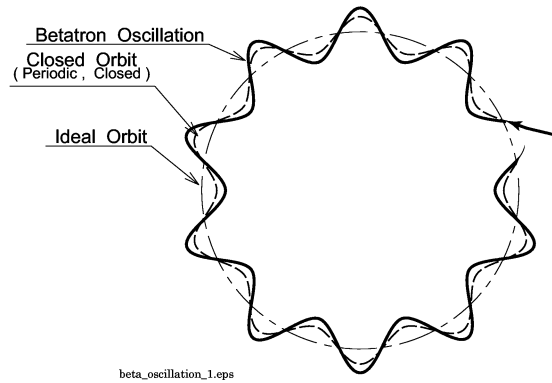


図 2.1: 設計軌道と閉軌道とベータトロロン振動

2.2.1 ミスアラインメントがビームの運動に与える影響

偏向磁場に誤差がある場合は，

$$\begin{aligned} B_{z0} &\rightarrow B_{z0} + \Delta B \\ B_{x0} &\neq 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

*参考文献 [2],[3],[13]

となる．このとき，式 (D.10) , (D.11) (171 頁) は，

$$\begin{aligned} x'' + g_x x &= - \frac{\Delta B}{B_{z0}\rho} \\ z'' + g_z z &= \frac{B_{x0}}{B_{z0}\rho} \end{aligned} \quad (2.5)$$

となる．

偏向磁場 (dipole field) に誤差 ΔB がある場合の軌道方程式は，式 (D.10) , (D.11) (Appendix D : 171 頁) から得られる．式 (D.13) と同様に x と z を代表して y と表すと，

$$y'' + g(s)y = \frac{\Delta B}{B\rho} \quad (2.6)$$

となる．

すなわち、『機器の設置誤差がある場合，荷電粒子に対する磁場の誤差として扱うことができる』．したがって，荷電粒子の運動は，新しい閉軌道とそのまわりのベータトロン振動で表すことができる．

式 (2.6) を一般化するために，

$$\frac{\Delta B}{B\rho} = F(s) \quad (2.7)$$

とすると，式 (2.6) は，

$$y'' + g(s)y = F(s) \quad (2.8)$$

($g(s)$, $F(s)$ は荷電粒子の軌道上の距離 s の周期関数)

の形の非斉次方程式として考えることができる．ここで，変数 y と s の代わりに，

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\beta}} \quad (2.9)$$

$$\phi = \int \frac{1}{\nu\beta} ds \quad (2.10)$$

とおく．ただし，Appendix D (169 頁) 『荷電粒子の軌道方程式の一般化』より，

β : 振幅関数 (式 (D.33)(174 頁参照)

ν : ベータトロン振動数 (式 (D.40)(175 頁参照)

ϕ : 位相 (式 (D.41)(175 頁参照)

である．

ここで、式 (D.41)(175) 参照にみられるように ϕ は 1 周すると 2π だけ進む。したがって、式 (2.8) は、

$$\frac{d^2\eta}{d\phi^2} + \nu^2\eta = \nu^2\beta^{\frac{3}{2}}F(s) \equiv \nu^2f(\phi) \quad (2.11)$$

となる。微分方程式論によると、式 (2.11) の一般解は、

$$\eta(\phi) = A \exp(i\nu\phi) + \frac{\nu}{2i} \int_0^\phi f(\varphi) \exp[i\nu(\phi - \varphi)] d\varphi + \text{c.c.} \quad (2.12)$$

となる (式 (D.24)(173) 参照)。

ここで、式 (2.12) の解のうち周期条件、

$$\eta(\phi + 2\pi) = \eta(\phi) \quad (2.13)$$

を満足する解を求めることで次の閉軌道 (closed orbit) が求まる。

$$\eta(\phi) = \frac{\nu}{2 \sin \pi\nu} \int_\phi^{\phi+2\pi} f(\varphi) \cos \nu(\pi + \phi - \varphi) d\varphi \quad (2.14)$$

ここで、

$$f(\varphi) = \beta^{\frac{3}{2}}(\varphi) \frac{\Delta \mathbf{B}(\varphi)}{B\rho} \quad (2.15)$$

である。

これは、式 (2.11) の右辺によって与えられる磁場の誤差の影響を受けて運動する粒子の閉軌道を与える式である。

2.2.2 軌道の変形

2.2.2.1 摂動磁場が加わった場合

閉軌道の変形の例として、 $s = 0$ のまわりの微小範囲 Δs にわたって $\Delta \mathbf{B}$ の磁場の誤差が存在している場合を考える。粒子は $s = 0$ において、

$$\theta = \frac{\Delta \mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{s}}{B\rho} \quad (2.16)$$

の偏向角 (kick angle) を受ける。誤差がデルタ関数的に存在するものとして近似すると、閉軌道の歪みは、

$$y(s) = \frac{\theta}{2 \sin \pi\nu} \sqrt{\beta(0)\beta(s)} \cos \nu [\phi(s) - \pi] \quad (2.17)$$

である．この場合の閉軌道の歪みは，図 2.2 に示すように， $s = 0$ で θ のキックを受け，他の場所では自由振動と同じ形をしている．式 (2.17) から閉軌道の変形は， ν が整数に近いほど大きく，誤差の存在する場所，歪みをかんそくする場所の β の値が大きいほど大きい．

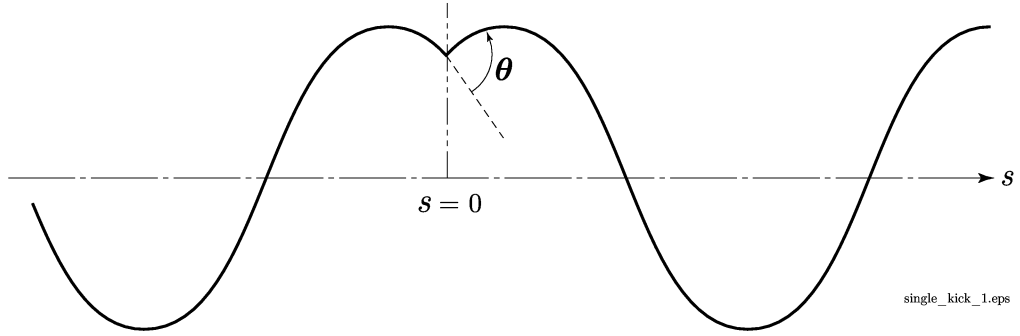


図 2.2: シングルキックによる閉軌道の歪み

これを利用して，意図的にベータatron振動の位相が π だけ離れている 2 点に偏向角 θ_i ($i = 1, 2$) の電磁石が置いた場合，図 2.3 のように，点 A で角度 θ_1 曲げられた粒子は自由振動して半サイクル進んだ後，点 B に達する．このとき粒子が中心軌道の A を横切る角度は $-\sqrt{\beta_1/\beta_2} \cdot \theta_1$ である．したがって，B に偏向角 $\theta_2 = \sqrt{\beta_1/\beta_2} \cdot \theta_1$ の電磁石を置くと軌道が元の中心軌道に戻る．閉軌道は 2 点の間だけ変形し，それ以外のところでは全く影響を受けないように，意図的に軌道进行操作することが可能である．

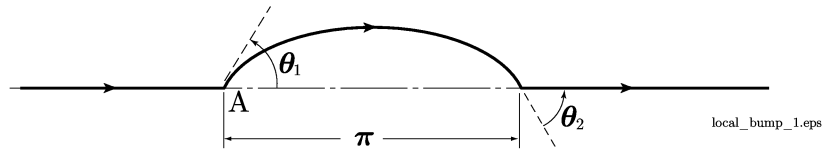


図 2.3: 閉軌道の歪み (local bump)

2.2.2.2 ミスアラインメントによる軌道の変形

次に，図 2.4 の長さ ℓ の 4 極電磁石を a 点で δ_{ya} だけ移動した場合，磁場勾配 G の 4 極磁場でビームを角度 θ で蹴ることになる． N 個のセルの並び (Lattice Cells) がある場合， b 点における軌道の変形を y_b とすると，式 (2.17) から，

$$y_b = \frac{\delta_{ya} \cdot G \ell}{B \rho} \frac{1}{2 \sin \pi \nu} \sqrt{\beta(a) \beta(b)} \cos \nu \left[\int_a^b \frac{1}{\nu \beta} ds - \pi \right] \quad (2.18)$$

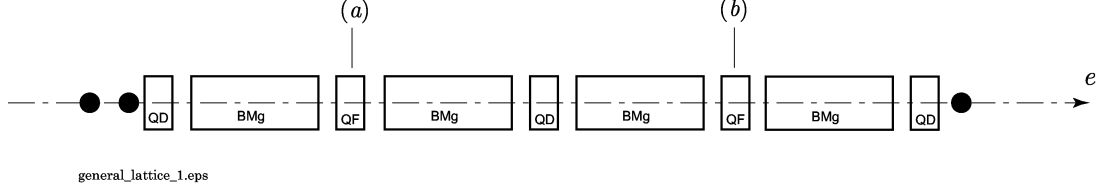


図 2.4: 一般的なラティスの並び

となる.

長さ ℓ の $2N$ 個の 4 極電磁石にそれぞれ $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2N}$ のミスアラインメントがあるものとして, アラインメント精度から予測される 4 極電磁石における軌道歪みを近似的に求める.

簡単のために規則的なラティスを想定し, 4 極電磁石は等間隔に交互に QF と QD が並んでいるものとする. QF, QD の磁場勾配をそれぞれ G_F, G_D とする. 式(2.18)から,

$$y_i = \sum_{j=1}^{2N} \frac{\delta_{yj} G_j \ell}{\mathbf{B} \rho} \frac{1}{2 \sin \pi \nu} \sqrt{\beta_i \beta_j} \cos \left(\frac{\ell}{\nu \beta_j} - \pi \nu \right) \quad (2.19)$$

ここで,

$$\begin{aligned} G_1 = G_3 = \dots = G_{2N-1} = G_F \quad , \quad G_2 = G_4 = \dots = G_{2N} = G_D \\ \beta_1^H = \beta_3^H = \dots = \beta_{2N-1}^H = \beta_F^H \quad , \quad \beta_1^V = \beta_3^V = \dots = \beta_{2N-1}^V = \beta_F^V \\ \beta_2^H = \beta_4^H = \dots = \beta_{2N}^H = \beta_D^H \quad , \quad \beta_2^V = \beta_4^V = \dots = \beta_{2N}^V = \beta_D^V \end{aligned} \quad (2.20)$$

とする. β_F^H は QF における半径方向のベータトロン関数, β_D^H は QD における半径方向のベータトロン関数, β_F^V は QF における垂直方向のベータトロン関数, β_D^V は QD における垂直方向のベータトロン関数, である.

式(2.19) を半径方向 x と垂直方向 z に分けて表せば,

$$x_i = \sum_{j=1,3,\dots}^i \frac{\delta_{xj} G_F \ell}{B\rho} \frac{1}{2 \sin \pi \nu_x} \sqrt{\beta_F^H \beta_j} \cos \nu_x (\phi(s_j^x) - \pi) \\ + \sum_{j=2,4,\dots}^i \frac{\delta_{xj} G_D \ell}{B\rho} \frac{1}{2 \sin \pi \nu_x} \sqrt{\beta_D^H \beta_j} \cos \nu_x (\phi(s_j^x) - \pi) \quad (2.21)$$

$$z_i = \sum_{j=1,3,\dots}^i \frac{\delta_{zj} G_F \ell}{B\rho} \frac{1}{2 \sin \pi \nu_z} \sqrt{\beta_F^V \beta_j} \cos \nu_z (\phi(s_j^z) - \pi) \\ + \sum_{j=2,4,\dots}^i \frac{\delta_{zj} G_D \ell}{B\rho} \frac{1}{2 \sin \pi \nu_z} \sqrt{\beta_D^V \beta_j} \cos \nu_z (\phi(s_j^z) - \pi) \quad (2.22)$$

ここで, $\phi(s_j^x)$ と $\phi(s_j^z)$ はそれぞれ起点から QF または QD 電磁石までのベータトロン位相である. 一般に, $\beta_F^H \gg \beta_D^H$, $\beta_D^V \gg \beta_F^V$ であるので, 式(2.21), (2.22) は,

$$x_i \doteq \sum_{j=1,3,\dots}^i \frac{\delta_{xj} G_F \ell}{B\rho} \frac{1}{2 \sin \pi \nu_x} \sqrt{\beta_F^H \beta_j} \cos \nu_x (\phi_j^x - \pi) \quad (2.23)$$

$$z_i \doteq \sum_{j=2,4,\dots}^i \frac{\delta_{zj} G_D \ell}{B\rho} \frac{1}{2 \sin \pi \nu_z} \sqrt{\beta_D^V \beta_j} \cos \nu_z (\phi_j^z - \pi) \quad (2.24)$$

ただし, $\phi(s_j^{x,z}) = \phi_j^{x,z}$ である. x_i は QF において極大, z_i は QD において極大になるので, 半径方向の軌道歪み観測点を QF, 垂直方向の軌道歪み観測点を QD におけば,

$$x_i \doteq \frac{\beta_F^H G_F \ell}{2B\rho \sin \pi \nu_x} \sum_{j=1,3,\dots}^i \delta_{xj} \cos \nu_x (\phi_j^x - \pi) \quad (2.25)$$

$$z_i \doteq \frac{\beta_D^V G_D \ell}{2B\rho \sin \pi \nu_z} \sum_{j=2,4,\dots}^i \delta_{zj} \cos \nu_z (\phi_j^z - \pi) \quad (2.26)$$

となる. QF のベータトロン位相の間隔を $\Delta\phi_x$, QD のベータトロン位相の間隔を $\Delta\phi_z$ とすれば, $2\pi\nu_x = N\Delta\phi_x$ および $2\pi\nu_z = N\Delta\phi_z$ の関係が成立するので,

$$x_i = \frac{\beta_F^H G_F \ell}{2B\rho \sin \pi \nu_x} \sum_{j=1,3,\dots}^i \delta_{xj} \cos \pi \nu_x \left((j-1) \frac{\nu_x}{N} - 1 \right) \quad (2.27)$$

$$z_i = \frac{\beta_D^V G_D \ell}{2B\rho \sin \pi \nu_z} \sum_{j=2,4,\dots}^i \delta_{zj} \cos \pi \nu_z \left((j-1) \frac{\nu_z}{N} - 1 \right) \quad (2.28)$$

となる．ここで， $\langle \cos^2 \theta \rangle = 0.5$ なる近似を適用すれば，式(2.27) は，

$$\begin{aligned}
 \langle x \rangle &\doteq \frac{\beta_F^H G_F \ell \langle \delta_x \rangle}{2\mathbf{B}\rho \sin \pi \nu_x} \sqrt{\frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N j} \\
 &\doteq \frac{\beta_F^H G_F \ell \langle \delta_x \rangle}{\sqrt{2}\mathbf{B}\rho} \sqrt{\frac{1}{4}(N+1)} \\
 &\doteq \frac{\beta_F^H G_F \ell \sqrt{N} \langle \delta_x \rangle}{\sqrt{8}\mathbf{B}\rho} \quad (\because N \gg 1) \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

同様にして，式(2.28) は，

$$\begin{aligned}
 \langle z \rangle &\doteq \frac{\beta_D^V G_D \ell \langle \delta_z \rangle}{\sqrt{2}\mathbf{B}\rho} \sqrt{\frac{1}{4}(N+1)} \\
 &\doteq \frac{\beta_D^V G_D \ell \sqrt{N} \langle \delta_z \rangle}{\sqrt{8}\mathbf{B}\rho} \quad (\because N \gg 1) \quad (2.30)
 \end{aligned}$$

となり，概略のアラインメント精度と閉軌道の rms 値の関係式が得られる．

2.3 ミスアラインメントによる軌道歪みの計算例

アラインメントの許容値は，閉軌道歪み（COD:Closed orbit distortion）をシミュレートすることによって評価できる．最も位置精度を要求されるのは，4 極電磁石であるため，式 (2.29)，(2.30) によって，放射線医学総合研究所の HIMAC のシンクロトンの 4 極電磁石のズレによるの軌道の変形をシミュレートする．HIMAC の電磁石の特性 (表 6.2～表 6.4(117 頁 ～ 119 頁)) によって，

$$\begin{aligned}
 \text{磁気剛性} & : B\rho = 9.75 \quad [Tm] \\
 \text{磁場の勾配} & : \frac{\partial B}{\partial x} = G = 7.45 \quad [T/m] \\
 \text{4 極電磁石の長さ} & : \ell = 0.4 \quad [m] \\
 \text{電磁石の個数} & : N = 12 \quad [\text{個}] \quad (Q_f, Q_d)
 \end{aligned}$$

である．

また，ベータトロン関数の振幅は，図 6.20 (120 頁) から

$$\begin{aligned}
 \beta_F^H & = 17.396 \quad [m] \\
 \beta_D^V & = 14.970 \quad [m]
 \end{aligned}$$

である．

これらのパラメータから， QF がビーム進行方向に直角 (x 方向) に $\delta_x = 0.1 [mm]$ だけミスアラインメントされた場合を試算すると，

$$\langle x \rangle \doteq \frac{\beta_F^H G_F \ell \sqrt{N} \langle \delta_x \rangle}{\sqrt{8} B\rho} \quad (2.31)$$

$$= 0.65 [mm] \quad (2.32)$$

同様に，垂直方向 (z 方向) に $\delta_z = 0.1 [mm]$ だけミスアラインメントされた場合を試算すると，

$$\langle z \rangle \doteq \frac{\beta_D^V G_D \ell \sqrt{N} \langle \delta_z \rangle}{\sqrt{8} B\rho} \quad (2.33)$$

$$= 0.56 [mm] \quad (2.34)$$

となる．すなわち， $\pm 1[mm]$ のアラインメント誤差は水平方向は 6.5 倍，垂直方向で 5.6 倍に増幅される結果となる．

第3章 精密測量と \sqrt{Q} による 測量網の最適化

大規模な加速器の場合、実験室程度の測定器では加速器全体にわたって均一な精度の基準点を得ることは難しく、精度が偏在する結果となる。そのために、広範囲に均一でかつ高精度な1次基準点（first order control point）を配置し、その基準点座標を基準にして2次、3次の基準点を設置し、最終的に加速器の機器設置の位置精度を確保する。広範囲に高精度の基準点を設置するためには、測地学（geodesy）の方法を用いることが多い。

測地学には物理測地学と幾何測地学に大きく分類できる。大規模な加速器設置では、粒子の軌道面を地球の接平面と平行に設定するなど、物理測地学の重力測量が考慮されなければならない。しかし、加速器にかかわる測地学のは、幾何測地学的手法によることが多い。

この章では、精密測量のなかで加速器を高精度にアラインメントする測量網に関して最小2乗法に関連する、

- 観測方程式と正規方程式
- 正規方程式を解くための一般逆行列
- 座標の誤差の2次元分布を表現する誤差楕円
- \sqrt{Q} による測量網の最適化

などについて扱う。

3.1 角度と距離の測定による精度の特徴

3.1.1 測量機材の精度

セオドライトによる角度測定の精度は、その分解能が ± 0.5 秒の機材であっても、人間の目に依存する部分も多いため、実質的な精度は $\pm 0.8'' \sim \pm 1.0''$ とされ、測定者の技量に依存する部分が多い。観測点と目標点の間の距離を D とし、角度の誤差を

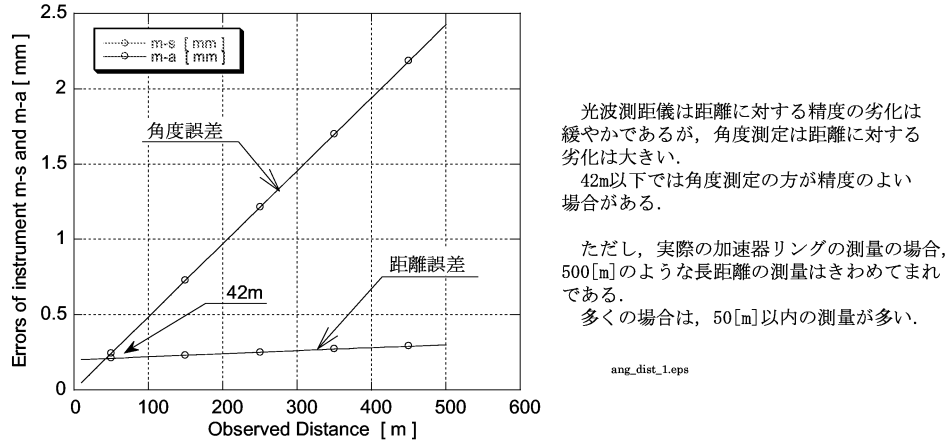


図 3.1: 角度測定と距離測定による精度の特徴

m_θ とした場合、距離による誤差を m_a とすると、

$$\begin{aligned} m_a &= D \tan m_\theta \\ &= D \tan(\pm 1.0'') \end{aligned} \quad (3.1)$$

で表される。

距離測定は、可搬型の高精度の測距儀 MEKOMETER ME5000 の場合（81 頁参照）その距離による誤差を m_s とすると、

$$m_s = \pm(0.2 \text{ [mm]} + 0.2 \times 10^{-6} \times D \text{ [mm]}) \quad (3.2)$$

で表される。

図 3.1 は、これらの角度測定と距離測定の距離による誤差をプロットしたものである。MEKOMETER ME5000 による距離測定は、距離による精度の劣化は角度測定に比べ緩やかであり、精度が等しくなる距離は 42[m] であり、それ以下では角度測定による方が高精度が期待できる場合がある。

このことに関して、第 5 章『測定精度 m_o の改善』（77 頁参照）において、短距離でも距離測定の精度を向上させる方法を扱う（91 頁参照）。

3.1.2 測量機材による精度の方向

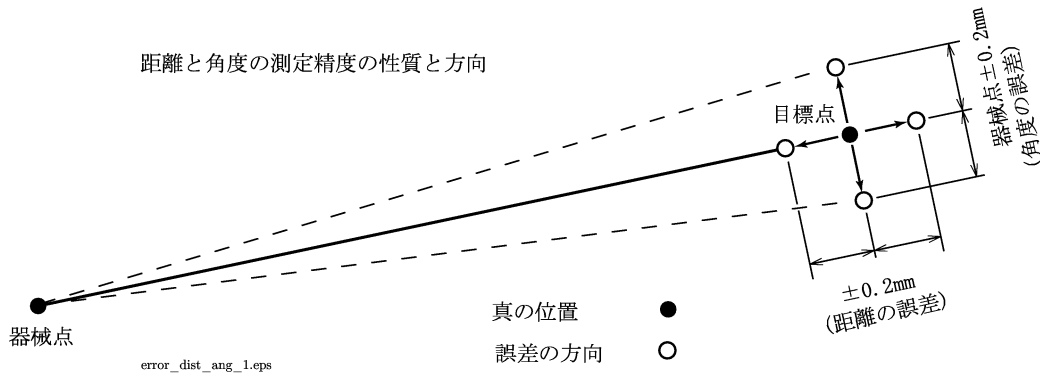


図 3.2: 角度と距離の測定精度の性質、方向

角度測定の場合、公称精度 $0.1''$ 読みのセオドライトでも実質の測定精度は $\pm 1.0''$ 程度である。すなわち、 $42[m]$ 先の目標間の角度を測定したときの誤差を dt とすると、 $dt = 42[m] \times \tan(\pm 1.0'')$ $= \pm 0.24[mm]$ 程度の精度しか得られない (図 3.2 参照)。

距離測定の場合、式(3.2)のように $42[m]$ 先の目標までの距離を測定したとき、距離に比例する部分 ($0.2ppm$) は無視できる程度である。すなわち、 $42[m]$ 先の目標までの距離を測定した場合、その誤差は $\pm 0.2[mm]$ である。

ただし、距離測定の場合、測定者に関わらずコンスタントな距離測定の精度が期待できる。しかし、角度測定の場合、測定精度は測定者の技量に依存する部分も大きい。

同じ程度の誤差の大きさである $42[m]$ 付近では、誤差の方向は問題としなくてもよいが、 $42[m]$ 以下では角度測定の方が精度がよく、 $42[m]$ 以上では距離測定の方が精度がよい。ただし、誤差の方向は、角度測定の場合、目標の方向に対して直角方向であり、距離測定のそれは、目標方向である。その結果、 $42[m]$ 以下では目標に対して直角方向の精度がよく、 $42[m]$ 以上では目標の方向に精度がよい。すなわち、 $42[m]$ を境にして測定値の誤差の大きい方向が異なる。

測量機材の精度に依存したアラインメントあるいは測量の場合、測量機材による精度の大きさとその誤差の現れる方向は重要な問題である。

しかし、加速器リングのレイアウトデザインを現地に再現するためには、建屋系の平面座標系で加速器リングを表現する必要がある。このとき、座標計算の過程で三角関数による計算が必要となり、誤差に関数の特徴が現れる。次節では、距離と角度で座標計算する一般的な方法である「トラバース測量方式」の場合を考察する。

3.2 トラバース測量

3.2.1 トラバース測量とは

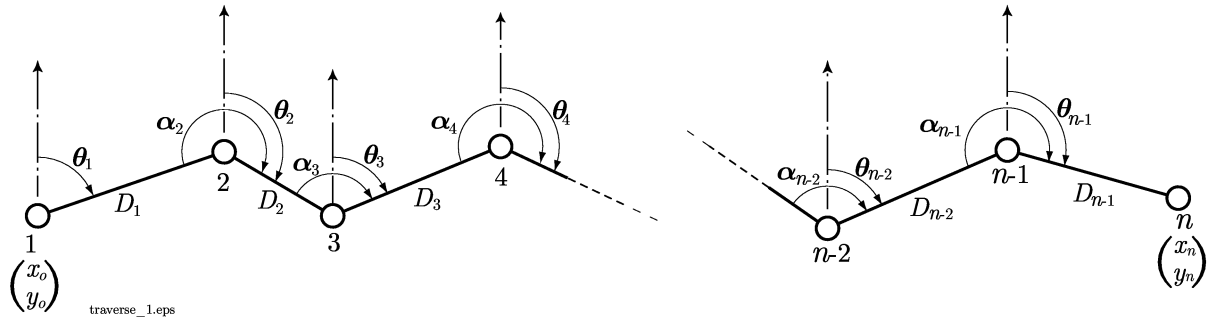


図 3.3: トラバース測量の概念図

トラバース測量とは，測量によって座標を求めるとき，距離と角度から座標 (x, y) を計算する方法であり，最も一般的な測量方式である．すなわち，図 3.3 において，

$$\begin{cases} x = x_0 + \sum_{i=1}^n D_i \cos \theta_i \\ y = y_0 + \sum_{i=1}^n D_i \sin \theta_i \end{cases} \quad (3.3)$$

のように表せる．ここに，

x_0 : 測定の出発点の x 座標

y_0 : 測定の出発点の y 座標

D_i : i 番目の距離測定

α_i : i 番目の角度測定

θ_i : i 番目の方向角

測定する角度は挟角 α であるが，座標計算は x 軸からの角度，すなわち方向角 θ によって計算する．

この方向角によって，座標の誤差の方向依存性が現れ，誤差を累積させる結果となる．

3.2.2 トラバース測量の問題点

3.2.2.1 方向角による誤差の偏在

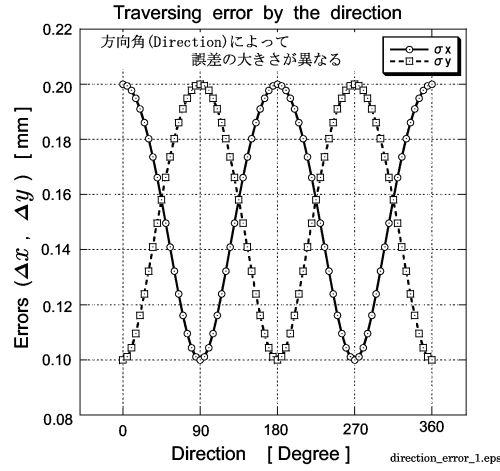


図 3.4: 方向角による誤差の大きさ

角度と距離から求める座標の精度は図 3.4 のように、 x 軸からの角度（方向角）で精度が異なる。

すなわち、角度 θ と、距離 D を組み合わせた場合、 x, y 座標は式(3.3) から、次式で表される。

$$\begin{cases} x = D \cos \theta \\ y = D \sin \theta \end{cases} \quad (3.4)$$

その座標の精度は、誤差伝播の法則より、

$$x \text{ 方向} : \Delta x = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial D}\right)^2 (dD)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 (d\theta)^2} \quad (3.5)$$

$$y \text{ 方向} : \Delta y = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial D}\right)^2 (dD)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 (d\theta)^2} \quad (3.6)$$

$$(3.7)$$

ここで、式 (3.4) から、

$$\frac{\partial x}{\partial D} = \cos \theta \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -D \sin \theta \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial y}{\partial D} = \sin \theta \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = D \cos \theta \quad (3.9)$$

である．いま，距離の精度 $dD = \pm 0.2 [mm]$ ，角度の精度 $d\theta = \pm 1.0''$ とし，方向角 $\theta = 15^\circ$ の方向で $20 [m]$ の位置にある目標を測定した場合，予想される x 方向の精度 Δx は式 (3.5)，式 (3.8) から，

$$\begin{aligned}\Delta x &= \pm \sqrt{(\cos 15^\circ)^2 (\pm 0.2 [mm])^2 + (20 [m] \sin 15^\circ)^2 \left(\frac{\pm 1.0''}{2 \times 10^5} \right)^2} \\ &= \pm 0.19 [mm]\end{aligned}\tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}\Delta y &= \pm \sqrt{(\sin 15^\circ)^2 (\pm 0.2 [mm])^2 + (20 [m] \cos 15^\circ)^2 \left(\frac{\pm 1.0''}{2 \times 10^5} \right)^2} \\ &= \pm 0.11 [mm]\end{aligned}\tag{3.11}$$

となる．

表 3.1: 誤差の方向角依存性

	15°	30°	45°
x 方向の精度： Δx	$\pm 0.19 [mm]$	$\pm 0.18 [mm]$	$\pm 0.16 [mm]$
y 方向の精度： Δy	$\pm 0.11 [mm]$	$\pm 0.13 [mm]$	$\pm 0.16 [mm]$

同様に $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ の方向で $20 [m]$ の位置にある目標を測定した場合，表 3.1 のようになる．つまり，図 3.5 に示すように，方向角によって各基準点の位置精度が不均一になり，図 3.4 のような精度の偏りができる．

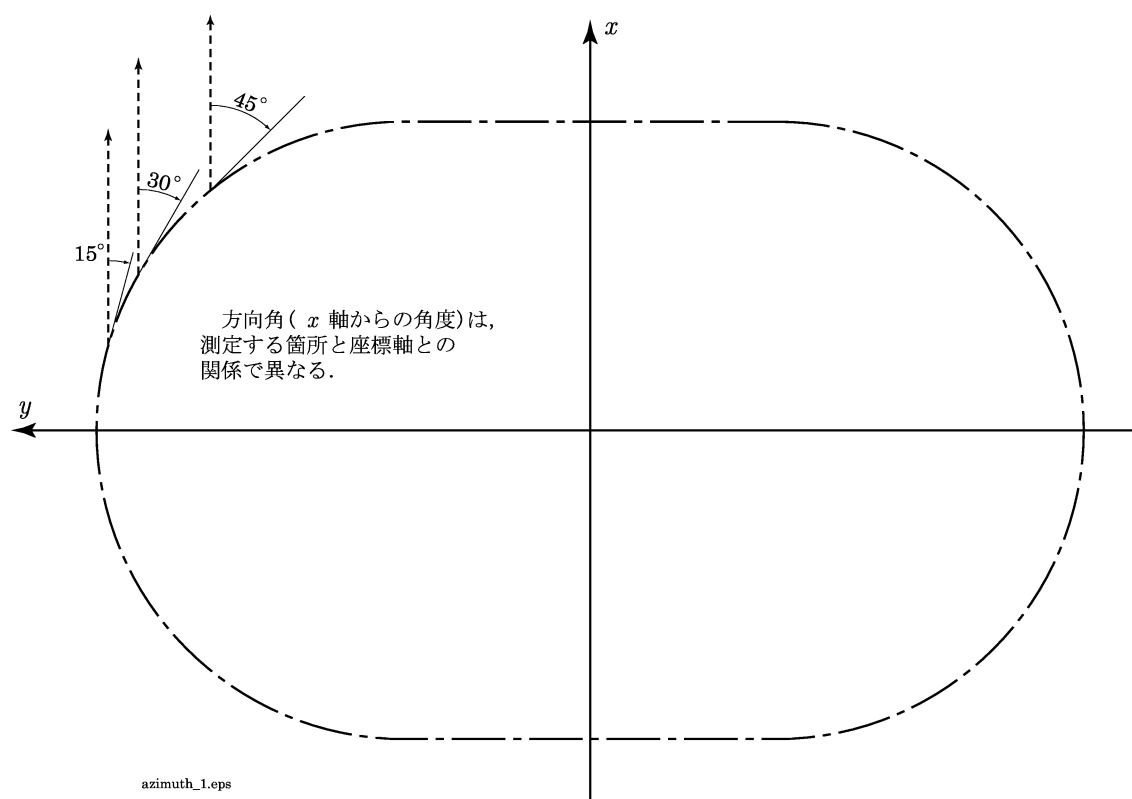


図 3.5: 方向角の定義

3.2.2.2 誤差の累積

開放トラバース測量方式 (cantilever survey) とは，出発点を固定して，測定した角度と距離で順番に位置を決定する測量方法である．最終端あるいは途中の測点の精度を確認できない．しかし，出発点に戻った場合，出発点との差を閉合差として比較できる．

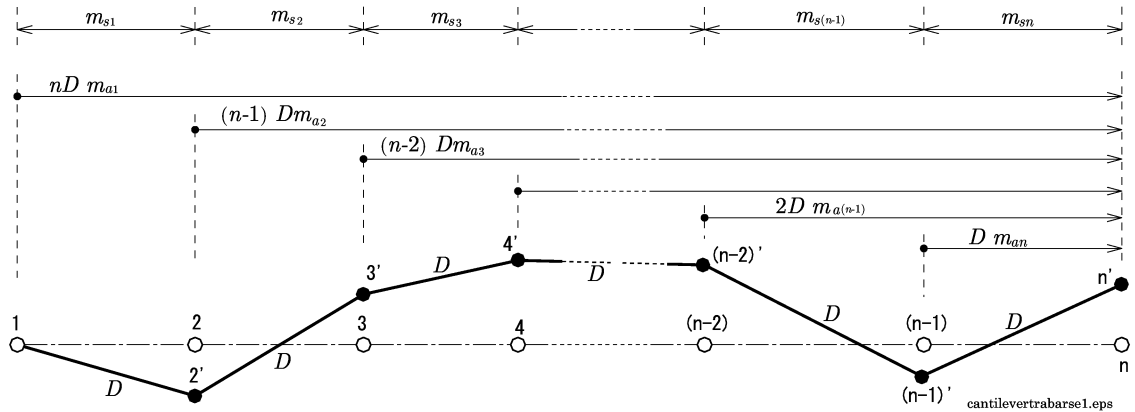
角度と距離を測る機材で最も精度の高いレーザトラッカーの場合で精度のシミュレーションを試みる．レーザトラッカーの実用的な最大測定距離は， $\pm 15 [m]$ 程度であるため，測定範囲は $30 [m]$ 内外である．また，設置した地点でローカル座標系を設定する．大型のシンクロトロンのように広範囲の測定が必要な場合，全体の座標系に対応させるために， $30 [m]$ 程度ごとに座標系をつないで測量しなければならない．この座標系をつなぐ過程で誤差が累積していく．

ここでは，図 3.6 のように， $20 [m]$ ごとにつないでトラバース測量を行った場合を試算する．いま，

距離測定誤差 : m_s

角度測定誤差 : m_a

とすると，図 3.6 のように最終端に対して出発点の角度測定誤差が累積する．



距離測定の誤差 m_s は，測点間ごとに含まれる．しかし，角度の誤差 m_a は出発点1の誤差が nDm_{a1} だけ最終点 n に影響を与える．さらに，測点2の角度誤差が $(n-1)Dm_{a2}$ の影響を最終点 n に与え，順次累積していく．

図 3.6: 開放トラバース方式の誤差の累積

測点間の各距離を等しく D として、出発点からの誤差を順に列記すると、

$$\begin{aligned}
 & \begin{Bmatrix} m_{s1} \\ m_{s2} \\ m_{s3} \\ \vdots \\ m_{s(n-1)} \\ m_{sn} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n \\ (n-1) \\ (n-2) \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} Dm_{a1} \\ Dm_{a2} \\ Dm_{a3} \\ \vdots \\ Dm_{a(n-1)} \\ Dm_{an} \end{Bmatrix} \\
 & \hspace{15em} (3.12)
 \end{aligned}$$

となる． n 番目の最終端の観測点の誤差は，誤差伝播の法則により m_s ， m_a を 2 乗し，これらを総和すると，

$$nm_s^2 + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)D^2m_a^2 \quad (3.13)$$

となる．したがって，出発点から最終端に累積する誤差 m_m は誤差伝播の関係から，

$$m_m = \sqrt{nm_s^2 + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)D^2m_a^2} \quad (3.14)$$

となる．

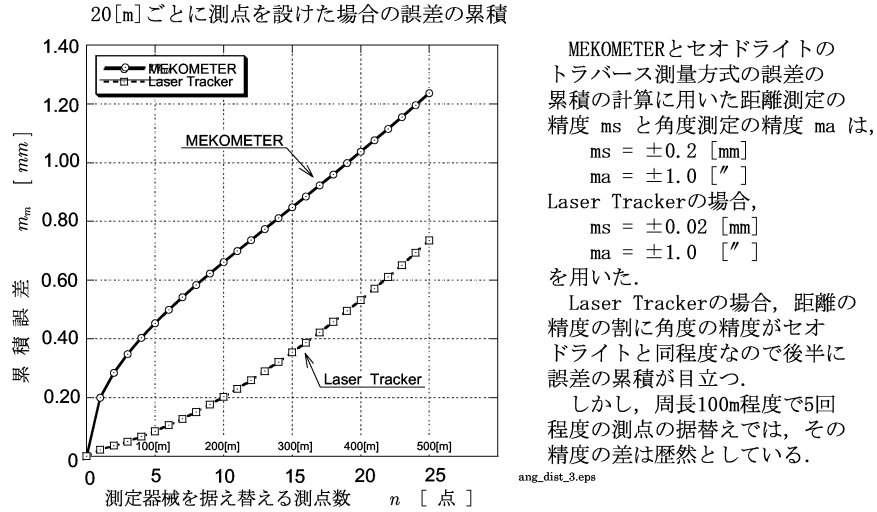


図 3.7: 誤差の累積

レーザトラッカーの場合，その距離測定の精度は $m_s = \pm 1.1$ [$\mu\text{m}/\text{m}$]，角度測定の精度は $m_a = \pm 5$ [$\mu\text{m}/\text{m}$] である．したがって，20 [m] の測定の場合，距離の精度は $m_s = \pm 1.1$ [$\mu\text{m}/\text{m}$] \times 20 [m] = ± 0.02 [mm] となる．角度測定の精度は， $m_a = \pm 5$ [$\mu\text{m}/\text{m}$] = ± 1.0 ["] である．これらの m_s, m_a を式(3.14)で n 回トラバース測量した場合の測量精度を表したものが図 3.7 である．図 3.7 では，MEKOMETER ME5000

とセオドライトによる測定の誤差の累積も同時に描いている．このとき用いた精度は、 $m_s = \pm 0.2 [mm]$ 、 $m_a = \pm 1.0 ["]$ である．

10 回程度の測点でつないだ (200[m]) 場合で、レーザトラッカーと MEKOMETER ME5000 の累積誤差を比較するとレーザトラッカーの方の精度が格段によい．しかし、測点をつなぐほどにその差は小さくなる傾向になる．これは、レーザトラッカーの距離測定がレーザ干渉計によって、MEKOMETER ME5000 よりも 10 倍程度のきわめて高精度な距離測定精度 (m_s) であるのに対して、角度測定のエンコーダがセオドライトと同程度の精度しかないことが原因である．

いずれにしても測点をつなぐことによって、誤差は累積し、加速器リングを 1 周したときの閉合誤差を調整しなければならない．

なお、このような比較に関して、レーザトラッカーは 3 次元座標が測定値であるため、本来の測定方法の精度の比較ではない．また、この誤差の累積の検討では、測量器械のセッティングの精度は考慮していない．

3.2.3 トラバース測量の問題点の解決策

角度と距離によるトラバース測量は、方向角によって精度が異なること、さらに開放トラバース測量では誤差が累積するため、シンクロトロン全体に渡る均一な精度を得ることは難しい．この対策として、精度的に脆弱な方向を精度の高い測辺で補うことが必要となる．すなわち、複雑な測量網を組成することが必要となり、距離測定を主体とした三辺測量を行うことになる．その結果、単純な計算では基準点の座標を得ることは難しく、最小 2 乗法によって座標解を得ることになる．

一方、観測値をマトリックス計算による最小 2 乗法で座標解を得ることによって、基準点の精度を標準偏差 (誤差楕円) で表現することが可能となる．その結果、これらの基準点を基にしたアラインメントに対して精度を保証することが可能となる．

3.3 測量網平均計算

上述のように，測量機材の精度に依存する観測方法の問題点，トラバース測量の問題点を解決するには測量機材の精度的に脆弱な方向を，補う方向からの測定によって補強することが必要となり，複雑な測量網を組むことが必要になる．

複雑な測量網から座標を決定するためには，最小 2 乗法によって座標の補正量を求めるプロセスが必要となる*．この節では，最小 2 乗法のアルゴリズムを述べる．

最小 2 乗法で測量網平均計算を解く場合，通常，重量ベクトルも観測方程式の中に取り込んで正規方程式を求める．

ここでは，説明のために簡便に重量ベクトルを単位行列として，最小 2 乗法のアルゴリズムを述べる．

重量ベクトルを取り込んで観測方程式を解く場合は，『重み付き観測方程式』（190 頁）による．

3.3.1 観測方程式と正規方程式

3.3.1.1 観測方程式

すべての測量対象を 2 点間の距離であるとすれば，測量で直接得られるデータは，測辺の長さ l_i^b である．測量には測量機器のもつ精度や気象条件などによる誤差が入るので，全測辺の測量から最小 2 乗法で求められる最確値 l_i^a は補正量を v_i として次式の関係で与えられる．

$$l_i^a = l_i^b + v_i \quad (3.15)$$

ここで，添え字 i は i 番目の測辺に関するものである．誤差がなければ，真の測辺の長さはそれに関係する座標から

$$l_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (3.16)$$

である．測辺の最確値と座標の関係は線形近似により，

$$f_i(x_1^a, x_2^a, \dots, x_m^a) = f_i(x_1^o, x_2^o, \dots, x_m^o) + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_0 \Delta x_j \quad (3.17)$$

で与えられる．ここで，座標 x_i^o ($i = 1, 2, \dots, m$) は，補正前の座標である． $l_o = f(x_1^o, x_2^o, \dots, x_m^o)$ とおくと，

$$l_i^a = l_i^b + v_i = l_i^o + \sum_j a_{ij} \Delta x_j \quad (3.18)$$

*参考文献 [4],[14],[17],[19]

の関係が成立する．これより，

$$v_i = \sum_j a_{ij} \Delta x_j + (l_i^o - l_i^b) = l_i^a - l_i^b \quad (3.19)$$

ここで，座標の最確値を x_j^a とすれば， $\Delta x_j = x_j^a - x_j^o$ となる．座標をベクトルとして表現するため， $x_j^o \rightarrow \mathbf{X}_o$ ， $x_j^a \rightarrow \mathbf{X}_a$ ， $\Delta x_j \rightarrow \mathbf{X}$ と置く．すなわち，

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_a - \mathbf{X}_o \quad (3.20)$$

この \mathbf{X} が測量によって求める \mathbf{X}_o の補正量である．同様に， $l_i^b - l_i^o \rightarrow \mathbf{L}$ ， $v_i \rightarrow \mathbf{V}$ として，式(3.19)をベクトル表現すれば，

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{L} \quad (3.21)$$

と表すことができ，これが観測方程式 (observed equation) である．ここで， \mathbf{A} は，係数行列といい，式(3.19)の係数 a_{ij} を要素とする n 行 m 列の行列，である． \mathbf{L} は測辺長さの設計値からのズレ量のベクトルで観測値ベクトル， \mathbf{V} は残差ベクトル（あるいは観測値の補正量ベクトル）， \mathbf{X} は座標の補正量ベクトルである． n は測量対象の測辺の全数であり， \mathbf{L} ， \mathbf{V} ， \mathbf{X} は n 次元ベクトルである．

3.3.1.2 正規方程式

測量によって得られた観測値ベクトル \mathbf{L} から座標の補正量ベクトル \mathbf{X} を求めるため，残差ベクトル \mathbf{V} を 2 乗した式を \mathbf{X} で微分して最小値を求める．すなわち，微分した式をゼロとおくのが最小 2 乗法である．

まず，残差ベクトル \mathbf{V} を 2 乗するために \mathbf{V} の転置行列 \mathbf{V}^t を左から乗じると，

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^t \mathbf{V} &= (\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{L})^t (\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{L}) \\ &= (\mathbf{X}^t \mathbf{A}^t - \mathbf{L}^t) (\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{L}) \\ &= \mathbf{X}^t \mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{X} - \mathbf{X}^t \mathbf{A}^t \mathbf{L} - \mathbf{L}^t \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{L}^t \mathbf{L} \\ &= \mathbf{X}^t \mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{X} - (\mathbf{L}^t \mathbf{A} \mathbf{X})^t - \mathbf{L}^t \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{L}^t \mathbf{L} \\ &= \mathbf{X}^t \mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{X} - 2\mathbf{L}^t \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{L}^t \mathbf{L} \quad (\because \mathbf{L}, \mathbf{X} \text{ はベクトル}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

となる．

次に，式(3.22)を座標の補正量ベクトル \mathbf{X} で微分すると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}^t \mathbf{V}}{\partial \mathbf{X}} &= \frac{\partial (\mathbf{X}^t \mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} - 2 \frac{\partial (\mathbf{L}^t \mathbf{A} \mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial (\mathbf{L}^t \mathbf{L})}{\partial \mathbf{X}} \\ &= (\mathbf{X}^t \mathbf{A}^t \mathbf{A} + \mathbf{X} \mathbf{A}^t \mathbf{A}) - 2\mathbf{L}^t \mathbf{A} \\ &= 2\mathbf{X}^t \mathbf{A}^t \mathbf{A} - 2\mathbf{L}^t \mathbf{A} \\ &= \mathbf{O} \end{aligned} \quad (3.23)$$

となり，整理して転置をとると，

$$\mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{X} - \mathbf{A}^t \mathbf{L} = \mathbf{O} \quad (3.24)$$

が得られる．これが正規方程式 (normal equation) である．

3.3.1.3 正規方程式の解法

座標の補正量ベクトル \mathbf{X} を求めるためには，式(3.24) を解かなければならない．すなわち，

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{L} \quad (3.25)$$

である．

ここで注意しなければならないことは，一般に係数行列 \mathbf{A} ，したがって m 行 m 列の正方行列 $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$ は正則でないため，逆行列を求めることができない（一般に $m \geq n$ である）．通常は， $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$ のランクを低減させて正則な行列を求め，その逆行列またはガウス消去法によって \mathbf{X} が得られる．これらの解法では， \mathbf{X} の一部の座標を固定する必要があるため，全体としての座標補正量を最小にするため得られた \mathbf{X} を再処理して，座標間の相対位置関係を保持したままで座標系の平行移動と回転移動を施す必要がある．

測辺すべてを測量した後で， \mathbf{V} を最小化することにより，前節に述べた測量誤差は累積的ではなくなり，測量網全体として誤差が最小となる解が得られる．この方法は加速器の測量において一般的に採用されているが，行列 \mathbf{A} のランク低減を行うことで正則な行列に変換した後で解に再処理を施している．この再処理は，得られた電磁石の位置座標の相対的な関係を損なうことなく，座標全体に回転と平行移動を施し，全体としての電磁石の位置修正量を小さくするものである．

しかし，以下に述べる「一般逆行列」を求める手法を利用すれば，行列 \mathbf{A} は正方行列でなくても逆行列を求めることが可能である（この手法で一般的に，行列が正方行列でなくても逆行列が得られる）．しかも，この一般逆行列で得られる解は，行列 \mathbf{A} のランク低減および上述の解の再処理を施した解に一致するので，このような複雑な手続きを省略できる方法である．このような特徴があるため，正規方程式を解く手段として一般逆行列解法を本研究で採用した．

3.3.2 一般逆行列

行列を特異値分解することによって逆行列を求める方法によれば， $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$ が正則でなくても式(3.24) の解を直接求めることは可能である．この方法で得られる逆行列は，一般逆行列 (Generalized Inverse Matrix) と呼ばれる[†]．

[†]参考文献 [11],[12]

一般逆行列を求める条件により 3 種類の定義が可能である． \mathbf{A} の一般逆行列を \mathbf{A}^+ とするとき，一般逆行列の条件は，

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A} \quad (3.26)$$

である．この他に，

(1) $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$ を満たす一般逆行列 \mathbf{A}^+ : 反射型一般逆行列

(2) $(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^t = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$ を満たす一般逆行列 \mathbf{A}^+ : ノルム最小型一般逆行列

(3) $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^t = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$ を満たす一般逆行列 \mathbf{A}^+ : 最小 2 乗型一般逆行列

の 3 種類ある．さらに，これら 4 種類の条件をすべて満たす一般逆行列は，Moore-Penrose 型一般逆行列と呼ばれ，一意的に決まる．ここで， \mathbf{A} は正方行列である必要はない．

式(3.22)に戻って， $\mathbf{V}^t\mathbf{V}$ を最小にする関係は式(3.24) から $\mathbf{A}^t\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A}^t\mathbf{L}$ である．この両辺に左側から $(\mathbf{A}^+)^t$ を乗じて， $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^t = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$ の条件を適用すれば，

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^+\mathbf{L} \quad (3.27)$$

が得られるので，(3) の「最小 2 乗型一般逆行列」の解は，測定の補正量を最小にする条件を満たしている．

また，(2) の「ノルム最小型一般逆行列」の条件は， $\mathbf{A}^t\mathbf{A}$ の対角成分が限りなく 1.0 に近いことを示すもので， $\text{tr}[(\mathbf{I} - \mathbf{A}^+\mathbf{A})(\mathbf{I} - \mathbf{A}^+\mathbf{A})]^t$ を最小にする条件になっている．ここで， tr は対角要素の和 (trace)， \mathbf{I} は単位行列である．すなわち，

$$\text{tr}[(\mathbf{I} - \mathbf{A}^+\mathbf{A})(\mathbf{I} - \mathbf{A}^+\mathbf{A})]^t = \sum_j \left(1 - \sum_j a_{ij}^+ a_{ij}\right)^2 \rightarrow \text{最小} \quad (3.28)$$

から，

$$\sum_j a_{ij}^+ a_{ij} = \delta_{ik} \quad (3.29)$$

であり，行列で書き直せば，

$$\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (3.30)$$

となるので，(2) の「ノルム最小型一般逆行列」の条件が満たされている．両辺に右側から \mathbf{X} を乗じて $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{L}$ を考慮すれば，

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^+\mathbf{L} \quad (3.31)$$

となり， \mathbf{A}^+ は一般逆行列になっている．

3.3.3 Moore-Penrose 型一般逆行列

3.3.3.1 Moore-Penrose 型一般逆行列は 4 種類の条件を満たす

Moore-Penrose 型一般逆行列は、行列の特異値分解で次のようにして得られる。行列のランク（階数） r の m 行 n 列の行列 \mathbf{A} の特異値分解を

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^t \quad (3.32)$$

とする。ここで、

${}_m\mathbf{U}_r$: $\mathbf{A}\mathbf{A}^t$ の正規化された固有ベクトルを順に並べた m 行 r 列の行列
 ${}_n\mathbf{V}_r$: $\mathbf{A}^t\mathbf{A}$ の正規化された固有ベクトルを順に並べた n 行 r 列の行列
 ${}_r\mathbf{\Sigma}_r$: r 個の特異値を対角要素にもつ r 次の対角行列

とする。このとき、 \mathbf{A} の Moore-Penrose 型一般逆行列は、

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^t \quad (3.33)$$

である。

この関係から、4 種類の一般逆行列、

$$\text{基本的な一般逆行列} \quad : \mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A} \quad (3.34)$$

$$\text{反射型一般逆行列} \quad : \mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+ \quad (3.35)$$

$$\text{ノルム最小型一般逆行列} \quad : (\mathbf{A}^+\mathbf{A})^t = \mathbf{A}^+\mathbf{A} \quad (3.36)$$

$$\text{ノルム最小 2 乗型一般逆行列} \quad : (\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^t = \mathbf{A}\mathbf{A}^+ \quad (3.37)$$

に対して、

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} &= (\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^t)(\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^t)(\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^t) = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^t = \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ &= (\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^t)(\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^t)(\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^t) = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^t = \mathbf{A}^+ \\ (\mathbf{A}^+\mathbf{A})^t &= [(\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^t)(\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^t)]^t = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^t\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{V}^t = \mathbf{V}\mathbf{V}^t = \mathbf{A}^+\mathbf{A} \\ (\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^t &= [(\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^t)(\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^t)]^t = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{V}^t\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^t = \mathbf{U}\mathbf{U}^t = \mathbf{A}\mathbf{A}^+ \end{aligned}$$

となり、4 種類の条件を満たすことが証明された。

3.3.3.2 Moore-Penrose 型一般逆行列は一意的に決定される

行列 \mathbf{A} に 2 つの一般逆行列 \mathbf{G}, \mathbf{F} がある場合, \mathbf{G}, \mathbf{F} が Moore-Penrose 型の一般逆行列であるとき, 上述の式(3.34)～式(3.37) の 4 つの条件を用いると,

$$\begin{aligned}
\mathbf{G} &= \mathbf{GAG} && (\because \text{式 (3.35)}) \\
&= (\mathbf{GA})\mathbf{G} = (\mathbf{GA})^t\mathbf{G} = \mathbf{A}^t\mathbf{G}^t\mathbf{G} = (\mathbf{AFA})^t\mathbf{G}^t\mathbf{G} && (\because \text{式 (3.34)}) \\
&= \mathbf{A}^t\mathbf{F}^t\mathbf{A}^t\mathbf{G}^t\mathbf{G} = \mathbf{A}^t\mathbf{F}^t(\mathbf{GA})^t\mathbf{G} = \mathbf{A}^t\mathbf{F}^t\mathbf{GAG} && (\because \text{式 (3.36)}) \\
&= \mathbf{A}^t\mathbf{F}^t\mathbf{G} && (\because \text{式 (3.35)}) \\
&= (\mathbf{FA})^t\mathbf{G} = \mathbf{FAG} && (\because \text{式 (3.36)}) \\
&= \mathbf{F}(\mathbf{AFA})\mathbf{G} && (\because \text{式 (3.34)}) \\
&= \mathbf{F}(\mathbf{AF})(\mathbf{AG}) = \mathbf{F}(\mathbf{AF})^t(\mathbf{AG})^t && (\because \text{式 (3.37)}) \\
&= \mathbf{FF}^t(\mathbf{A}^t\mathbf{G}^t\mathbf{A}^t) = \mathbf{FF}^t(\mathbf{AGA})^t = \mathbf{FF}^t\mathbf{A}^t && (\because \text{式 (3.34)}) \\
&= \mathbf{FAF} \\
&= \mathbf{F} && (3.38)
\end{aligned}$$

となり, 一般逆行列 \mathbf{G}, \mathbf{F} は一致する. すなわち, Moore-Penrose 型一般逆行列は一意的に決定される.

3.3.4 ランク低減による解法と一般逆行列解法の比較

Moore-Penrose 型一般逆行列を利用することによって，簡単に最小 2 乗解が得られるので，測量のデータ処理における最小 2 乗法のアプローチが省略でき，かつ行列のランク低減による解法で必要とされた座標補正量を全体として最小にするための後処理が省略可能となる．

Moore-Penrose 型一般逆行列解法を従来のランク低減法と比較するため，等間隔に並んだ 64 個の 4 極電磁石から構成されるシンクロトンリングを考える．簡単のため，測量は図 3.8 のような垂線とショートコードの測量で，それぞれ 64 個の測定量があるので，観測方程式の行列は， 128×128 である．どちらの解法にも乱数で発生した同じ入力データとして設計値からのズレ量（rms 値で 0.25 [mm]）を与えた[‡]．

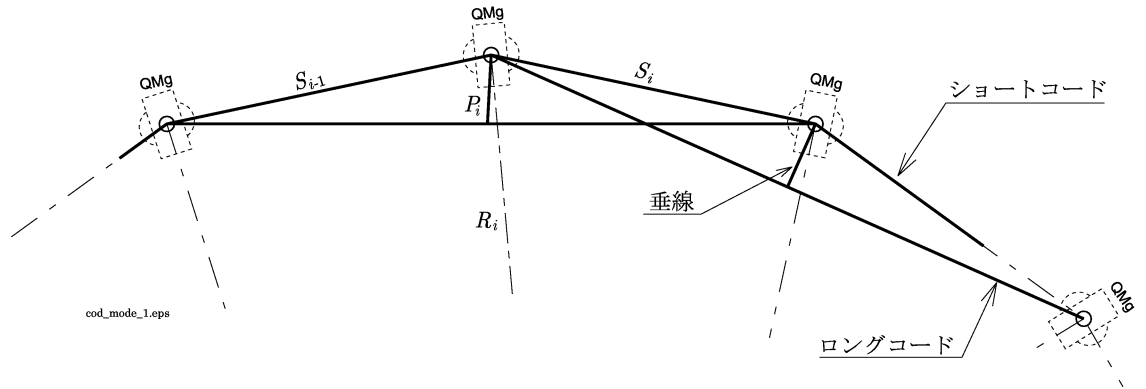


図 3.8: 垂線とショートコードの測量

[‡]参考文献 [1]

3.3.4.1 ランク低減解法

図 3.9 に後処理を行っていない半径方向と方位角方向の電磁石の移動量を示す．この結果は，図 3.10 に示す変位に相当する．この分布に対して電磁石の相対位置関係を保持したまま座標の回転と平行移動を行った（図 3.11 参照）結果を図 3.12 に示す．

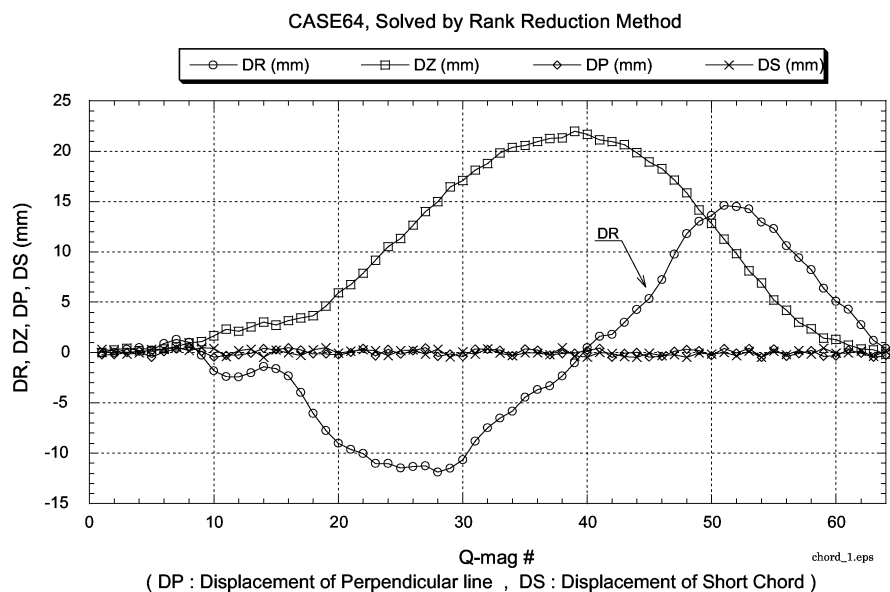


図 3.9: ランク低減解法から得られた半径方向と方位角方向の移動量

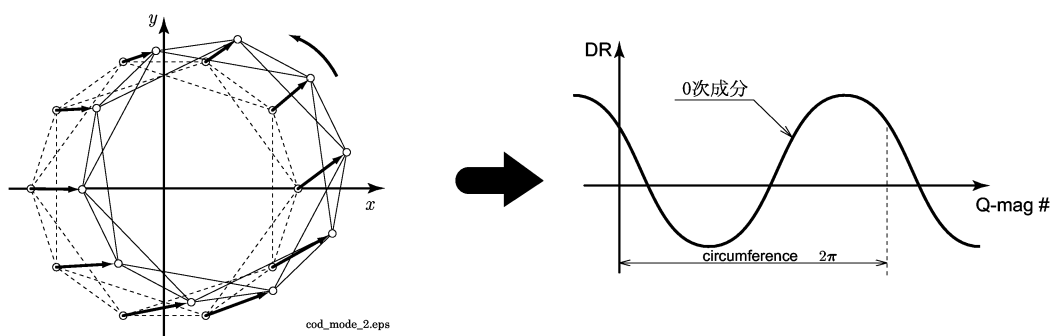


図 3.10: 図 3.9 の説明模式図

この回転と平行移動の操作は，フーリエ解析による 0 次成分を除去した結果に一致する．すなわち，ランク低減法による解法では 0 次の高調波成分が持ち込まれてしまうが，このような成分を除去するための後処理が必要になる．0 次は座標系の平行移動と回転で完全に除去され，ビームの軌道歪みには影響しない 1 次の補正量はわずか

である．すなわち，ランク低減によって座標の自由度を3だけ減らすため，解そのものの厳密性には影響しない3つの固定点を与えたことによって0次成分が導入される．

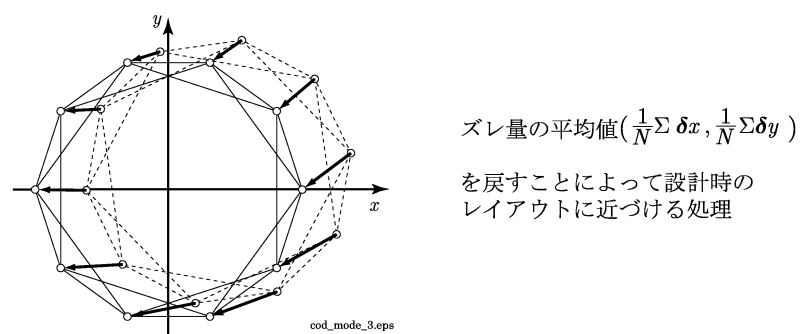


図 3.11: 相対位置関係を保持したまま移動量を修正する処理の模式図

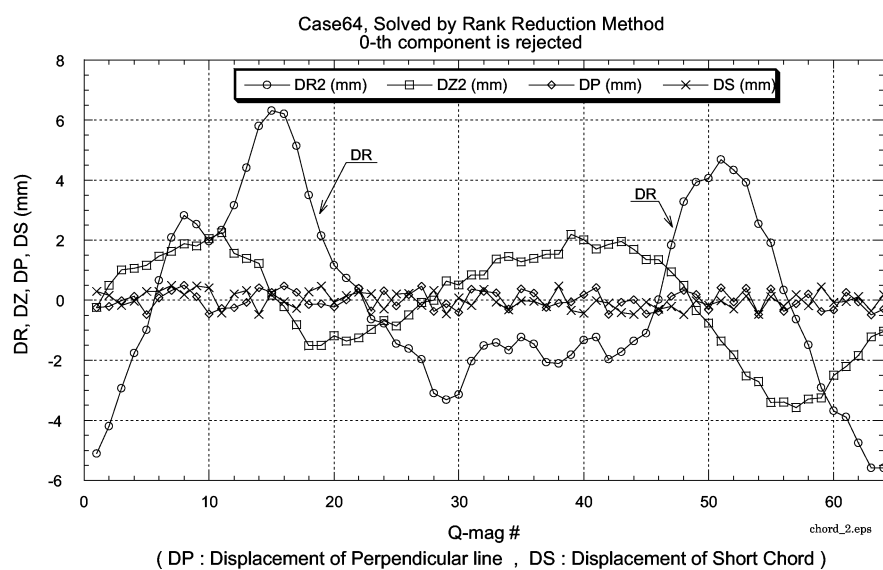


図 3.12: 図 3.9 の結果から0次成分を除去した後の半径方向と方位角方向の移動量

3.3.4.2 一般逆行列解法

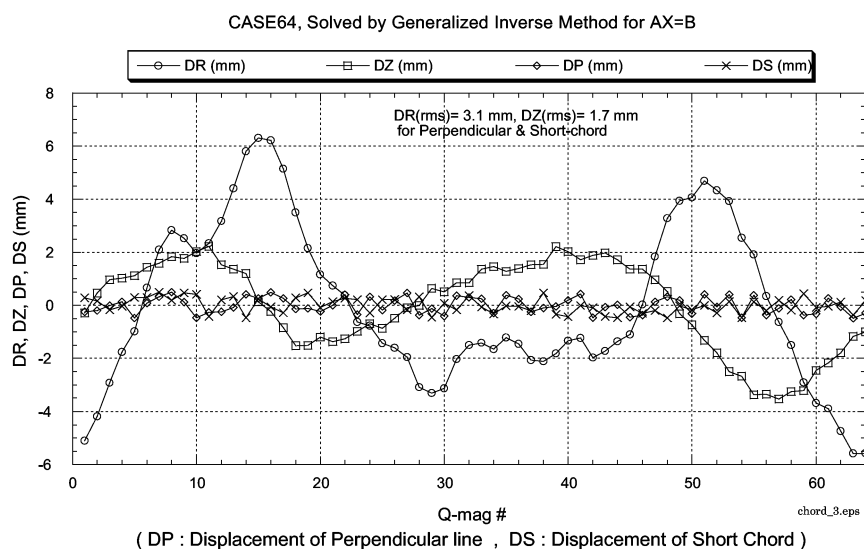


図 3.13: 一般逆行列解法による半径方向と方位角方向の移動量

図 3.13 に一般逆行列解法によって得られた半径方向と方位角方向の移動量を示す。この解法ではランク低減法のような後処理を必要としない。Moore-Penrose 型一般逆行列を 4 種類の条件式(3.34)～(3.37)に基づいて点検した結果、 10^{-4} 以下の精度で一致している。

図 3.13 は図 3.12 と一致し、一般逆行列を用いて解を得る場合、座標補正量を全体として最小にするための後処理が省略可能であることが分かる。

3.3.5 測定距離の観測方程式

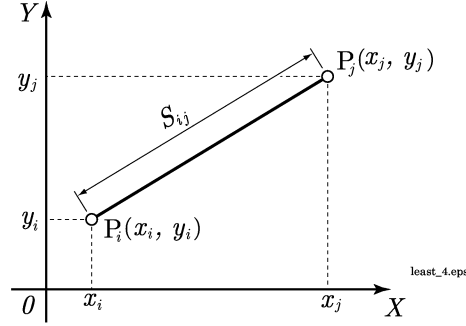


図 3.14: 基準点と測定距離の関係

基準点 P_i の設計座標を (x_i, y_i) ，基準点 P_j の設計座標を (x_j, y_j) とする（図 3.14 参照）．このとき，仮定距離 S_{ij} は設計距離に等しく，

$$S_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (3.39)$$

で与えられる．基準点 P_i, P_j 間の距離を測定して，測定距離 (observed distance) $S_{(obs)ij}$ を得たとする．距離の最確値 (adjusted distance) $S_{(adj)ij}$ は，これに補正量 v_{ij} を加えて得られる．

$$S_{(adj)ij} = S_{(obs)ij} + v_{ij} \quad (3.40)$$

一方，距離の最確値 $S_{(adj)ij}$ は，測点 P_i, P_j の座標の最確値 $x_{(adj)i}, y_{(adj)i}, x_{(adj)j}, y_{(adj)j}$ から求める．これらの最確値は設計座標 x_i, y_i, x_j, y_j とそれに対する補正量 dx_i, dy_i, dx_j, dy_j により，

$$x_{(adj)i} = x_i + dx_i \quad x_{(adj)j} = x_j + dx_j \quad (3.41)$$

$$y_{(adj)i} = y_i + dy_i \quad y_{(adj)j} = y_j + dy_j \quad (3.42)$$

である．すなわち，

$$\begin{aligned} S_{(adj)ij} &= \sqrt{\{(x_j + dx_j) - (x_i + dx_i)\}^2 + \{(y_j + dy_j) - (y_i + dy_i)\}^2} \\ &= \sqrt{\{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2\} + \{(dx_j - dx_i)^2 + (dy_j - dy_i)^2\}} \\ &\doteq S_{ij} + dS_{ij} \end{aligned} \quad (3.43)$$

また， dS_{ij} は，

$$dS_{ij} = \left(\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} \right) dx_j + \left(\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_i} \right) dx_i + \left(\frac{\partial S_{ij}}{\partial y_j} \right) dy_j + \left(\frac{\partial S_{ij}}{\partial y_i} \right) dy_i \quad (3.44)$$

$$= \frac{x_j - x_i}{S_{ij}} dx_j - \frac{x_j - x_i}{S_{ij}} dx_i + \frac{y_j - y_i}{S_{ij}} dy_j - \frac{y_j - y_i}{S_{ij}} dy_i \quad (3.45)$$

その結果，式(3.40) と式(3.43) から，

$$S_{(obs)ij} + v_{ij} = S_{ij} + dS_{ij} \quad (3.46)$$

となる．ここで，設計座標から求めた距離 S_{ij} と測定距離 $S_{(obs)ij}$ との差を l_{ij} とし，

$$l_{ij} = S_{ij} - S_{(obs)ij} \quad (3.47)$$

とする．したがって，式(3.45)，式(3.46)，式(3.47) から，

$$\begin{aligned} v_{ij} &= dS_{ij} - (S_{(obs)ij} - S_{ij}) \\ &= dS_{ij} - l_{ij} \\ &= \frac{x_j - x_i}{S_{ij}} dx_j - \frac{x_j - x_i}{S_{ij}} dx_i + \frac{y_j - y_i}{S_{ij}} dy_j - \frac{y_j - y_i}{S_{ij}} dy_i - l_{ij} \end{aligned} \quad (3.48)$$

であり，この式(3.48) が距離測定の観測方程式である．

3.3.6 正規方程式と \sqrt{Q}

式(3.48) の関係を行列を用いて代表的な測辺に対して表すと，

$$\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ v_{ij} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & -\frac{x_j - x_i}{S_{ij}} & -\frac{y_j - y_i}{S_{ij}} & \dots & \frac{x_j - x_i}{S_{ij}} & \frac{y_j - y_i}{S_{ij}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ dx_i \\ dy_i \\ \dots \\ dx_j \\ dy_j \\ \dots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ l_{ij} \\ \dots \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

となる．

測辺に関わる全ての i, j の組み合わせについて式(3.49) で与えた行列が上述の係数行列 \mathbf{A} である．式(3.49) の左辺第2項のベクトルを \mathbf{L} ，左辺第1項の dx, dy を成分とするベクトルを \mathbf{X} とすれば，式(3.21) (36頁参照) と同じく，

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{L} \quad (3.50)$$

となる．ここに， \mathbf{A} は係数行列， \mathbf{X} は座標の補正量ベクトル， \mathbf{L} は観測値ベクトルである．

ここで、係数行列 \mathbf{A} の要素を、

$$a_{ij} = \frac{x_j - x_i}{S_{ij}} \quad (3.51)$$

$$b_{ij} = \frac{y_j - y_i}{S_{ij}} \quad (3.52)$$

とし、 $j = i + 1$ として整理すると、残差ベクトルは、

$$v_{ij} = -a_{ij}dx_i - b_{ij}dy_i + a_{ij}dx_j + b_{ij}dy_j - l_{ij} \quad (3.53)$$

である。したがって、測点が m 点でその点間を構成する測辺が n 辺のとき、式(3.49)は、

$$\begin{aligned} {}_n\mathbf{V}_1 = {}_n\mathbf{A}_{2m-2n}\mathbf{X}_1 - {}_n\mathbf{L}_1 \\ \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{23} \\ \vdots \\ v_{n-1,n} \\ v_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{12} & -b_{12} & a_{12} & b_{12} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{23} & -b_{23} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \cdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1,1} & -b_{n-1,1} & a_{n-1,n} & -b_{n-1,n} \\ a_{n1} & b_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -a_{n1} & -b_{n1} \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dx_2 \\ dy_2 \\ \vdots \\ dx_{m-1} \\ dy_{m-1} \\ dx_m \\ dy_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_{12} \\ l_{23} \\ \vdots \\ l_{n-1,n} \\ l_{n1} \end{pmatrix} \quad (3.54) \end{aligned}$$

となる。上述のように、係数行列 \mathbf{A} は、

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a_{12} & -b_{12} & a_{12} & b_{12} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{23} & -b_{23} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \cdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1,1} & -b_{n-1,1} & a_{n-1,n} & -b_{n-1,n} \\ a_{n1} & b_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -a_{n1} & -b_{n1} \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

である。すなわち、 \mathbf{A} は測辺に対応した設計座標によって構成されている。

正規方程式

$$\mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{X} - \mathbf{A}^t \mathbf{L} = \mathbf{O} \quad (3.56)$$

において,

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^t \mathbf{A} \quad (3.57)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^t \mathbf{L} \quad (3.58)$$

とすると, 式(3.56) の正規方程式は,

$$\mathbf{N} \mathbf{X} - \mathbf{U} = \mathbf{O} \quad (3.59)$$

と表すことができる.

1 辺の測辺に関して両端の x, y 座標なので, 係数行列 \mathbf{A} は, 各行で 4 つの要素が規則的に現れる行列である. したがって, 式(3.60) の正規方程式の $\mathbf{N}(= \mathbf{A}^t \mathbf{A})$ も同様に各行で 4 つの要素が規則的に表れる行列となり, 2×2 の部分行列が主要素として対角線上に並ぶ行列である. この部分行列において, $(1, 1)$ 要素と $(2, 2)$ 要素が主成分で, 非対角要素は対角要素に比べて小さい. これ以外の要素についても対角要素に比べて小さい.

いま, 上述の関係を,

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^t \mathbf{A} = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & & \cdots & \cdots & & \\ N_{21} & N_{22} & & & & & \\ & & N_{33} & N_{34} & & & \\ & & N_{43} & N_{44} & & & \\ \vdots & & & & N_{55} & N_{56} & \vdots \\ & & & & N_{65} & N_{66} & \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ & & & & & & N_{m-1,m-1} & N_{m-1,m} \\ & & & \cdots & \cdots & & N_{m,m-1} & N_{m,m} \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

とすれば, 測点 i が関係する 2×2 の部分行列は,

$$\begin{pmatrix} N_{2i-1,2i-1} & N_{2i-1,2i} \\ N_{2i,2i-1} & N_{2i,2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j \left(\frac{x_j - x_i}{S_{ij}} \right)^2 & \sum_j \left(\frac{x_j - x_i}{S_{ij}} \right) \left(\frac{y_j - y_i}{S_{ij}} \right) \\ \sum_j \left(\frac{x_j - x_i}{S_{ij}} \right) \left(\frac{y_j - y_i}{S_{ij}} \right) & \sum_j \left(\frac{y_j - y_i}{S_{ij}} \right)^2 \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

と表せる. 和記号 \sum については, 測点 i が関係する全ての測点 j についての和を求めるものとする. 非対角要素は x 座標と y 座標の積になっているので, x の座標の誤差が y 方向にも影響し, その逆の影響もあることを意味する. すなわち, 最小 2 乗法の解は測量網全体で誤差を最小にすることにより, 半径方向の設計値からのズレあるい

は誤差が，ビーム方向にも影響し，また逆の場合もあることを意味する．このような x, y の積の項が小さくなる測量網を形成すれば，半径方向とビーム方向の結合が小さくなる．

$$\left(\frac{x_j - x_i}{S_{ij}}\right)^2 + \left(\frac{y_j - y_i}{S_{ij}}\right)^2 > \left|\left(\frac{x_j - x_i}{S_{ij}}\right)\left(\frac{y_j - y_i}{S_{ij}}\right)\right| \quad (3.62)$$

が成立するので，対角要素に比べて，非対角要素は符号を含めて必ず小さい．行列 \mathbf{N} の一般逆行列 \mathbf{N}^+ も対角要素が主要素になり，次の行列で表される．

$$\mathbf{N}^+ = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^+ = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & & \cdots & \cdots & & \\ Q_{21} & Q_{22} & & & & & \\ & & Q_{33} & Q_{34} & & & \\ & & Q_{43} & Q_{44} & & & \\ \vdots & & & & Q_{55} & Q_{56} & \vdots \\ & & & & Q_{65} & Q_{66} & \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ & & & & & & Q_{m-1,m-1} & N_{m-1,m} \\ & & & \cdots & \cdots & & Q_{m,m-1} & Q_{m,m} \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

この一般逆行列の測点 i に関する部分だけを抜き出すと，

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{2i-1,2i-1} & Q_{2i-1,2i} \\ Q_{2i,2i-1} & Q_{2i,2i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_j a_{j,2i-1} l_{ij} \\ \sum_j a_{j,2i} l_{ij} \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

ここでも和記号 \sum は，測点 i が関係する全ての測辺の測点 j についての和を求めるものとする． $dx_i \rightarrow x_i$ ， $dy_i \rightarrow y_i$ ， $Q_{2i-1,2i-1} \rightarrow Q_{xx}$ ， $Q_{2i,2i} \rightarrow Q_{yy}$ として，寄与の大きな主要素だけで表せば，

$$x_i \doteq Q_{xx} \sum_j a_{j,2i-1} l_{ij} \quad (3.65)$$

$$y_i \doteq Q_{yy} \sum_j a_{j,2i} l_{ij} \quad (3.66)$$

となつて， $a_{j,2i-1}$ は x 座標だけに関係し， $a_{j,2i}$ は y 座標だけに関係する係数行列 \mathbf{A} の要素である．ここで， $|a_{j,2i-1}| \leq 1$ ， $|a_{j,2i}| \leq 1$ が成立するので，これらの係数を 1 と見なせば，測辺の測量精度の関係が得られる． l_{ij} ($= S_{ij} - S_{(obs)ij}$) を測定器の誤差と見なすことによって，

$$m_x^2 = m_o^2 Q_{xx} \quad (3.67)$$

$$m_y^2 = m_o^2 Q_{yy} \quad (3.68)$$

の関係が成立する．以上から，精度 m_o の測定器を用いて一般逆行列が求まった測量網に対して期待できる座標の精度は，

$$m_x = m_o \sqrt{Q_{xx}} \quad (3.69)$$

$$m_y = m_o \sqrt{Q_{yy}} \quad (3.70)$$

となる．

3.3.7 誤差楕円

測点 P の座標に関する逆行列 \mathbf{N}^{-1} の部分行列

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

に関して、その性質を調べる。この行列の固有値を λ 、固有ベクトルを \mathbf{v} とすれば、

$$\mathbf{Q}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (3.72)$$

と表すことができる。 λ と \mathbf{v} を求めることにより測量によって求めるべき測点 P の座標が評価できる。すなわち、式(3.71)の行列 \mathbf{Q} は2つの固有値をもち、それぞれ対応する固有ベクトルに対して、行列 \mathbf{Q} で与えられる1次変換を行えば、その固有ベクトルの方向が固有値を乗じた結果となる。固有ベクトルの方向は1次変換によって変化しないので、その方向に固有ベクトルが固有値倍だけ変化するだけである。2つの固有ベクトルの方向は直交し、固有値の大きい方向に引き延ばされる。

測辺の方向によらず測定精度が等方的に m_o であるとすれば、式(3.71)の行列 \mathbf{Q} から予想される測点 P の座標誤差は、 \mathbf{Q} に関する固有値と固有ベクトルから決められる楕円の範囲にある。このような楕円を誤差楕円といい、各測点ごとに楕円の傾きと大きさを求めることができる。

3.3.7.1 誤差楕円の大きさ

誤差楕円の大きさ、すなわち楕円の長軸 m_u 、短軸 m_v は、各測点に関する部分行列 \mathbf{Q} の固有方程式、

$$\begin{vmatrix} Q_{xx} - \lambda & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.73)$$

の固有値 (式(F.145) : 210 頁参照)

$$\lambda_u = \frac{1}{2} \left\{ (Q_{xx} + Q_{yy}) + \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2} \right\} \quad (3.74)$$

$$\lambda_v = \frac{1}{2} \left\{ (Q_{xx} + Q_{yy}) - \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2} \right\} \quad (3.75)$$

から、

$$m_u^2 = m_o^2 \lambda_u = m_o^2 \times \frac{1}{2} \left\{ Q_{xx} + Q_{yy} + \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2} \right\} \quad (3.76)$$

$$m_v^2 = m_o^2 \lambda_v = m_o^2 \times \frac{1}{2} \left\{ Q_{xx} + Q_{yy} - \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2} \right\} \quad (3.77)$$

である。したがって、

$$m_u = m_o \sqrt{\frac{Q_{xx} + Q_{yy} + \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2}}{2}} \quad (3.78)$$

$$m_v = m_o \sqrt{\frac{Q_{xx} + Q_{yy} - \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2}}{2}} \quad (3.79)$$

である。

3.3.7.2 誤差楕円の傾斜角

固有値 λ_u, λ_v にそれぞれ対応する固有ベクトル $\mathbf{X}_1(x_1, y_1), \mathbf{X}_2(x_2, y_2)$ を求めると、 \mathbf{X}_1 の方向が誤差楕円の長軸の方向を、 \mathbf{X}_2 の方向が誤差楕円の短軸の方向を与える (210 頁参照)。 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ はそれぞれ、

$$\begin{pmatrix} Q_{xx} - \lambda_u & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} - \lambda_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.80)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{xx} - \lambda_v & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} - \lambda_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.81)$$

より求められる。上 2 式(3.80),(3.81) は x_1, y_1, x_2, y_2 に関して 4 個の方程式を与えるが、独立な方程式は 2 個である。したがって、

$$(Q_{xx} - \lambda_u)x_1 + Q_{xy} \cdot y_1 = 0 \quad (3.82)$$

$$(Q_{xx} - \lambda_v)x_2 + Q_{yx} \cdot y_2 = 0 \quad (3.83)$$

上 2 式(3.82),(3.83) より固有ベクトルの方向、すなわち主軸の方向は、

$$\text{長軸方向} : \tan \theta_u = \frac{y_1}{x_1} = \frac{\lambda_u - Q_{xx}}{Q_{xy}} \quad (3.84)$$

$$\text{短軸方向} : \tan \theta_v = \frac{y_2}{x_2} = \frac{\lambda_v - Q_{xx}}{Q_{xy}} \quad (3.85)$$

となる。

$\tan \theta_u \cdot \tan \theta_v = -1$ となり、2 つの方向は直交する。

3.3.7.3 誤差楕円を回転させた場合の不変性の検討

座標原点の周りに角度 θ だけ回転した新座標系は、

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.86)$$

で表される．新しい座標系 (u, v) に関する係数行列 \mathbf{N}^{-1} は,

$$\begin{pmatrix} Q_{uu} & Q_{uv} \\ Q_{vu} & Q_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{xy} & Q_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.87)$$

で求めることができるので，点 P の u 軸方向の誤差 m_u と v 軸方向の誤差 m_v は

$$m_u^2 = m_o^2 Q_{uu} = m_o^2 (Q_{xx} \cos^2 \theta + 2Q_{xy} \sin \theta \cos \theta + Q_{yy} \sin^2 \theta) \quad (3.88)$$

$$m_v^2 = m_o^2 Q_{vv} = m_o^2 (Q_{xx} \sin^2 \theta - 2Q_{xy} \sin \theta \cos \theta + Q_{yy} \cos^2 \theta) \quad (3.89)$$

と表せる．したがって,

$$m_u^2 + m_v^2 = m_x^2 + m_y^2 \quad (3.90)$$

であり， θ の回転に対して， $m_x^2 + m_y^2$ は不変である．すなわち，座標精度の絶対値は座標系の回転に対して不変である．

3.4 \sqrt{Q} による測量網の最適化

加速器リングのアラインメントに使用する測点の xy 座標を最小 2 乗法によって求めるとき、測定値が距離によって構成される場合、残差ベクトル（補正量ベクトル） \mathbf{V} 、設計座標による測辺と測定値との差を観測値ベクトル \mathbf{L} 、設計座標に対する補正量ベクトル \mathbf{X} 、および測辺によって構成される係数行列 \mathbf{A} によって、観測方程式(3.21)(36 頁)は、

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{L}$$

のように表された。

この観測方程式を 2 乗し、微分してゼロとおいた正規方程式(3.24)(37 頁)、

$$\mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{A}^t \mathbf{L}$$

において、 $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$ は測辺によって構成され、その逆行列 $(\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1}$ (フリーネットワーク解法の場合 $(\mathbf{A}^t \mathbf{A})^+$) の対角線上の 2×2 の部分行列の要素を Q といい、これらも測量網の測辺によって構成されている。

一方、測点の x, y 座標の精度は、座標軸方向の誤差 (m_x, m_y) と座標軸に対して傾きをもった誤差楕円として 2 次元分布で表現される。このとき誤差楕円は、 \sqrt{Q} の固有値と測定精度 m_o によって計算される。

x, y 座標の座標軸方向の誤差 m_x, m_y は、 \sqrt{Q} と測定精度 m_o によって式(3.69),(3.70)(50 頁) から、

$$\begin{aligned} m_x &= m_o \sqrt{Q_{xx}} \\ m_y &= m_o \sqrt{Q_{yy}} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} m^2 &= m_x^2 + m_y^2 \\ &= m_o^2 (Q_{xx} + Q_{yy}) \\ m &= m_o \sqrt{Q_{xx} + Q_{yy}} \\ &= m_o \sqrt{Q} \end{aligned} \tag{3.91}$$

である。

したがって、式(3.91) から、座標の精度 m を向上させる（小さくする）ためには、測定の精度 m_o を小さくすると同時に、 \sqrt{Q} も小さくしなければならない。

このとき上述のように、 \sqrt{Q} は測量網の測辺によって構成される $(\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1}$ の要素である。したがって、測辺の構成によって、すなわち測量網の形によって \sqrt{Q} は決定される。その結果、 m_o を仮定すれば、目標精度が達成可能な測量網であるか否かが、計画段階で判定可能となる。

3.4.1 最適な測量網のデザイン

x, y 座標の精度が m 以下と要求された場合、式(3.69),(3.70)、式(3.91)において測定精度 m_o を仮定して、

$$\begin{aligned} m &\geq m_o \sqrt{Q} \\ \frac{m}{m_o} &\geq \sqrt{Q} \end{aligned} \quad (3.92)$$

を満足する \sqrt{Q} を求めればよいことになる。

このとき仮定する測定精度 m_o は、測定機材の公称精度が必ず得られるように設定する必要がある。すなわち、公称精度を σ とすると、99.7%の確率で得られる精度 3σ 程度に設定することによって、より \sqrt{Q} を座標の精度 m の推定に利用することが可能である。

前述のように、高精度な光波測距儀 MEKOMETER ME5000 の場合、その公称精度は、

$$\pm(0.2 [mm] + 0.2 \times \text{Distance} [mm])$$

である。短距離の場合、距離に依存する部分を省略し、測定精度 $m_o = \pm 0.2 [mm]$ とする。この m_o を σ とし、 $3\sigma \div 0.5 [mm] \sim 0.6 [mm]$ として、

$$\frac{m}{0.5} \geq \sqrt{Q} \quad (3.93)$$

を満たすような \sqrt{Q} を得るように測辺を調整し、図形としての測量網を決定すればよいことになる。

3.4.2 測定精度 m_o の仮定値

実際の測定精度 m_o は、測定距離を最小 2 乗法で処理した結果、補正量ベクトル V によって式(F.56)(195 頁)から、

$$m_o = \sqrt{\frac{V^t V}{n - m}} \quad (3.94)$$

で得られる。ここに、 n は観測方程式の数、 m は xy 座標の数であり、 $n - m$ は自由度である。

第 5 章『測定精度 m_o の改善』において MEKOMETER ME5000 の精度を改善しており、実測例においても、SPS の場合 $m_o = \pm 0.15 [mm] \sim \pm 0.16 [mm]$ (109 頁～115 頁) 程度の精度が得られている。また、HIMAC においても、240 測辺の測定の結果から $m_o = \pm 0.09 [mm]$ (143 頁) であった。

このような改善の結果、実測の測定精度 m_o は公称精度を上まわり、コンスタントに公称精度より良好な測定精度が得られている。したがって、計画段階で仮定する測

定精度 m_o の値の見直しが今後必要と考えられる．その結果，式(3.93)において \sqrt{Q} の値が緩和できる．すなわち，簡素な測量網で所要の座標精度 m が得られることになり，測量の効率が改善される．

第4章 仮想した加速器における 測量網平均計算の計算例

ここでは、測量網平均計算を仮想の加速器リングの場合を仮定して、実際に計算することによってその計算過程の実例を示す。

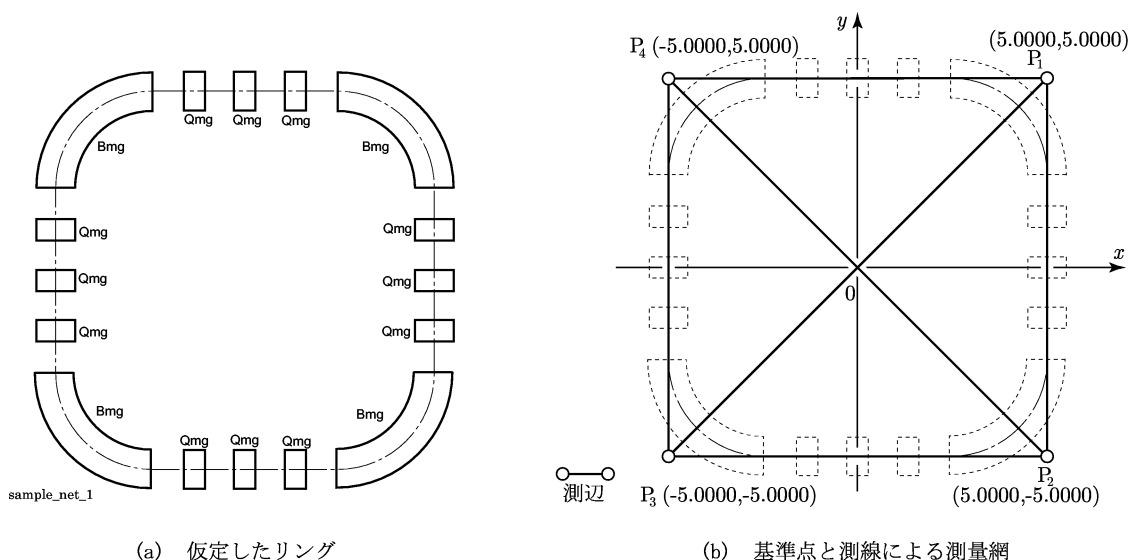


図 4.1: 測量網平均計算の実例に使用した測量網

図 4.1 の (a) のような周長 40m 程度の小型の加速器を仮定して、アラインメントに必要な基準点を同図 (b) のように配点する。すなわち、(a) の仮想した加速器を代表するような多角形として正方形の四隅に基準点を配置する（表 4.1 参照）。

本来ならば、リングの中心にさらに 1 点設置すべきであるが、計算例を示す目的から、簡便な測量網を設定している。したがって、基準点 4 点とその間の測辺 8 辺を精密測距儀 MEKOMETOR ME5000（距離測定の精度： $\pm(0.2\text{mm} + 0.2\text{ppm} \times \text{Dist.})$ ）で測辺を測定し、それぞれの測辺が表 4.2 のように測定された場合を想定する。

これら距離の観測方程式は、式(3.53) から、

$$-a_{ij}dx_i - b_{ij}dy_i + a_{ij}dx_j + b_{ij}dy_j = (S_{ij} - S_{(obs)ij}) + v_{ij} \quad (4.1)$$

表 4.1: 想定した基準点設計座標

Station ID	x 座 標 [m]	y 座 標 [m]
P_1	+5.0000	+5.0000
P_2	+5.0000	-5.0000
P_3	-5.0000	-5.0000
P_4	-5.0000	+5.0000

表 4.2: 距離測定結果

測 辺	設計距離 [m]	測定距離 [m]	$S_{ij} - S_{(obs)ij}$ [mm]
$P_1 - P_2$	$S_{12} = 10.00000$	$S_{(obs)12} = 9.99980$	+0.20
$P_2 - P_3$	$S_{23} = 10.00000$	$S_{(obs)23} = 10.00020$	-0.20
$P_3 - P_4$	$S_{34} = 10.00000$	$S_{(obs)34} = 9.99950$	+0.50
$P_4 - P_1$	$S_{41} = 10.00000$	$S_{(obs)41} = 10.00030$	-0.30
$P_1 - P_3$	$S_{13} = 14.14214$	$S_{(obs)13} = 14.14184$	+0.30
$P_3 - P_1$	$S_{13} = 14.14214$	$S_{(obs)13} = 14.14234$	-0.20
$P_2 - P_4$	$S_{24} = 14.14214$	$S_{(obs)24} = 14.14174$	+0.40
$P_4 - P_2$	$S_{24} = 14.14214$	$S_{(obs)24} = 14.14234$	-0.20

ただし, a_{ij} および b_{ij} は式(3.51), (3.52) と同じく

$$a_{ij} = \frac{x_j - x_i}{S_{ij}}$$

$$b_{ij} = \frac{y_j - y_i}{S_{ij}}$$

である. したがって, 観測方程式

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{L} \quad (4.2)$$

をマトリックスで表現すると，観測値ベクトル \mathbf{L} は表 4.2 から，

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} S_{12} - S_{(obs)12} \\ S_{23} - S_{(obs)23} \\ S_{34} - S_{(obs)34} \\ S_{41} - S_{(obs)41} \\ S_{13} - S_{(obs)13} \\ S_{31} - S_{(obs)31} \\ S_{24} - S_{(obs)24} \\ S_{42} - S_{(obs)42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.2 \\ -0.2 \\ +0.5 \\ -0.3 \\ +0.3 \\ -0.2 \\ +0.4 \\ -0.2 \end{pmatrix} \quad [mm] \quad (4.3)$$

となり，また補正量ベクトル \mathbf{V} は，

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{23} \\ v_{34} \\ v_{41} \\ v_{13} \\ v_{31} \\ v_{24} \\ v_{42} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

となる．ここで，

- (1) 固定網平均計算
- (2) 自由網平均計算（フリーネットワーク計算）

を計算の実例とする．

観測値ベクトル \mathbf{L} はいずれの測量網平均計算でも共通であるが，座標ベクトル \mathbf{X} および係数行列 \mathbf{A} は，測量網平均計算の方法によって異なる．

4.1 固定網平均計算例

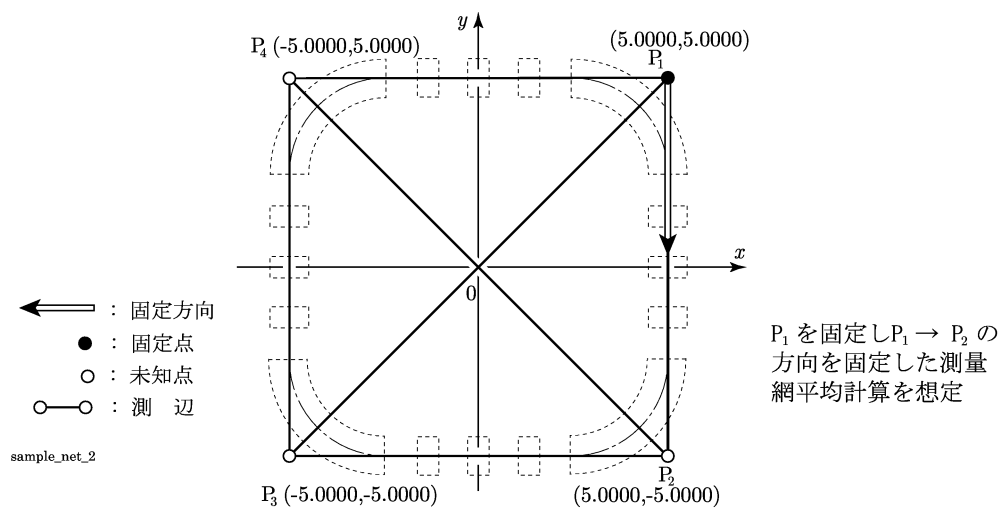


図 4.2: 1 点 1 方向固定の測量網

図 4.2 において，基準点 P_1 (5.0000, 5.0000) と $P_1 \rightarrow P_2$ を固定した場合，すなわち， $x_1 = y_1 = x_2 = 5.0000$ となる．したがって，未知量は $dy_2, dx_3, dy_3, dx_4, dy_4$ の 5 個で観測量は 8 辺であるから，自由度 $r = 3$ である．

未知量ベクトル \mathbf{X} は，

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} dy_2 \\ dx_3 \\ dy_3 \\ dx_4 \\ dy_4 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

であり，係数行列 \mathbf{A} は，

$${}_8\mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} & dy_2 & dx_3 & dy_3 & dx_4 & dy_4 \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

この係数行列 \mathbf{A} から 2 次形式を作るために， $\mathbf{A}^t \mathbf{A} = \mathbf{N}$ を計算する．このとき $|\mathbf{N}| = 72$ なので，逆行列が存在する．すなわち，

$$(\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.78 & -0.22 & 0.28 & -0.22 & 0.50 \\ & 0.78 & -0.72 & -0.22 & -0.50 \\ & & 0.90 & 0.28 & 0.63 \\ \vdots & \ddots & & 0.78 & 0.50 \\ & & \dots & & 1.13 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

\mathbf{N}^{-1} は対称行列．したがって，未知量ベクトル \mathbf{X} は，

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{L} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{L} = \begin{pmatrix} dy_2 = -0.24 \\ dx_3 = +0.16 \\ dy_3 = -0.32 \\ dx_4 = +0.26 \\ dy_4 = +0.22 \end{pmatrix} \quad [mm] \quad (4.8)$$

で求めることができる．したがって，観測距離によって決定した座標は，

$$\begin{aligned} P_2 : \quad y_2 &= y_2' + dy_2 = -5,000.00 - 0.24 = -5,000.24 \quad [mm] \\ P_3 : \quad x_3 &= x_3' + dx_3 = -5,000.00 + 0.16 = -4,999.84 \quad [mm] \\ & \quad y_3 = y_3' + dy_3 = -5,000.00 - 0.32 = -5,000.32 \quad [mm] \\ P_4 : \quad x_4 &= x_4' + dx_4 = -5,000.00 + 0.26 = -4,999.74 \quad [mm] \\ & \quad y_4 = y_4' + dy_4 = +5,000.00 + 0.22 = +5,000.22 \quad [mm] \end{aligned} \quad (4.9)$$

となる（図 4.2，表 4.3 参照）．

表 4.3: 観測距離から決定した座標値 (1 点 1 方向固定計算)

Station ID	x 座標 [m]	y 座標 [m]	dx [mm]	dy [mm]	備考
P_1	+5.00000	+5.00000	± 0.00	± 0.00	固定点
P_2	+5.00000	-5.00024	± 0.00	-0.24	固定方向
P_3	-4.99984	-5.00032	+0.16	-0.32	
P_4	-4.99974	+5.00022	+0.26	+0.22	

また、観測の精度と各点の精度は、補正量ベクトル \mathbf{V} が計算結果と式(4.1) および式(4.4) から、

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{L} = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{23} \\ v_{34} \\ v_{41} \\ v_{13} \\ v_{31} \\ v_{24} \\ v_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.04 \\ +0.04 \\ +0.04 \\ -0.04 \\ -0.06 \\ -0.04 \\ -0.11 \\ -0.09 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

となり、測定距離の精度 σ_o は式(F.56)(195 頁) から、

$$\sigma_o = \sqrt{\frac{\mathbf{V}^t \mathbf{V}}{8 - 5}} = 0.105 \text{ [mm]} \quad (4.11)$$

各点の座標の標準偏差は、係数行列の逆行列 \mathbf{N}^{-1} の式(4.7) の要素を表 4.4 にまとめる.

表 4.4: \mathbf{N}^{-1} の \mathbf{Q}

Station ID	Q_{xx}	Q_{yy}	Q_{xy}
P_1	0	0	0
P_2	0	0.78	0
P_3	0.78	0.90	-0.72
P_4	0.78	1.13	0.50

P_2 の y 方向の精度は、

$$\sigma_{y2} = \sigma_o \sqrt{Q_{yy2}} = 0.105 \sqrt{0.78} = 0.09 \text{ [mm]} \quad (4.12)$$

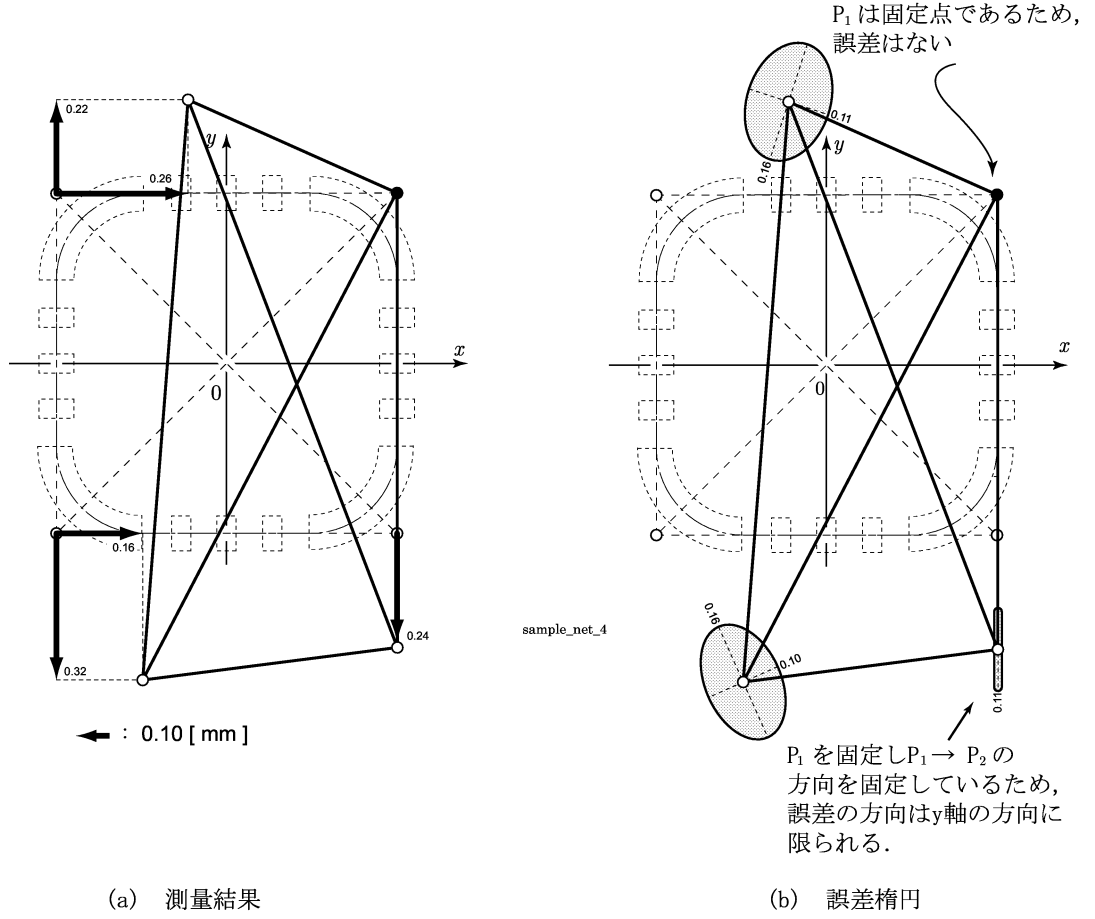


図 4.3: 測量結果と誤差楕円 (1 点 1 方向固定計算)

また, P_3 の誤差楕円は,

$$\lambda_{31} = \frac{(Q_{3xx} + Q_{3yy}) + \sqrt{(Q_{3xx} - Q_{3yy})^2 + 4Q_{3xy}^2}}{2} = 2.386 \quad (4.13)$$

$$\lambda_{32} = \frac{(Q_{3xx} + Q_{3yy}) - \sqrt{(Q_{3xx} - Q_{3yy})^2 + 4Q_{3xy}^2}}{2} = 0.831 \quad (4.14)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\lambda_{31} - Q_{3xx}}{Q_{3xy}} = -66 [^\circ] \quad (4.15)$$

$$a = \sigma_o \sqrt{\lambda_{31}} = 0.16 [mm] \quad : \text{誤差楕円の長軸の長さ} \quad (4.16)$$

$$b = \sigma_o \sqrt{\lambda_{32}} = 0.10 [mm] \quad : \text{誤差楕円の短軸の長さ} \quad (4.17)$$

となる. 各点の誤差楕円を表 4.5 にまとめる.

表 4.5: 各点の精度および誤差楕円 (1 点 1 方向固定計算)

Station ID	$\sigma_x[mm]$	$\sigma_y[mm]$	長軸半径 $a [mm]$	短軸半径 $b [mm]$	傾斜角 $\theta [^\circ]$
P_1	0	0	0	0	—
P_2	0	0.08	0.11	0.07	90
P_3	0.08	0.09	0.16	0.10	−66
P_4	0.08	0.12	0.16	0.11	72

4.2 自由網平均計算例（フリーネットワーク計算例）

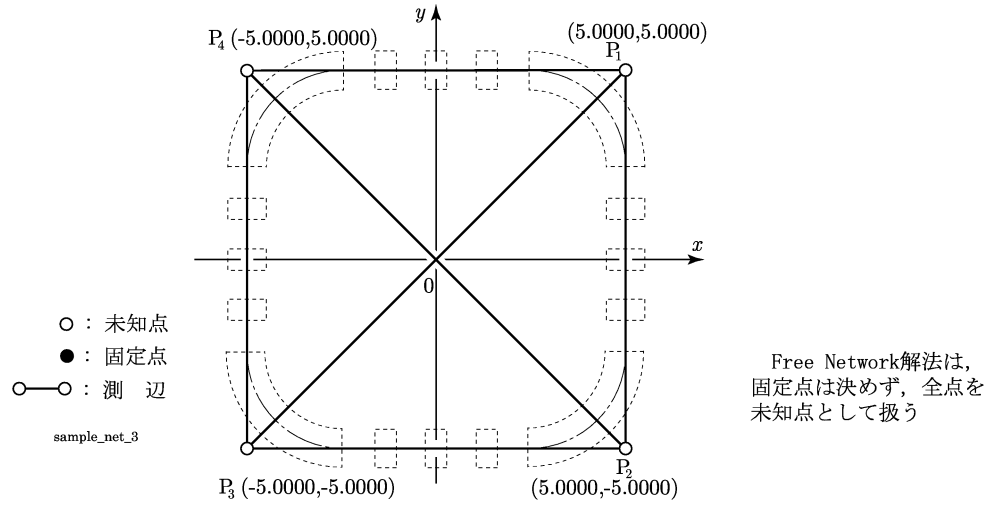


図 4.4: 自由網平均計算の測量網

フリーネットワーク計算は、固定点がなく全点を未知点として扱う平均計算方法である（図 4.4 参照）。したがって、未知量ベクトル \mathbf{X} は、

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dx_2 \\ dy_2 \\ dx_3 \\ dy_3 \\ dx_4 \\ dy_4 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

であり，基準点数 $\times 2$ の8量であり，係数行列 \mathbf{A} は，

$${}_8\mathbf{A}_8 = \begin{pmatrix} dx_1 & dy_1 & dx_2 & dy_2 & dx_3 & dy_3 & dx_4 & dy_4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

である．この係数行列 \mathbf{A} から2次形式を作るために，前回と同じく， $\mathbf{A}^t \mathbf{A} = \mathbf{N}$ を計算する．

$${}_8\mathbf{N}_8 = \mathbf{A}^t \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 & -4 & -4 & -1 & 0 \\ & 5 & 0 & -1 & -4 & -4 & 0 & 0 \\ & & 5 & -4 & -1 & 0 & -4 & 4 \\ & & & 5 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ \vdots & & & & 5 & 4 & 0 & 0 \\ & & \ddots & & & 5 & 0 & -1 \\ & & & & & & 5 & -4 \\ & & & \dots & & & & 5 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

このとき $|\mathbf{N}| = 0$ となる．すなわち，逆行列 \mathbf{N}^{-1} が得られない．

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^t \mathbf{L} = \begin{pmatrix} +0.41 \\ +0.91 \\ +0.65 \\ -1.05 \\ -0.51 \\ -1.21 \\ -0.55 \\ +1.35 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

とすると，前出の1点1方向固定計算のように，最小限，固定点の2量 (x, y) と固定方向の計3量があれば， $\mathbf{N}\mathbf{X} = \mathbf{U}$ の解は， $\mathbf{X} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{U}$ によって得られる．しか

し、フリーネットワーク解法のように、全点未知点とした場合、上述のように通常の逆行列 \mathbf{N}^{-1} が得られないため、一般逆行列 \mathbf{N}^+ によって $\mathbf{X} = \mathbf{N}^+ \mathbf{U}$ のように解かなければならない。

ここで、数值的に一般逆行列 \mathbf{N}^+ を求める方法として、微少量 δ を対角項に加え、一時的に正則行列にする (『一般逆行列を近似的に求める方法』203 頁参照)。 δ を徐々に小さくする反復計算を行い、 δ が解の精度に影響を及ぼさない程度まで小さくなったところで \mathbf{N}^+ の計算を終了する方法で一般逆行列 \mathbf{N}^+ を求める。この方法による一般逆行列 \mathbf{N}^+ によって

$$\mathbf{X} = \mathbf{N}^+ \mathbf{U} = (\mathbf{N}^t \mathbf{N} + \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{N}^t \mathbf{U} \quad (4.22)$$

を計算し、未知量ベクトル \mathbf{X} を得ることを試みる。

この方法で最終的に $\delta = 0.001$ とすると、

$$(\mathbf{N}^t \mathbf{N} + \delta \mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 74.001 & 72 & 8 & -8 & -72 & -72 & -10 & 8 \\ & 74.001 & 8 & -10 & -72 & -72 & -8 & 8 \\ & & 74.001 & -72 & -10 & -8 & -72 & 72 \\ & & & 74.001 & 8 & 8 & 72 & -72 \\ \vdots & & & & 74.001 & 72 & 8 & -8 \\ & & & \ddots & & 74.001 & 8 & -10 \\ & & & & & & 74.001 & -72 \\ & & & \dots & & & & 74.001 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

が得られる。したがって、一般逆行列 \mathbf{N}^+ は、

$$\mathbf{N}^+ = (\mathbf{N}^t \mathbf{N} + \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{N}^t = \begin{pmatrix} 0.20 & -0.05 & -0.06 & 0.06 & 0.05 & 0.05 & -0.19 & -0.06 \\ & 0.20 & -0.06 & -0.19 & 0.05 & 0.05 & 0.06 & -0.06 \\ & & 0.20 & 0.05 & -0.19 & 0.06 & 0.05 & -0.05 \\ & & & 0.20 & -0.06 & -0.06 & -0.05 & 0.05 \\ \vdots & & & & 0.20 & -0.05 & -0.06 & 0.06 \\ & & & \ddots & & 0.20 & -0.06 & -0.19 \\ & & & & & & 0.20 & 0.05 \\ & & & \dots & & & & 0.20 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

となる。

求められた式(4.24)は、Moore-Penrose 型一般逆行列の4つの条件 (式(3.34)～式(3.37):39

ベ-参照),

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}\mathbf{N}^+\mathbf{N} &= \mathbf{N} && \text{一般逆行列の基本条件} \\
 \mathbf{N}^+\mathbf{N}\mathbf{N}^+ &= \mathbf{N}^+ && \text{反射型一般逆行列} \\
 (\mathbf{N}^+\mathbf{N})^t &= \mathbf{N}^+\mathbf{N} && \text{ノルム最小型一般逆行列} \\
 (\mathbf{N}\mathbf{N}^+)^t &= \mathbf{N}\mathbf{N}^+ && \text{最小2乗型一般逆行列}
 \end{aligned}$$

をいずれも 1.0×10^{-4} 以下で満足する.

式(4.24) の一般逆行列 \mathbf{N}^+ をもちい, $\mathbf{X} = \mathbf{N}^+\mathbf{U}$ から, 未知量ベクトル \mathbf{X} を求めることができる.

式(4.18), (4.21), (4.24) から,

$$\mathbf{X} = \mathbf{N}^+\mathbf{U} = \begin{pmatrix} dx_1 = -0.13 \\ dy_1 = +0.12 \\ dx_2 = -0.07 \\ dy_2 = -0.13 \\ dx_3 = +0.08 \\ dy_3 = -0.27 \\ dx_4 = +0.12 \\ dy_4 = +0.28 \end{pmatrix} [mm] \quad (4.25)$$

となる. したがって, 観測距離によって決定した座標は,

$$\begin{aligned}
 P_1 : \quad x_1 &= x_1' + dx_1 = +5,000.00 - 0.13 = +4,999.87 [mm] \\
 y_1 &= y_1' + dy_1 = +5,000.00 + 0.12 = +5,000.12 [mm] \\
 P_2 : \quad x_2 &= x_2' + dx_2 = +5,000.00 - 0.07 = +4,999.93 [mm] \\
 y_2 &= y_2' + dy_2 = -5,000.00 - 0.13 = -5,000.13 [mm] \\
 P_3 : \quad x_3 &= x_3' + dx_3 = -5,000.00 + 0.08 = -4,999.92 [mm] \\
 y_3 &= y_3' + dy_3 = -5,000.00 - 0.27 = -5,000.27 [mm] \\
 P_4 : \quad x_4 &= x_4' + dx_4 = -5,000.00 + 0.12 = -4,999.88 [mm] \\
 y_4 &= y_4' + dy_4 = +5,000.00 + 0.28 = +5,000.28 [mm]
 \end{aligned} \quad (4.26)$$

である (図 4.4, 表 4.6 参照).

また, 観測の精度と各点の精度は, 補正量ベクトル \mathbf{V} が計算結果と式(4.1) および

表 4.6: 観測距離から決定した座標値 (フリーネットワーク計算)

Station ID	x 座標 [m]	y 座標 [m]	dx [mm]	dy [mm]
P_1	+4.99987	+5.00012	-0.13	+0.12
P_2	+4.99993	-5.00013	-0.07	-0.13
P_3	-4.99992	-5.00027	+0.08	-0.27
P_4	-4.99988	+5.00028	+0.12	+0.28

式(4.4) から,

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{L} = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{23} \\ v_{34} \\ v_{41} \\ v_{13} \\ v_{31} \\ v_{24} \\ v_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.04 \\ +0.04 \\ +0.04 \\ +0.04 \\ -0.06 \\ -0.04 \\ -0.11 \\ -0.09 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

となり, 測定距離の精度 σ_o は式(F.56)(195 頁) から,

$$\sigma_o = \sqrt{\frac{\mathbf{V}^t \mathbf{V}}{8 - (8 - 3)}} = 0.105 \text{ [mm]} \quad (4.28)$$

ただし, 測定距離の精度 σ_o を求める式の自由度 r は,

観測方程式の数 (測定辺数) : $m = 8$

未知量の数 (基準点数 $\times 2$) : $n = 4 \times 2$

正規方程式におけるランクの欠陥数 : 3 量

したがって, $r = m - (n - 3) = 3$ である.

各点の座標の標準偏差は, 係数行列の逆行列 \mathbf{N}^{-1} の式(4.7) の要素を表 4.7 にまとめる.

P_1 の x 方向の精度は,

$$\sigma_{x1} = \sigma_o \sqrt{Q_{11}} = 0.105 \sqrt{0.20} = 0.05 \text{ [mm]} \quad (4.29)$$

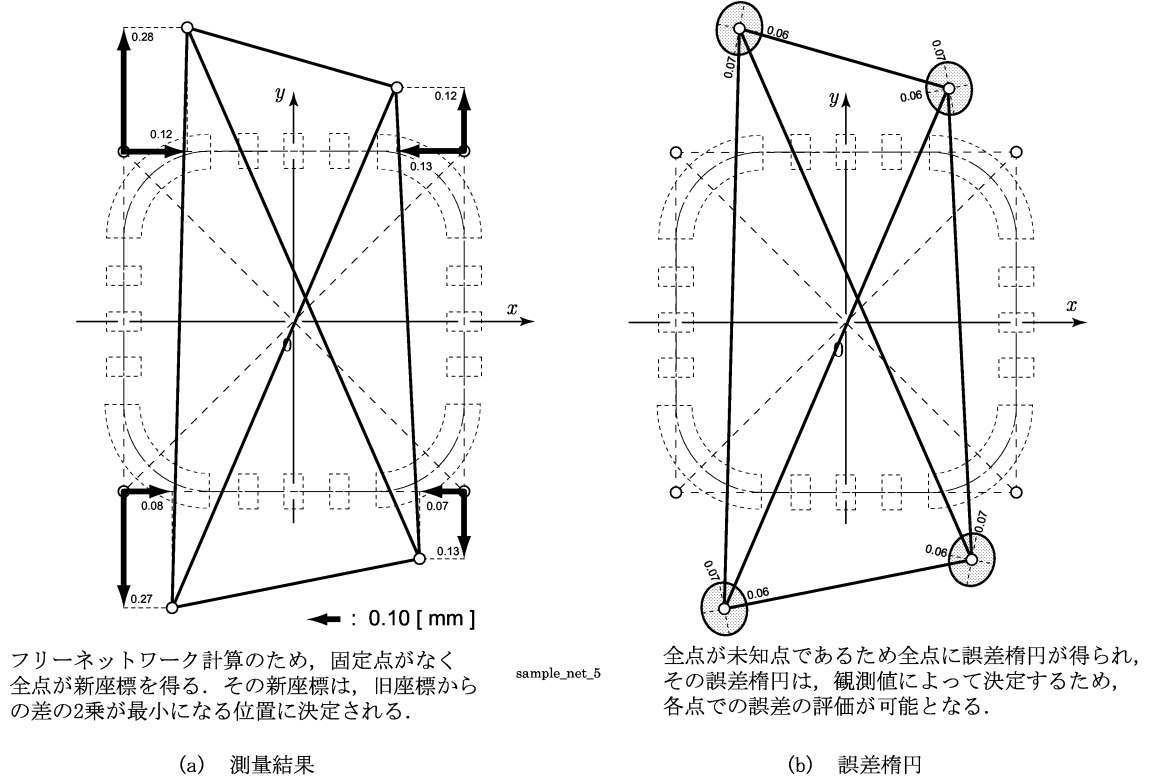


図 4.5: 測量結果と誤差楕円（フリーネットワーク計算）

また、 P_1 の誤差楕円は、

$$\lambda_{11} = \frac{(Q_{11} + Q_{22}) + \sqrt{(Q_{11} - Q_{22})^2 + 4Q_{12}^2}}{2} = 0.452 \quad (4.30)$$

$$\lambda_{12} = \frac{(Q_{11} + Q_{22}) - \sqrt{(Q_{11} - Q_{22})^2 + 4Q_{12}^2}}{2} = 0.357 \quad (4.31)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\lambda_{11} - Q_{11}}{Q_{12}} = 101 [^\circ] \quad (4.32)$$

$$a = \sigma_o \sqrt{\lambda_{11}} = 0.07 [mm] \quad : \text{誤差楕円の長軸の長さ} \quad (4.33)$$

$$b = \sigma_o \sqrt{\lambda_{12}} = 0.06 [mm] \quad : \text{誤差楕円の短軸の長さ} \quad (4.34)$$

となる。各点の誤差楕円を表 4.8 にまとめる。

ただし、Moore-Penrose の方法では、観測方程式から正規方程式の作成を必要としないので \mathbf{X} が容易に求まり、解は一意的に決定される。したがって、大型のマトリックスから一般逆行列を求める場合は Moore-Penrose によるノルム最小の最小 2 乗解を与える方法が一般的である。

表 4.7: N^+ の Q

Station ID	Q_{xx}	Q_{yy}	Q_{xy}
P_1	$Q_{11} = 0.20$	$Q_{22} = 0.20$	$Q_{12} = -0.05$
P_2	$Q_{33} = 0.20$	$Q_{44} = 0.20$	$Q_{34} = 0.05$
P_3	$Q_{55} = 0.20$	$Q_{66} = 0.20$	$Q_{56} = -0.05$
P_4	$Q_{77} = 0.20$	$Q_{88} = 0.20$	$Q_{78} = 0.05$

表 4.8: 各点の精度および誤差楕円（フリーネットワーク計算）

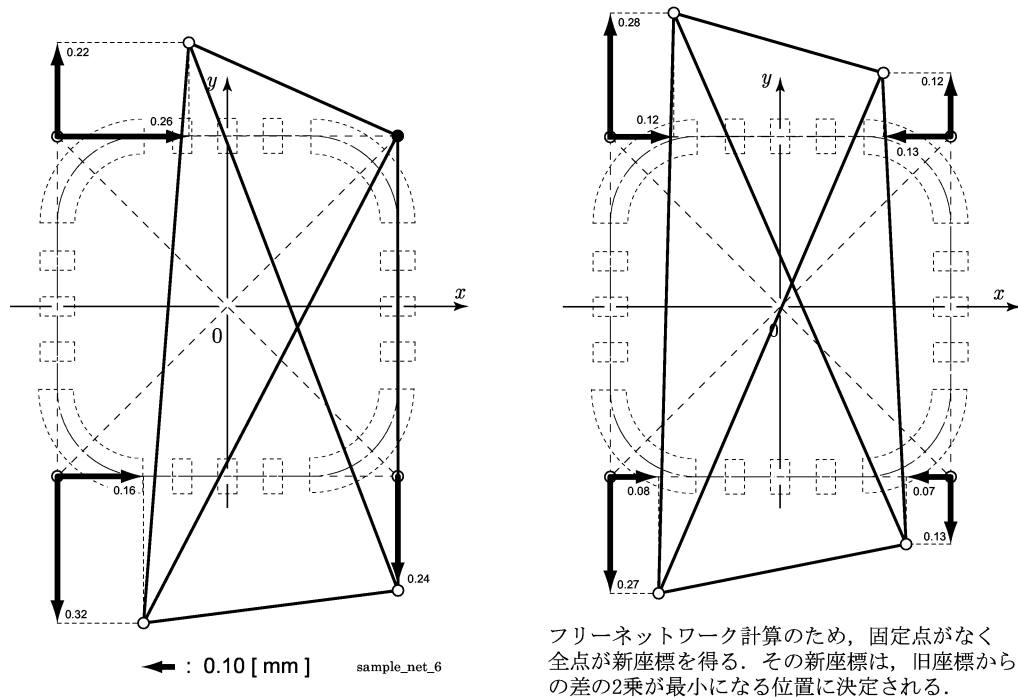
Station ID	$\sigma_x [mm]$	$\sigma_y [mm]$	長軸半径 $a [mm]$	短軸半径 $b [mm]$	傾斜角 $\theta [^\circ]$
P_1	0.02	0.02	0.07	0.06	101
P_2	0.02	0.02	0.07	0.06	79
P_3	0.02	0.02	0.07	0.06	101
P_4	0.02	0.02	0.07	0.06	79

Moore-Penrose の一般逆行列を求める方法は、198 頁に収録のように (1) 正則行列を生成する方法、(2) 対角行列を生成する方法、(3) 近似的に求める方法などがある。

4.3 固定網平均計算と自由網平均計算の比較, 検討

以上の仮想の加速器リングに関して, 最もシンプルな測量網を仮定して『固定網平均計算』と『自由網平均計算』の計算例を示した.

4.3.1 測量結果



1点1方向固定計算とフリーネットワーク計算で決定される測量網は観測値によって決定されるため, 合同な図形である.
固定計算は, 設計時のレイアウトに対してアラインメントに偏りが生じる.
フリーネットワーク計算は, 偏りを最小に押さえることが可能である.

(a) 1点1方向固定計算

(b) フリーネットワーク計算

図 4.6: 固定網平均計算と自由網平均計算の測量結果

式(4.10), (4.27) のように残差 \mathbf{V} は, 1点1方向固定計算とフリーネットワーク計算は同じであり, 図形としての測量網は観測値によって決定され, 上の図 4.6 のように測量網は合同である.

1点1方向固定計算では固定点 P_1 は変位しないので, 観測値によって決まる測量網が固定点を基準にして位置が決定する. また, 方向 $P_1 - P_2$ も固定しているため, 観測値の精度によって設計座標から大きく変位して残りの基準点座標が決定される. 加

速器は、この1次基準点を基にしてアラインメントされるため、設計時のレイアウトから変形する、あるいは設計位置に対して偏って設置される可能性がある。その結果、入射系あるいは出射系に対して整合性がとれなくなる可能性が生じる場合がある。このような事態を避けるため、得られた基準点座標間の相対的位置関係を変えないようにして、各基準点の変位が最小になるように平行移動と回転させる処理が必要となる。

一方、フリーネットワーク計算では固定点がないので、各基準点が設計座標に関し最小2乗的に釣り合う位置に決定される。その結果、この方法で決定した1次基準点を基に加速器をアラインメントした場合、設計時のレイアウトからの歪みを最小にすることができる。また、各基準点が偏って位置が決定されないため、入射系、出射系などに最適な位置に加速器を整合させることが可能となる。

したがって、後続するアラインメントの基準となる1次基準点の位置を決定するにはフリーネットワーク網平均計算によって決定する方が得策である。

4.3.2 誤差楕円

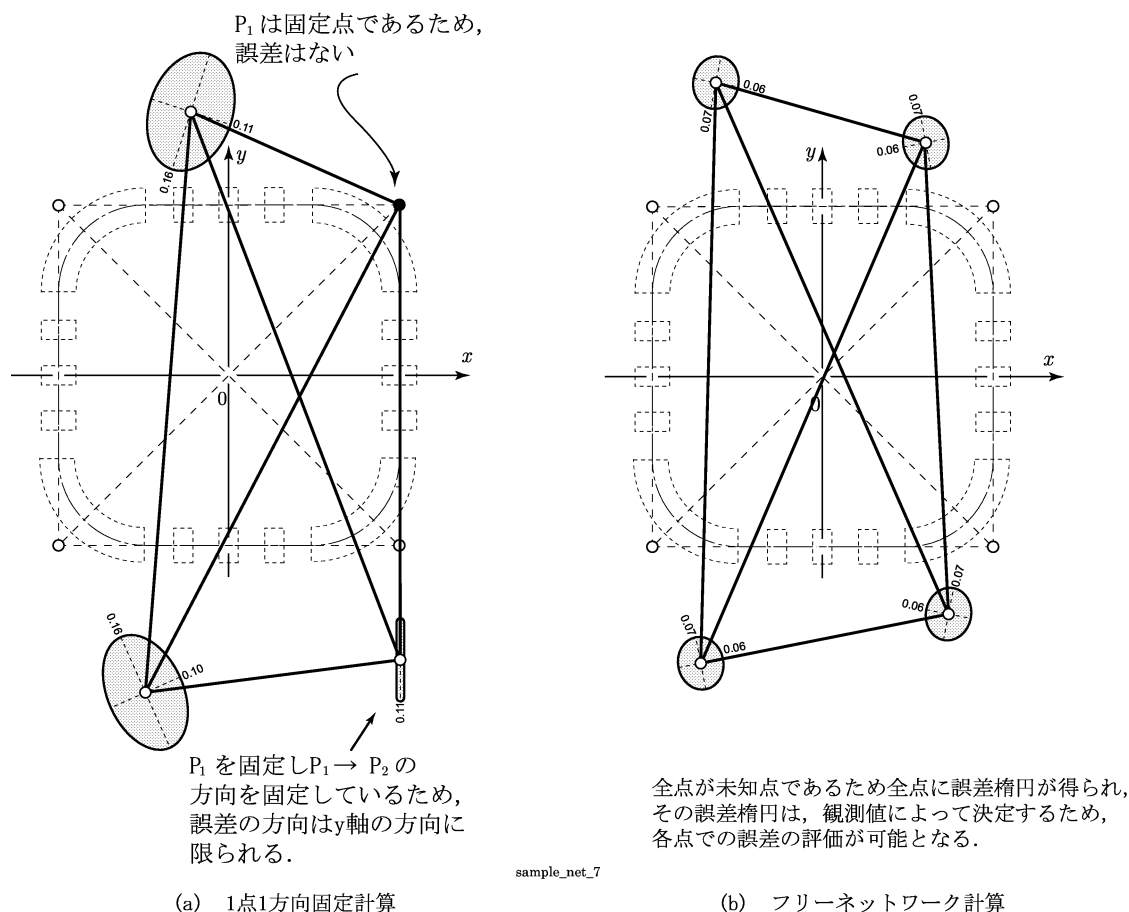


図 4.7: 固定網平均計算と自由網平均計算の誤差楕円

上の図 4.7 のように、1 点 1 方向固定計算では固定点 P_1 に誤差は発生しない。また、方向 $P_1 - P_2$ も固定しているため、誤差の方向は固定した方向にしか現れない。しかし、測量の誤差は必ず発生するので、その誤差は未知点に配分される。したがって、1 点 1 方向固定計算の誤差楕円は、観測値による誤差を必ずしも反映していない。

一方、フリーネットワーク計算の場合、誤差の大きさと方向は観測値の精度によって決定される。その結果、観測値の精度、基準点の精度を評価することが可能となる。

フリーネットワーク計算によれば、 \sqrt{Q} によって測量網を決定することができるので、後続するアラインメントの基準となる 1 次基準点などの高次の基準点の精度をあらかじめ評価することが可能である。

4.4 \sqrt{Q} による測量網の最適化例

図 4.1 の (a) の仮定した加速器リングに対して P_1, P_2, P_3, P_4 の基準点が要求精度 $m = \pm 0.2$ [mm] で設置が求められた場合、式(3.92)(55 頁)

$$\begin{aligned} m &\geq m_o \sqrt{Q} \\ \frac{m}{m_o} &\geq \sqrt{Q} \end{aligned}$$

によって測量網を決定する過程を述べる.

$m_o = \pm 0.5$ [mm] ($\div 3\sigma$) とすると,

$$\sqrt{Q} \leq \frac{\pm 0.2 \text{ [mm]}}{\pm 0.5 \text{ [mm]}} = 0.4 \quad (4.35)$$

となり, 0.4 以下となる \sqrt{Q} の測量網を組成すればよいことになる.

図 4.1 の (b) の測量網の場合 $(\mathbf{A}^t \mathbf{A})^+$ の 2 重対角要素は, 式(4.24)(67 頁)あるいは表 4.7(71 頁) から, $Q_{11} \sim Q_{88} = 0.20$ である. すなわち, $\sqrt{Q_{ii}} = 0.45$ であり, 式(4.35) をわずかに超える値である.

ここで, \sqrt{Q} が所要の値をわずかに越える程度なので, 仮定した測定精度 $m_o = \pm 0.5$ [mm] を緩和してこのままの測量網で測量を実施するか, 補点を設けて測辺を追加するか (この場合, 加速器リングの中央に補点を設けてその点から四隅の各測点の距離を測定する測辺を追加する測量網が検討の対象となる) の判断が必要となる.

計算例は m_o を緩和して, このままの測量網で測量した例である. 結果的に式(4.28) のように $m_o = \pm 0.10$ [mm] となり, 表 4.8 の精度となった例である.

第5章 測定精度 m_o の改善

第3章1節『角度と距離の測定』(26頁)で、角度測定と距離測定を測定機材の精度だけに依存した場合を考察した結果、短距離(42[m]以下)では、角度測定の方が高精度が期待できる結果となった。セオドライトなどによる角度測定の場合、測定精度は測定者の技量に依存するところが大きい。しかし、光波測距儀などによる距離測定の場合のように、測距儀が自動化されている機種ではコンスタントに高精度に距離が測定できる。したがって、光波測距儀の精度を向上させ、短距離でも角度測定を上回る精度を確保することを目的にこの研究を行った。

特に測量網との関連で、式(3.91)(54頁)の関係

$$m = m_o \sqrt{Q}$$

から、座標の精度 m を決定する図形としての測量網から決定される値 \sqrt{Q} と測定精度 m_o のうち m_o の高精度化を目的とした研究である。

この章では、 m_o に関連する、

- 精密距離測定（精密測距儀）の原理等
- 精密測距儀（MEKOMETER ME5000）の測定精度の改善

などについて述べる。

5.1 測距儀一般

光波による測距（electronic distance measurement:EDM）の原理は、長さを測るべき基線の一端においたトランスミッターから射出された電磁波が、他端におかれた反射体により反射され、もとの点にもどって受信されたとする。このとき、電磁波に何らかの目印があれば、その射出時刻と受信時刻の差すなわち伝搬時間 t （往復時間）と電磁波の伝播速度 c により、基線の長さ S が次の式によって求められる*。

$$S = \frac{ct}{2} \tag{5.1}$$

*参考文献 [9]

目印としては，電磁波の特定の位相の位置あるいは幅の狭いパルスなどが考えられる．この方法で分解能 $1 [mm]$ の測距儀を作るとすれば，往復の距離 $2 [mm]$ と光の速度 $3 \times 10^8 [m/s]$ を式 (5.1) に代入して時間を求めると，

$$t = 2 [mm] / 3 \times 10^8 [m/s] = 6.67 \times 10^{-12} [s] \quad (5.2)$$

となり， $10^{-12} \sim 10^{-13}$ 秒で時間を測定する必要がある．現在の時間の測定精度では実現可能であるが，大型で高価な装置となるので測量用としてはこの方式は使われていない．

5.1.1 光波測距儀一般

そこで，実際の光波測距儀（EDM:Electronic Distance Measuring instrument）では，伝搬時間の直接測定に替えて，位相比較法（phase comparison）が用いられている．

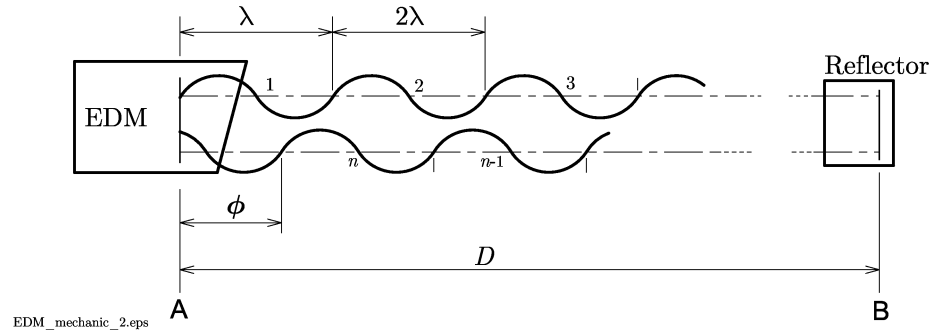


図 5.1: 測距儀の一般原理

図 5.1 において，測定点間の距離 D のあいだを波長 λ で変調された光波が，点 A から発射され，点 B で反射して，点 A にもどってきたときの光波の位相が ϕ であったとすると，次のように表せる．まず，位相 ϕ を距離に換算すると

$$\lambda : 2\pi = l : \phi \quad (5.3)$$

であるから，

$$l = \frac{\phi}{2\pi} \lambda \quad (5.4)$$

と表せる．したがって，測定点間の関係は次のように表せる．

$$\begin{aligned} 2D &= n\lambda + l \\ &= n\lambda + \frac{\phi}{2\pi} \lambda \end{aligned} \quad (5.5)$$

測定点間の距離は片道距離なので、式 (5.5) から、

$$\begin{aligned} D &= \frac{\lambda}{2}n + \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\phi}{2\pi} \\ &= \frac{\lambda}{2} \left(n + \frac{\phi}{2\pi} \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

となる。式 (5.6) で n がわかると、 ϕ を測定すれば距離が得られる。測距儀の位相分解能は一定であるから波長 λ を長くすると位相の分解能は下がる。しかし、 n は整数であるから、別の測定で求めるにしても、それほど精密な測定を必要としない。すなわち、 ϕ を $2\pi/1000$ の精度で決定する必要があったとしても、 n の決定は、 ϕ の 1000 倍の精度で決定してもよい。実際の測距儀では、基本の変調周波数からわずかにずらした周波数のビート信号変調周波数を作り出して、何種類かの波長を使い分ける。

光波の波長 λ は、搬送波 (carrier wave) に加える変調周波数を f とすると光速 c とのあいだに次の関係がある。

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (5.7)$$

したがって、式 (5.6) は次のように表せる。

$$D = \frac{c}{2f} \left(n + \frac{\phi}{2\pi} \right) \quad (5.8)$$

一般的な測距儀の変調周波数は $f = 15 [MHz]$ 程度である。式 (5.7) から、

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8 [m/s]}{15 \times 10^6 [Hz]} = 20 [m] \quad (5.9)$$

つまり、基準変調周波数による波長は $\lambda = 20 [m]$ である。変調をかけられた光波は、 \sin 波形の周期関数であり、半波長で正負に対称であるから、半波長を測定対象にすればよい。すなわち、 $\lambda/2 = 10 [m]$ である。分解能を $1/2000$ とすれば、

$$\frac{10 [m]}{2000} = 0.005 [m] = 5 [mm] \quad (5.10)$$

となる。測距儀の精度は一般的に次のように表される。

$$\pm(a + b \cdot ppm) \quad \text{or} \quad \pm(a + b \cdot 10^{-6} \times \text{Distance}) \quad (5.11)$$

式 (5.11) の a の項は、式 (5.10) で導出された $5 [mm]$ である。また、 b は、変調周波数を発生させる測距儀の内部発信器の精度であり、一般的に $1 \sim 5 \times 10^{-6} (= 1 \sim 5 ppm)$ である。したがって、変調周波数 $f = 15 [MHz]$ の測距儀の精度は、

$$\pm(5 mm + 1 \sim 5 ppm)$$

である。すなわち、測距儀の精度はその変調周波数によって決定される。

また、位相の測定の代表的な方法を、Appendix E (179 頁) に示す。

特に、Path Length Modification (Appendix E.1.2 , 181 頁) および Frequency Modification (Appendix E.1.3 , 182 頁) は、精密測距用に次の 2 つの理由で優れている。

- 位相ゼロの条件は、さまざまな位相を高精度に測定するよりも簡単でしかも正確である。
- 位相ゼロの条件は、常に同じ条件であるためサイクリック・エラーが発生しない。

5.1.2 光波測距儀の一般的な問題点

式 (5.6) で、精度を向上させる変数は、波長 λ と位相 ϕ である。したがって、波長 λ を短くするか、位相 ϕ の分解能を向上させればよい。ただし、

- 波長 λ を短くするためには、変調周波数 f を高くしなければならない。しかし、変調周波数を高くすると消費電力が増大し、電子回路の構成部分が大きくなり、可搬型は難しくなる。
- 位相 ϕ の分解能を向上させるには、測距儀から発射した光波が反射して、再び測距儀に入射して来る間にノイズが含まれる。その信号を増幅する段階でノイズも増幅し、 S/N 比を劣化させるため位相分解能の向上には限界がある。その位相分解能は $1/2000$ 程度が限界とされる。

5.2 MEKOMETER ME5000

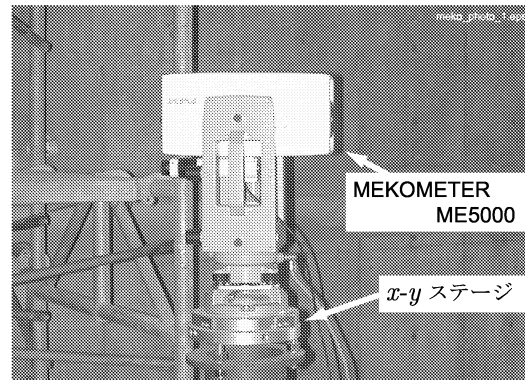


図 5.2: MEKOMETER ME5000 の外観

現在，可搬型でもっとも高精度の精密測距儀 MEKOMETER ME5000（図 5.2，図 5.3 参照）の公称精度は，

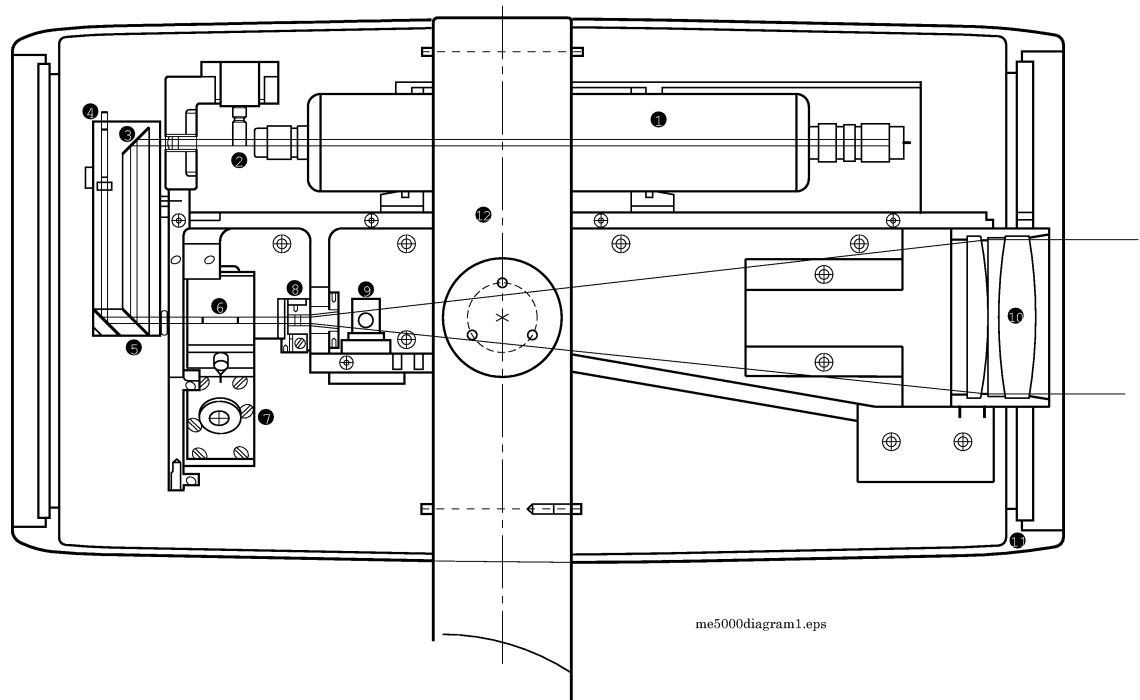
$$\pm(0.2 [mm] + 0.2 \times 10^{-6} \times \text{Distance})$$

である[†]。

本体の変調周波数を出力する端子だけでなく，外部からシンセサイザーの基準周波数（ $10 [MHz]$ ）を入力できる端子がある．この端子から，高精度の基準周波数（ 1×10^{-12} ）を入力することで，レーザ光に高精度な変調をかけることが可能である．ただし，これらの周辺装置を含めた距離測定装置全体が大がかりになり，装置の可搬性に欠ける．また，アライメントにおける 1 次基準点測定の測定距離の大半が，短距離であることから高精度の基準周波数を入力する効果よりも，測定時の変調周波数を把握した方が効果的である．

ここでは，MEKOMETER ME5000（以下「MEKOMETER」とする.）の距離測定原理から，これをさらに高精度化するために本研究で得られた周波数補正式を導き，そのシステム化について述べる．

[†]参考文献 [7]



- | | |
|------------------------------------|------------------------|
| 1. He-Ne Laser | 7. Modulator |
| 2. Intensity Filter (Attenuator) | 8. $\lambda/4$ Plate |
| 3. Deflecting Mirror | 9. Aperture with Motor |
| 4. Light Detector | 10. Objective |
| 5. Polarization - Beam Splitter | 11. Housing |
| 6. Electro Optical Crystal | 12. Main Support |

図 5.3: MEKOMETER ME5000 の構造図

5.2.1 MEKOMETER 測定の問題点と解決法

5.2.2 MEKOMETER の測定原理

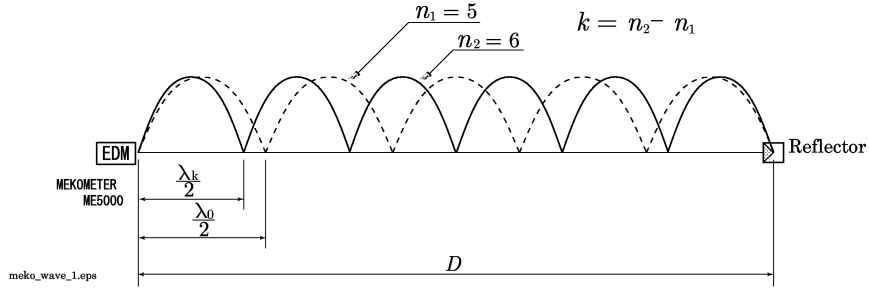


図 5.4: 位相差から求める，隣り合う位相ゼロの位置の例

図 5.4 から，

$$D_s = \frac{\lambda_1}{2} n_1 = \frac{\lambda_2}{2} n_2 \quad (5.12)$$

$$n_2 = n_1 + 1 \quad (5.13)$$

である．ここで， n_1 を求めるために，式 (5.12)，式 (5.13) と，

$$\lambda_1 = \frac{c}{f_1} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{c}{f_2} \quad (5.14)$$

から，

$$\begin{aligned} \lambda_1 n_1 &= \lambda_2 (n_1 + 1) \\ n_1 &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ &= \frac{f_1}{f_2 - f_1} \end{aligned} \quad (5.15)$$

となる．したがって，式 (5.12) と式 (5.15) から，求める距離 D_s は，

$$D_s = \frac{\lambda_1}{2} \cdot \left(\frac{f_1}{f_2 - f_1} \right) \quad (5.16)$$

となる．ここに，

c : 光速

λ_1 : 最初の位相ゼロのときの波長

λ_2 : 隣の位相ゼロのときの波長

f_1 : 最初の位相ゼロのときの周波数

f_2 : 隣の位相ゼロのときの周波数

である。式 (5.16) においても、式 (5.6) と同じく、測定精度の向上に必要なことは、

- 波長 λ を短くする（変調周波数 f を高くする）。
- 位相 ϕ の分解能を高くする。

である。

MEKOMETER ME5000 は、約 500 [MHz] の変調周波数（波長 0.6 [m]）で、さらに独特の位相の測定法でその分解能を高くしている（Appendix E.1.3, 182 頁参照）。詳しい測定原理を Appendix E.2（183 頁）に示す。

また、観測台にセットする誤差は、バヨネットクランプで固定する Kern 社の独特の構造で、セッティング誤差を ± 0.03 [mm] 以内に納めており、また水平を調整する機構も器械高を一定にして水平を調整するための 2 軸構造を採用するなどの精密距離測定のための工夫が随所に見られる機材である。

5.2.3 MEKOMETER の変調周波数の問題と解決法

光波測距儀の測定原理式 (5.8)

$$D = \frac{c}{2f_0} \left(n + \frac{\phi}{2\pi} \right)$$

において、周波数 f で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial f} &= -\frac{1}{f_0^2} \cdot \frac{c}{2} \left(n + \frac{\phi}{2\pi} \right) \\ &= -\frac{1}{f_0} \left\{ \frac{c}{2f_0} \left(n + \frac{\phi}{2\pi} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} dD &= -\frac{df}{f_0} D \\ &= \frac{f_0 - f}{f_0} D \end{aligned} \quad (5.18)$$

が得られる。ただし、

f : 実際の周波数

f_0 : 標準周波数

df : 周波数の差 ($f_0 - f$)

dD : 周波数の差 df によって生じる距離の誤差

いま、標準周波数 $f_0 = 500 [MHz]$ の測距儀で、距離を 1×10^{-7} の精度で測定しようとするときに必要な周波数の精度 df を求めると、式 (5.18) から、

$$\begin{aligned} 10^{-7} &= \frac{dD}{D} \\ &= \frac{df}{f_0} \\ &= \frac{df}{500 \times 10^6} \end{aligned} \quad (5.19)$$

したがって、

$$\begin{aligned} df &= 10^{-7} \times 500 \times 10^6 [Hz] \\ &= 50 [Hz] \end{aligned} \quad (5.20)$$

となり、周波数の精度は $f_0 = 500 [MHz] \pm 50 [Hz]$ の精度でなければならない。

ところが、MEKOMETER の内部発信器の精度は、 3×10^{-7} 程度であり、 $f_0 = 500 [MHz] \pm 150 [Hz]$ であり、 10^{-7} の精度で距離測定は難しい。そこで、測距儀本体の発信器よりも精度のよい周波数カウンター（周波数測定精度 10^{-9} ）で測距儀本体の測距時の変調周波数をリアルタイムに測定して測定距離を補正するシステムを開発した。

5.2.4 MEKOMETER の周波数補正

MEKOMETER の距離測定の原理式は，式 (5.16) から，

$$\begin{aligned} D_s &= \frac{\lambda_1}{2} \cdot \left(\frac{f_1}{f_2 - f_1} \right) \\ &= \frac{\lambda_1}{2} n \end{aligned}$$

である．

いま，MEKOMETER の本体の発信器の周波数 f_g で，求められた距離 D_g とすると，式 (5.16) から，

$$D_g = \frac{c}{2f_g} n_g \quad (5.21)$$

また，距離測定と同時に周波数カウンターで測定した周波数 f_0 による，真の距離を D_0 とすると，式 (5.16) から，

$$D_0 = \frac{c}{2f_0} n_0 \quad (5.22)$$

式 (5.21)，式 (5.22) から，

$$n_g = \frac{2f_g}{c} D_g \quad (5.23)$$

$$n_0 = \frac{2f_0}{c} D_0 \quad (5.24)$$

ここで，波長の整数倍 n は等しいので，

$$n_0 = n_g \quad (5.25)$$

式 (5.25) の関係と，式 (5.23)，式 (5.24) から，

$$\begin{aligned} \frac{2f_0}{c} D_0 &= \frac{2f_g}{c} D_g \\ D_0 &= \frac{f_g}{f_0} D_g \end{aligned} \quad (5.26)$$

の関係が得られる．例として，MEKOMETER の本体の周波数が真の周波数より高い場合，式 (5.26) から距離は実際よりも短く表示されるので，長くなるようにプラスに補正する．

5.3 MEKOMETER 測定システムの改良

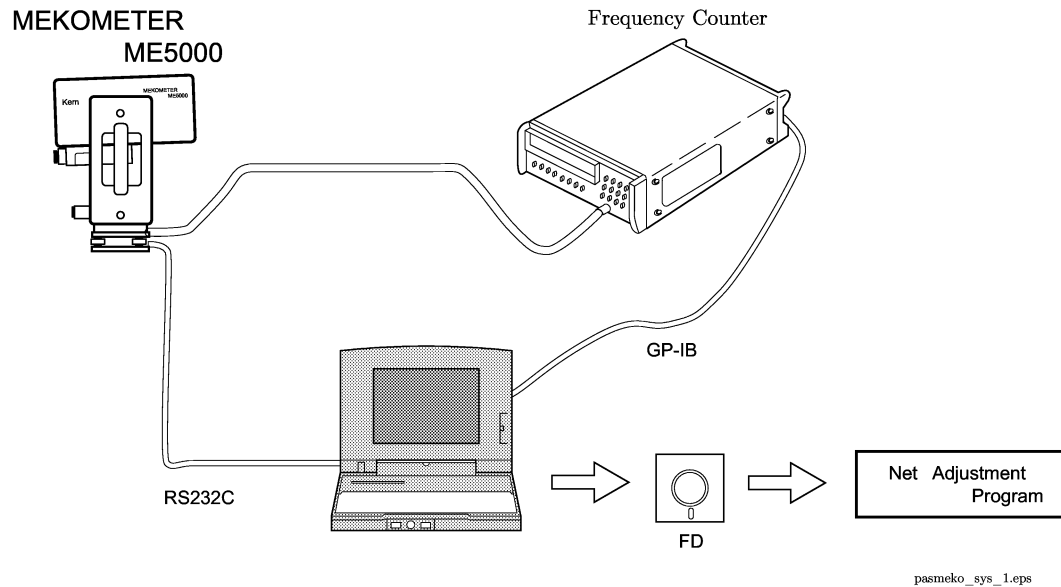


図 5.5: MEKOMETER ME5000 測定システムの構成 その 1

MEKOMETER は、独自の通信プロトコル (ASB) によって外部からコントロールできる。そこで、周波数測定を距離測定と同期させるため、コンピュータにより距離測定をコントロールし、さらに測定を自動化するシステムを開発し、MEKOMETER の距離測定精度の向上を実現した (図 5.5, 図 5.6 参照)。

システムのフローチャートを図 5.7 に示す。

まず、MEKOMETER と ASB (通信プロトコル: RS232C と共通する部分が多い) によってオンラインになっているコンピュータに測定する距離の概算距離を入力する (1)。このとき入力する概算距離の精度は、1 波長に相当する程度でよい。すなわち、 $\lambda = 0.3 [m]$ 程度以内である。

コンピュータでは、概算距離に応じた変調周波数 f_1 を計算し、MEKOMETER に転送し、距離測定開始のコマンドを送る (2)。

MEKOMETER は、本体の基準発振器の基準周波数 $10 [MHz]$ からシンセサイザーによって、 f_1 を組み立て、レーザ光に変調をかけて目標の反射プリズムに発射する。反射してきたレーザ光の位相がゼロでなければ、ロックインアンプによって位相ゼロに収束するように f_1 を修正する。これを繰り返すことによって位相ゼロの f_1 を決定し、この位相ゼロの変調波の数 n_1 を決定する (3)。 f_1 を決定するアルゴリズムは、MEKOMETER の本体のソフトに依存している。MEKOMETER 本体の詳しい測定原理を、Appendix E.2 (183 頁) に示す。

MEKOMETER に内蔵されたシンセサイザーで組み立てられた変調周波数は、その

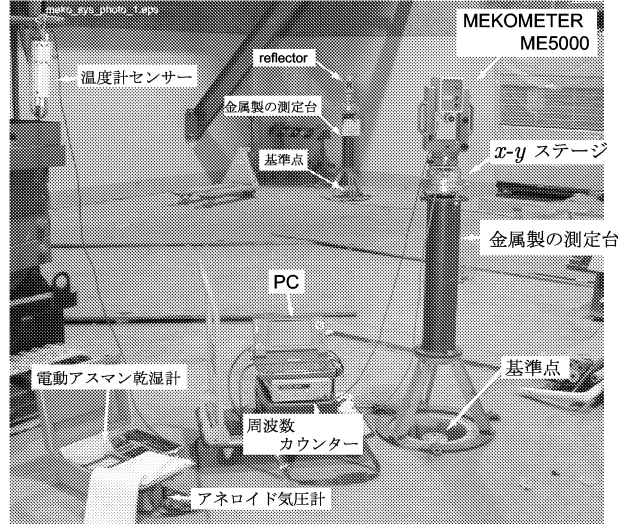


図 5.6: MEKOMETER ME5000 測定システムの構成 その2

精度が 3×10^{-7} 程度である．さらに高精度にするために， 1×10^{-9} の周波数カウンターで外部から MEKOMETER の変調周波数を測定する．コンピュータは位相ゼロのときの変調周波数 f_1' を測定するように，GP-IB で周波数カウンターにコマンドを転送する (4) ．

この測定をさらに繰り返し， n_2 ， f_2' を求める ((5)，(6)，(7)) ．

コンピュータは，測定結果の n_1 ， n_2 ， f_1 ， f_2 から式 (5.16) (83 頁)，

$$D_s = \frac{\lambda_1}{2} \cdot \left(\frac{f_1}{f_2 - f_1} \right)$$

によって，また，正式には Appendix E.2，式 (E.9) ～ (E.12) (185 頁) によって測定距離を計算する (8) ．

計算された測定距離は，外部の高精度の周波数カウンターの測定結果 ((4)，(7)) から，式 (5.26) (86 頁)，

$$D_0 = \frac{f_g}{f_0} D_g$$

によって周波数補正する (9) ．すなわち，距離を測定した瞬間の変調周波数を把握し測定距離に周波数補正する．

一方，距離測定と同時に温度（乾球温度，湿球温度），気圧の気象測定をおこなっている (10) ．これらの3種の測定結果をコンピュータに入力する．気象は瞬時に著しい変化することはないので，周波数測定などのように厳格な同時性は必要ない．コンピュータは，乾球温度と湿球温度から水蒸気圧 e を計算する (11) ．さらに，次式(5.27)

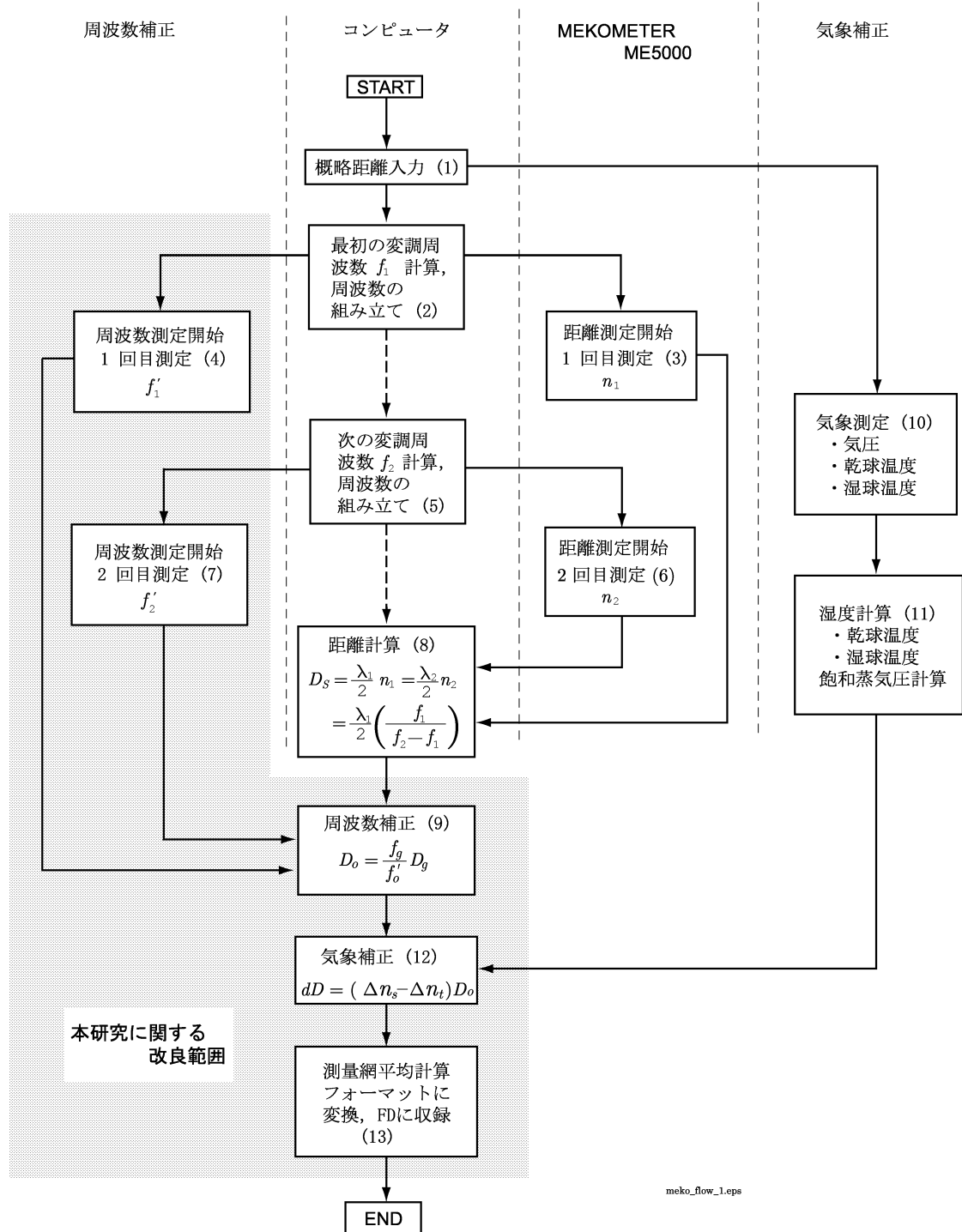


図 5.7: MEKOMETER ME5000 測定システムのフローチャート

によって気象補正する (12).

$$D = D_0 + D_0 \left(284.605 - \frac{107.91P - 15.02e}{273.15 + t} \right) \times 10^{-6} \quad (5.27)$$

測定距離に各補正を加え最終的に決定した距離を，測量網平均計算ソフトの入力フォーマットに変換して，FD に収録する[‡](13).

[‡]参考文献 [27]

5.4 MEKOMETER 測定システムの効果

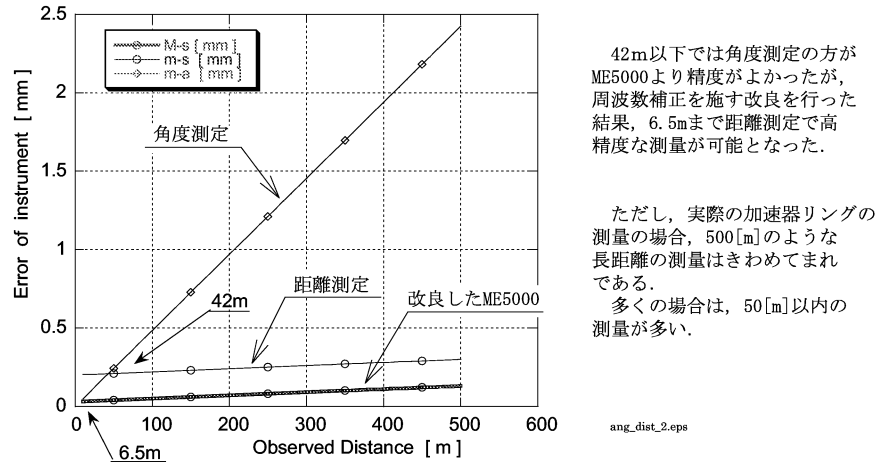


図 5.8: MEKOMETER ME5000 測定システムの効果

第3章1節『角度と距離の測定』において角度測定と距離測定の特徴を表す図3.1(26頁参照)に見られるように42[m]以下の短距離では必ずしも距離測定が精度的に有利ではなかった。

MEKOMETERの周波数その他の補正を施すシステムの結果、その分解能を $\pm 0.03[\text{mm}]$ まで向上させることができた。したがって、図5.8に見られるように6.5[m]の短距離まで距離測定の方が精度的に優れているという結果となる。

その結果、測量網を最小2乗法で解く場合に、観測方程式(3.21)(36頁参照)

$$V = AX - L$$

の係数行列 A を距離測定の測辺だけで構成することになり、観測方程式を簡素にすることができる。

また、何よりも測量網との関連で、式(3.91)の関係

$$m = m_o \sqrt{Q}$$

における、測定精度 m_o の高精度化の目的を達成した。

第6章 測量とアラインメントの 実施例による検証

第3章で、測量における座標の精度 m は、図形としての測量網から決定される値 \sqrt{Q} と測定精度 m_o によって、式(3.91) (54 頁) の関係

$$m = m_o \sqrt{Q}$$

によって得られる。この結果から、座標の精度 m を向上させるため（小さくする）には、 \sqrt{Q} と m_o を小さくすることである (55 頁)。

一方、第5章によって測定精度 m_o を小さく、すなわち距離測定を高精度にするシステムを開発した。

この章では、実際の例として「タイ王国王立加速器研究所」の放射光装置である『SPS』と「独立行政法人放射線医学総合研究所」の医用重イオン加速装置『HIMAC』において、測量網による \sqrt{Q} の変化と座標の精度の対応の具体的な事例をあげる。

6.1 Siam Photon Project のストレージリングの場合

SPS(Siam Photon Source) のストレージリングは、周長 81.3[m] であり、その内側は十分な見通しがあり、測定可能な測辺をすべて距離測定している。すなわち、測量網のシミュレーションで測辺の組み合わせを変えて \sqrt{Q} を計算した結果を実測値で評価するのに都合がよい。

6.1.1 Siam Photon Project の概要

Siam Photon Project は、タイ王国のナコンラチャシーマ市にある王立加速器研究所 NSRC(National Synchrotron Research Center) の放射光施設である。同研究所の放射光装置 (SPS) は日本の SORTEC 社の放射光装置を拡張して NSRC に再設されたものである*。

*参考文献 [29]

このSORTEC社のモデルは、20年以上を経過した装置であり、基礎研究、応用研究のために現在の標準的な放射光施設のレベルに引き上げることが必要であった。当初のSORTECの目的はリソグラフィーのために特化していたので、科学的な基礎研究の用途に供するには輝度が充分ではなかった。そこで、充分な輝度を得るために、SORTECのモデルに4箇所の直線部を挿入しウィグラー、アンジュレータなどの装置を付加した。また、加速された電子がストレージリングの内側から入射されるように、長いHEBT系を設置している（図6.1参照）。

本研究所の装置全体は2001年6月に完成し、ストレージリングを2000年4月に測量し、2001年1月にアラインメントした。

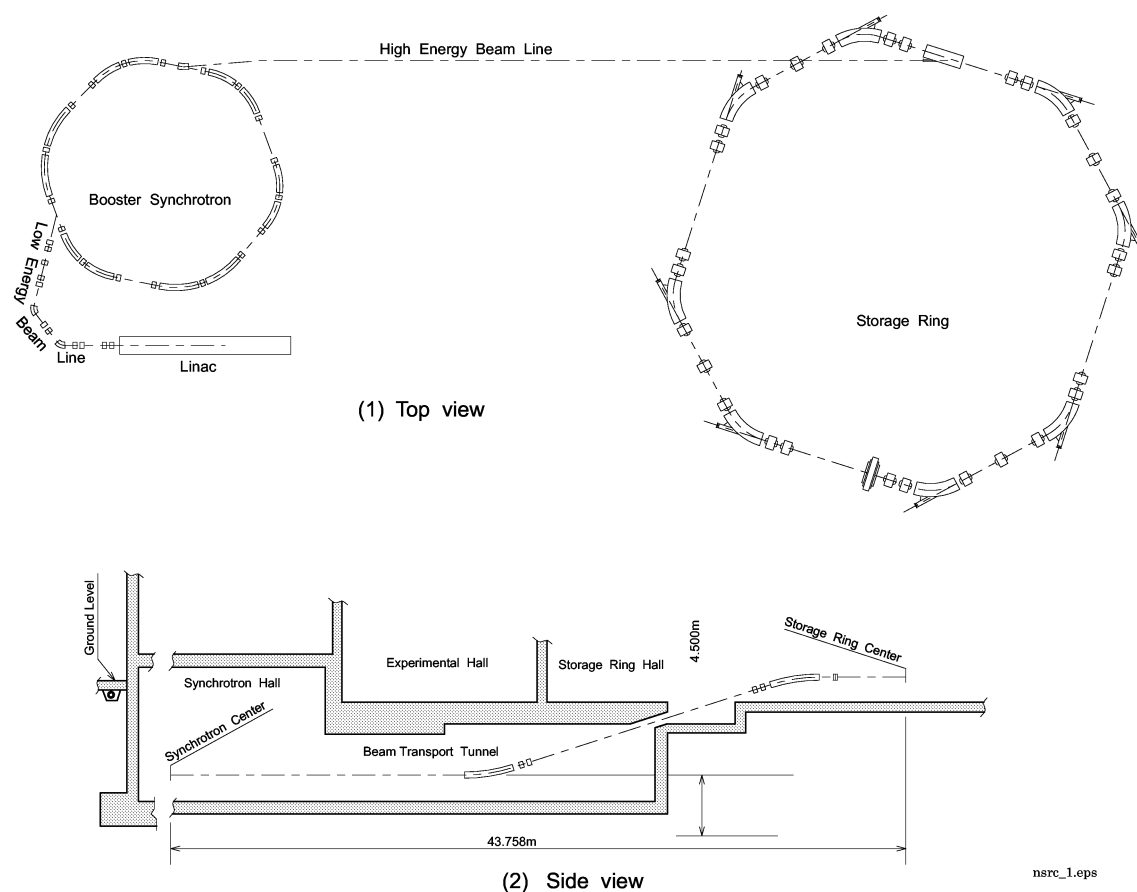


図 6.1: NSRC 装置全景

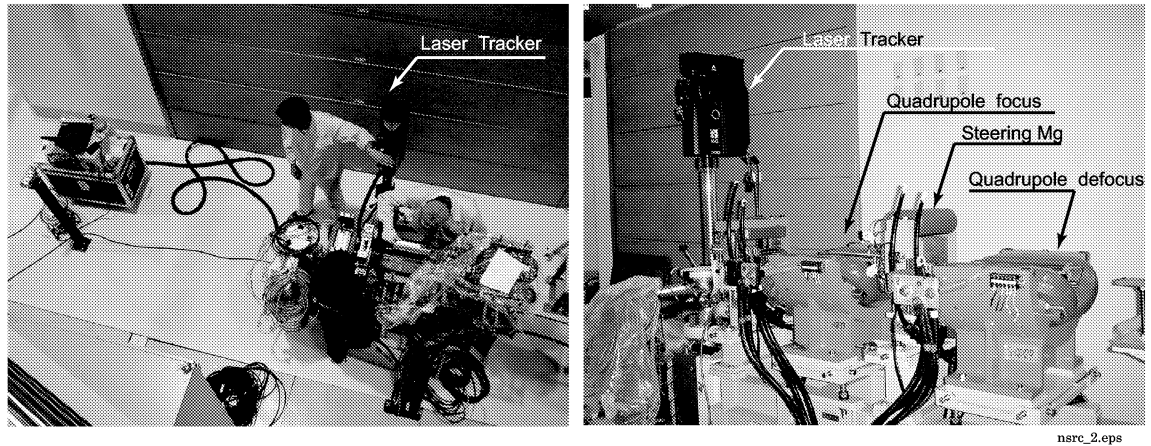


図 6.2: アライメント状況

6.1.2 ストレージリングの測量とアライメントの概要

上述のように、SPS のリングは周長 81.3[m] (表 6.1:96 参照) で 1.0[GeV] のストレージリングである。偏向電磁石、4 極電磁石、ステアリング電磁石、セプタム電磁石などの機器は、主に SMX 社のレーザトラッカーによって 3 次元座標によってアライメントした (図 6.2 参照)。レーザトラッカーは、半径 35 [m] 以内で公称精度 20 [μ m] の高精度で 3 次元座標を測定することができる。しかし、レーザトラッカーはトラッカーヘッドの鉛直軸、水平軸、光軸の 3 軸の交点を原点とするデカルト座標系による相対的座標系しか得られない。したがって、ストレージリング全体に渡る絶対座標系を取り入れるために座標の参照用に 1 次基準点を設置した。

ストレージリングの半径が約 27 [m] 程度であり、レーザトラッカーの測定範囲が 35 [m] であるから、レーザトラッカーでも 1 次基準点の測量が可能である。しかし、レーザトラッカーは測点までの距離とその挟角を測定し、3 次元の余弦定理で測点間の距離を計算するため、測点間の距離を直接測定しているわけではない。その結果、トラッカーヘッドの方向によって誤差に方向性が現れることはトラバー測量と同様である。また、その測定可能範囲は 35 [m] であるが、性能が最も発揮されるのは測定可能範囲の半分であると考えられる。したがって、レーザトラッカーで 1 次基準点を測量せず、MEKOMETER ME5000 による測定を行った。

表 6.1: Parameter of the storage ring

Electron energy	1.0 [GeV]
Circumference	81.4 [m]
Magnet lattice	Double blend achromate
Super periodicity	4
Long straight section	7 [m] \times 4
Betatron wave number , ν_x/ν_y	4.71 / 2.78
Monumentum compaction factor	0.0241
Natural emittance	72 [nm.rad]
Natural chromaticities	-7.96 / - 6.45
RF voltage, V_{RF}	120 [kV]
RF frequency, f_{RF}	118 [Mhz]
Harmonic number , h	32
Energy spread	5.02×10^{-4}
Energy loss per turn	31.8 [keV]
Synchrotron oscillation frequency, f_s	13.5 [kHz]
Critical energy of SR	798 [eV]
Bunch length	135 [ps]
Beam sizes	0.94 / 0.15 [mm]
Damping times, τ_x / τ_y / τ_s	18.9 / 17.0 / 8.1 [ms]

6.1.3 ストレージリングの \sqrt{Q} による測量網のシミュレーションと実測結果

上述のように，SPS のストレージリングホールはアライメント時には全体を一望でき視通障害となるものがない状態であり，理想的な測量網を自由に組むことができる状況であった．ここでは，距離測定可能な測辺はすべて測定しているので，シミュレーションと実測結果の比較を試みる．

6.1.3.1 ストレージリングの特徴にともなう測量網の特徴

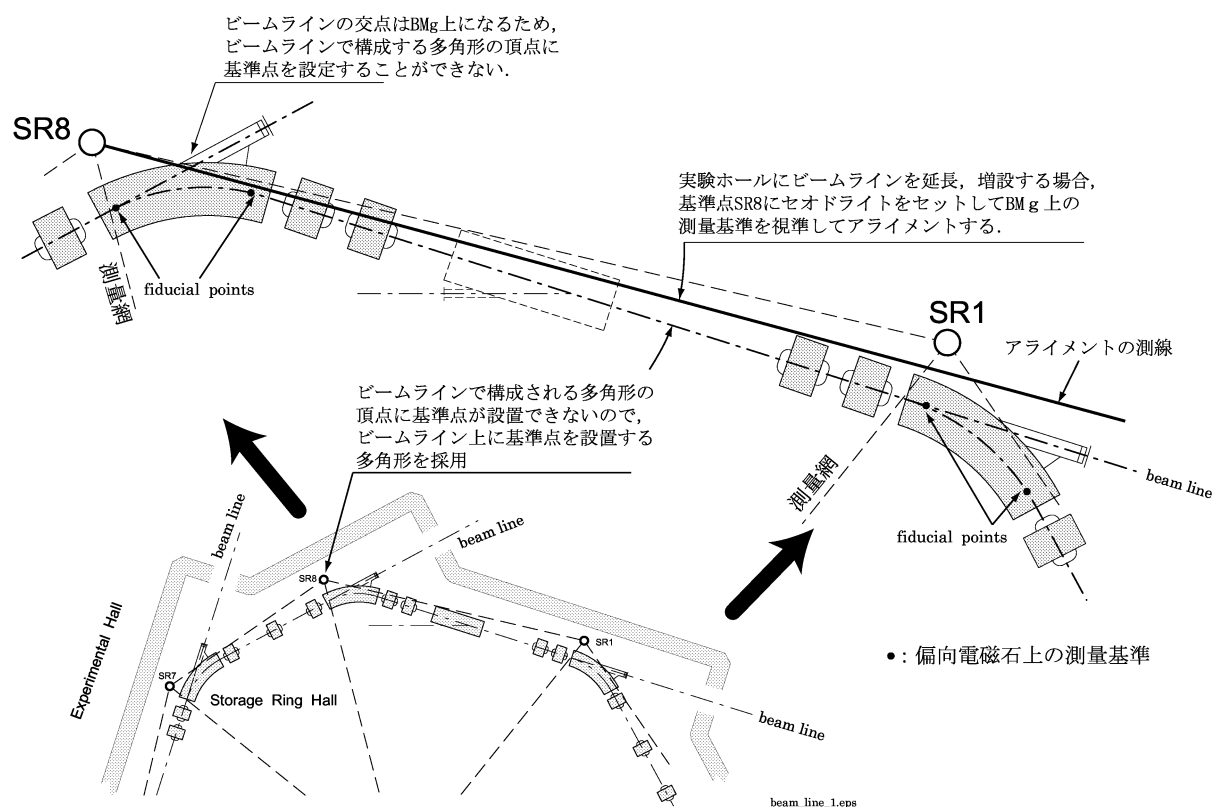


図 6.3: ビームラインから外れた多角形で構成される測量網

SPS のストレージリングは、SORTEC 社のものに直線部を設けて改良したものであり、リングを代表する多角形は回転対称であるが、正多角形ではない。また、この多角形の頂点は偏向電磁石の上になるため、頂点に測定機材をセットすることができない。

一方、実験ホールに向かうビームラインのアラインメントはセオドライトで視準線を設定して、視準線に機器を誘導する方式を採用するため、ビームライン上に測点が必要となった。したがって、セオドライトをセットする測点を1次基準点として、偏向電磁石上の測量基準 (fiducial point) によって視準線を設定して実験ホールに向かうビームラインをアラインメントすることとした (図 6.3 参照)。その結果、多角形の頂点がビームラインの延長上になるようにわずかに伸張、回転させた測量網を検討、評価の対象とした。

6.1.3.2 \sqrt{Q} による測量網のシミュレーション

(1) CASE 1 (図 6.4:101 参照)

八角形の各頂点と中心を結ぶ最もシンプルな測量網である． $\sqrt{Q_x}, \sqrt{Q_y}$ は基準点の位置によって（方向角によって）差が生じる． $\sqrt{Q_x}, \sqrt{Q_y}$ を合成した \sqrt{Q} は 0.8 となった．

(2) CASE 2 (図 6.5:102 参照)

CASE 1 の測量網に対角の頂点を結ぶ測辺を加えた測量網である．CASE 1 の Q と比較すると， $\sqrt{Q_x}$ と $\sqrt{Q_y}$ の差が小さくなり，改善されている．また，それらを合成した \sqrt{Q} は 0.7 となり，CASE 1 より改善されている．

(3) CASE 3 (図 6.6:103 参照)

CASE 1 の測量網に各頂点から 1 点おきに測辺を設定した． $\sqrt{Q_x}, \sqrt{Q_y}$ は CASE 1 と同じ傾向であるが，値は改善されている．それらを合成した \sqrt{Q} は 0.6 となり，改善されている．

(4) CASE 4 (図 6.7:104 参照)

CASE 2 の測量網に各頂点から 1 点おきに測辺を設定した．あるいは，CASE 3 の測量網に対角の各頂点を結ぶ測辺を加えた測量網である． $\sqrt{Q_x}, \sqrt{Q_y}$ は CASE 2 と同じ傾向であるが，値は改善されている．それらを合成した \sqrt{Q} は 0.5 となり，改善されている．

(5) CASE 5 (図 6.8:105 参照)

CASE 4 の測量網に各頂点から 2 点おきの測辺を設定した．また，測辺で結合可能な測点をすべて結んだ測量網である． $\sqrt{Q_x}, \sqrt{Q_y}$ の差は小さくなり，さらに値が改善されている．それらを合成した \sqrt{Q} は 0.4 となり，CASE 1 に比較すると大幅に改善されている．

(6) CASE 6 (図 6.9:106 参照)

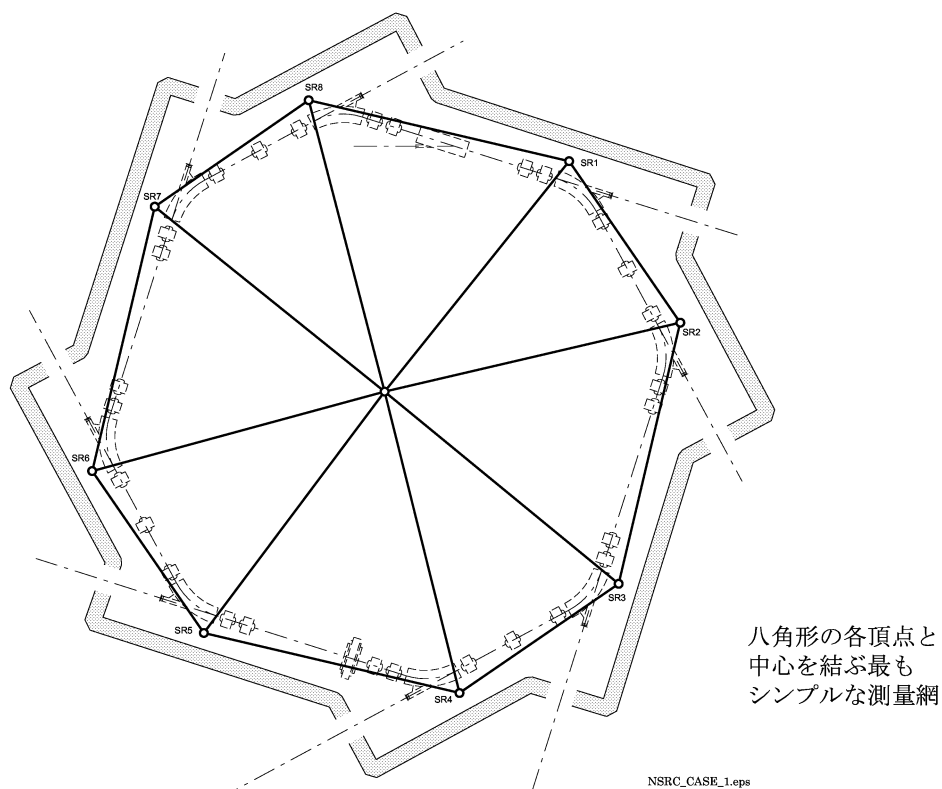
CASE 4 の測量網から対角の頂点を結ぶ測辺と，中心から各頂点までの測辺を省略した測量網である．大型のシンクロトロンなどは，狭いトンネル内に設置されることが多く，対角の各頂点を結ぶ測辺，あるいは中心から各頂点を結ぶ測辺で測量網を組

成することは難しい。したがって、このようなケースが大型のシンクロトロンの場合に相当する。 $\sqrt{Q_x}, \sqrt{Q_y}$ に大きな差が生じ、基準点の位置（方向角）によって精度に差あることが予想できる。それらを合成した \sqrt{Q} は 1.1 程度であり、CASE 1 に比べ劣化している。

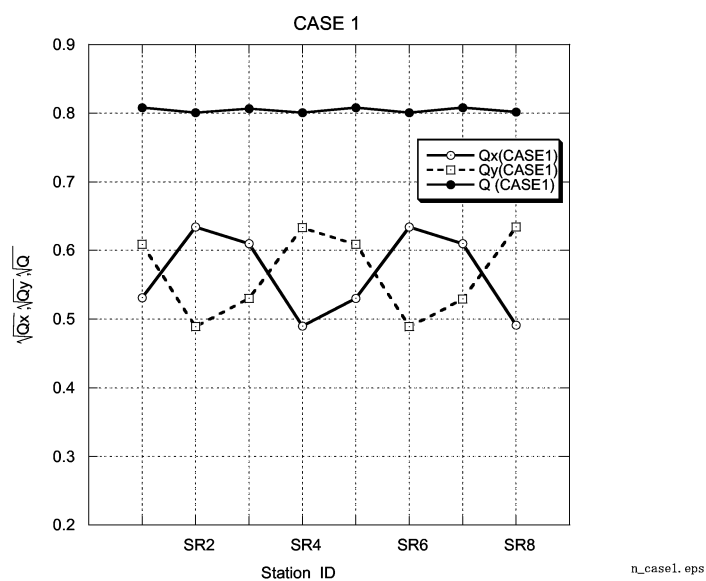
(7) CASE 7 (図 6.10:107 ページ参照)

CASE 5 の測量網から対角の頂点を結ぶ測辺と、中心から各頂点までの測辺を省略し、2 点おきに測定する測辺で結んだ測量網。あるいは、CASE 6 の測量網に頂点 2 点おきに測辺で結んだ測量網。シミュレーション結果は、CASE4 の場合とほぼ同じとなった。

一見、値が劣化しているように思われるが、測量網が小さいため、対角の頂点間、中心から頂点までの測辺を省略しても、2 点おきの測辺が対角の頂点を結ぶ測辺と近いいため、対角を結ぶ測辺を省略した効果が表れないためと考えられる。

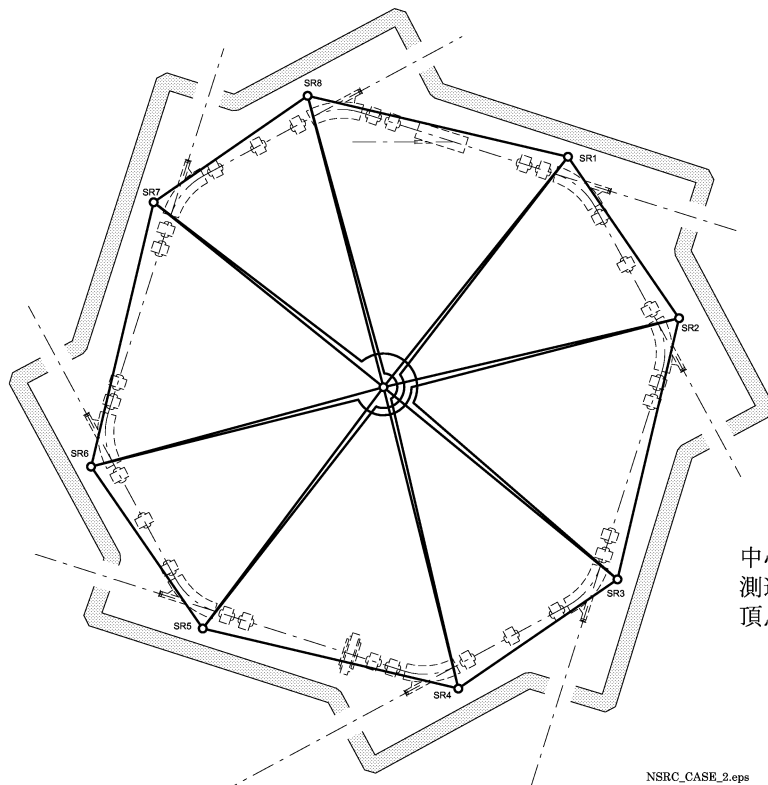


(a) CASE 1の測量網

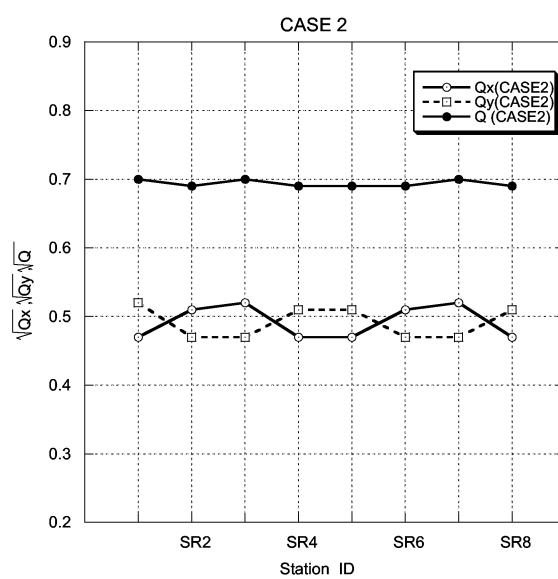


(b) CASE 1の測量網の各点の \sqrt{Q}

図 6.4: 測量網のシミュレーション CASE 1



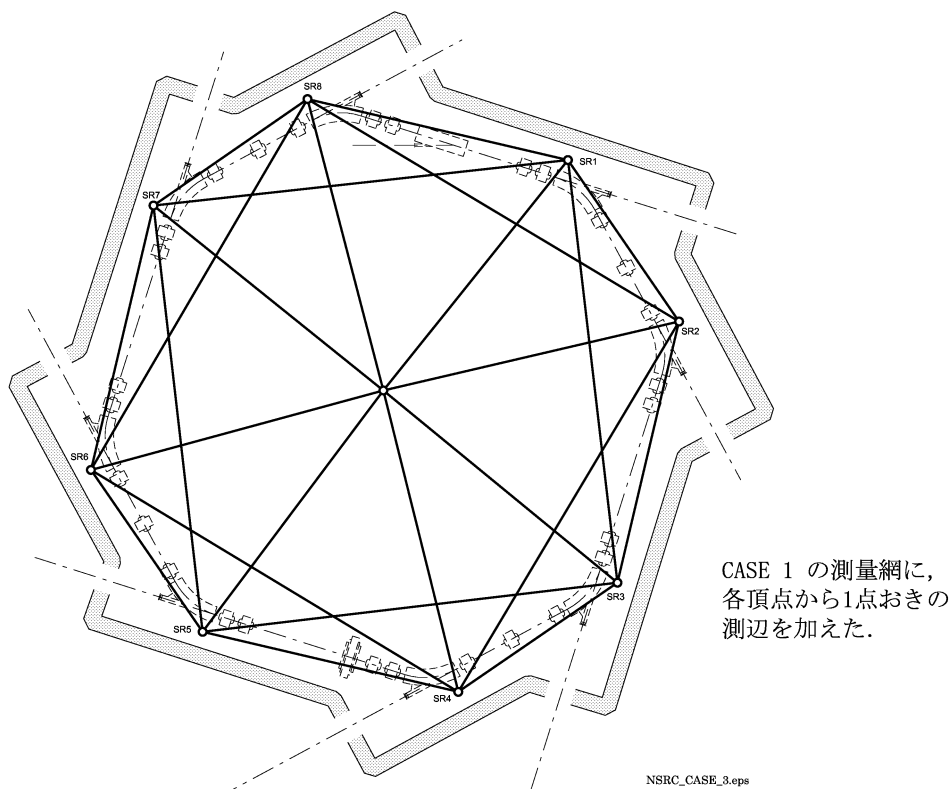
(a) CASE 2 の測量網



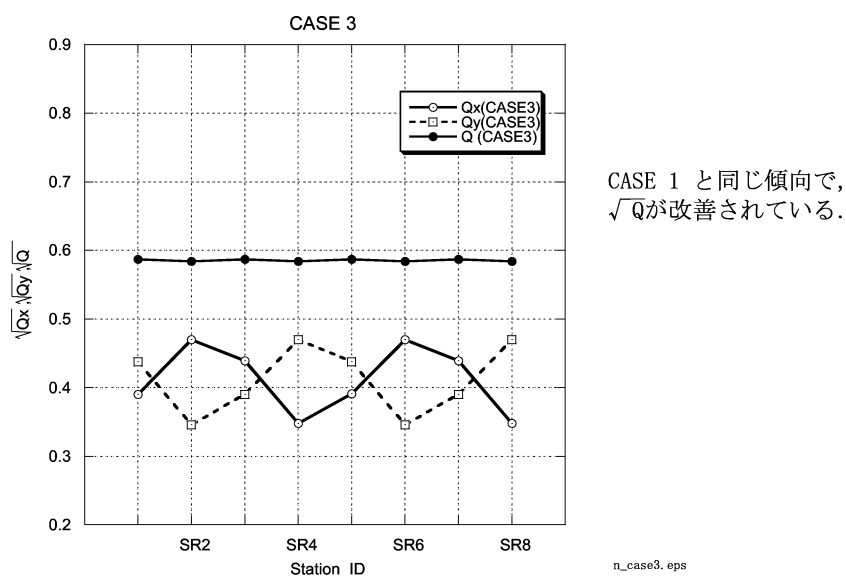
$\sqrt{Q_x}, \sqrt{Q_y}$ の差が小さくなり、かつ、 \sqrt{Q} が改善された。

(b) CASE 2 の測量網の各点の \sqrt{Q}

図 6.5: 測量網のシミュレーション CASE 2

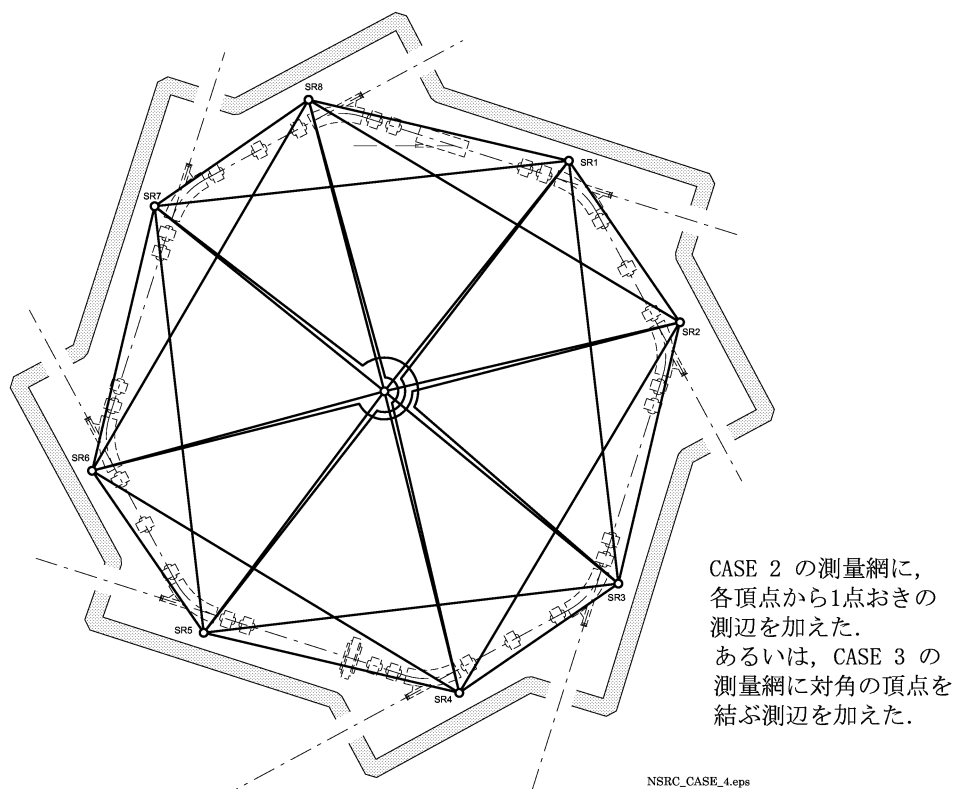


(a) CASE 3 の測量網

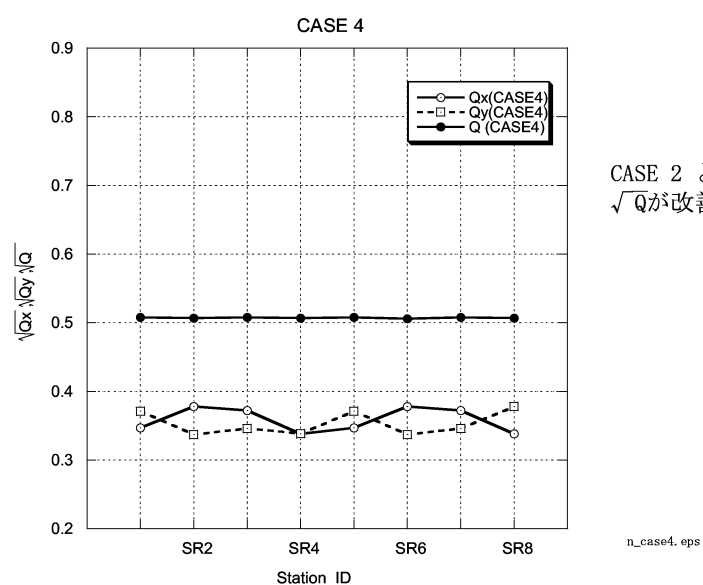


(b) CASE 3 の測量網の各点の \sqrt{Q}

図 6.6: 測量網のシミュレーション CASE 3



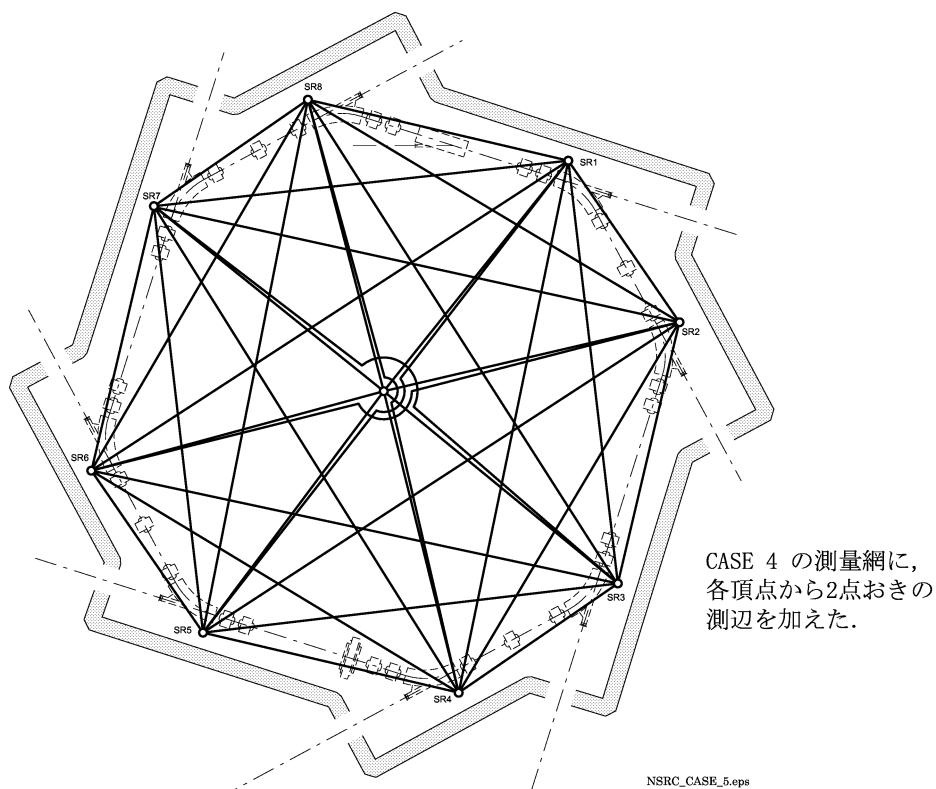
(a) CASE 4 の測量網



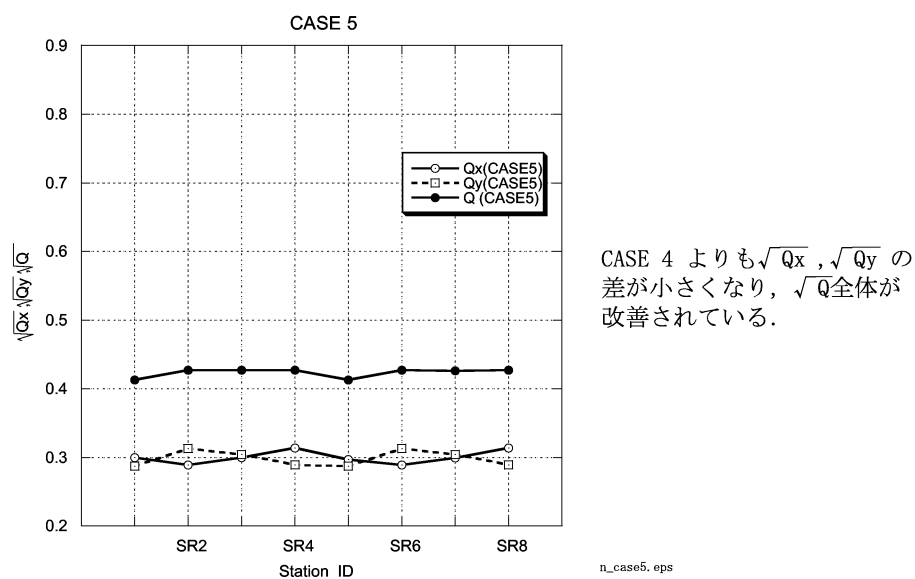
CASE 2 と同じ傾向で、
 \sqrt{Q} が改善されている。

(b) CASE 4 の測量網の各点の \sqrt{Q}

図 6.7: 測量網のシミュレーション CASE 4

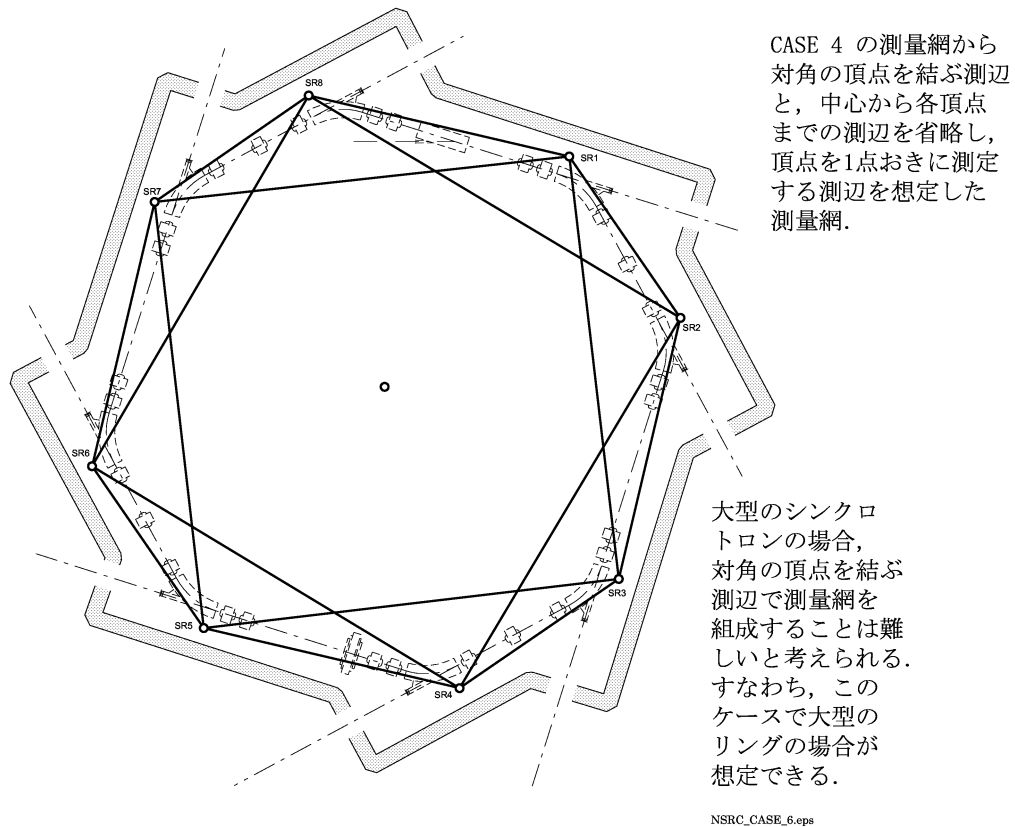


(a) CASE 5 の測量網



(b) CASE 5 の測量網の各点の \sqrt{Q}

図 6.8: 測量網のシミュレーション CASE 5



(a) CASE 6 の測量網

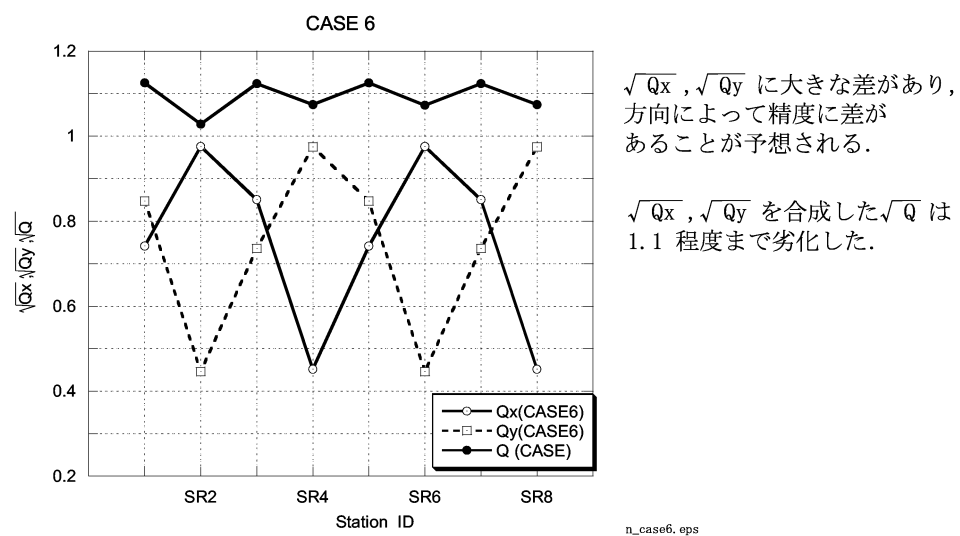
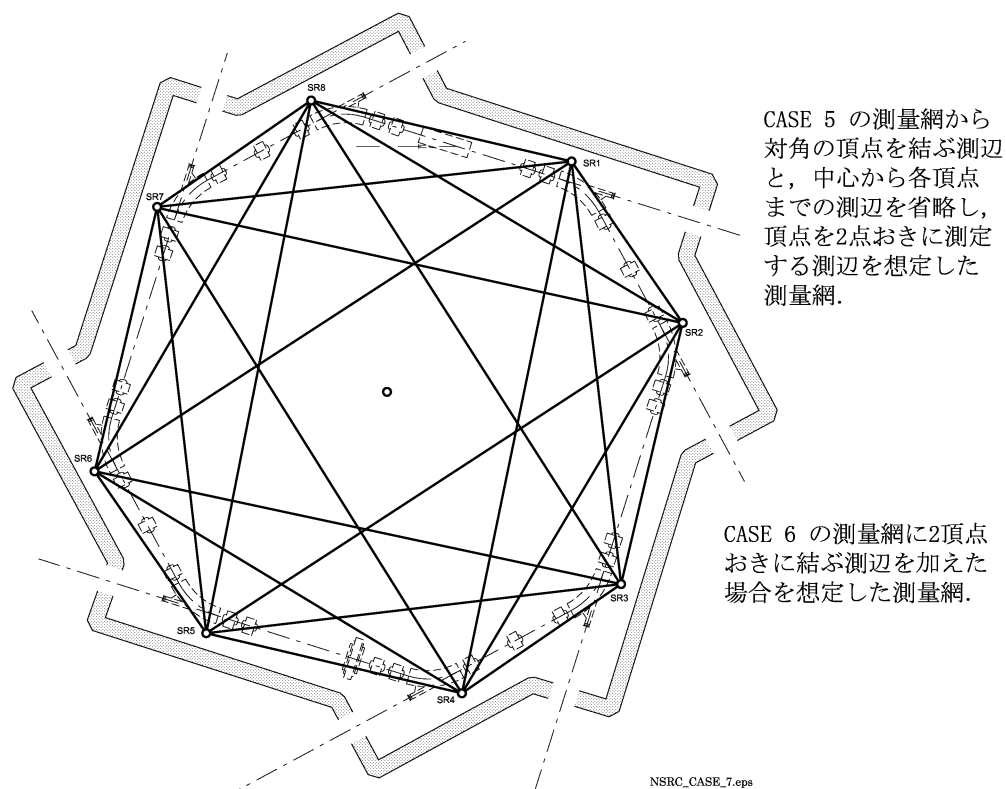
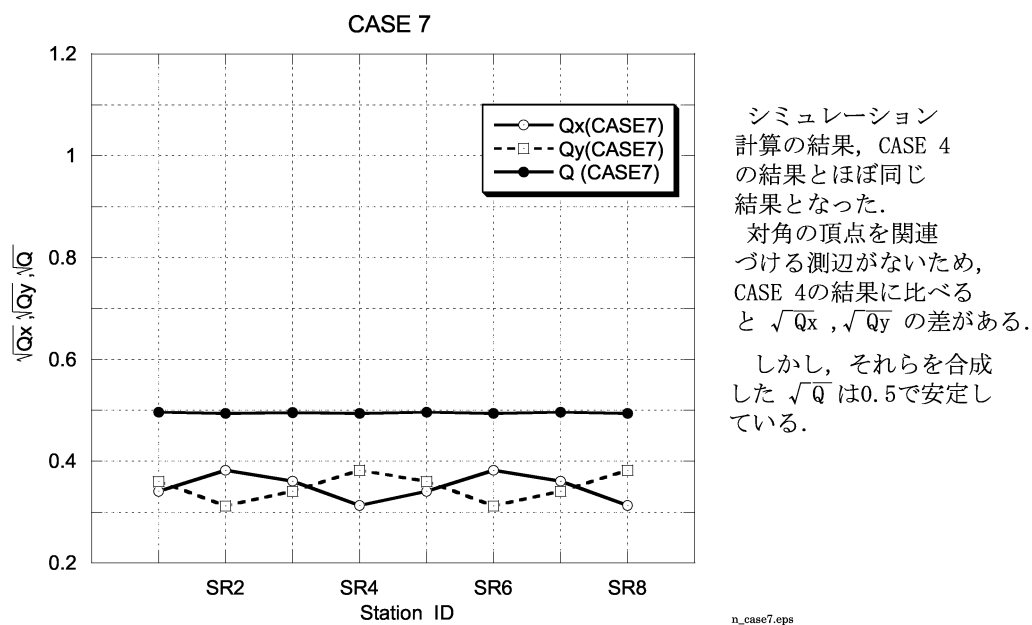
(b) CASE 6 の測量網の各点の \sqrt{Q}

図 6.9: 測量網のシミュレーション CASE 6



(a) CASE 7 の測量網



(b) CASE 7 の測量網の各点の \sqrt{Q}

図 6.10: 測量網のシミュレーション CASE 7

6.1.3.3 各測量網の実測値による計算結果

上述のように、 x 軸、 y 軸方向の精度、 σ_x, σ_y と誤差楕円は次のような関係であり、実測値による計算結果の事例を次のように検討、評価する。

各測量網に応じた測辺の実測距離で測量網平均計算（フリーネットワーク解法）を行い、測点 SR1～SR8 の各点の誤差楕円によって精度を評価する。

測定精度 σ_o は実測距離を測量網平均計算した結果の残差ベクトルから求められた値である。

式(3.71)(51 頁) 測点 P の座標に関する一般逆行列 \mathbf{N}^+ の部分行列を

$$\begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} \end{pmatrix}$$

とすると、 x 軸、 y 軸方向の精度 σ_x, σ_y は、式(3.69), (3.70)(50 頁) から、

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_o \sqrt{Q_{xx}} \\ \sigma_y &= \sigma_o \sqrt{Q_{yy}} \end{aligned}$$

である。また、誤差楕円の長軸 σ_u 、短軸 σ_v は、式(3.78), (3.79)(52 頁) から、

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \sigma_o \sqrt{\frac{Q_{xx} + Q_{yy} + \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2}}{2}} \\ \sigma_v &= \sigma_o \sqrt{\frac{Q_{xx} + Q_{yy} - \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2}}{2}} \end{aligned}$$

であり、その主軸の方向は、式(3.84), (3.85)(52 頁) から、

$$\begin{aligned} \text{長軸方向} &: \tan \theta_u = \frac{\lambda_u - Q_{xx}}{Q_{xy}} \\ \text{短軸方向} &: \tan \theta_v = \frac{\lambda_v - Q_{xx}}{Q_{xy}} \end{aligned}$$

である。

最終的に測定の精度を評価する誤差楕円は傾斜しているため、短軸、長軸の大きさのどちらも σ_x, σ_y とは単純な比較は難しい。しかし、加速器の測量網の形の特徴から誤差楕円の軸の方向は、ほぼビーム方向（接線方向）とビームと直角方向（半径方向）に向かっている。したがって、 x 軸、 y 軸上に最も近い測点の誤差楕円で x 軸、 y 軸方向と一致する誤差楕円の長軸、短軸を σ_x と σ_y として比較する。具体的には、SR2 の測点が x 軸からビーム方向に 15° の箇所にあるので、この測点の誤差楕円で半径方向の軸を σ_x 、接線方向の軸を σ_y として比較する。

(1) CASE 1

この場合の測定精度は $\sigma_o = 0.15 \text{ [mm]}$ であるから, x 軸方向に近い SR2 で比較すると,

$$\sigma_x = \sigma_o \sqrt{Q_x} = 0.15 \text{ [mm]} \times 0.634 = 0.0951 \text{ [mm]} \quad (6.1)$$

$$\sigma_y = \sigma_o \sqrt{Q_y} = 0.15 \text{ [mm]} \times 0.489 = 0.0733 \text{ [mm]} \quad (6.2)$$

であり, 誤差楕円の長軸, 短軸とほぼ一致する. 各誤差楕円の方法は図 6.11 のとおりである.

CASE 1 の測量網は単純な図形なので, 半径方向の精度に比べ測辺の短い接線方向の精度の方がわずかによい結果となっている.

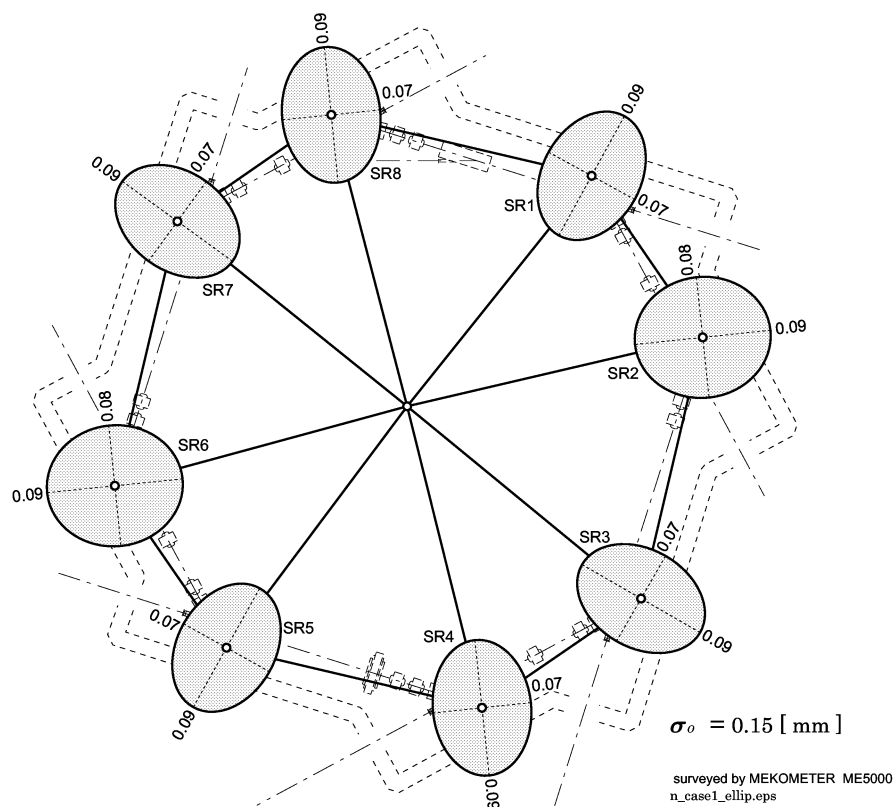


図 6.11: 実測による誤差楕円 CASE 1

(2) CASE 2

この場合の測定精度は $\sigma_o = 0.16 \text{ [mm]}$ であるから, x 軸方向に近い SR2 で比較すると,

$$\sigma_x = \sigma_o \sqrt{Q_x} = 0.16 \text{ [mm]} \times 0.470 = 0.0752 \text{ [mm]} \quad (6.3)$$

$$\sigma_y = \sigma_o \sqrt{Q_y} = 0.16 \text{ [mm]} \times 0.346 = 0.0554 \text{ [mm]} \quad (6.4)$$

であり, 誤差楕円の長軸, 短軸とほぼ一致する. 各誤差楕円の方法は図 6.12 のとおりである.

CASE 1 の測量網に対角の頂点を結んで測定しているので, 半径方向の精度が向上している. 接線方向の精度は変わらない.

すなわち, 対角を結ぶ測定が効果的であった.

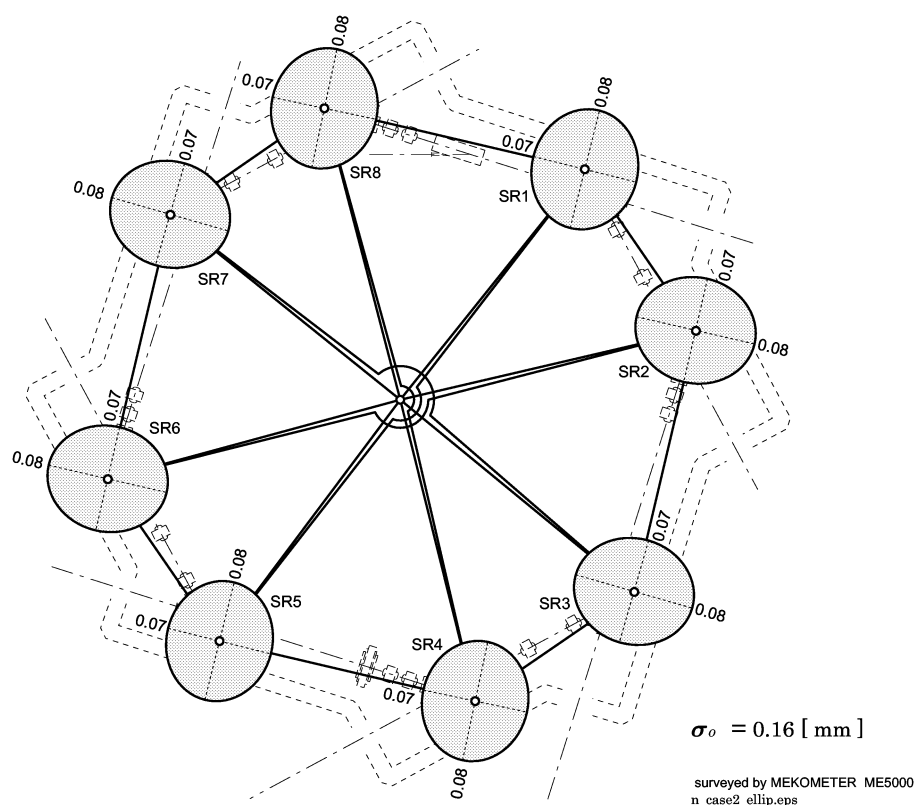


図 6.12: 実測による誤差楕円 CASE 2

(3) CASE 3

この場合の測定精度は $\sigma_o = 0.15 \text{ [mm]}$ であるから, x 軸方向に近い SR2 で比較すると,

$$\sigma_x = \sigma_o \sqrt{Q_x} = 0.15 \text{ [mm]} \times 0.466 = 0.0699 \text{ [mm]} \quad (6.5)$$

$$\sigma_y = \sigma_o \sqrt{Q_y} = 0.15 \text{ [mm]} \times 0.341 = 0.0510 \text{ [mm]} \quad (6.6)$$

であり, 誤差楕円の長軸, 短軸とほぼ一致する. 各誤差楕円の方法は図 6.13 のとおりである.

CASE 1 の測量網に 1 点おきの頂点を測定した結果, ほぼ接線方向に近い測辺なので, 誤差楕円の接線方向の精度が向上している. 半径方向は, 対角の頂点を結ぶ測定がないため, CASE 2 より劣っている.

すなわち, 半径方向の測辺は効果的であり, 対角の頂点を結ぶ測辺は重要である.

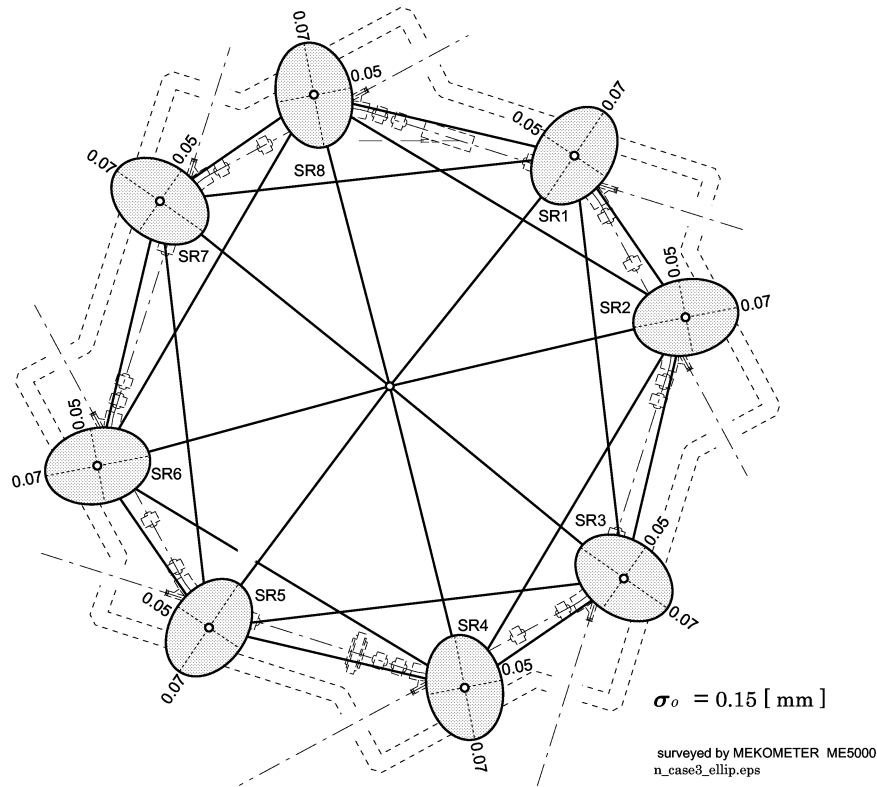


図 6.13: 実測による誤差楕円 CASE 3

(4) CASE 4

この場合の測定精度は $\sigma_o = 0.16 \text{ [mm]}$ であるから, x 軸方向に近い SR2 で比較すると,

$$\sigma_x = \sigma_o \sqrt{Q_x} = 0.16 \text{ [mm]} \times 0.378 = 0.0605 \text{ [mm]} \quad (6.7)$$

$$\sigma_y = \sigma_o \sqrt{Q_y} = 0.16 \text{ [mm]} \times 0.337 = 0.0539 \text{ [mm]} \quad (6.8)$$

であり, 誤差楕円の長軸, 短軸とほぼ一致する. 各誤差楕円の方法は図 6.14 のとおりである.

CASE 3 の測量網に対角を結ぶ測定を追加した結果, 接線方向の精度はわずかに劣化したが, CASE 2 ほどではないので, 1 点おきの頂点を結ぶ測辺は有効である. 半径方向の誤差楕円は, CASE 2, CASE 3 よりも向上している.

接線方向の精度が劣化したことよりも, この測量網によって, 誤差の分布が均等になったことが重要と考えられ, 対角の頂点を結ぶ測辺は有効であった.

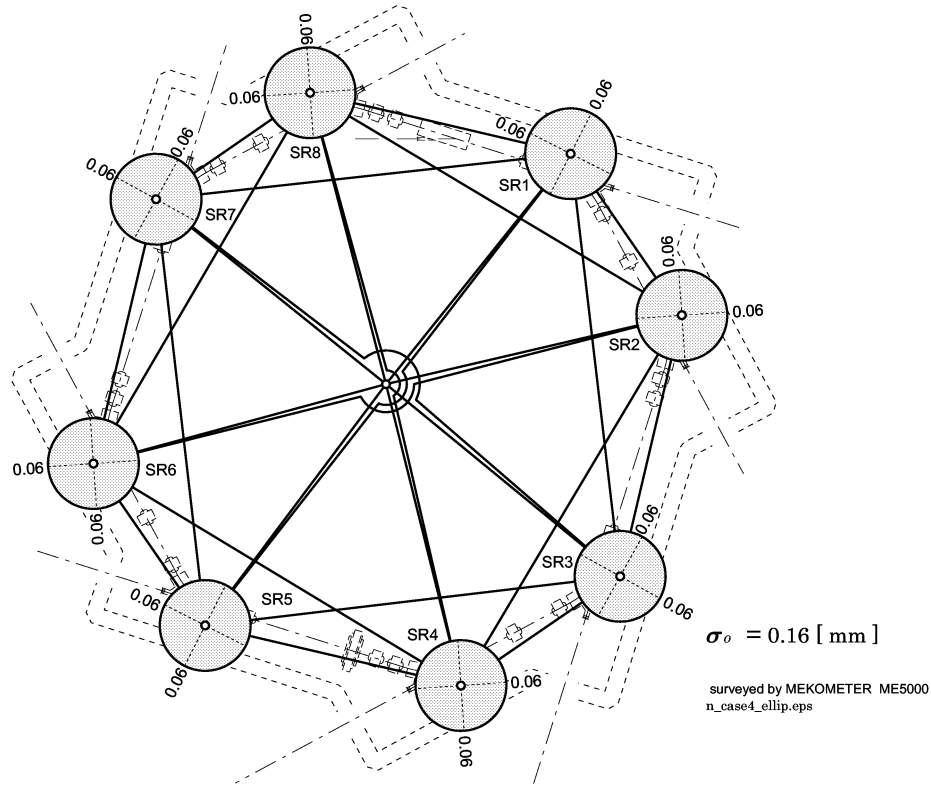


図 6.14: 実測による誤差楕円 CASE 4

(5) CASE 5

この場合の測定精度は $\sigma_o = 0.16 \text{ [mm]}$ であるから, x 軸方向に近い SR2 で比較すると,

$$\sigma_x = \sigma_o \sqrt{Q_x} = 0.16 \text{ [mm]} \times 0.289 = 0.0462 \text{ [mm]} \quad (6.9)$$

$$\sigma_y = \sigma_o \sqrt{Q_y} = 0.16 \text{ [mm]} \times 0.313 = 0.0470 \text{ [mm]} \quad (6.10)$$

であり, 誤差楕円の長軸, 短軸とほぼ一致する. 各誤差楕円の方法は図 6.15 のとおりである.

測定可能である測辺をすべて測定した結果, 接線方向, 半径方向で精度が向上し, かつその分布は均等である.

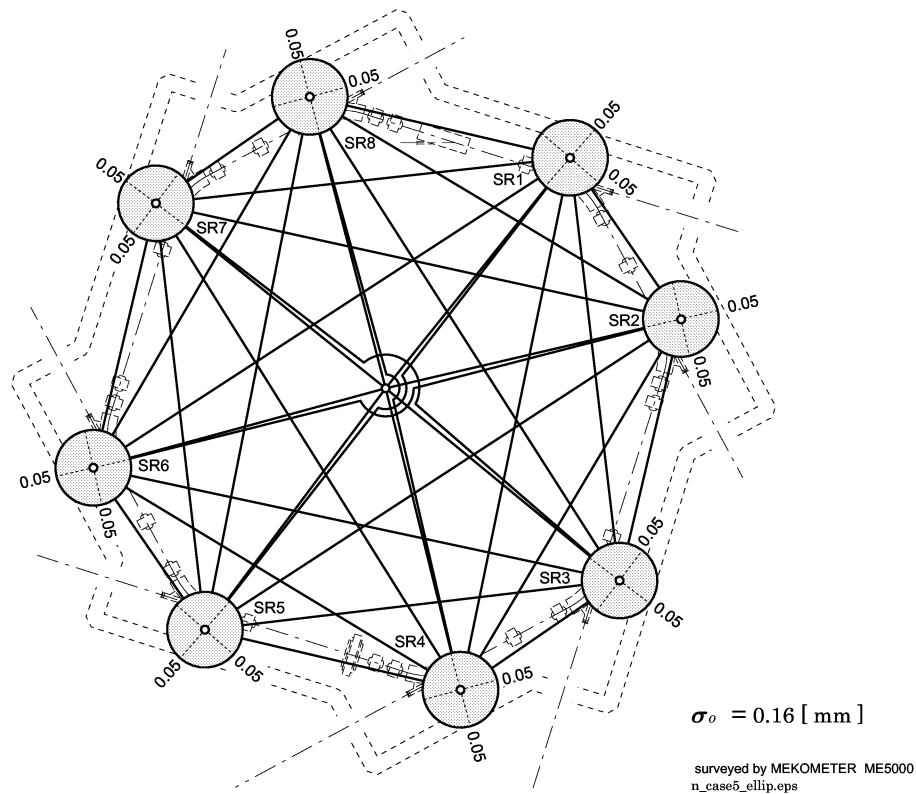


図 6.15: 実測による誤差楕円 CASE 5

(6) CASE 6

この場合の測定精度は $\sigma_o = 0.15 [mm]$ であるから, x 軸方向に近い SR2 で比較すると,

$$\sigma_x = \sigma_o \sqrt{Q_x} = 0.15 [mm] \times 0.976 = 0.1464 [mm] \quad (6.11)$$

$$\sigma_y = \sigma_o \sqrt{Q_y} = 0.15 [mm] \times 0.446 = 0.0669 [mm] \quad (6.12)$$

であり, 誤差楕円の長軸, 短軸とほぼ一致する. 各誤差楕円の方法は図 6.16 のとおりである.

CASE 3 から半径方向の測定をすべて省略した結果, 接線方向の精度は, CASE 3 の精度を維持しているが, 半径方向の精度が著しく劣化している.

大型のシンクロトロンの場合, 半径方向の測辺が期待できないことが多く, この測量網が大型のシンクロトロンに相当する. その結果, ビームに直角方向の精度の確保が難しいことが分かる.

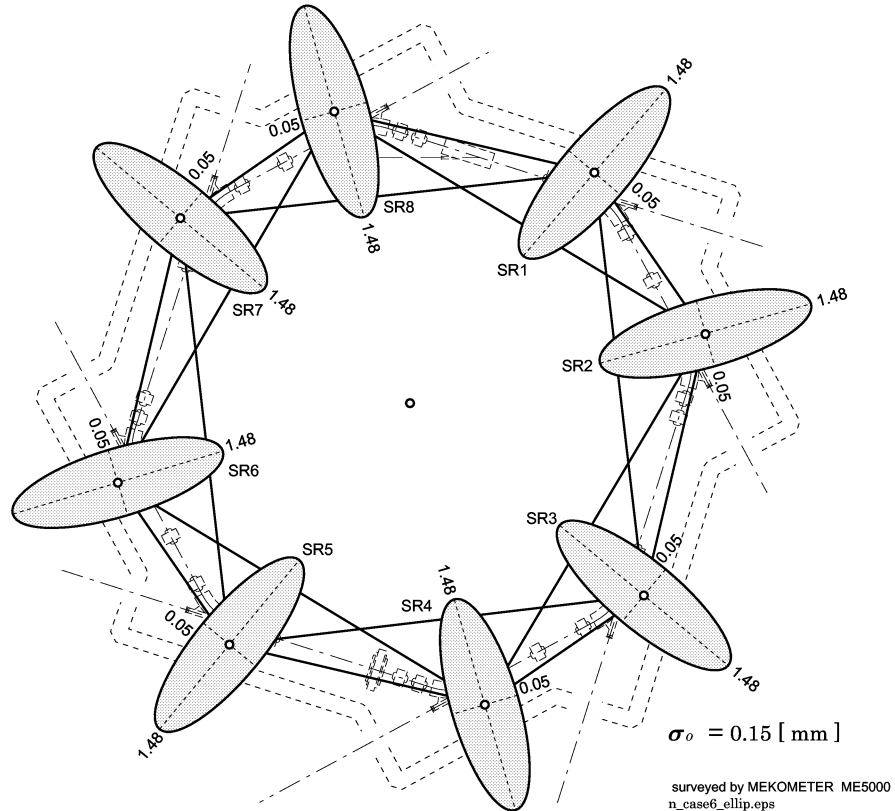


図 6.16: 実測による誤差楕円 CASE 6

(7) CASE 7

この場合の測定精度は $\sigma_o = 0.15 [mm]$ であるから, x 軸方向に近い SR2 で比較すると,

$$\sigma_x = \sigma_o \sqrt{Q_x} = 0.15[mm] \times 0.382 = 0.0573 [mm] \quad (6.13)$$

$$\sigma_y = \sigma_o \sqrt{Q_y} = 0.15[mm] \times 0.312 = 0.0468 [mm] \quad (6.14)$$

であり, 誤差楕円の長軸, 短軸とほぼ一致する. 各誤差楕円の方法は図 6.17 のとおりである.

CASE 5 の測量網から半径方向の測定を省略した結果, 半径方向の精度が劣化している. CASE 6 ほどではないのは, 測量網が小さいため, 2 辺おきの測定が半径方向の測定, すなわち対角の頂点を結ぶ測辺にきわめて近いため, これらの測辺が半径方向の測辺を代用しているためと考えられる.

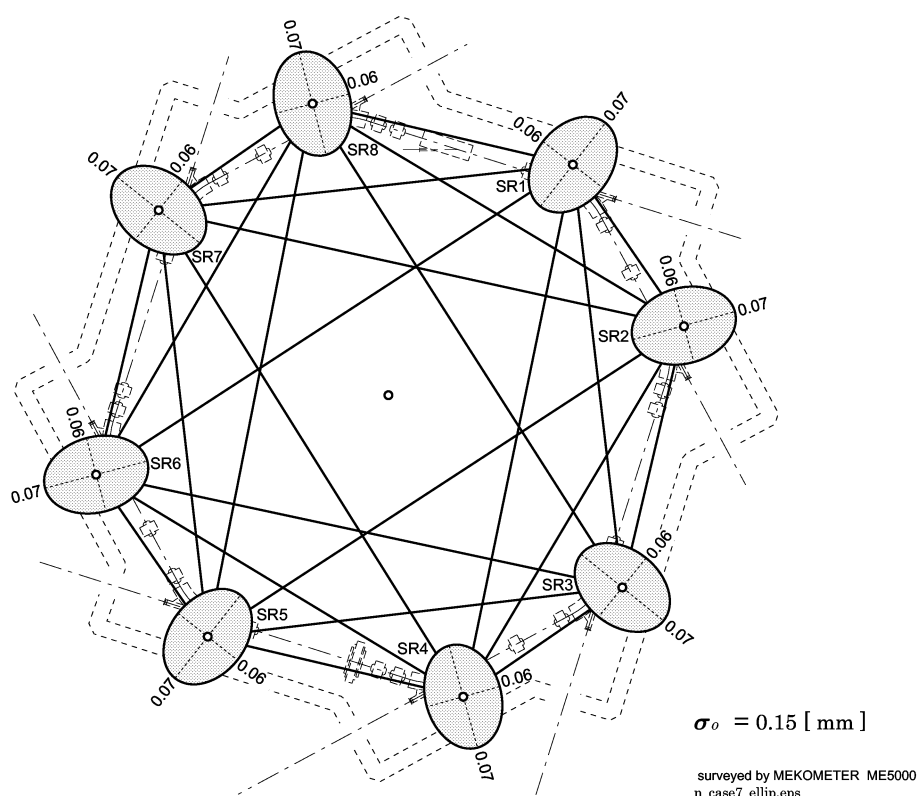


図 6.17: 実測による誤差楕円 CASE 7

6.2 HIMAC におけるアラインメント

6.2.1 HIMAC の概要

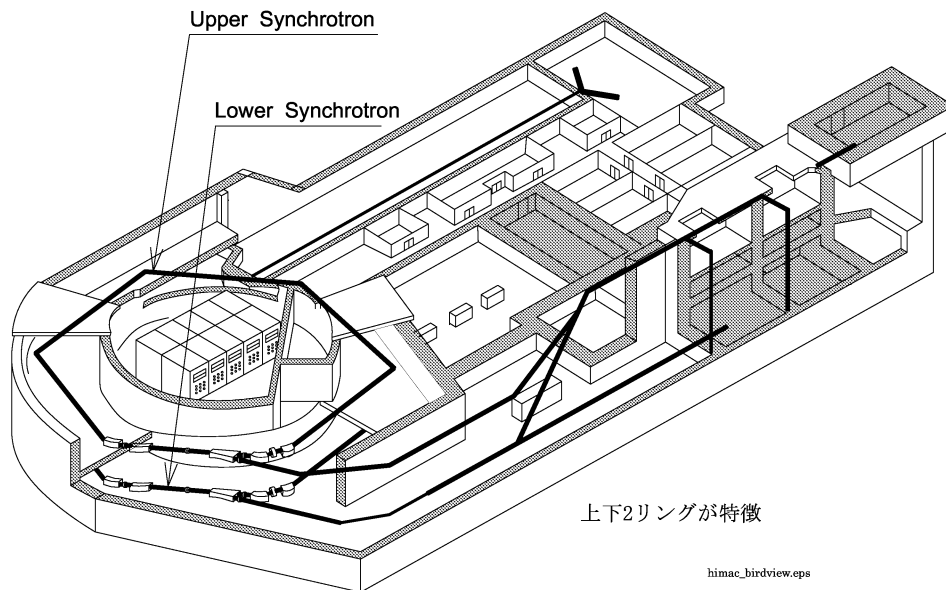


図 6.18: HIMAC の全体図

科学技術庁放射線医学総合研究所（現，独立行政法人放射線医学総合研究所）は，がん治療を目的として医用重イオン加速装置（HIMAC:Heavy-Ion Medical Accelerator in Chiba）を 1993 年 10 月に完成させた．この装置は，世界で初の医療用高速重イオン加速装置である．この加速器は，治療室の患者の皮下 30[cm] の患部に対し 5[Gy/min.] の重イオンを照射することができる[†]．さらに，治療用の要求を満たすために何種類かの粒子を，何種類かのエネルギーで，加速することができる．

施設全体を，図 6.18 に示す．PIG と ECR の 2 種類のイオン源から，RFQ(Radio Frequency Quadrupole) とアルバレ型リニアック (Alvarez linac) で初段加速されて，主加速器に入射され，ここで光速の 40% まで加速される．主加速器は独立した上下リングからなるシンクロトロンである．高エネルギービームは，上下シンクロトロンリングから 3 部屋の照射治療室と照射実験室まで垂直と水平のビームラインによって輸送される．3 部屋の治療室のうち 1 部屋（B 治療室）は，垂直方向と水平方向の両方向からビーム照射を受けることができる[‡]．

[†]参考文献 [28]

[‡]参考文献 [4],[27]

6.2.2 HIMAC を構成する主要機器のパラメータ

HIMAC の主要パラメータを表 6.2 に, シンクロトロンリングの電磁石の配置を図 6.19 に示す. また, 偏向電磁石と 4 極電磁石のパラメータをそれぞれ表 6.3, 表 6.4 に, 1 スーパピリオッドのベータトロン関数を図 6.20 に示す.

表 6.2: HIMAC のシンクロトロンの主なパラメータ

Injection Energy	6	[MeV/u]
Maximum extraction energy	800	[MeV/u]
Minimum extraction energy	100	[MeV/u]
Maximum intensities for light ions	10^{11}	[ppp]
Repetition rate	0.3~1.5	[Hz]
Injecton Emittance (Hor/Ver)	264/26.4	[$\pi mm \cdot mrad$]
Emittance of extraced beam	10π	[$mm \cdot mrad$]
Momentum spread after rf turned on	± 0.7	[$\%$]
Number of injected turns	40	
Particle species	He to Ar	
q/A except Ar^{18+}	0.5	
Vacuum	5×10^{-9}	[$Torr$]
Lattice type	FODO	
Circumference	129.6	[m]
Periodicity	6	
Cells per period	2	
Long/Short straight section length	5.0/0.8	[m]
Dipole field (max.)	1.5	[T]
Magnetic rigidity (max.)	$B\rho$	9.75 [Tm]
Quadrupole gradient	$\partial B/\partial x$	7.45 [T/m]
Betatron tunes	ν_H/ν_V	3.75/3.25
Natural chromaticity	ξ_H/ξ_V	-3.90/-3.99
Cooling system heat load		5.4 [MW]

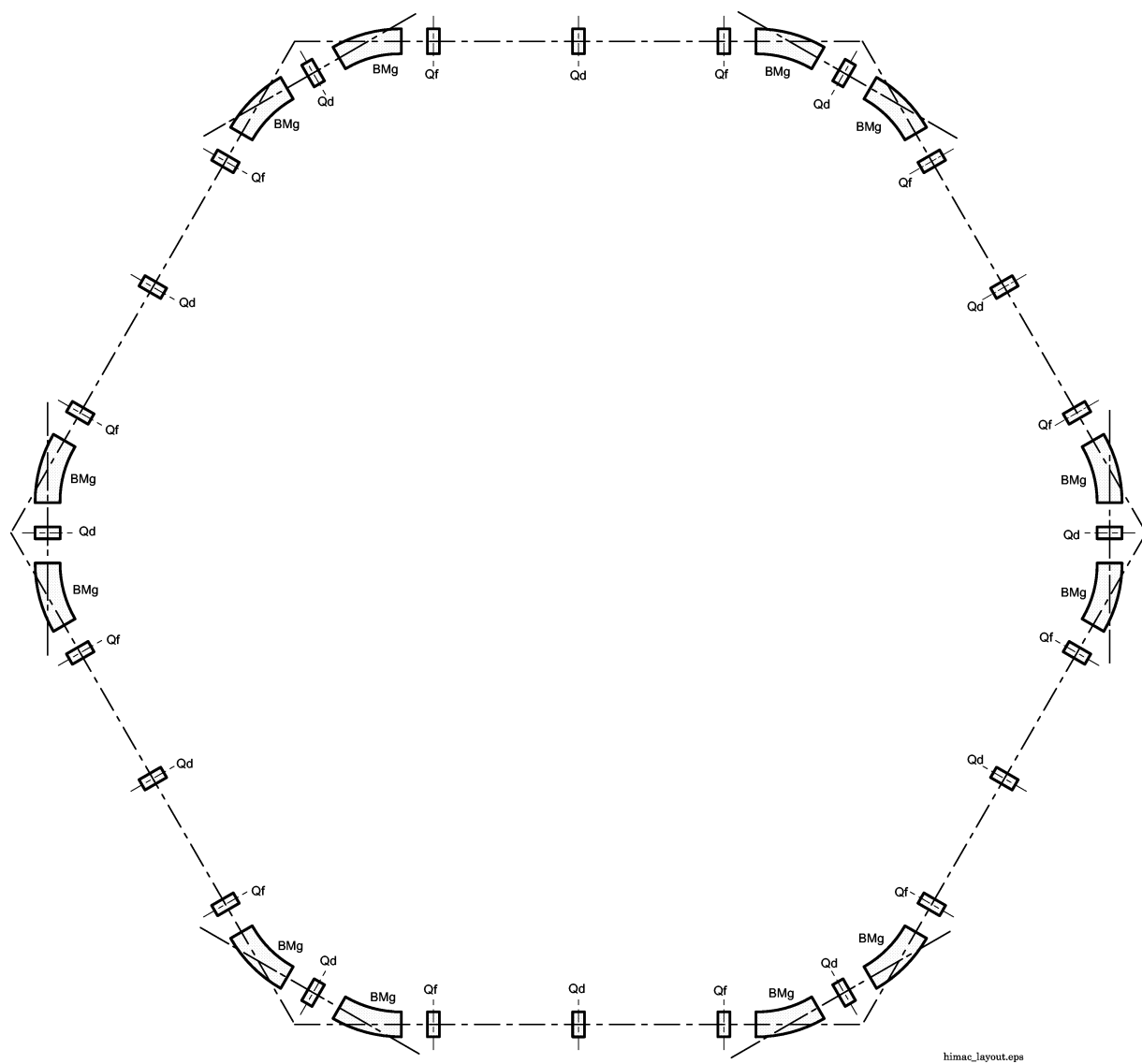


図 6.19: HIMAC のシンクロトロンの基本構成

表 6.3: HIMAC の偏向電磁石のパラメータ

Number/ring		12
Maximum field		1.5 [T]
Magnet length	ℓ	3.4 [m]
Magnet type		H-gap sector type
Good field region (Hor/Ver)		210/50 [mm]
Vertical gap height		66 [mm]
Field flatness	$\Delta B/B$	$\pm 2 \times 10^{-4}$
Bending angle	θ	30 [degrees]
Bending radius	ρ	6493.5 [mm]
Field ramp rate		2 T/sec
Magnet yoke size	W×H×L	1170 × 680 × 3400 [mm]
Number of coil-turns		40
Maximum current		2070 [A]
Coil resistance		18.5 [mΩ]
Coil inductance		51.6 [mH]
Magnet weight		24 [ton]

表 6.4: HIMAC の4極電磁石のパラメータ

Number/ring		24
Maximum field gradient	$\partial B/\partial x (= G)$	7.45 [T/m]
Bore diameter		192 [mm]
Magnet length	ℓ	400 [mm]
Good field region (Hor/Ver)		244/56 [mm]
Field gradient flatness	$\Delta B/B (= \Delta G/G)$	$\pm 2 \times 10^{-3}$
Magnet yoke size	W×H×L	900 × 980 × 400 [mm]
Number of coil-turns/pole		18
Maximum current		1570 [A]
Coil resistance		9.6 [mΩ]
Coil inductance		9.0 [mH]
Magnet weight		3.2 [ton]

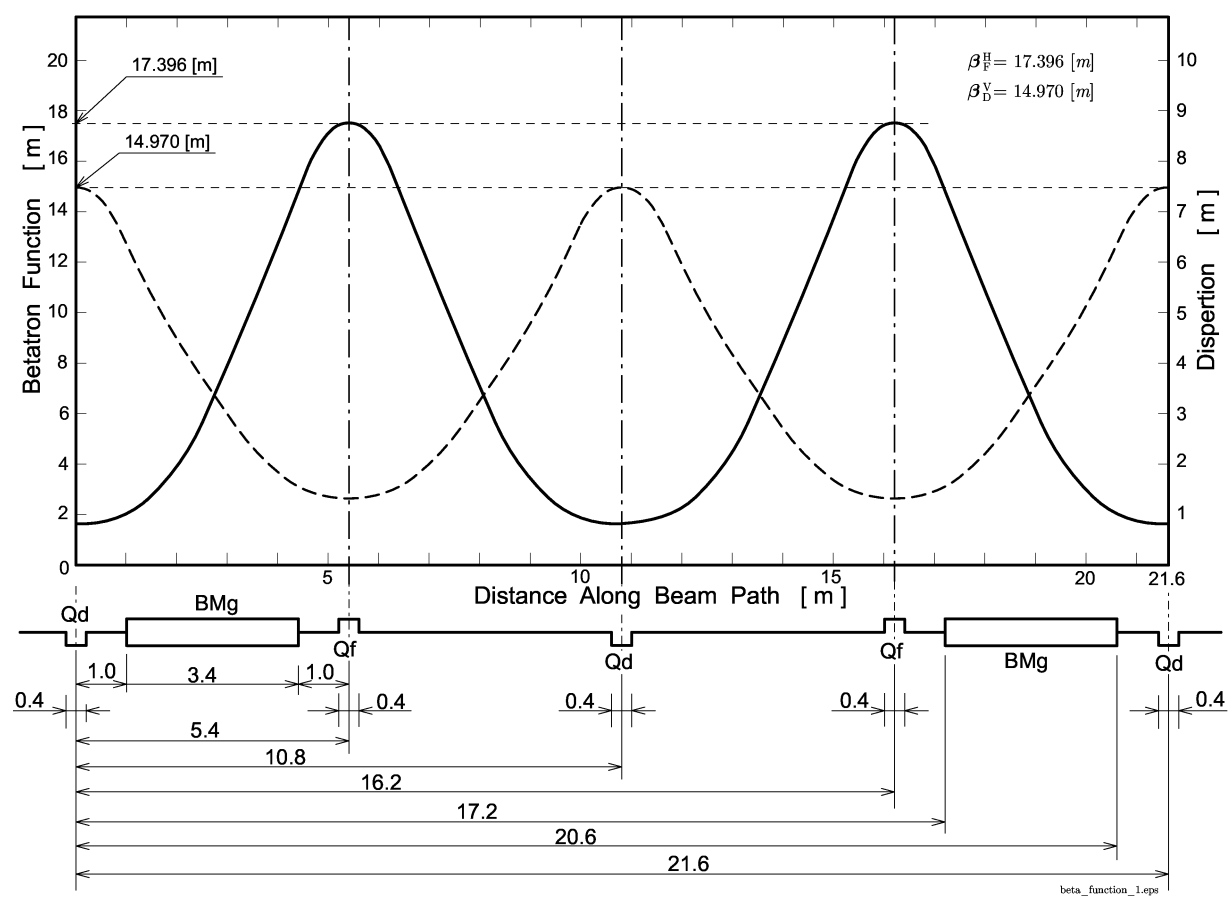


図 6.20: HIMAC のベータトロン関数

6.2.3 シンクロトロンのアラインメントの許容値

ビームモニターの検出精度 $\pm 1 [mm]$ を 3σ と評価し, $\sigma = \pm 0.3 [mm]$ の総合精度 (m_t) を設定した. シンクロトロン of 電磁石のアラインメント調整機構の調整精度 (m_g) は, $\pm 0.2 [mm]$ がメーカー仕様となっている.

測定の精度 (m_s) を考慮した総合精度 (m_t) は誤差伝播の関係から,

$$m_t = \sqrt{m_g^2 + m_s^2} \quad (6.15)$$

となる. すなわち,

$$\pm 0.3 = \sqrt{\pm 0.2^2 + m_s^2} \quad (6.16)$$

となる. その結果, 測量に要求される目標精度 m_s は,

$$m_s = \pm 0.22 [mm] \quad (6.17)$$

となる.

$\pm 0.2 [mm]$ の測量精度と $\pm 0.2 [mm]$ の調整精度で機器をアラインメントした場合,

$$m_t = \sqrt{(\pm 0.2[mm])^2 + (\pm 0.2[mm])^2} = \pm 0.283 [mm] \quad (6.18)$$

の精度でアラインメント可能である.

「ミスアラインメントによる軌道歪みの計算例」(23 頁) の結果から, HIMAC の場合 QF の水平方向に δ_1 のミスアラインメントがあった場合, ビーム軌道は $6.5\delta_1$ になることから, 上述の精度でアラインメントしたとき予想される半径方向 (x 方向) の閉軌道歪みは,

$$\pm 0.283 [mm] \times 6.5 = \pm 1.84 [mm] \quad (6.19)$$

である.

各方向の閉軌道歪みを考慮してアラインメントの許容値を表 6.5 のように決定した.

表 6.5: アラインメントの許容値

ビーム水平方向 (x)	: $\pm 0.2 [mm]$
ビーム垂直方向 (y)	: $\pm 0.1 [mm]$
ビーム進行方向 (s)	: $\pm 0.3 [mm]$
機器の傾き	: $\pm 0.2 [mrad]$

6.2.4 アラインメントに使用した器械およびソフトウェア

HIMAC のアラインメントに使用した測量器械をその精度とともに表 6.6 に示す.

表 6.6: HIMAC のアラインメントに使用した器械およびソフトウェア

<i>instrument</i>	<i>maker</i>	<i>accuracy</i>	<i>used for</i>
inside micrometer	YAMAYO	0.01 [mm]	distance
3-D system	PASCO	0.2 [mm]	distance
MEKOMETER ME5000 with control system	Kern PASCO	$\pm(0.2 \text{ [mm]} + 0.2 \text{ ppm})$	trilateration
T-3000	Wild	0.1 "	alignment
N-3	Wild	0.1 [mm]	height or elevation
1st order level	Topcon	0.02 [mm/m]	inclination
ZNL	Wild	1/200,000	plumbing

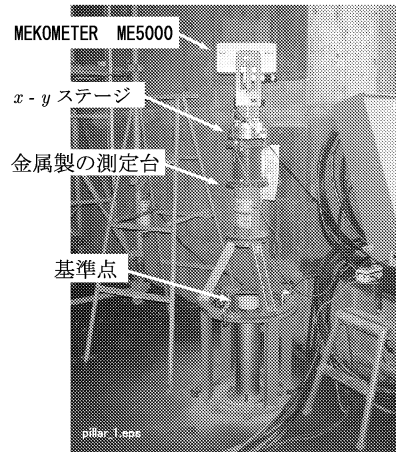


図 6.21: X-Y ステージと金属製の測定台

三辺測量 (trilateration) に使用した MEKOMETER ME5000 は三脚で固定するのが通常の用法である. しかし, 木製の伸縮三脚では MEKOMETER ME5000 の重量 (11 [kg]) を長時間にわたって固定するのに耐えられない. 本アラインメント則量では, 三脚の代わりに金属製の測定台 (図 6.21 参照) を使用した. この測定台は, 床にボルトで固定するため, 不動性を確保でき, かつ測定していないときは取り外しできるため, 大型機材の搬入時に支障にならない. また, 頭部の器械を固定する構造 (センタリングプレート: centering plate) は Kern 社独特のバヨネットクランプ (bayonet clamp) 方式を採用しているため, 器械の固定の再現性は, 0.03 [mm] を確保している. さらに, 金属製の台とセンタリングプレートの間に 2 軸の $x-y$ ステージを組み

込んでいる．この $x-y$ ステージの軸をシンクロトロン座標軸に一致させることによってセンタリングプレートを中心，すなわち MEKOMETER ME5000 を所定の座標に調整することができる．

一方シンクロトロンの各機器には機器上部に測量基準盤を設け，ビームライン上に $\phi 40\text{ [mm]} \sim \phi 20\text{ [mm]}$ の精巧な穴が加工されている．この測量基準盤の穴にそれぞれの測量に応じた標的 (target) を固定して，アラインメント測量を実施した．また，高さ方向のアラインメントでは，機器の側面にマーキングされたラインを所定の高さに調整した．

6.2.5 アラインメントの方法

前述のような高精度を要求されるアラインメントを実現するために，以下のようなアラインメント方法を実施した．

現在ならばこれらの方法は，レーザトラッカーによる 3 次元測量で置き換えることができる[§]．

6.2.5.1 偏向電磁石のアラインメント

偏向電磁石の上部に上流 (Up stream, 以下 U とする)，中央 (Center, 以下 C とする)，下流 (Down stream, 以下 D とする) の 3 箇所に測量基準盤をセットする．U, D はビーム軌道上に測量基準盤をセットする．C は U, D におけるビーム軌道の接線の交点上にセットする．セットされている測量基準盤を図 6.22 のように直線で結べば，図 6.19 に示す 2 重の正六角形を構成する．これらの 2 重の正六角形の頂点の位置を測量し， $x-y$ ステージを調整して正確に決定する．それらの頂点にセオドライトをセットし，基準点間を見通すことで直線を設定する．設定された直線上に偏向電磁石の上部の測量基準盤 C-D あるいは C-U を調整する．以上の方法で偏向電磁石をアラインメントする．

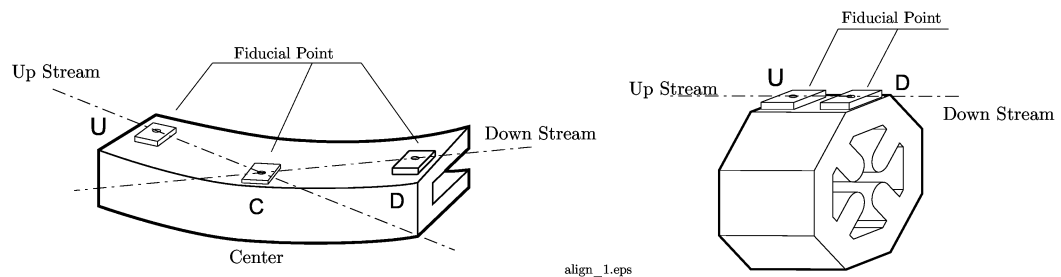


図 6.22: 電磁石のアラインメント方法

[§]参考文献 [8]

この方法は、正六角形の頂点の精度に大きく依存するため、頂点の精度は高精度を要求される。その結果、測量に多くの時間が費やされることが予想された。そこで、MEKOMETER ME5000 を用いた三辺測量を行い、上述の周波数補正システムで距離測定 of 精度を確保し、本システムのコンピュータによる自動測定によって測定効率の改善を図った。

一方、正六角形の頂点を決定した後は、非常にシンプルな方法で偏向電磁石をアラインメントできる。また、アラインメント中の偏向電磁石以外の偏向電磁石は、真空ダクトの組み込み、上半開放などの作業が可能であるため、アラインメントと他の作業をブロック化して、並行的に作業を進め、全体として作業の効率化を図った。

6.2.5.2 4 極電磁石、他の機器のアラインメント

各機器のアラインメントは、偏向電磁石のアラインメントと同様に正六角形の頂点にセットしたセオドライトで直線を設定し、各機器のオフセットを調整して、アラインメントした。

(a) ラティス内の調整

ラティス内の調整は、偏向電磁石、4 極電磁石 (QF, QD) 間が重要であり、また $1[m]$ 以内の短距離であるため、インサイドマイクロゲージで機器間の距離を調整した。

(b) ラティス間の調整

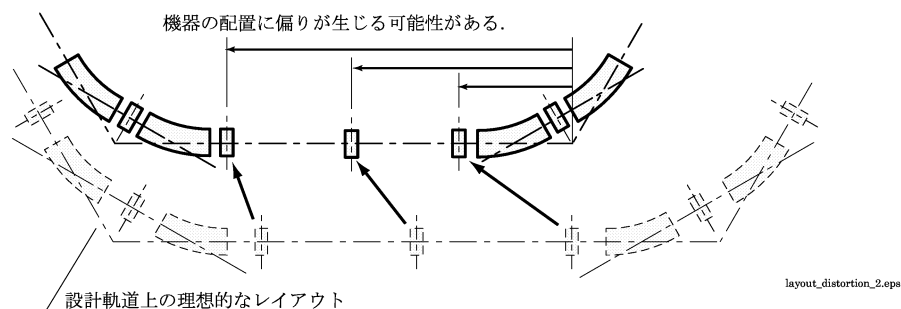


図 6.23: 測量網の変形による偏った機器の配置

ラティス間の距離調整は、3 次元計測システムによって調整した。正六角形の頂点間を 3 次元計測システムの基線として使用した。これは、正六角形の頂点の測量と機器の調整に工程上の都合で時間があいた場合、HIMAC の建屋全体に季節変化などによる変形が考えられる。その結果、正六角形の頂点間の距離に変化が生じる。片側から正確な距離を測定して機器を設置した場合、それがいかに正確な距離であっても機器の設置が偏る可能性がある (図 6.23 参照)。両側から機器間の距離を測定し、その

平均値に機器を調整することが考えられるが，効率が劣化する．

それらの問題を解決する方法として，3次元計測システムによる方法を採用した．3次元計測システムの場合，元々距離の概念がなく，システムの初期設定時に基線を測定することで，距離の要素をシステム内に取り込む．このことはシンクロトロンに相似形の変化を許す場合，基線の変化に応じて測定距離も比例して変化させることができる．したがって，正六角形が相似形に変化しても，各機器の位置はそれに応じて同じ比率で設置されることになる（図 6.24 参照）．

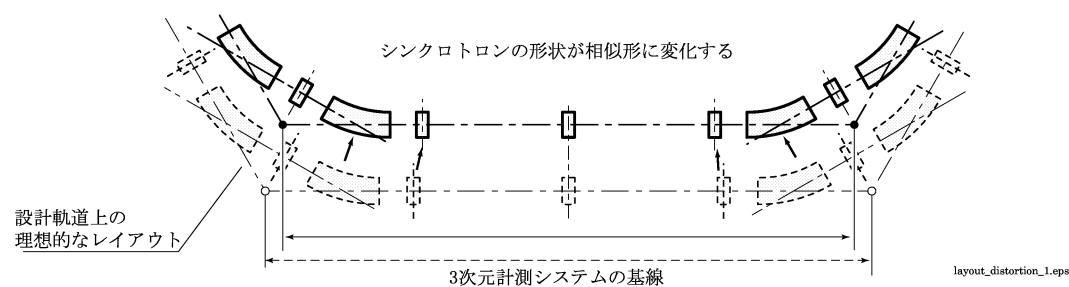


図 6.24: 測量網の相似変形と 3 次元計測システム

6.2.6 測量網のデザイン

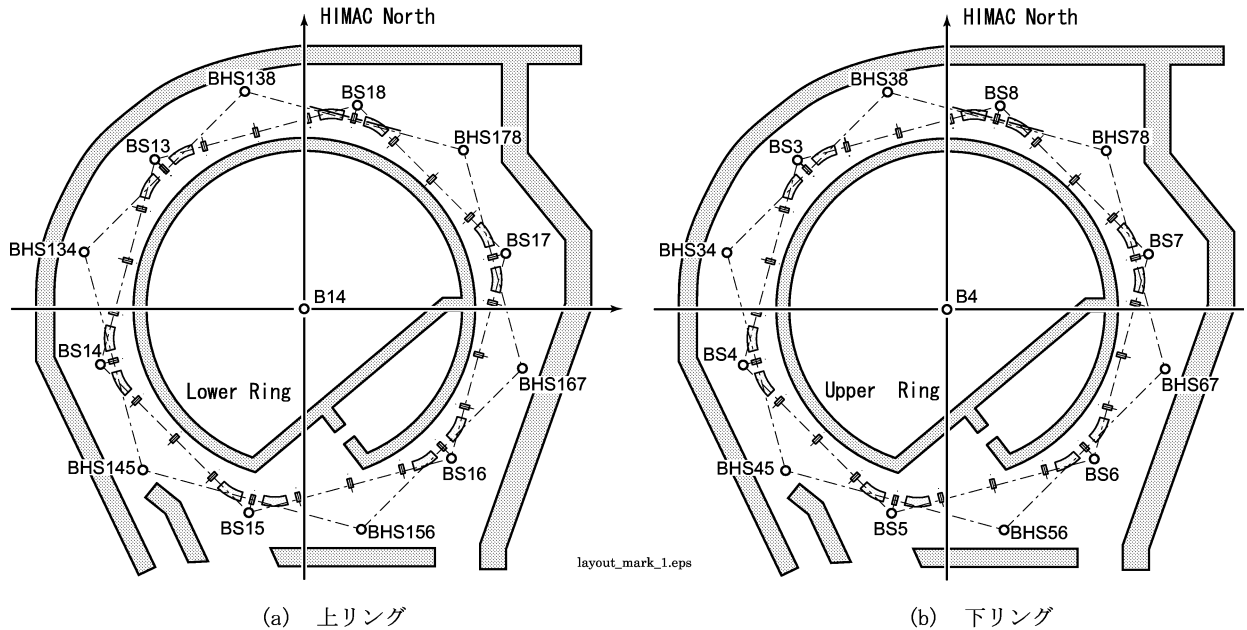


図 6.25: シンクロトロン系の基準点の配点図

HIMAC のシンクロトロンの基準点の配点は、図 6.25 のように計画した。BS n が 1 次基準点，BHS n が 2 次基準点である。

1 次基準点は、シンクロトロンの基本形状である正六角形の頂点に配点する。これらの 1 次基準点にセオドライトをセットし、視準線で直線を設定し、機器のビーム直角方向（半径方向）のアラインメントをする。

2 次基準点は、偏向電磁石のアラインメントに用いる。シンクロトンホールは、中心に電源室が配置されているが、床から 2.5m の壁に貫通孔を設け、対角の 1 次基準点間の測定を可能にしている（図 6.26 参照）。

また、床（天井）にも貫通孔を設け、上下のリングを一致させることを可能にしてある（図 6.27 参照）。

1 次基準点の測量は、精密光波測距儀 MEKOMETER ME5000 の距離測定による三辺測量によって実施した。しかし、ME5000 の公称精度は、

$$\pm(0.2 \text{ [mm]} + 0.2\text{ppm} \cdot \text{Dist. [mm]})$$

であり、要求精度と同程度である。1 次基準点の要求精度が $\pm 0.2 \text{ [mm]}$ であるため、ME5000 の測定精度に依存する測定方法では要求精度を満たすことは難しく、測定方向による精度の劣化が考えられるため、強固な測量網を組成する必要があった。

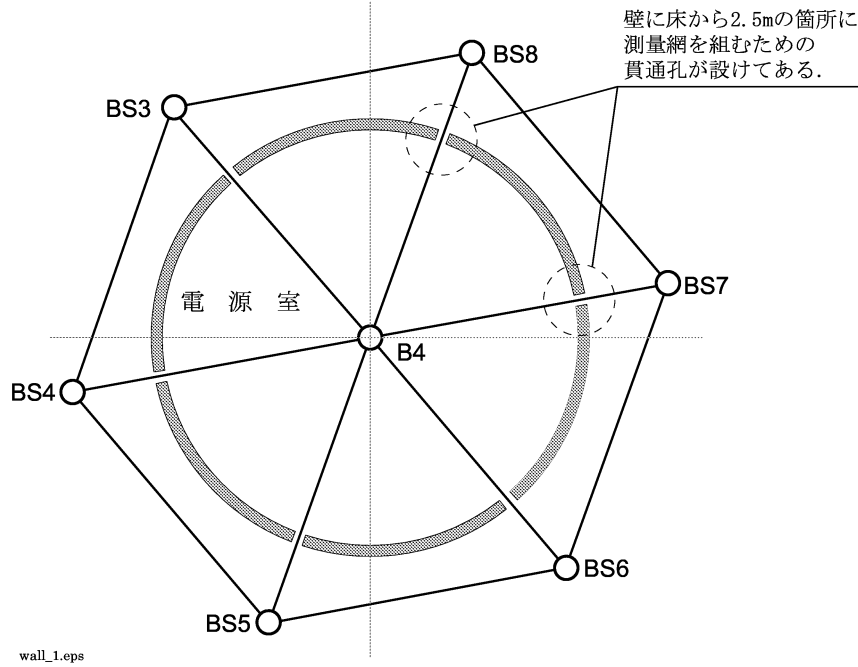


図 6.26: 測量用の壁の貫通孔

そこで、式(3.91) (54 頁参照) ,

$$m = m_0 \sqrt{Q}$$

によって、最適な測量網をデザインした。

図 6.28 は六角形の各頂点とその対角線を結ぶ最もシンプルな測量網である。

このシミュレーション計算に用いた測辺の距離は、設計座標を逆算して求めた距離である。すなわち、測定誤差のない距離を想定している。

このシミュレーションの結果から、 $\sqrt{Q_x}$, $\sqrt{Q_y}$ は約 0.55 である。

一方、測定精度 m_0 は使用する光波測距儀 MEKOMETER ME5000 の公称精度 $\pm(0.2 [mm] + 0.2ppm \cdot Dist.)$ であり、短距離なので距離に関する項である $0.2ppm$ を無視し、 $m_0 = \pm 0.2 [mm]$ として扱う。さらに、公称精度を 1σ とし、確実に得られる精度を $3\sigma = \pm 0.6 [mm]$ 程度として、 $m_0 = \pm 0.5 [mm]$ と設定した。

式(3.91),

$$m = m_0 \sqrt{Q}$$

に適用すると,

$$\begin{aligned} m &= m_0 \sqrt{Q_{x,y}} \\ &= \pm 0.5 [mm] \times 0.55 \\ &= \pm 0.28 [mm] \end{aligned} \tag{6.20}$$

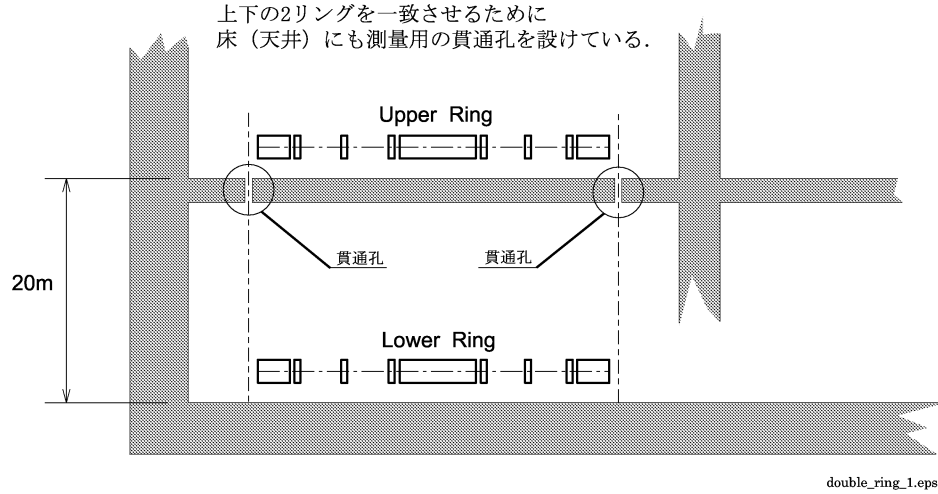


図 6.27: 上下リングを一致させる目的の貫通孔

となり，要求精度の $\pm 0.2 \text{ [mm]}$ より大きい．すなわち，図 6.28 の測量網では要求精度を達成できないことになる．

要求精度を満たす測量網は，

$$m = m_0 \sqrt{Q}$$

から，

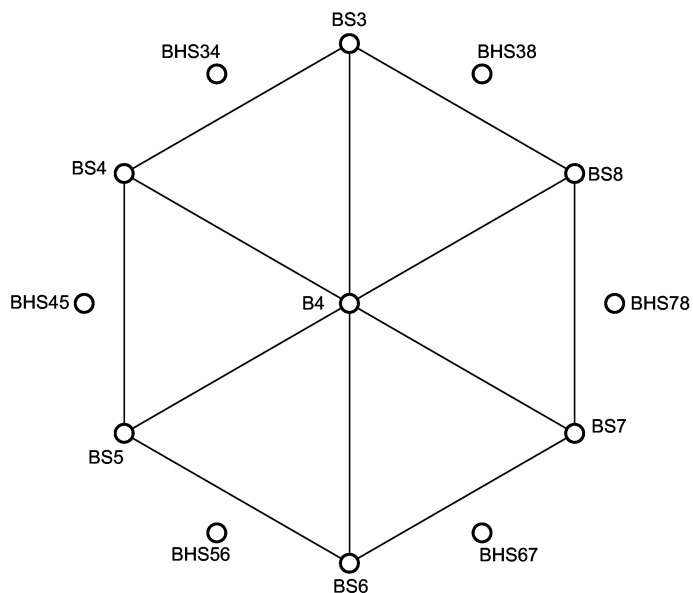
$$\pm 0.2 \text{ [mm]} \geq \pm 0.5 \text{ [mm]} \times \sqrt{Q_{x,y}} \quad (6.21)$$

したがって，

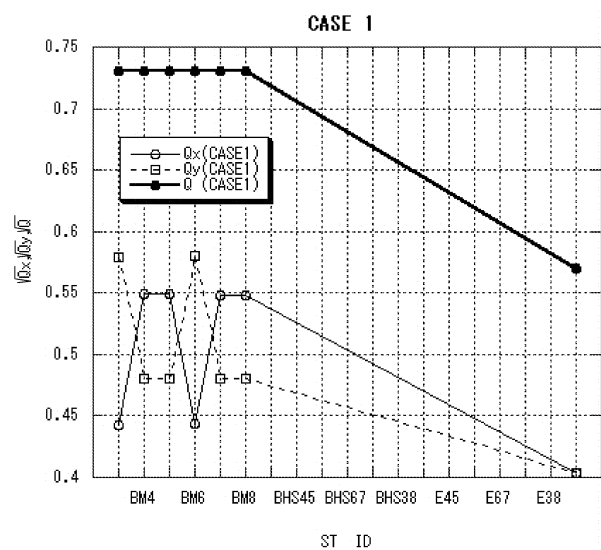
$$\sqrt{Q_{x,y}} \leq 0.4 \quad (6.22)$$

である．すなわち， $\sqrt{Q_{x,y}}$ が 0.4 以下の測量網を組めばよいことになる．

そこで，測辺を追加し，補助点（E 番号）を追加して（図 6.29～図 6.33 参照）測量網をシミュレーション計算した結果，図 6.32 の測量網を要求精度を達成できる測量網として決定した．



(a) CASE 1 の測量網

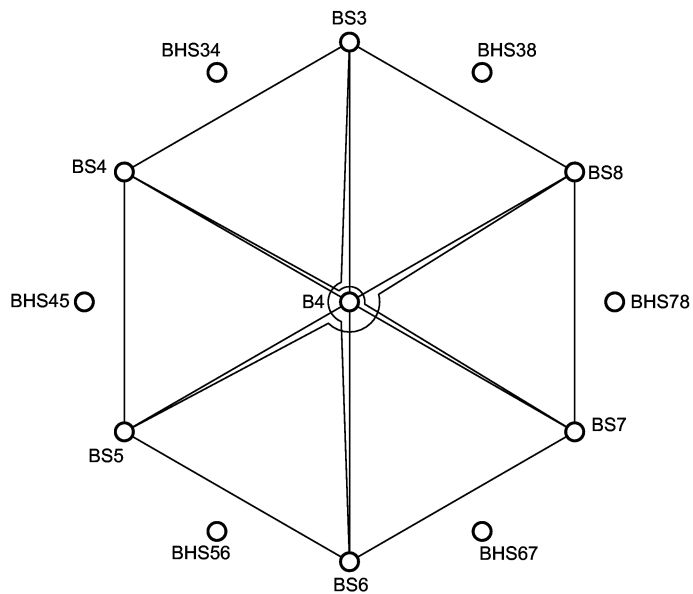


六角形の頂点と中心を
結ぶ最もシンプルな測量網

h_case1.eps

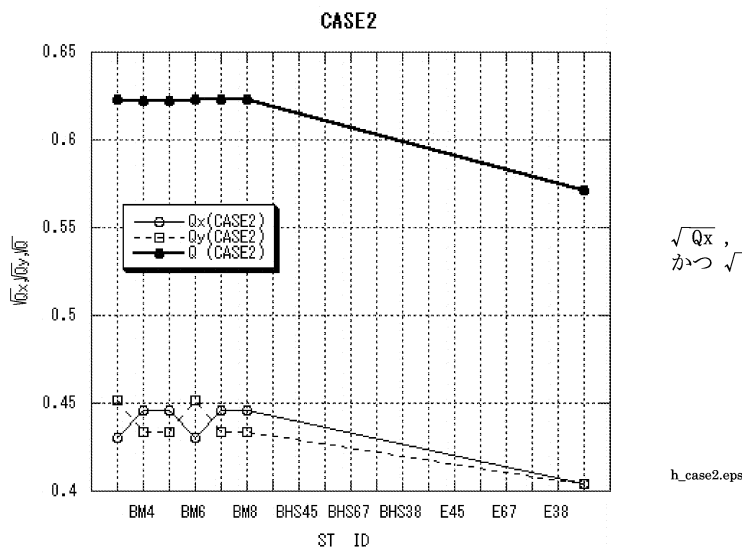
(b) CASE 1 の測量網の各点の \sqrt{Q}

図 6.28: CASE 1 : 最もシンプルな測量網の例



中心から各頂点を結ぶ
測辺に加えて対角の
頂点を結ぶ測辺を加えた。

(a) CASE 2 の測量網

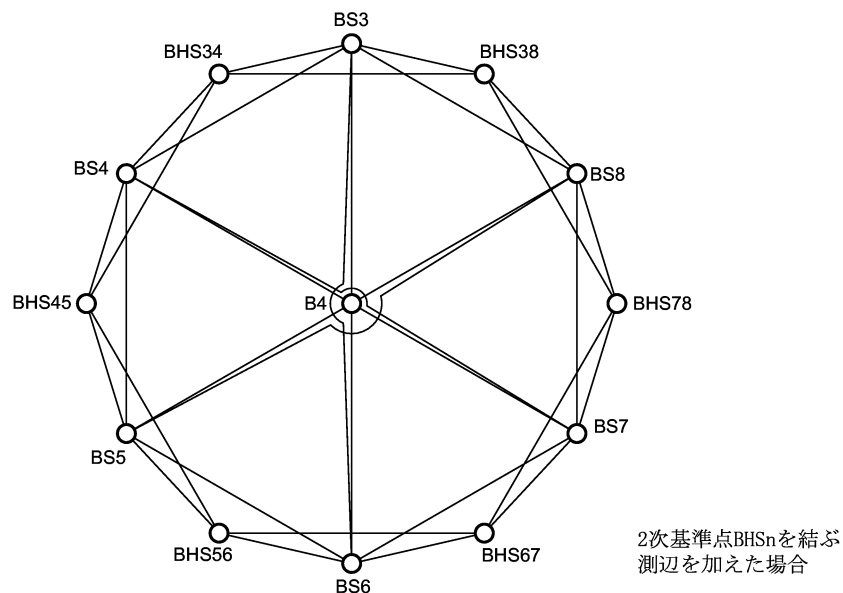


$\sqrt{Q_x}$, $\sqrt{Q_y}$ の差が小さくなり、
かつ \sqrt{Q} が改善された。

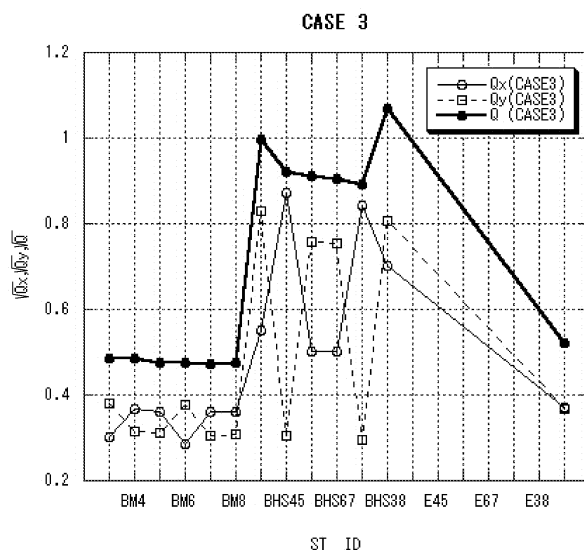
h_case2.eps

(b) CASE 2 の測量網の各点の \sqrt{Q}

図 6.29: 測量網のシミュレーション CASE 2



(a) CASE 3 の測量網



1次基準点 (BSn) の $\sqrt{Q_x}, \sqrt{Q_y}$ は、さらに小さくなり、これらを合成した \sqrt{Q} も改善された。

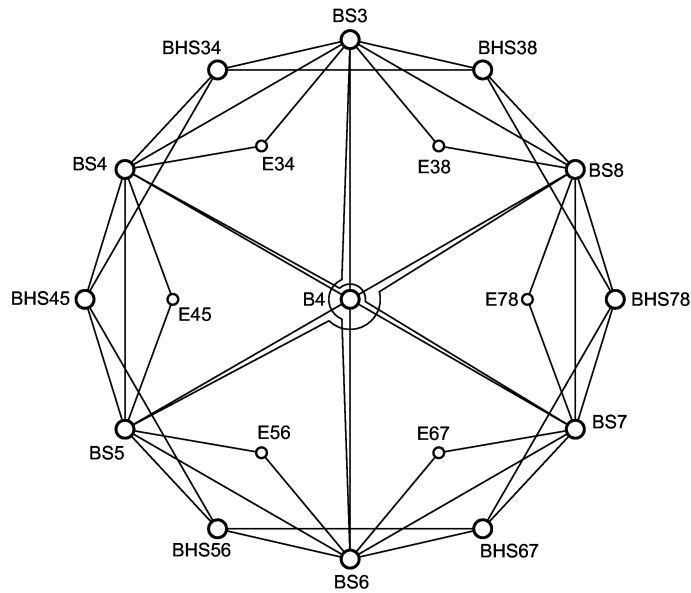
新たに加えた2次基準点 (BHSn) は、中心方向の測辺がないので \sqrt{Q} は2倍程度の大きさである。

BHS45とBHS78に中心方向からの測辺の効果が顕著である。中心からの方向とx軸がほぼ一致しているこれらの基準点は、y方向 (ビーム軌道方向) で小さいが、半径方向 (ビーム軌道と直角方向) となるx方向は大きい

(b) CASE 3 の測量網の各点の \sqrt{Q}

h_case3.eps

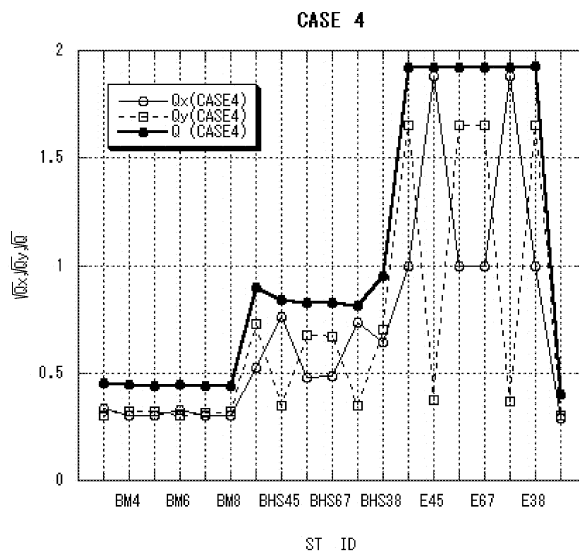
図 6.30: 測量網のシミュレーション CASE 3



2次基準点(BHSn)の \sqrt{Q} を改善
するために補点(En)を設けた。

補点は測量網を補強するために
設けたもので、後続のアライメント
には直接使用しない基準点である。

(a) CASE 4 の測量網

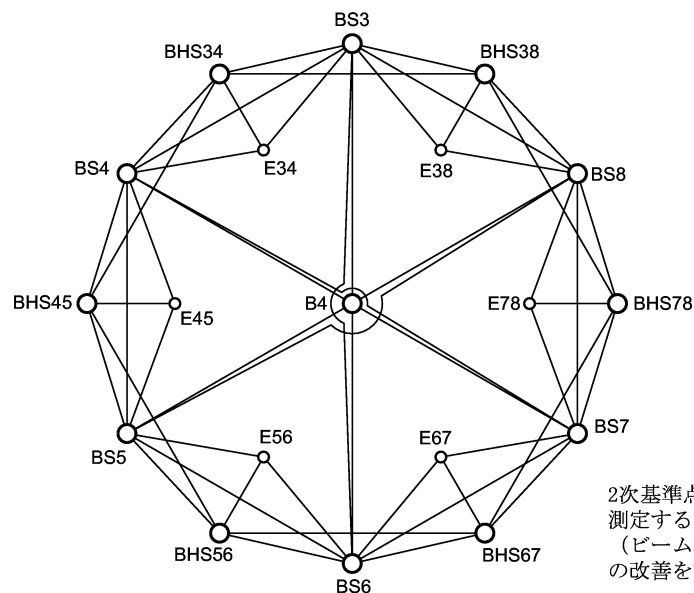


補点を設けたが、効果的な測辺で
関連づけていないために、
 $\sqrt{Q_x}, \sqrt{Q_y}, \sqrt{Q}$ は特に改善されない。

h_case4.eps

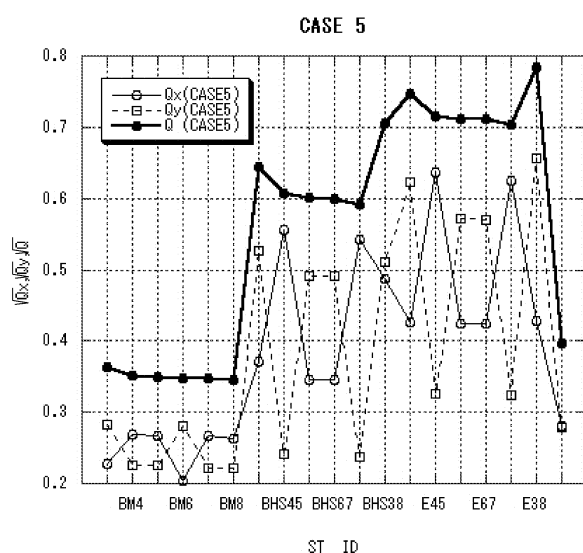
(b) CASE 4 の測量網の各点の \sqrt{Q}

図 6.31: 測量網のシミュレーション CASE 4



2次基準点(BHSn)と補点(En)を測定することによって半径方向(ビーム軌道に直角方向)の \sqrt{Q} の改善を試みた。

(a) CASE 5 の測量網



$\sqrt{Q_x}, \sqrt{Q_y}, \sqrt{Q}$ は全体的に改善が見られ、補点を設け、測辺で結ぶことが有効であった。

CASE3で問題としたBHS78とBHS45の場合、y方向(ビーム軌道方向)は大きな改善は見られないが、x方向(軌道直角方向)で大きな改善が見られる。

補点(En)については、後続のアライメントに供しないため、 \sqrt{Q} の大きさは問題とならない。

1次基準点は、目標の $\sqrt{Q} < 0.4$ を達成する測量網となった。

2次基準点は、偏向電磁石のアライメントに用いるため、これ以上の \sqrt{Q} の改善を求めることなく、この測量網を採用した。

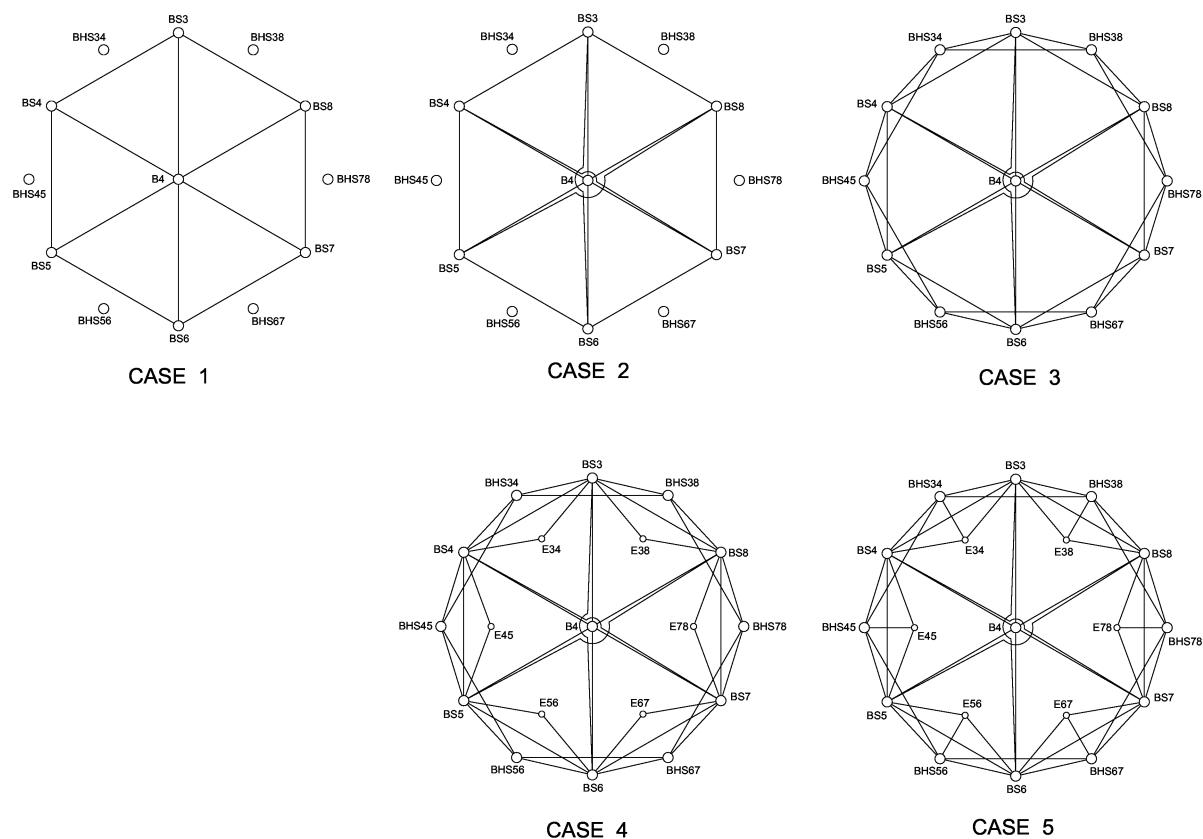
h_case5.eps

(b) CASE 5 の測量網の各点の \sqrt{Q}

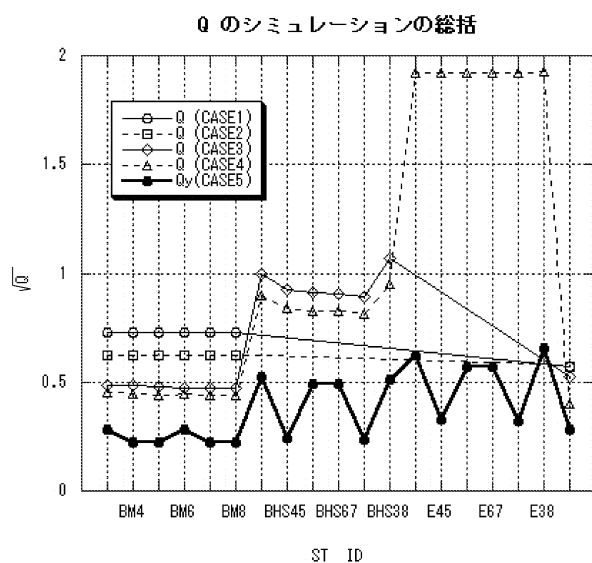
図 6.32: 測量網のシミュレーション CASE 5

\sqrt{Q} による測量網の最適化のシミュレーションの結果, CASE 5 の測量網で \sqrt{Q} が 0.4 以下になった. これ以上測量網に補助点を設けて測点あるいは測辺を増やすことは, 測量効率を著しく劣化させることになる. すなわち, 図 6.32 の測量網で要求精度を確保できるので, これを最終的な測量網として採用した.

図 6.33 は測量網とその \sqrt{Q} の関係をまとめたものである. \sqrt{Q} によってアラインメント精度を予測するとき, 多角形の測量網は精度を改善する方向の測辺の組を回転対称になるように追加することが容易である. すなわち, \sqrt{Q} による測量網の最適化は, HIMAC のように測量網が多角形で構成されるシンクロトロンに有効である.



(a) シミュレーションした測量網の一覧



有効な方向から測定することによって \sqrt{Q} が改善される。

\sqrt{Q} によって精度を予測する場合、多角形の測量網はシミュレーションが容易であり、HIMAC のように多角形で測量網が組成できるようなシンクロトロンには有効である。

(b) 各測量網の各点の \sqrt{Q}

h_Q_summary.eps

図 6.33: \sqrt{Q} のシミュレーションの総括

6.2.7 入射系，出射系との整合

シンクロトロンを設置する過程で，他の作業工程の関連から入射系と出射系が先に設置されていた．シンクロトロンが座標系の原点であるため原点を基準にシンクロトロンを設置すると入射系，出射系を調整する必要が生じた（図 6.34 参照）．そこで，入射系，出射系を調整せずに，シンクロトロンの正六角形の図形を保ったまま，これらに整合させるため，前述のフリーネットワーク解法による測定データの処理を行った．

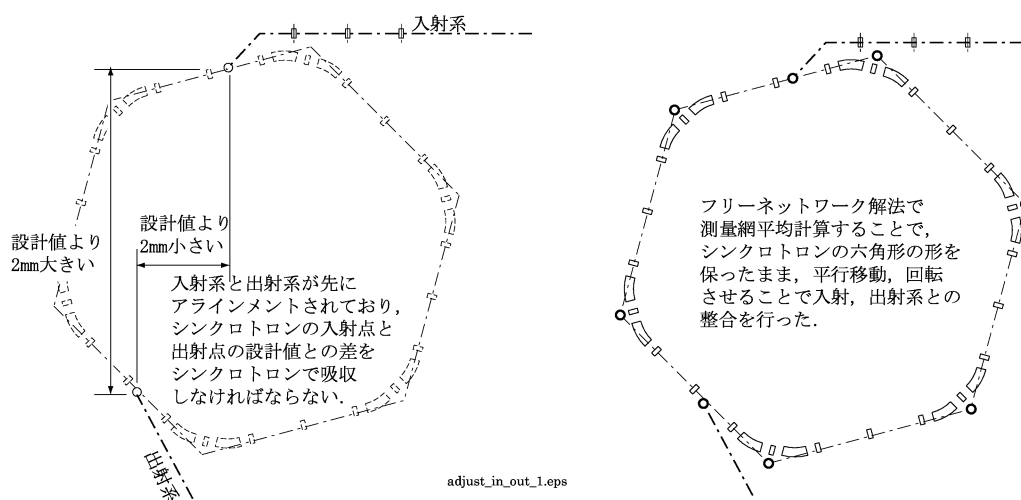


図 6.34: 入射系，出射系との不具合と整合

フリーネットワーク解法は固定点を必要としないため，設計座標からわずかなズレでシンクロトロンの位置が決定した．しかも，固定点（原点）の位置誤差あるいは誤差の累積がなく，純粋に測定精度に依拠する測定精度が得られる．また，入射系，出射系を調整することなく，シンクロトロンの位置を決定することができた．

6.2.8 アライメント測量の結果

上述の方法で HIMAC の測量を行った結果，最終的に上リングは表 6.7 (138 頁)，図 6.35(139 頁)，下リングについては，表 6.8(138 頁)，図 6.36(140 頁) の位置に決まり，その位置精度（誤差楕円）は，上リングが図 6.37(141 頁)，下リングが図 6.38(142 頁) である．

目標精度は，表 6.5(121 頁参照) のとおりである．1 次基準点 (BSn) は目標精度 $\pm 0.2[mm]$ 以内であり，誤差楕円の大きさから十分な精度をもった位置誤差であることが分かる．

2 次基準点 (BHSn) は一部で $\pm 0.2[mm]$ を越える基準点がある．しかし，2 次基準点は偏向電磁石のアライメントだけに用いるため，この位置誤差は許容した．

また，下リングの方がわずかに誤差が大きい．これは，上下のリングを一致させるため，上リングの基準点を先に決定し，床の貫通孔から下リングの基準点を合わせたためである．

測量方法は，概略の位置に基準点をセットし，測量し，設計座標との差 dx, dy を $x - y$ ステージで調整し，再び同じ測量を行い，要求精度の範囲内で所要の位置にあることを確認した．

表 6.7: 上リングの基準点の最終座標および精度（誤差楕円）

	設計値からの差		誤差楕円		
station ID	Azi[$^{\circ}$]	ℓ [mm]	θ [$^{\circ}$]	長軸 [mm]	短軸 [mm]
BS13	15	0.17	100	0.03	0.03
BS14	223	0.08	75	0.05	0.03
BS15	208	0.15	14	0.03	0.02
BS16	166	0.05	158	0.03	0.03
BS17	114	0.09	88	0.04	0.03
BS18	345	0.18	45	0.04	0.03
BHS134	179	0.21	107	0.06	0.03
BHS138	199	0.11	167	0.07	0.04
BHS145	109	0.02	49	0.07	0.03
BHS156	241	0.12	174	0.06	0.03
BHS167	254	0.03	110	0.06	0.03
BHS178	58	0.22	47	0.10	0.03

表 6.8: 下リングの基準点の最終座標および精度（誤差楕円）

	設計値からの差		誤差楕円		
station ID	Azi[$^{\circ}$]	ℓ [mm]	θ [$^{\circ}$]	長軸 [mm]	短軸 [mm]
BS3	305	0.12	136	0.02	0.02
BS4	118	0.17	79	0.03	0.02
BS5	162	0.06	4	0.02	0.01
BS6	147	0.05	150	0.02	0.02
BS7	231	0.18	87	0.03	0.02
BS8	349	0.09	15	0.03	0.02
BHS34	78	0.22	110	0.04	0.02
BHS38	9	0.26	169	0.05	0.02
BHS45	247	0.09	49	0.04	0.02
BHS56	157	0.13	0	0.04	0.02
BHS67	264	0.01	107	0.04	0.02
BHS78	261	0.14	51	0.05	0.02

- displacement Azimuth : direction of displacement vectors from HIMAC north
- error ellipse Azimuth : direction of major semiaxis from HIMAC north
- a : major semiaxis
- b : minor semiaxis

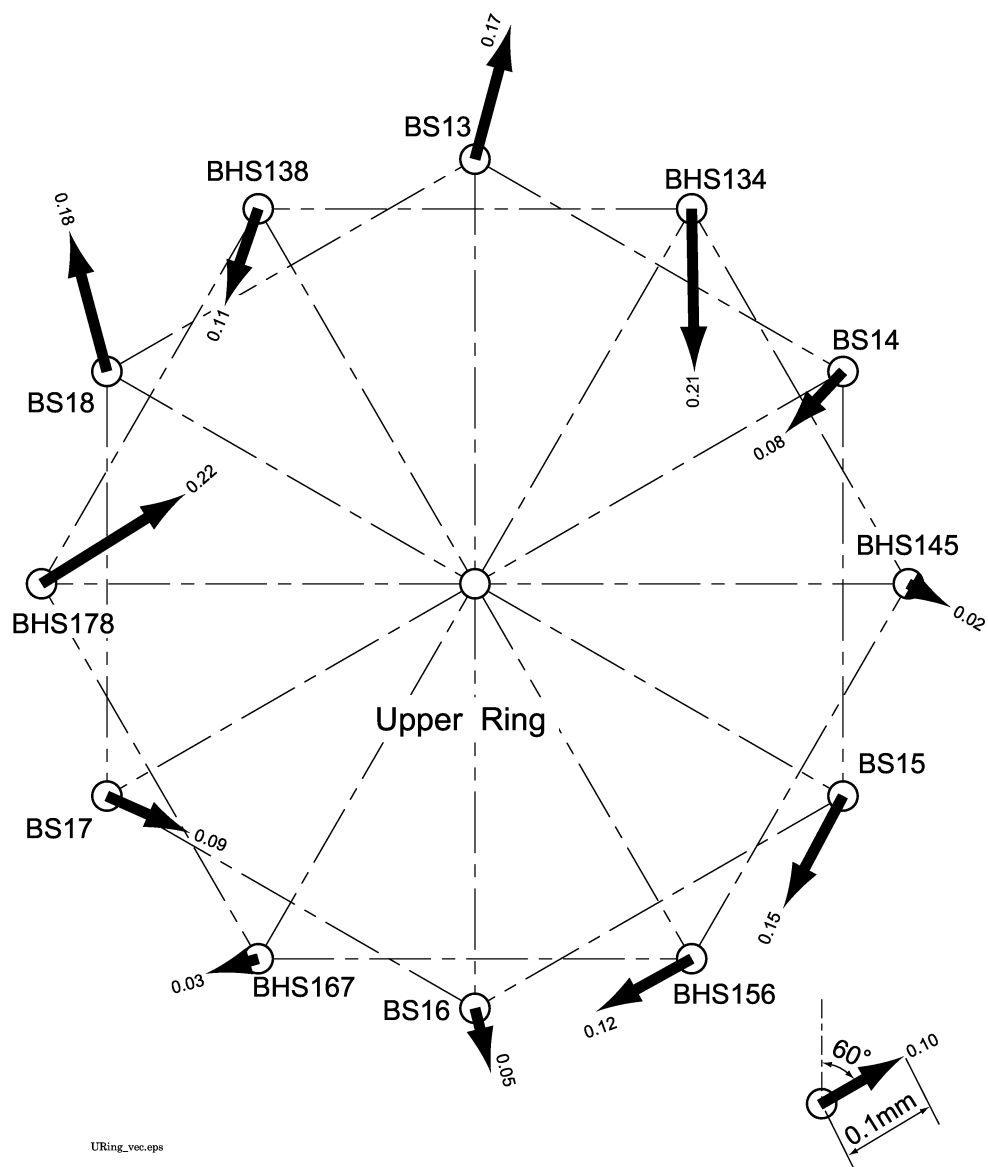


図 6.35: 上リングの最終位置と基準座標との差

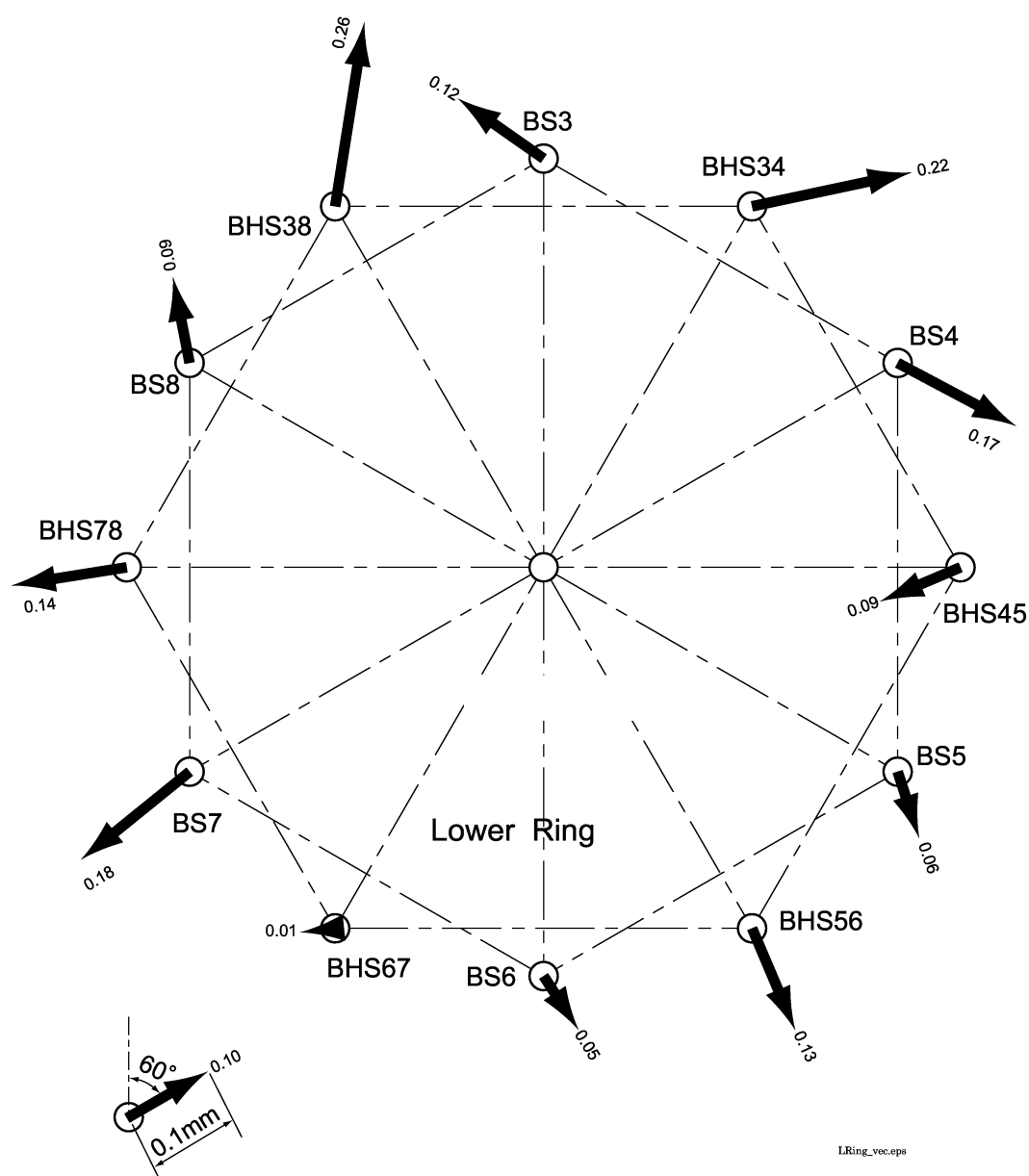


図 6.36: 下リングの最終位置と基準座標との差

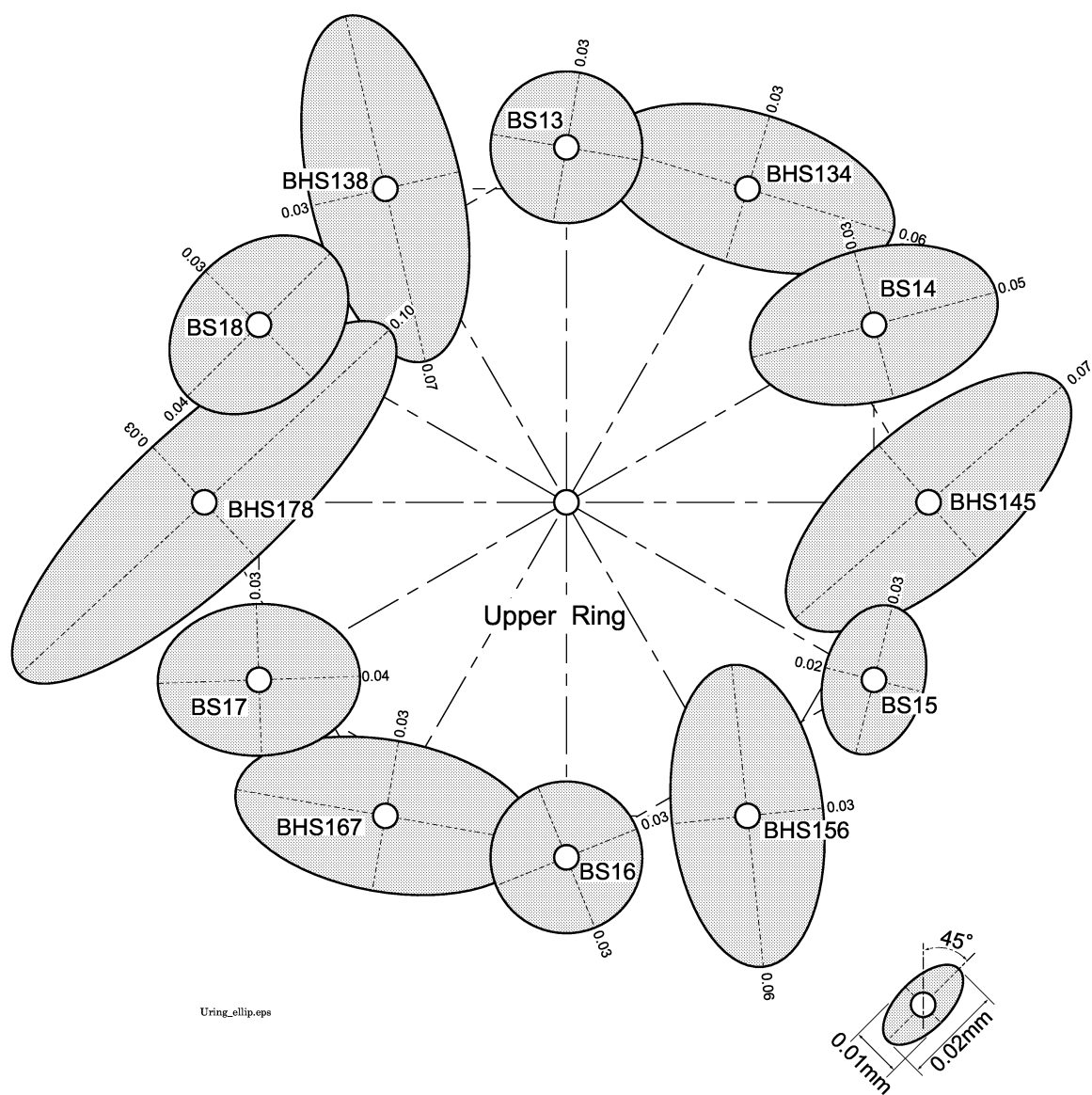


図 6.37: 上リングの誤差楕円の最終結果

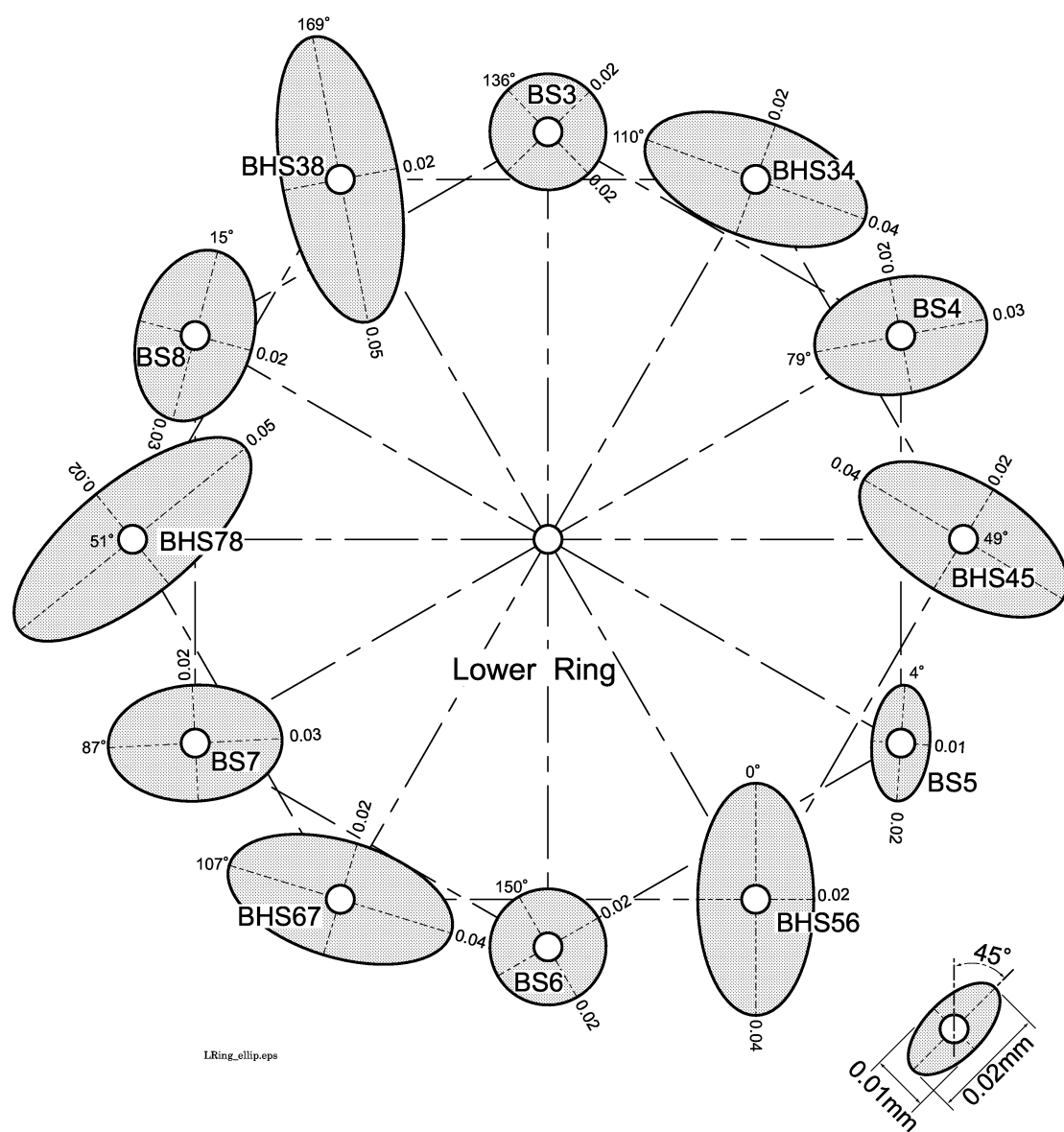


図 6.38: 下リングの誤差楕円の最終結果

表:6.7, 表:6.8 に示したように, 設計値からのズレの最大値は $0.26 [mm]$ 程度である.

240 辺の距離測定を実施し, 測定値の精度は測定平均距離 $17 [m]$ に対して, $\sigma_0 = \pm 0.09 [mm]$ であった. この測定精度は, 測量網をデザインするときに用いた $\sigma_0 = \pm 0.5 [mm]$ を上回る精度を得ることができ, 計画時に仮定した測定精度の妥当性と周波数補正システムの有効性が検証された.

また, 最確値の精度, すなわち座標の標準偏差である誤差楕円は, 最大値で $0.07 [mm]$ である. ただし, BS 基準点の誤差楕円は, 平均して $0.03 [mm]$ 程度である. 一方, BHS 基準点は, $0.06 [mm]$ 程度である. これは, BS 基準点は, 距離測定辺がシンクロトロン中心 (B4 または B14) から, あるいは対向する頂点を距離測定しているためである.

さらに, 偏向電磁石をアラインメントした後, 偏向電磁石上部の測量基準盤の C に MEKOMETER ME5000 をセットし, 短直線部 (short section), 長直線部 (long section) の長さを点検した (表:6.9 参照).

表 6.9: 偏向電磁石間の点検

section	between dipoles	Upper ring [mm]	lower ring [mm]
short section	BM2 - BM3	5,480.28	5,479.65
	BM4 - BM5	5,480.04	5,479.31
	BM6 - BM7	5,480.81	5,479.40
	BM8 - BM9	5,479.91	5,479.43
	BM10- BM11	5,480.55	5,479.59
	BM12- BM1	5,480.42	5,479.88
long section	BM1 - BM2	16,278.81	16,279.64
	BM3 - BM4	16,279.17	16,279.54
	BM5 - BM6	16,279.04	16,279.62
	BM7 - BM8	16,279.56	16,279.76
	BM9 - BM10	16,278.68	16,278.85
	BM11- BM12	16,278.84	16,278.86

その結果, 偏向電磁石間の直線部の最大と最小の較差が $0.9 [mm]$ 程度の区間がある. 2 重の正六角形の頂点を結ぶ線上に偏向電磁石を設置している. 2 重の正六角形は 30° で交差しているため, 正六角形の頂点の設計値とのわずかな差が, 30° の斜交した部分で増幅するためである. したがって, BHS 基準点の精度も BS 基準点の精度と同様に向上させる必要がある. しかし, 本シンクロトロンの建屋設計, 建設時にはシンクロトロン室に 2 重の正六角形の頂点を結ぶ貫通孔がないためこれ以上の BHS 基準点の精度を向上させることは困難である. したがって, 建屋の設計, 建設時から綿密に計画されたアラインメント測量計画が必要である.

また、4極電磁石などの他の機器は、3次元計測システム、インサイドマイクロゲージなどを用いてビーム方向（ s 方向）を調整している。特に、3次元計測システムは正六角形の頂点を基線にしているが、その方向は位置の誤差を増幅する方向ではないため、 0.3 [mm] 以内であった。さらに、ビーム直角方向（ x 方向）、高さ方向（ y 方向）も 0.1 [mm] 以内、機器の傾きも 0.2 [mrad] 以内であった。

6.3 測量とアラインメントの実施例の検討評価

6.3.1 SPS の場合

SPS の \sqrt{Q} と実測値による測量網平均計算の結果から、 \sqrt{Q} による測量網の最適化が測点の座標精度を確保することに有効であり、事前に精度を予測することで最小限の測量網で所要の精度を確保することができる。

表 6.10: シミュレーション結果と実測結果の SR2 の比較一覧表

CASE	シミュレーション結果		実 測 結 果						
	$\sqrt{Q_x}$	$\sqrt{Q_y}$	$\sqrt{Q_x}$	$\sqrt{Q_y}$	σ_x	σ_y	σ_o	長軸	短軸
1	0.63	0.49	0.643	0.489	0.09	0.07	0.15	0.09	0.08
2	0.51	0.48	0.470	0.346	0.08	0.05	0.16	0.08	0.07
3	0.48	0.35	0.466	0.341	0.07	0.05	0.15	0.07	0.05
4	0.38	0.33	0.378	0.337	0.06	0.05	0.16	0.06	0.05
5	0.29	0.31	0.289	0.313	0.05	0.05	0.16	0.05	0.05
6	0.98	0.45	0.976	0.446	0.15	0.07	0.15	1.48	0.05
7	0.38	0.31	0.382	0.312	0.06	0.05	0.15	0.07	0.06

上述のように SPS のストレージリングの場合、リングの中心に視通障害物がなく全ての測点を見通せる状態であるため、全測辺の距離を精密測定した。表 6.10 は、シミュレーション時の測量網に応じた測辺の組み合わせで最小 2 乗法のフリーネットワーク解法によって測量網平均計算を施した結果である。シミュレーション時の \sqrt{Q} とその測量網にしたがった実測値による \sqrt{Q} および、実測値の残差から求めた測定距離の標準偏差 σ_o [mm]、座標の標準偏差 σ_x [mm], σ_y [mm]、誤差楕円の長軸、短軸の長さである。座標の標準偏差は、 x, y 方向が誤差楕円の軸にほぼ一致している SR2 の結果を一覧表にしている

シミュレーション時の \sqrt{Q} と実測値による \sqrt{Q} はほぼ同じ結果であり、 \sqrt{Q} は測量網によって決定されることがわかる。

6.3.2 HIMAC の場合

表 6.5(121 頁)の要求精度にもとづいて測量網のデザインをした結果、図 6.32 (133 頁)の測量網を最適の測量網と決定した。その測量網に基づいて測量した距離データを最小 2 乗法のフリーネットワーク解法で求めた結果、図 6.35(139 頁)～図 6.38(142 頁)の結果を得た。

光波測距儀 MEKOMETER ME5000 の公称精度を、 $\pm(0.2[mm] + 0.2ppm \times \text{距離})$ であり、短距離なので、距離に関わる項 (0.2ppm) を無視し、シミュレーション時の

測定距離の精度を $m_o' = \pm 0.2[mm]$ として扱い、計画時の測定距離の標準偏差 $m_o = 3m_o' \doteq \pm 0.5[mm]$ としている。

実測の結果、測定精度は、240 辺の距離を測定して、平均辺長 $17[m]$ で、 $m_o = 0.09[mm]$ であり、MEKOMETER ME5000 の周波数を補正する方式が測定の精度向上に効果があることが確認できた。

座標を求めるために距離データを最小 2 乗法のフリーネットワーク解法で処理した結果、誤差楕円は要求精度を十分満たすものであり、 \sqrt{Q} による測量網のデザインの妥当性が検証できた。

6.3.3 SPS と HIMAC における実施例の総括

式(3.91)(54 頁) から

$$m = m_o \sqrt{Q}$$

に表されるように測点の座標を観測データの最小 2 乗法で得る場合、座標の精度 m は、測定精度 m_o と図形としての測量網の特徴を表す値と考えられる \sqrt{Q} によって決まる。

SPS と HIMAC の加速器リングの測量において、 \sqrt{Q} によって最適な測量網をデザインして、その測量網に基づいて測量した結果、所要の精度で測点の座標を求めることができ、この『測量網を \sqrt{Q} によって最適化する方法』が有効であることが確認できた。すなわち、計画段階での測量網の組み方によって座標の精度を決定することができ、精度の弱い方向に測辺を追加することで精度を改善することを定量的に扱うことが可能、あるいは精度をコントロールすることが可能となった。

実測データを用いた検証によって、SPS の場合、測定精度は $\sigma_o = 0.15[mm]$ 、HIMAC の場合、 $\sigma_o = 0.09[mm]$ であり、MEKOMETER ME5000 の公称精度 $\pm(0.2[mm] + 0.2ppm \times \text{Distance})$ を上回る精度を達成しており、周波数を補正するシステムが精密光波測距儀 MEKOMETER ME5000 の精度を改善させることに有効であることが確認できた。

また、 \sqrt{Q} による最適な測量網のデザインにおいて、MEKOMETER ME5000 の公称の分解能 $\pm 0.2[mm]$ を σ とし、99.7% の確率で得られる測定精度 m_o とし、 $m_o = 3\sigma \doteq \pm 0.5[mm]$ で必要な \sqrt{Q} の値を計算している。

一方、上述のように公称精度を上回る測定精度がコンスタントに得られるならば、計画時に設定する測定精度 m_o を見直すことが必要と思われ、今後の課題である。シミュレーション時の測定精度 m_o を正当に見積もることで、 \sqrt{Q} をこれまでより大きく（簡素な測量網に）しても所要の精度が得られることになる。

本来ならば、ファーストターンのビームモニターの結果と比較すべきであるが、測量からアラインメント、さらにビームのファーストターンまで時間の経過が長すぎて、アラインメントの結果が必ずしも反映されないこと、また、ビームモニターの精度の問題でミスアラインメントの結果を評価できるほどのポジション精度が期待できない

ことなどから COD の結果と比較はしていない．しかし，HIMAC の場合は，ファーストターンで軌道補正を行うことなくビームが安定して周回したことからこれらのアラインメント方法の有効性が確認できた．

第7章 総括結論

7.1 測量網のデザインにおける \sqrt{Q} の有効性

これまで、加速器のアラインメントは測量機材の器械精度に依存してきたため、測量機材の精度向上への関心が高かった。このことは測量とアラインメントの精度を向上させる意味で非常に重要なテーマであり、今後も精度向上の努力が必要となる。しかし、測量機材の精度向上は1次元的な精度を向上させることに他ならず、加速器リング全体のレイアウトを決定するような測量の結果は2次元の座標で表され、2次元的な精度の分布を向上させることが要求される。

加速器リングのアラインメントに使用する測点の xy 座標を最小2乗法によって求めるとき、測定値が距離によって構成される場合、残差ベクトル \mathbf{V} 、設計座標による測辺と測定値との差を観測値ベクトル \mathbf{L} 、設計座標に対する補正量ベクトル \mathbf{X} 、および測辺によって構成される係数行列 \mathbf{A} によって、観測方程式は次のように表される。

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{L}$$

この観測方程式を2乗し、微分してゼロとおいた正規方程式、

$$\mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{A}^t \mathbf{L}$$

において、 $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$ は測辺によって構成され、その逆行列 $(\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1}$ (フリーネットワーク解法の場合 $(\mathbf{A}^t \mathbf{A})^+$) の2重対角要素を \mathbf{Q} といい、これらも測量網の測辺によって構成されている。

一方、測点の xy 座標の精度は、座標軸方向の標準偏差 (m_x, m_y) と座標軸に対して傾きをもった誤差楕円として2次元分布で表現される。このとき誤差楕円は、 \mathbf{Q} の固有値と測定精度 m_o によって計算される。

xy 座標の座標軸方向の標準偏差 m_x, m_y は、 \sqrt{Q} と測定精度 m_o によって次のように計算される、

$$\begin{aligned} m_x &= m_o \sqrt{Q_x} \\ m_y &= m_o \sqrt{Q_y} \end{aligned}$$

このとき上述のように、 \mathbf{Q} は測量網の測辺によって構成される $(\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1}$ の各測点に対応する対角要素む 2×2 の部分行列である。したがって、測辺の構成によって、す

なわち測量網の形によって \sqrt{Q} は決定される。その結果、 m_o を仮定すれば、目標精度が達成可能な測量網であるか否かが計画段階で判断可能となる。

加速器リングの場合、測量網は多角形で構成されるため、多角形の辺数に応じて対称に測辺を増減することで \sqrt{Q} の値を調整でき、精度の高い方向、低い方向を計画段階で定量的に予測可能となる。その結果、アラインメントで有効な方向に対して精度を高めるなどの測量精度をコントロールすることを可能とした。

7.2 MEKOMETER ME5000 の測定精度の改善

前述の \sqrt{Q} を小さくすると同時に測定精度 m_o も向上させなければアラインメントの精度は向上しない。

距離だけの測量（三辺測量）のために、現在可搬型で高精度のレーザ測距儀である MEKOMETER ME5000 は、その変調周波数が不安定であるために測定距離の精度が劣化する場合がある。そこで、測定時に測距儀内部のシンセサイザーで組み立てた周波数（約 500[MHz]）を外部の高精度の周波数カウンターで周波数測定し、測定距離に補正するシステムを開発した。その結果、240 辺の距離測定に対して $\pm 0.09\text{mm}$ （平均辺長 17 m）の精度を達成し、システムの有効性を実証した。また、同時に測定効率の改善を可能とした。

7.3 測量データの処理方法に

フリーネット解法を用いることの有効性

観測データを最小 2 乗法によって座標を決定する場合、固定網平均計算は計算結果から得られた座標と設計座標の差の平均分を戻して設計座標にフィットさせる調整を施さなければならない。一方、フリーネットワーク解法は計算結果が既に設計座標に対して最小 2 乗的に釣り合う位置に決定される。その結果、固定網平均計算で必要とされる平行移動、回転の成分を戻す工程を省略可能となる。

また、固定網平均計算では固定点の標準偏差はゼロとなり、誤差が他の点に配分される。その結果、誤差の計算方法による見かけの標準偏差であるのか、測定値に由来する標準偏差であるのか、評価が難しい。一方、フリーネットワーク解法では各測点の標準偏差は、測定値と測量網の形によって決定される。したがって、測量の後で行われるアラインメントの座標参照点としての使用に耐えられるか否かの精度評価に有効である。

第8章 謝 辞

本研究をまとめるにあたり，ご指導を頂いた高エネルギー加速器研究機構および総合研究大学院大学遠藤有聲教授に深甚なる謝意を表する次第です。

実施例についてご協力頂いた，文部科学省放射線医学総合研究所重粒子線治療センター（HIMAC）の佐藤健次氏（現大阪大学教授）ならびに板野明史氏（現兵庫県粒子線治療センター）に深く感謝致します。

同じく実施例についてご協力頂いた，タイ王国王立加速器研究センター（NSRC : National Synchrotron Research Center）のSPS(Siam Photon Source) の Weerapong Pairsuwan 所長および石井武彦ジェネラルマネージャー（兼 Suranaree 大学教授）に深く感謝致します。

本研究の機会を与えて頂きました株式会社パスコの岩松俊男取締役総合技術センター長，小林罔雄取締役（現 GIS 関東社長）並びに貴重なご意見ご指導を頂いた測量網平均のフリーネットワーク解法の権威である同社最高技術顧問原田建久理学博士（現 KenQ 社長）に感謝致します。

さらに，株式会社パスコにおいて加速器のアラインメントを担当する工業計測チームの小松崎弘道氏，三島義徳氏，貞末道昭氏，阿部直宏氏をはじめとした方々にお礼申し上げます。

Appendix

ここでは，第 2 章『荷電粒子の軌道と加速器のアラインメント』(15 頁) の閉軌道の変形を表す式を導出するための補足として，

時間軸 t による表現：Appendix A(157 頁)；磁場中の荷電粒子の運動

軌道 s による表現：Appendix D(157 頁)；荷電粒子の軌道方程式の一般化について記述した*。

また，Appendix D のために，

曲線を 3 次元座標軸で表現：Appendix B(161 頁)

磁場方向成分表示：Appendix C(165 頁)

について記述した。

MEKOMETER ME5000 のシステム開発は，ME5000 の特異な測定方法に依拠するところが大きい。したがって，その特異な測定方法の説明のために，光波測距儀の一般論を Appendix E(179 頁) で補足として記述した。

最小 2 乗法を用いて測定データを処理する場合，固定点が存在する（固定網平均計算）場合と，固定点が存在しない（フリーネットワーク平均計算）場合があることは，本論中で述べたとおりである (26 頁参照)。

35 の『観測方程式と正規方程式』は，重み行列を単位行列として簡便に説明している。Appendix F (187 頁) では，補足のために通常の最小 2 乗法の考え方を記述した。

*参考文献 [22],[10],[22]

付 録 A 磁場中の荷電粒子の運動

本章は、後述する Appendix D 『荷電粒子の軌道方程式の一般化』(169 頁)における、軌道上の距離 s をパラメータとして表現した荷電粒子の軌道方程式を論じる準備として、時間 t をパラメータとして表現し、

(1) 偏向電磁石

(2) 4 極電磁石

の場合について述べる。

A.1 偏向電磁石中の荷電粒子の軌道方程式

偏向電磁石の場合、荷電粒子は一様な磁場中を運動することになる。ベータトロン振動の安定性を論じるときには加速のことは考えず、単に磁場の中の荷電粒子の運動のみを考えればよい。そこで、以下の議論では $\mathbf{E} = 0$ とおく。質量は一定とおけるので、軌道方程式は式 (2.1), (2.2) (15 頁) から、

$$m \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{A.1})$$

となる。

はじめに一様な磁場の中の荷電粒子の運動を考える。座標系として円柱座標を用い、式 (A.1) を r, θ, z 成分に分けると、

$$m \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) = e \left(r\dot{\theta} B_z - \dot{z} B_\theta \right) \quad (\text{A.2})$$

$$m \frac{1}{r} \frac{d \left(r^2 \dot{\theta} \right)}{dt} = e \left(\dot{z} B_r - \dot{r} B_z \right) \quad (\text{A.3})$$

$$m \ddot{z} = e \left(\dot{r} B_\theta - r \dot{\theta} B_z \right) \quad (\text{A.4})$$

となる。

式 (A.2) ~ (A.4) において、磁場の方向が z 軸を向いた一様磁場 ($B_z = B, B_r = B_\theta = 0$) では、 ω を角周波数の次元とし、

$$\omega = -e \frac{B}{m} \quad (\text{A.5})$$

とすると，軌道方程式は，

$$\begin{cases} \ddot{r} &= r\dot{\theta}(\dot{\theta} - \omega) \\ \ddot{\theta} &= -\frac{\dot{r}}{r}(2\dot{\theta} - \omega) \\ \ddot{z} &= 0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

となる．式 (A.6) を解くために z 軸に垂直な面内にあり速度 \mathbf{v} をもつ粒子の運動を考える．いま，運動の方向と直角な直線上にあって，粒子から $r_0 = v/\omega$ の距離だけ離れた点を原点とすると，運動の初期条件は， $t = 0$ において，

$$\dot{r} = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\dot{\theta} = \frac{v}{r_0} = \omega \quad (\text{A.8})$$

である．式 (A.6) に式 (A.7), (A.8) を代入すると $\ddot{r} = \ddot{\theta} = 0$ ，すなわち \dot{r} と $\dot{\theta}$ はともに時間的に変化しない（加速度 = 0）． \dot{r} , $\dot{\theta}$ は常に $t = 0$ のときの値（式 (A.7), (A.8)）をとり続けるので，結局，式 (A.6) の解として，

$$r = r_0 = \frac{v}{\omega} \quad (\text{A.9})$$

$$\theta = \omega t + \theta_0 \quad (\text{A.10})$$

が求められる．すなわち，一様磁場の下で磁場に直角な面内で荷電粒子が行う運動が，角周波数 ω ，半径 r_0 の円運動である．

また，式 (A.5) と式 (A.9) を用いると，運動量 p ，曲率半径 r_0 ，磁束密度 \mathbf{B} の関係は，

$$p = -er_0B \quad (\text{A.11})$$

である．

A.2 4極電磁石中の荷電粒子の軌道方程式

4極電磁石の場合，荷電粒子は軸対称の分布をもつ（ $\mathbf{B}_\theta = 0$ ）磁場中を運動することになる．4極あるいは6極の電磁石は磁極の中心面（median plain）にたいして上下対称の構造をもっており，中心軌道はこの面内にある．

原点を中心とする半径 r_0 の円周上の磁束密度を \mathbf{B}_0 とすると，半径 r_0 の円は，運動量 $p = er_0\mathbf{B}_0$ （式 (A.11) *）の粒子に対して閉軌道になる．したがって，磁極の中心内にあって半径 r_0 の円軌道を中心軌道と選ぶ．以下の取り扱いにおいては，粒子

*ここでは絶対値のみを問題とするのでマイナス符号は省略した

は中心軌道のごく近傍を運動するものと仮定し、ベータトロン振動の振幅は中心軌道の半径に比べて十分小さいものとする。

円柱座標においては、粒子の速度は、

$$\boldsymbol{v} = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2} \quad (\text{A.12})$$

である。粒子の軌道のずれが中心軌道半径に比較して十分小さいときには、速度の r 成分と z 成分は θ 成分に対して十分に小さいと見なせるので、十分によい近似で、

$$\boldsymbol{v} \doteq r\dot{\theta} \quad (\text{A.13})$$

とおくことができる。このようなときには、磁場中の荷電粒子の軌道方程式 (2.1), (2.2) はそれぞれ、

$$\ddot{r} = \frac{ev}{m} \boldsymbol{B}_z + \frac{v^2}{r} \quad (\text{A.14})$$

$$\ddot{z} = -\frac{ev}{m} \boldsymbol{B}_r \quad (\text{A.15})$$

となる。

x 方向 (半径方向: r 方向) の運動は、軌道が中心軌道に近いことから $r = r_0 + x$ (x は微小量) とおく。また、磁束密度についても中心軌道の周囲で展開してその 1 次の項までを残すし、半径方向の距離の微小変化に対する磁場の変化の割合を n (磁場指数: field index) とすると、

$$n = -\frac{\frac{r_0}{\boldsymbol{B}} \frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{B}_z}}{\quad} \quad \text{or} \quad \boldsymbol{B}_z \doteq \boldsymbol{B} - \frac{n\boldsymbol{B}}{r_0} x \quad (\text{A.16})$$

となる。したがって、

$$n = -\frac{r_0}{\boldsymbol{B}} \frac{\partial \boldsymbol{B}_z}{\partial r} \quad (\text{A.17})$$

となる。式 (A.17) を式 (A.14) に代入し、式 (A.5) と $\boldsymbol{v} = r_0\omega$ を用いると、 x に関する軌道方程式は、

$$\ddot{x} + \omega^2 n x = 0 \quad (\text{A.18})$$

となる。

次に z 方向の運動を考える。中心軌道上では \boldsymbol{B} の半径方向の成分はゼロであるから、 \boldsymbol{B}_r は、

$$\boldsymbol{B}_r \doteq \frac{\partial \boldsymbol{B}_r}{\partial z} z \quad (\text{A.19})$$

と近似することができる．磁場の性質から $\text{rot}\mathbf{B} = 0$ が成り立つことから，

$$\frac{\partial \mathbf{B}_r}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial r} \quad (\text{A.20})$$

となる．これを式 (A.15) に代入すると， z に関する軌道方程式，

$$\ddot{z} + \omega^2 n z = 0 \quad (\text{A.21})$$

となる．

式 (A.18) と式 (A.21) は単振動することを表している．これらが，軸対称磁場（4極電磁石）の中でのベータトロン振動を記述する式である．

付 録 B 曲線の表現の一般論

Appendix A では、荷電粒子の軌道方程式を時間 t をパラメータとして表現したが、ここでは荷電粒子の軌道方程式を軌道上の距離 s をパラメータとして表現するための準備に、3次元空間上での曲線の記述方法として、曲線を曲率とねじれの度合い（捩率）で表現するセレーフレネの公式を示す*。

B.1 パラメータによる曲線の表現

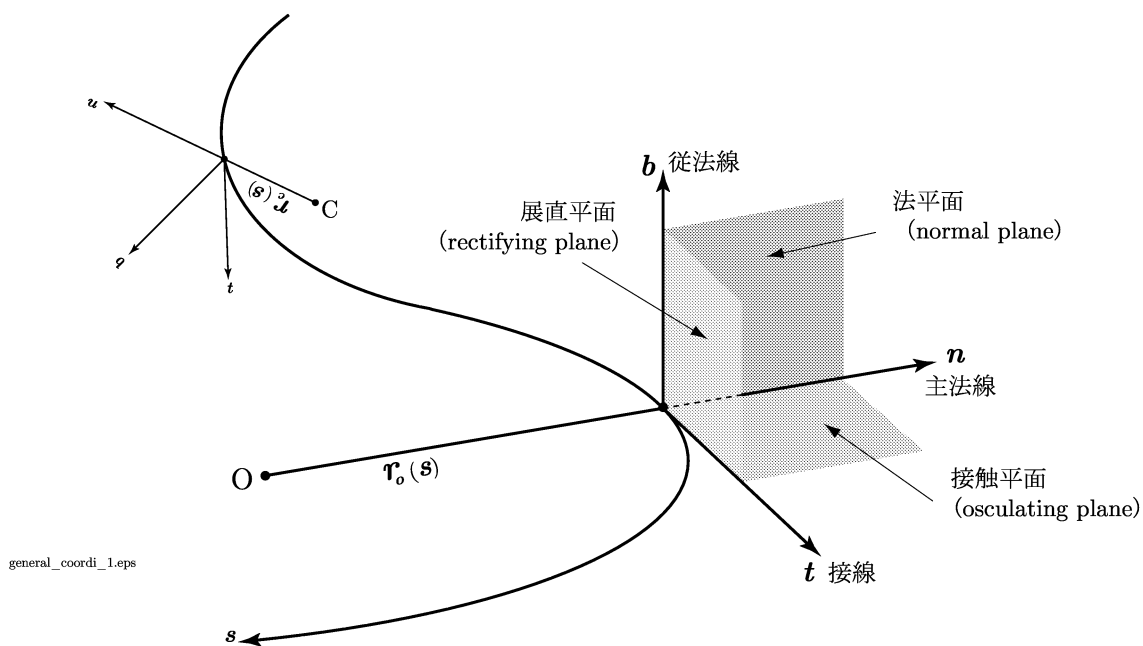


図 B.1: 一般化した座標系

図 B.1 のように、荷電粒子の運動の中心軌道を、

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o(s) \quad (\text{B.1})$$

*参考文献 [24],[25]

とした場合，曲線座標または一般座標を (x, s, z) として，空間の任意の点 P は，

$$\mathbf{r}(x, s, z) = \mathbf{r}_o(s) + x\mathbf{n}(s) + z\mathbf{b}(s) \quad (\text{B.2})$$

で記述することができる．したがって，軌道上の位置 s を変数として粒子の位置を表現することができる．

B.2 曲線を表現する基線ベクトル間の関係

表 B.1: 空間曲線の公式

曲線 (Curvature)	$\mathbf{r}(x, s, z) = \mathbf{r}_o(s) + x\mathbf{n}(s) + z\mathbf{b}(s)$
接線 (Tangent)	$\mathbf{t}(s) = \mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}_o}{ds}$
主法線 (Principal normal)	$\mathbf{n} = \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{t}' = \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{r}'' = \rho\mathbf{r}''$
従法線 (Binormal)	$\mathbf{b} = \mathbf{n} \times \mathbf{t} = \frac{1}{G(s)}(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')$
曲率 (Curvature)	$G(s) = \mathbf{t}' = \mathbf{r}'' $
ねじれ率 (torsion)	$\kappa(s) = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}'$
曲率半径 (radius of Curvature)	$\rho = \frac{1}{G(s)}$

図 B.1 における式 (B.1) のように，荷電粒子の運動の中心軌道を，

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o(s)$$

とする．ここで， s は曲線に沿った軌道の長さである． \mathbf{t} を曲線の接線方向の単位ベクトル (tangent vector) とする．図 B.1 から，

$$\mathbf{r}_o + d\mathbf{r}_o = \mathbf{r}_o + ds \cdot \mathbf{t} \quad (\text{B.3})$$

である．したがって，

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d\mathbf{r}_o}{ds} \quad (\text{B.4})$$

となる．

また，曲率を $G(s)$ で表し，曲率の中心が原点 O の側にある場合に $G > 0$ であるように符号を定めると，

$$\mathbf{t} + d\mathbf{t} = \mathbf{t} - Gds \cdot \mathbf{n} \quad (\text{B.5})$$

である。したがって、

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = -G(s)\mathbf{n} \quad (\text{B.6})$$

となる。

\mathbf{n} は曲線中心から外に向かう単位ベクトルで、主法線ベクトル (principal normal vector) とする。 $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$ を s で微分して得られる関係式

$$\mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = 0 \quad (\text{B.7})$$

のように、 \mathbf{t} と \mathbf{n} は直交している。そこで、

$$\mathbf{n} \times \mathbf{t} = \mathbf{b} \quad (\text{B.8})$$

となるベクトルをつくる。これは \mathbf{n} と \mathbf{t} に垂直なベクトルであって、これを従法線ベクトル (binormal vector) とする。

\mathbf{t} のまわりの \mathbf{b} の回転として曲線のねじれの定義を、 $\mathbf{b}(s)$ と $\mathbf{b}(s + ds)$ のなす角を $d\phi$ とするとき、

$$\kappa(s) = \frac{d\phi}{ds} \quad (\text{B.9})$$

とする。 κ の符号を \mathbf{b} が \mathbf{t} に対して右ネジの回転する場合を正とすると、

$$\mathbf{b} + d\mathbf{b} = \mathbf{b} + \kappa ds \cdot \mathbf{n} \quad (\text{B.10})$$

である。したがって、

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \kappa(s)\mathbf{n} \quad (\text{B.11})$$

である。単位ベクトルの関係 $\mathbf{n} = \mathbf{t} \times \mathbf{b}$ を s で微分すると、

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = G(s)\mathbf{t} - \kappa(s)\mathbf{b} \quad (\text{B.12})$$

となる．式 (B.4) ～ (B.12) が，曲線が $\mathbf{r} = \mathbf{r}_o(s)$ で与えられたときの Serret-Frenet の公式である．

したがって，曲線座標または一般座標を (x, s, z) とした場合，空間の任意の点 P は，

$$\mathbf{r}(x, s, z) = \mathbf{r}_o(s) + x\mathbf{n}(s) + z\mathbf{b}(s) \quad (\text{B.13})$$

で記述することができる．

すなわち，軌道上の位置を変数として粒子の位置を表現することができる．

基線ベクトル間の関係を，表 B.1 にまとめた．

付 録 C 磁場の方向成分

ここでは、次章 Appendix D の『荷電粒子の軌道方程式の一般化』(169 頁) の式 (D.7),

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{n} + B_s \mathbf{t} + B_z \mathbf{b}$$

の準備として、磁場を

$$\begin{aligned} \text{粒子の軌道と直角方向 (水平方向)} &: \mathbf{x} \\ \text{粒子の軌道の接線方向} &: \mathbf{t} \\ \text{粒子の軌道と直角方向 (鉛直方向)} &: \mathbf{z} \end{aligned}$$

の方向に分解する方法を示す*.

C.1 磁場の方向成分表示

電流のない空間, すなわち $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ の成り立つ場合には, 磁場 (ベクトル) \mathbf{B} は次式 (C.1) の磁束密度 (スカラーポテンシャル) Φ の勾配によって与えられる.

$$\mathbf{B} = \text{grad } \Phi \quad (\text{C.1})$$

一般にスカラーポテンシャル ϕ は,

$$\Phi(x, z, s) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[\frac{a_{mn}}{m!n!} \right] x^m z^n \quad (\text{C.2})$$

のように展開できる. $\text{div} (\text{rot } \mathbf{B}) = 0$ であるから[†], スカラーポテンシャル Φ はラプラス方程式,

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{1+Gx} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[(1+Gx) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{1+Gx} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right) \right\} \quad (\text{C.3})$$

*粒子の進行方向 \mathbf{t} は, 時間 t とは異なる

[†] $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$

を満たさねばならない．そのためには，係数 $a_{mn}(s)$ は次のような漸化式を満たす必要がある．代表的な係数を列举すると，

$$\begin{aligned}
a_{02} &= -a''_{00} - Ga_{10} - a_{20} \\
a_{12} &= 2G''_{00} + G'a'_{00} - G^2a_{10} - Ga_{20} - a_{30} \\
a_{22} &= \dots \\
a_{03} &= -a''_{01} - Ga_{11} - a_{21} \\
a_{13} &= 2Ga''_{01} + G'a'_{11} + G^2a_{21} - a_{31} \\
a_{23} &= \dots
\end{aligned} \tag{C.4}$$

である．なお， \prime は s に関する微分[‡]である．

式 (C.4) では， a_{m0}, a_{m1} およびその微分が与えられると，その他の $a_{mn}(s)$ は漸化式 (C.4) によって次々に決定される．

式 (C.1) , (C.2) から，

$$\begin{aligned}
B_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\
&= \left(a_{10} + a_{20}x + \frac{a_{30}x^2}{2!} + \frac{a_{40}x^3}{3!} + \dots \right) \\
&\quad + \left(a_{11} + a_{21}x + \frac{a_{31}x^2}{2!} + \frac{a_{41}x^3}{3!} + \dots \right) z \\
&\quad + (a_{12} + a_{22}x + \dots) \frac{z^3}{2!} + \dots
\end{aligned} \tag{C.5}$$

$$\begin{aligned}
B_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\
&= \left(a_{01} + a_{11}x + \frac{a_{21}x^2}{2!} + \frac{a_{31}x^3}{3!} + \dots \right) \\
&\quad + \left(a_{02} + a_{12}x + \frac{a_{22}x^2}{2!} + \dots \right) z \\
&\quad + (a_{03} + a_{13}x + \dots) \frac{z^2}{2!} + \dots
\end{aligned} \tag{C.6}$$

$$\begin{aligned}
B_s &= \frac{1}{1+Gx} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial s} \\
&= \frac{1}{1+Gx} \left[\left(a'_{00} + a'_{10}x + \frac{a'_{20}x^2}{2!} + \dots \right) \right. \\
&\quad + \left(a'_{01} + a'_{11}x + \frac{a'_{21}x^2}{2!} + \dots \right) z \\
&\quad \left. + \left(a'_{02} + a'_{12}x + \frac{a'_{22}x^2}{2!} + \dots \right) \right] \frac{z^2}{2!} + \dots
\end{aligned} \tag{C.7}$$

[‡] $a'_{mn} = \frac{da'_{mn}(s)}{ds}$

式 (C.5) ～ (C.7) の係数は, 中心軌道上 ($x = z = 0$) の磁場成分を用いて,

$$\begin{aligned}
 a'_{00} &= \mathbf{B}_{s0} \\
 a_{01} &= \mathbf{B}_{z0} \\
 a_{10} &= \mathbf{B}_{x0} \\
 a_{11} &= \left(\frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial x} \right)_0 \\
 a_{20} &= \left(\frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial x} \right)_0 \\
 a_{21} &= \left(\frac{\partial^2 \mathbf{B}_z}{\partial x^2} \right)_0 \\
 a_{30} &= \left(\frac{\partial^2 \mathbf{B}_x}{\partial x^2} \right)_0 \\
 a_{31} &= \left(\frac{\partial^3 \mathbf{B}_z}{\partial x^3} \right)_0 \\
 a_{40} &= \left(\frac{\partial^3 \mathbf{B}_x}{\partial x^3} \right)_0 \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

となる.

$m+n$ は展開の次数であり, このような磁場の成分が $2(m+n)$ 極磁極である. また,

n が奇数の成分	:	磁力線が x 軸を垂直に横切る成分 加速器で使用する通常の成分
n が偶数の成分	:	磁力線が x 軸と交差しない ねじれ (skew) 成分

通常の加速器では,

- 偏向作用 : 2 極磁場 ; $a_{01} = \mathbf{B}_{z0}$
- 集束作用 : 4 極磁場 ; $a_{11} = \left(\frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial x} \right)_0$

が主成分であり, その他の成分は微小量として誤差あるいは補正量として扱う.

C.2 磁場を方向成分に分解した効果

式 (C.5) ～ (C.7) は, 次章 Appendix D(169 頁) の式 (D.8),(D.9)

$$\begin{aligned}\left(\frac{ds}{dt}x'\right)' &= (1+Gx)\left(\frac{ec^2B_z}{E} + G\frac{ds}{dt}\right) - \frac{ec^2B_s}{E}z' \\ \left(\frac{ds}{dt}z'\right)' &= \frac{ec^2B_s}{E}x' - \frac{ec^2B_x}{E}(1+Gx)\end{aligned}$$

を求める際に重要である.

付 録 D 荷電粒子の軌道方程式の一般化

Appendix A では，荷電粒子の軌道方程式を時間 t をパラメータとして表現したが，荷電粒子の軌道方程式を軌道上の距離 s をパラメータとして表現する．

ここではビーム偏向は偏向電磁石（BM）で，ビーム集束は4極電磁石（ Q_f ， Q_d ）で行う機能分離型リングでの荷電粒子の軌道方程式について論じる．

D.1 磁場中の荷電粒子の運動の一般化

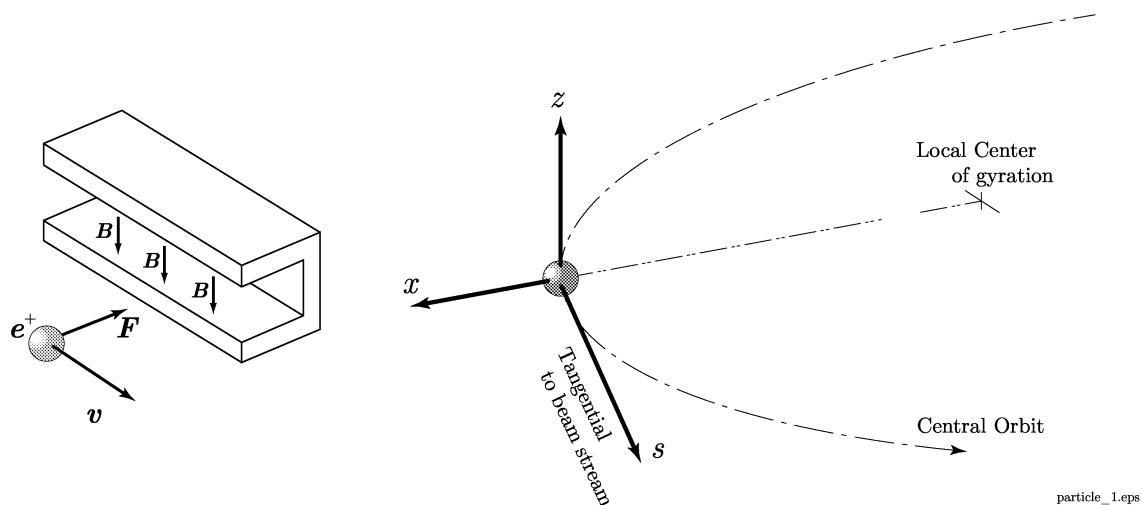


図 D.1: 磁場中の荷電粒子の軌道

時間 t で表された荷電粒子の軌道方程式は，式 (2.1)，(2.2) (15 頁) と式 (A.1) (157 頁)，さらに図 D.1 のように，磁場中の荷電粒子に働くローレンツ力によって，

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = e \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} \right) \quad (\text{D.1})$$

である．

この式 (A.1) の独立変数を時間 t から荷電粒子の軌道 s に変換するために，曲線のねじれ率 (式 (B.9):163 頁) $\kappa = 0$ と仮定して ds/dt をつくる．式 (D.1) を s で微分し，Serret-Frenet の公式 (式 (B.13) ; 164 頁) から，

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = (1 + Gx)\mathbf{t} + x'\mathbf{n} + z'\mathbf{b} \quad (\text{D.2})$$

となる (G : 曲率). したがって,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = [(1 + Gx)\mathbf{t} + x'\mathbf{n} + z'\mathbf{b}] \frac{ds}{dt} \quad (\text{D.3})$$

となる. さらに,

$$E = mc^2 \quad (\text{D.4})$$

ここに,

$$\begin{aligned} E &: \text{エネルギー} \\ m &: \text{質量} \\ c &: \text{光速} \end{aligned}$$

から,

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = v = \frac{pc^2}{E} \quad (\text{D.5})$$

である. したがって,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{pc^2}{E} [(1 + Gx)^2 + x'^2 + z'^2]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{D.6})$$

となる.

一方, 磁場を 3 次元の各方向成分のベクトル和として表すと,

$$\mathbf{B} = B_x\mathbf{n} + B_s\mathbf{t} + B_z\mathbf{b} \quad (\text{D.7})$$

となる. したがって, 式 (C.5) ~ (C.7), 式 (D.3), (D.7), を (D.1) に代入すると,

$$\left(\frac{ds}{dt} x' \right)' = (1 + Gx) \left(\frac{ec^2 B_z}{E} + G \frac{ds}{dt} \right) - \frac{ec^2 B_s}{E} z' \quad (\text{D.8})$$

$$\left(\frac{ds}{dt} z' \right)' = \frac{ec^2 B_s}{E} x' - \frac{ec^2 B_x}{E} (1 + Gx) \quad (\text{D.9})$$

となる．これが磁場にねじれないとき（磁力線が x 軸を垂直に横切る：偏向電磁石）の一般座標系での荷電粒子の軌道方程式である．

最終的に、『誤差』のない磁場の中を中心軌道のまわりを運動する荷電粒子に関する軌道の方程式（ベータトロン振動）は、

$$x'' + \left(\frac{1-n}{\rho^2} \right) x = 0 \quad (\text{D.10})$$

$$z'' + \frac{n}{\rho^2} z = 0 \quad (\text{D.11})$$

となる．ここで、

ρ : G の逆数で曲率半径

n : 半径方向の距離に対する磁場の変化の割合 (field index)

n は、式 (A.17) で表され、

$$n = -\frac{r_0}{B} \frac{\partial B_z}{\partial r} \quad (\text{D.12})$$

である．

式 (D.10) , (D.11) は軌道上の位置 s の関数として粒子の軌道を表現したものであり、時間 t の関数として表現した式 (A.18) , (A.21) (160 頁)

$$\ddot{x} + \omega^2 n x = 0$$

$$\ddot{z} + \omega^2 n z = 0$$

に対応する．

シンクロトロンではラティスの構造は1周すると必ず元に戻るので、周期関数 $g(s)$ とし、 x , z を代表して y で記述すると、式 (D.10) , (D.11) は、

$$y'' + g(s)y = 0 \quad , \quad y = x \text{ or } z \quad (\text{D.13})$$

となる．したがって、式 (D.13) がベータトロン振動を表す式である．

D.2 ベータトロン振動の一般解

シンクロトロンにおけるベータトロン振動は，前述の式 (D.13) のように，周期係数をもつ微分方程式で表される．

$$y'' + g(s)y = 0$$

$g(s)$ はシンクロトロンを構成する電磁石の配列によって決まる関数である． $g(s)$ は 1 周すると元の値に戻るので，

$$g(s + C) = g(s) \quad (\text{D.14})$$

の周期性をもつ．ここで， C はシンクロトロン 1 周の長さである．実際のシンクロトロンにおいては電磁石の配列 (lattice) にはさらに高い周期性が存在する場合が多い．ラティスが N 個 (周期数) の場合に係数 $g(s)$ は，

$$g(s + L) = g(s) \quad , \quad L = \frac{C}{N} \quad (\text{D.15})$$

のような周期性をもつ．ただし，

L : 周期長

N : 周期数 (ラティスの数)

C : シンクロトロンの周長

式 (D.13) は，減衰項 (y') のない Hill の方程式である．したがって，Floquet の定理から式 (D.13) の解は，

$$Y_1(s) = w(s) \exp[i\psi(s)] \quad (\text{D.16})$$

となる． $w(s)$ は周期長 $L (= C/N)$ の周期関数である．式 (D.16) を式 (D.13) に代入し，実部と虚部がそれぞれゼロになる条件から， w , ψ の値を求めると，

$$w'' - \psi'^2 w + gw = 0 \quad (\text{D.17})$$

$$2\psi'w' + \psi''w = 0 \quad (\text{D.18})$$

が得られる．積分定数 c とすると，式 (D.17) , 式 (D.18) は，

$$w'' + gw - \frac{c}{w^3} = 0 \quad (\text{D.19})$$

$$\psi' w^2 = c \quad (\text{D.20})$$

となる．積分定数 $c = 1$ とすると，

$$w'' + gw - \frac{1}{w^3} = 0 \quad (\text{D.21})$$

$$\psi' w^2 = 1 \quad (\text{D.22})$$

となり， w と ψ を満たすべき式が得られる．このとき

$$Y_2(s) = w(s) \exp[-i\psi(s)] \quad (\text{D.23})$$

も式 (D.13) の解である． $Y_1(s)$ と $Y_2(s)$ は互いに 1 次独立であるから，式 (D.13) の一般解は任意定数 c_1 , c_2 を用いて，

$$y(s) = c_1 w(s) \exp[i\psi(s)] + c_2 w(s) \exp[-i\psi(s)] \quad (\text{D.24})$$

となる．あるいは，

a : 振幅に関する定数

δ : 任意の位相

とすると，

$$y(s) = a w(s) \cos[\psi(s) + \delta] \quad (\text{D.25})$$

で表される．

次に， $s = s_1$ における初期値が y_1 , y'_1 のとき， $s = s_2$ における y_2 , y'_2 を与える関係式は，式 (D.24) に初期条件を入れて c_1 , c_2 を決定すると，

$$c_1 = \frac{+y_1(\omega'_1 - i\psi'_1 \omega_1) e^{-i\psi_1} - y'_1 \omega_1 e^{-i\psi_1}}{D} \quad (\text{D.26})$$

$$c_2 = \frac{-y_1(\omega'_1 + i\psi'_1 \omega_1) e^{+i\psi_1} + y'_1 \omega_1 e^{+i\psi_1}}{D} \quad (\text{D.27})$$

となる．ここで， $D = -2i$ である． c_1 , c_2 を式 (D.24) に代入することにより， y_2 , y'_2 は y_1 , y'_1 によって，次の transfer matrix で表せる．

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \mathbf{M}(s_2|s_1) \begin{pmatrix} y_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.28})$$

この transfer matrix $\mathbf{M}(s)$ は、振動の方程式が減衰項をもたないため、

$$\det \mathbf{M}(s) = 1 \quad (\text{D.29})$$

を満たす。ここで、各行列の要素は次のとおりである。

$$\begin{aligned} m_{11} &= \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \psi - \omega_2 \omega_1' \sin \psi \\ m_{12} &= \omega_1 \omega_2' \sin \psi \\ m_{21} &= - \frac{1 + \omega_1 \omega_1' \omega_2 \omega_2'}{\omega_1 \omega_2} \sin \psi - \left(\frac{\omega_1'}{\omega_2} - \frac{\omega_2'}{\omega_1} \right) \cos \psi \\ m_{22} &= \frac{\omega_1}{\omega_2} \cos \psi + \omega_1 \omega_2' \sin \psi \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

式 (D.30) において $\psi = \psi(s_2) - \psi(s_1)$ であり、 s_1 から s_2 までのベータトロン振動の位相の進みである。

式 (D.28) から、軌道上の任意の距離 s から始まる 1 セルあたりの transfer matrix $\mathbf{M}(s_2|s_1) = \mathbf{M}(s)$ を求めることができる。

式 (D.30) において、

$$s_1 = s \quad (\text{D.31})$$

$$s_2 = s + L \quad (\text{D.32})$$

とおく。 $\omega(s)$ は周期関数であるから、

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_2 = \omega(s) \\ \omega_1' &= \omega_2' = \omega'(s) \end{aligned}$$

とおく。さらに、 α, β, μ を、

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \alpha = - \omega(s) \omega'(s) \\ \beta(s) &= \beta = [\omega(s)]^2 \\ \mu(s) &= \mu = \psi(s + L) - \psi(s) \end{aligned} \quad (\text{D.33})$$

とする。また、 γ を α, β によって、

$$\gamma = \frac{1 + \alpha^2}{\beta} \quad (\text{D.34})$$

とする。ここで、 $\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)$ が従うべき微分方程式は、式 (D.33)、式 (D.34) から、

$$\begin{aligned} \alpha' &= - \frac{1}{2} \beta'' = g\beta - \gamma \\ \beta' &= - 2\alpha \\ \gamma' &= 2g\alpha \end{aligned} \quad (\text{D.35})$$

となる。

式 (D.28), 式 (D.30) の transfer matrix $M(s)$ は式 (D.33), 式 (D.34) によって, 次のように表される。

$$M = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha(s) \sin \mu & \beta(s) \sin \mu \\ -\gamma(s) \sin \mu & \cos \mu - \alpha(s) \sin \mu \end{pmatrix} \quad (D.36)$$

また, 1 セルあたりの transfer matrix が式 (D.36) によって与えられているとき, k セルあたりのマトリックスは,

$$M^k = \begin{pmatrix} \cos k\mu + \alpha \sin k\mu & \beta \sin k\mu \\ -\gamma \sin k\mu & \cos k\mu - \alpha \sin k\mu \end{pmatrix} \quad (D.37)$$

となる。

式 (D.22), (D.33) から,

$$\psi' = \frac{1}{\beta} \quad (D.38)$$

となる。この式 (D.38) を s_1 から s_2 まで積分することで,

$$\psi(s_2) - \psi(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{\beta} ds = \log_e s_2 - \log_e s_1 \quad (D.39)$$

を得る。これらは, s_1 から s_2 まで進むあいだのベータトロン振動の位相の変化である。したがって, $s_2 = s_1 + C$ とおくと軌道 1 周あたりのベータトロン振動の位相の変化が得られる。この式 (D.39) を 2π で割って得られる量が 1 周あたりのベータトロン振動数を表す。すなわち,

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{1}{\beta} ds \quad (D.40)$$

である。

式 (D.39) で $s_1 = 0$, $s_2 = s$ とおき, これをベータトロン振動数 ν で割ると,

$$\phi(s) = \int \frac{1}{\nu\beta} ds \quad (D.41)$$

となる。

したがって, ベータトロン振動の一般解 (式 (D.25)) は,

$$y(s) = a\sqrt{\beta(s)} \cos[\nu\phi(s) + \delta] \quad (D.42)$$

で表せる。

D.3 Emittance

エミッタンス (emittance) ϵ を次式 (D.43) のように定義する.

$$\epsilon = \frac{1}{\beta} [y^2 + (\alpha y + \beta y')^2] \quad (\text{D.43})$$

式 (D.43) と式 (D.34) から ϵ は,

$$\epsilon = \gamma y^2 + 2\alpha y y' + \beta y'^2 \quad (\text{D.44})$$

$$= a^2 \quad (\text{D.45})$$

となり, ϵ は軌道上の位置 s に依存しない運動の定数である.

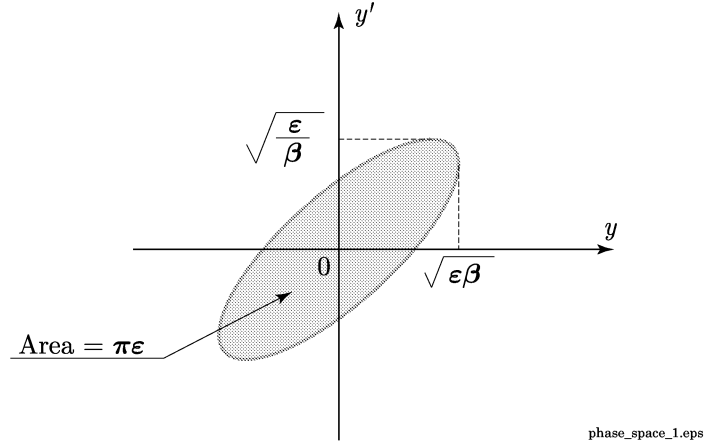


図 D.2: ベータatron振動の位相平面

式 (D.34) から $\gamma\beta - \alpha^2 > 0$ なので, 式 (D.44) は, $y - y'$ 平面において軸の傾いた楕円で表現される (図 6.19 参照). また, ϵ はこの楕円の面積を π で割ったものである. すなわち, ϵ は, ある a で運動する粒子を軌道上の位置 s で観測し, $y - y'$ 平面上にプロットすると, それらは式 (D.44) の楕円の中にあることを意味する. したがって, 式 (D.44) は, $y - y'$ 平面内の粒子の運動の軌跡である. また, エミッタンスの楕円は, α, β によって決定されるので, 軌道上の位置 s によってその形が異なる. しかし, ϵ が運動の定数であるので, 楕円の面積は場所によらず常に一定である.

式 (D.44) から, 粒子が s の位置でとる振幅の最大値 y_1 は,

$$\epsilon = \frac{y_1^2}{\beta} \quad (\text{D.46})$$

$$y_1 = \sqrt{\epsilon\beta} \quad (\text{D.47})$$

また、角度の最大値 y'_1 は、

$$\epsilon = \frac{y_1'^2}{\gamma} \quad (\text{D.48})$$

$$y'_1 = \sqrt{\gamma\beta} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\beta}} \quad (\text{D.49})$$

したがって、楕円の面積 (Area) はエミッタンス ϵ によって、

$$(\text{Area}) = \pi y_1 y'_1 = \pi \sqrt{\epsilon\beta} \sqrt{\frac{\epsilon}{\beta}} = \pi \epsilon \quad [\text{mm} \cdot \text{mrad}] \quad (\text{D.50})$$

ビームのエミッタンスが与えられると、軌道上の位置 s における振幅の最大値は、式 (D.46) によって逆に $\beta(s)$ を介して s の関数となり、

$$y_{\text{max}} = \sqrt{\epsilon\beta(s)} \quad (\text{D.51})$$

となる。式 (D.51) は、式 (D.45) から、

$$y_{\text{max}} = a \sqrt{\beta(s)} \quad (\text{D.52})$$

したがって、式 (D.42) は、

$$y(s) = \sqrt{\epsilon\beta(s)} \cos[\nu\phi(s) + \delta] \quad (\text{D.53})$$

となる。

D.4 マトリックスによる軌道計算

$s = s_0$ から $s = s_1$ までの transfer matrix を $\mathbf{M}_1(s_1|s_0)$, $s = s_1$ から $s = s_2$ までの transfer matrix を $\mathbf{M}_2(s_2|s_1)$ とすると、各マトリックスの要素は微分方程式で構成されているので、 $s = s_0$ から $s = s_2$ までの transfer matrix $\mathbf{M}(s_2|s_0)$ は、各 transfer matrix の積、

$$\mathbf{M}(s_2|s_0) = \mathbf{M}_2(s_2|s_1) \mathbf{M}_1(s_1|s_0) \quad (\text{D.54})$$

で計算できる。したがって、シンクロトロンを構成する各要素に対する transfer matrices によって、全体の transfer matrix を式 (D.54) で計算できる。

式 (D.10), 式 (D.11), さらに式 (D.12) から、中心軌道上の磁束密度 \mathbf{B} , 磁場勾配 $\partial\mathbf{B}/\partial x$ の電磁石の中を通過する magnetic rigidity $\mathbf{B}\rho$ の粒子の運動方程式、

$$x'' + \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\mathbf{B}\rho} \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x} \right) x = 0 \quad (\text{D.55})$$

$$z'' - \frac{1}{\mathbf{B}\rho} \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x} z = 0 \quad (\text{D.56})$$

によって、シンクロトロンの各要素の transfer matrices は次のとおりである。

D.4.1 直線部

直線区間は磁場のない空間なので、荷電粒子は磁場による力を受けない。すなわち、荷電粒子は直線上に進む。長さが s のときのマトリックスは、

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.57})$$

D.4.2 偏向電磁石

磁石の入口、出口の磁極の端面が荷電粒子の中心軌道と直角になっている場合、

$$\begin{aligned} x \text{ 方向} &: \begin{pmatrix} \cos \phi & \rho \sin \phi \\ -\frac{1}{\rho} \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \\ z \text{ 方向} &: \begin{pmatrix} 1 & \rho \phi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.58})$$

D.4.3 4極電磁石

4極電磁石の磁場は、中心軸上でゼロ、磁場の勾配が一定の電磁石であるから、偏向作用はない。

K を、

$$K = \frac{1}{B\rho} \frac{\partial B_z}{\partial x} \quad (\text{D.59})$$

とすると、荷電粒子の運動方程式 (D.55), (D.56) は、

$$x'' + Kx = 0 \quad (\text{D.60})$$

$$z'' - Kz = 0 \quad (\text{D.61})$$

となる。また、

$K > 0$ のとき : x 方向に集束, z 方向に発散

$K < 0$ のとき : x 方向に発散, z 方向に集束

である。したがって、4局電磁石のマトリックスは、 x, z 方向によらず、

$$\begin{aligned} \text{集束の場合} &: \begin{pmatrix} \cos \xi & \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sin \xi \\ -\sqrt{|K|} \sin \xi & \cos \xi \end{pmatrix} \\ \text{発散の場合} &: \begin{pmatrix} \cosh \xi & \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sinh \xi \\ \sqrt{|K|} \sinh \xi & \cosh \xi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.62})$$

ただし、 $\xi = \ell_m \sqrt{|K|}$, ℓ_m は電磁石の長さである。

付 録 E 測距方式と精密測距儀

一般の光波測距儀の測定原理の原式は、前述（第 5.1 節）のとおり式 (5.6) (79 頁) で、

$$D = \frac{\lambda}{2} \left(n + \frac{\phi}{2\pi} \right)$$

である。この原式 (5.6) から、距離測定の高精度化は前述 (80 頁) のように

- 波長 (λ) を短くする。
- 位相 (ϕ) の分解能を高くする

ことが必要である。

ここでは、光波測距儀の位相の計測法の代表的な方式と精密光波測距儀 MEKOKETER ME5000 の位相の計測法などを比較した。これらの MEKOMETER ME5000 の特徴をさらに引き出し、

- 測定時の変調周波数を同時測定し補正する距離測定システム

は、本論中 第 5.2.3 節 (85 頁) に記述している。

E.1 代表的な位相の計測方法

位相を測定する方法として，次の代表的な 3 つの方法がある*．

- (1) Phase Resolution
- (2) Path Length Modification
- (3) Frequency Modification

E.1.1 Phase Resolution

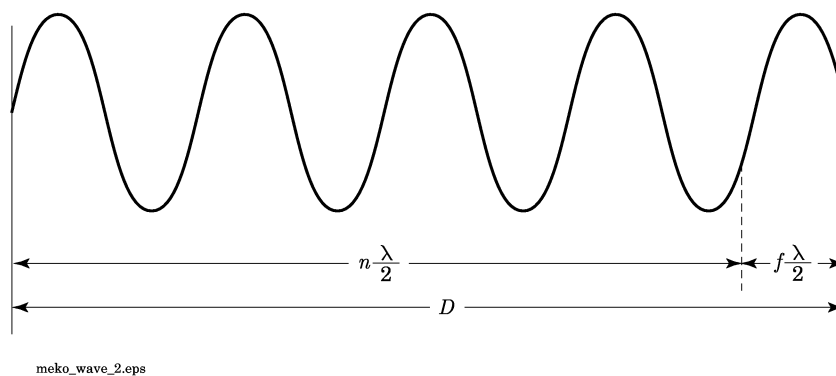


図 E.1: 位相分解法による距離の決定

この方法は一般的な測距儀に用いられている方法であり，前述のとおり式 (5.6) (79 頁) で，

$$D = \frac{\lambda}{2} \left(n + \frac{\phi}{2\pi} \right)$$

によって測定される．

* 参考文献 [6]

E.1.2 Path Length Modification

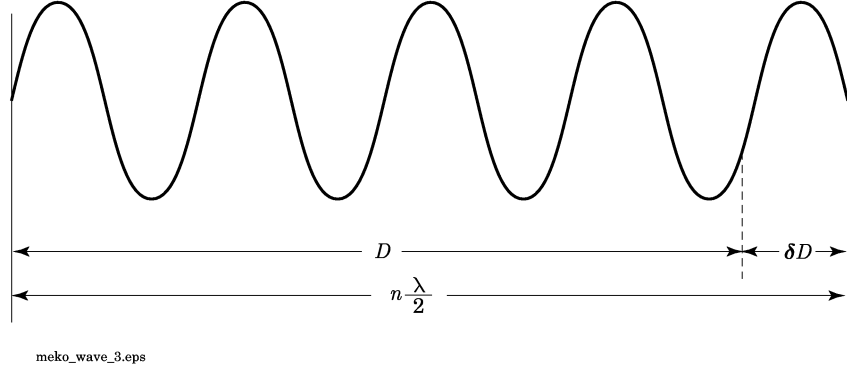


図 E.2: 光路長の調整による距離の決定

これは、MEKOMETER ME3000 の測定方式であり，精密測距儀の方式である．距離を求める式は，

$$D = \frac{\lambda}{2} \left(n + \frac{\phi}{2\pi} \right) + \frac{(2\pi - \phi)}{2\pi} \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (\text{E.1})$$

となる．式 (E.1) は，位相がゼロになるために必要な距離 $(2\pi - \phi)\lambda/(2\pi \cdot 2)$ を調整することを意味する．ME3000 では，測距儀内に内蔵されたプリズムをレールの上を移動させることで等価的に受光素子の方を移動させることで位相ゼロの位置を探し，レール上のプリズムの移動量を位相の調整分としている．したがって距離を求める式 (E.1) は，

$$\begin{aligned} D &= \frac{\lambda}{2} \left(n + \frac{\phi}{2\pi} \right) + \frac{(2\pi - \phi)}{2\pi} \cdot \frac{\lambda}{2} \\ &= \frac{\lambda}{2} (n + 1) \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

となる．

E.1.3 Frequency Modification

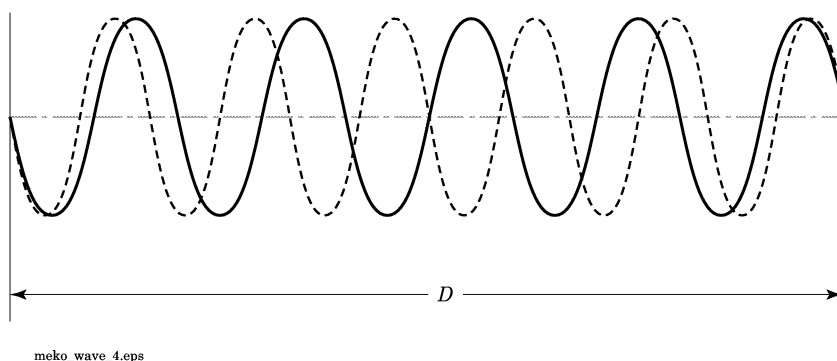


図 E.3: 変調周波数の調整による距離の決定

これは、MEKOMETER ME5000 の測定方式であり、精密測距儀の方式である。この方式は、測距儀と反射プリズム間を往復する変調光波の位相 ϕ がゼロとなるように変調周波数 f を、すなわち波長 λ を変える。したがって、距離を求める式は、

$$D = \frac{\lambda_v}{2} n \quad (\text{E.3})$$

となる。

E.2 MEKOMETER ME5000 の短い波長と分解能

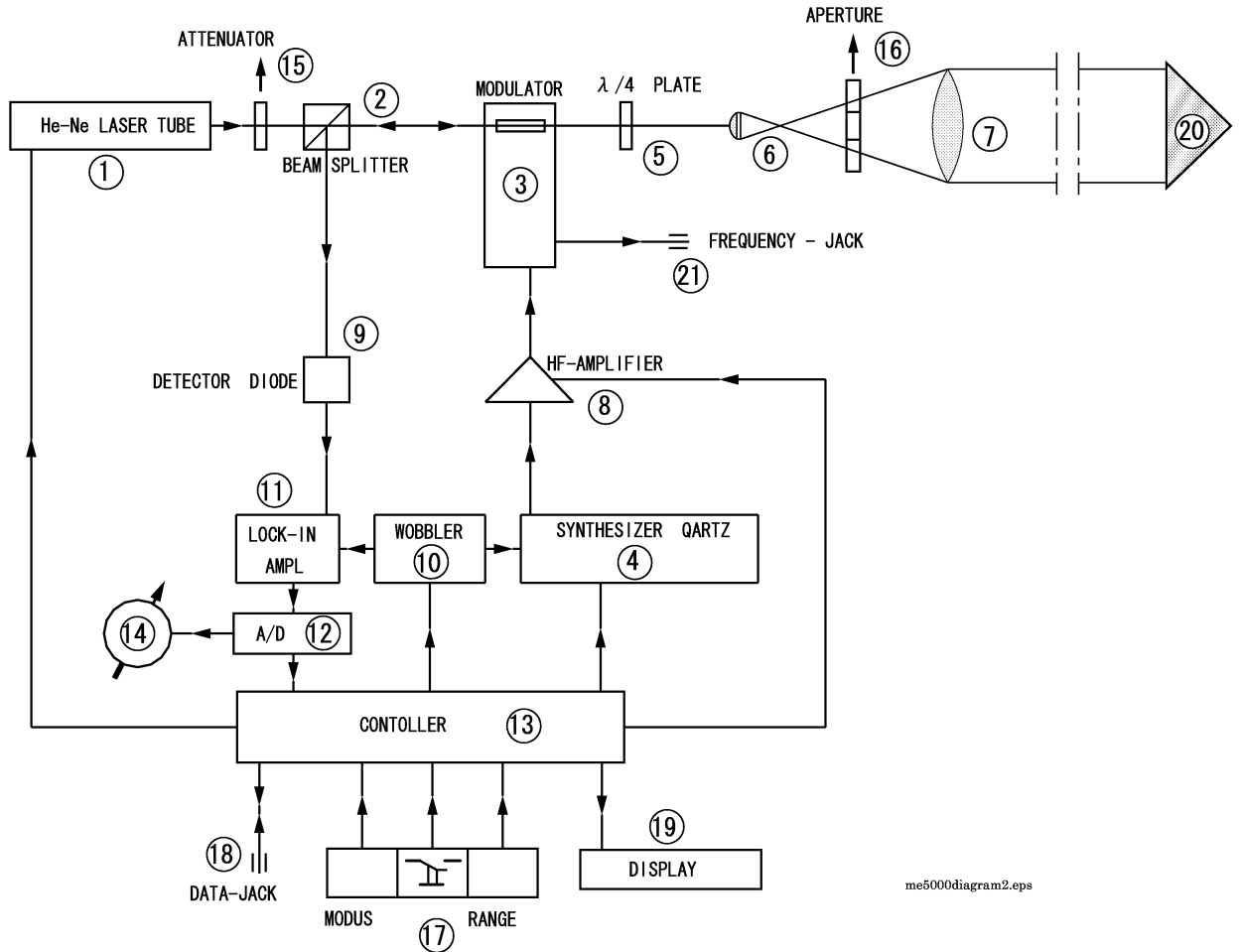


図 E.4: Block diagram of MEKOMETER ME5000

(1) 波長 $632.8[nm]$ でコヒレントな位相の He-Ne レーザビーム (Class II, $1[mW]$) を搬送波 (carrier wave) は, (2) のビームスプリッター (beamsplitter) を通過し, (4) のシンセサイザーで組合された変調周波数 (約 $500[MHz]$) で (3) の偏光子 (modulation crystal) によって偏向され, 変調をかけられる[†].

(3) によって偏向されたレーザビームは, (5) の $\lambda/4$ 板 ($\lambda/4$ plate) によって位相を遅らされる.

(6) のビームエキパンダ (beam expander) によってビームは広げられる. このとき, (7) の対物レンズ (objective lens) のところでビームの出力は $1[mW]$ から $0.3[mW]$

[†]参考文献 [7]

にまで減衰して、反射点の反射プリズムに向かって発射される。

ME5000 は同軸の光学系であるため、反射して戻ってきた光波は、(6) によって集光され $\lambda/4$ 板を通過し、検光子 (demodulation crystal) によって復調される。この検光子は出射のときの偏光子と同じものである。

出射と入射の変調周波数の位相角が同じ場合、(9) の受光素子 (detector diode) にビームはとどかない。したがって、受光素子 (9) の出力電流がゼロ ($0[A]$) のとき位相ゼロである。この位相ゼロは、変調周波数の半波長ごと (約 $0.3[m]$) に出現する。

距離 D と変調周波数 f 、受光素子に当たるビームの強度 I のあいだには次の関係がある。

$$I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos e \cdot J_0 \left[2\pi \frac{V}{V_m} \cdot \cos \left(2\pi D \cdot \frac{f}{c} \right) \right] \quad (E.4)$$

ここに、

- e : 測線上の偏向面の回転角
- V : 変調をかける電圧
- V_m : 変調の深さ 1 に対する参考電圧
- J_0 : 第 1 種の Bessel 関数
- c : 光速

である。

(10) ワブラー (wobbler) と (11) ロック・イン・アンプ (Lock in Amplifier) によって、位相ゼロの周波数を正確に決定する。このようにして (9) 受光素子上で、

- チューニングされた場合、 $4[kHz]$ の周波数が発生する。
- チューニングされなかった場合、 $2[kHz]$ の周波数が発生する。

$2[kHz]$ の周波数が発生して、チューニングされなかった場合、(12) A/D コンバータ (A/D converter) を介して、(13) コンピュータのによって、シンセサイザーの組合せを $0.3[ppm]$ ステップで位相ゼロに向かってチューニングする。

以上の調整によって位相ゼロの変調周波数を求め、式 (5.16) にもとづいて距離を計算する。式 (5.16) より、位相ゼロの周波数の差を Δf とすると、

$$\Delta f = \frac{f_2 - f_1}{k} \quad (E.5)$$

ここに、

- k : f_1 から f_2 までの位相ゼロの数
- f_1 : 最初の位相ゼロの変調周波数
- f_2 : 最後の位相ゼロの変調周波数

である．さらに，

$$N_1 = \text{RND} \left(\frac{f_1}{\Delta f} \right) \quad (\text{E.6})$$

$$N_m = \text{RND} \left(\frac{f_m}{\Delta f} \right) \quad (\text{E.7})$$

$$N_2 = \text{RND} \left(\frac{f_2}{\Delta f} \right) \quad (\text{E.8})$$

ここに，

N_1, N_m, N_2 : 変調周波数が f_1, f_m, f_2 のときの光路上の変調波の数

$\text{RND} ()$: 小数点以下を四捨五入する関数

である．したがって，

$$D_1 = \frac{N_1 \cdot c}{2 \cdot f_1} + \text{constant} \quad (\text{E.9})$$

$$D_m = \frac{N_m \cdot c}{2 \cdot f_m} + \text{constant} \quad (\text{E.10})$$

$$D_2 = \frac{N_2 \cdot c}{2 \cdot f_2} + \text{constant} \quad (\text{E.11})$$

$$D = \frac{D_1 + D_m + D_2}{3} \quad (\text{E.12})$$

となる．ここで，

D : 斜距離

constant : 測距儀内部の $\lambda/4$ 板の器械中心からの位置 ($= -0.20000 [m]$)

(図 5.3, 図 E.4 参照)

である．

以上のことから，MEKOMETER ME5000 は高い変調周波数と高い分解能を得ている．

付 録 F 最小 2 乗法による測量網平均計算

ここでは測量網を最小 2 乗法で平均計算する方法を述べる。

まず、測定可能な量 l_i と求めたい未知量 x_i とのあいだに、

$$\begin{aligned} l_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ l_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ &\vdots \\ l_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{aligned} \quad (\text{F.1})$$

の関係があるとき、

$$l_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (\text{F.2})$$

を数学的モデルという。個々の問題を最小 2 乗法で解く以前に、それぞれの数学的モデルが与えられていなければならない。

F.1 観測方程式

l_i を測定して得た値を l_i^b とする。 l_i^b は測定誤差を必ず含んでいるので測定値に対して未知の補正量 v_i を加えて、最確値 l_i^a が得られるとすれば、

$$l_i^a = l_i^b + v_i \quad (\text{F.3})$$

式 (F.2) は未知量 x_j に対して一般に非線形であるから、Taylor の展開により線形化する。そのため、 x_j の近似値を x_j^o とする。 x_j^o はあらかじめ何らかの方法で計算または推定しておくものである。 x_j^o は最小 2 乗法的に求められる x_j の最確値であり、 x_j^o に加えるべき未知の補正量を Δx_j とすると、

$$x_j^a = x_j^o + \Delta x_j \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (\text{F.4})$$

式 (F.2) の右辺を Δx_j が微小な量として Taylor 展開し第 1 項までとれば、

$$\begin{aligned} f_i(x_1^a, x_2^a, \dots, x_m^a) &= f_i(x_1^o, x_2^o, \dots, x_m^o) \\ &+ \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \right)_0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2} \right)_0 \Delta x_2 \dots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_m} \right)_0 \Delta x_m \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

ここで、係数 $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_0$ は f_i を x_j で偏微分し、 x_j の値として近似値 x_j^o で計算したものであり、

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_0 = a_{ij} \quad (\text{F.6})$$

とおくと、式 (F.3) は、

$$l_i^a = l_i^b + v_i = f_i(x_1^o, x_2^o, \dots, x_m^o) + \sum_{j=1}^m a_{ij} \Delta x_j \quad (\text{F.7})$$

または、 $l_i^o = f_i(x_1^o, x_2^o, \dots, x_m^o)$ とすると、

$$v_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} \Delta x_j + (l_i^o - l_i^b) \quad (\text{F.8})$$

となる。

観測方程式 (observation equations) とは、式 (F.8) のように、測定値に加えるべき補正量 v_i と、数学的モデルに含まれる未知のパラメータ Δx_{ij} のあいだの関係式である。

F.2 観測方程式の行列表示

式 (F.8) における、 Δx_j を簡便のため、 x_j とすれば、観測方程式は、

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m + (l_1^o - l_1^b) = v_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m + (l_2^o - l_2^b) = v_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m + (l_n^o - l_n^b) = v_n \end{cases}$$

式 (F.2) の測定量、未知量を列ベクトルとして、

$$\mathbf{L}_b = \begin{bmatrix} l_1^b \\ l_2^b \\ \vdots \\ l_n^b \end{bmatrix}, \mathbf{L}_a = \begin{bmatrix} l_1^a \\ l_2^a \\ \vdots \\ l_n^a \end{bmatrix}, \mathbf{X}_o = \begin{bmatrix} x_1^o \\ x_2^o \\ \vdots \\ x_m^o \end{bmatrix}, \mathbf{X}_a = \begin{bmatrix} x_1^a \\ x_2^a \\ \vdots \\ x_m^a \end{bmatrix}, \mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

を表すことにする。未知量の最確値を求めるため、近似値に加える修正値を、

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_a - \mathbf{X}_o \quad (\text{F.9})$$

とする. x の近似値から計算により求めた,

$$l_i^o = f_i(x_1^o, x_2^o, \dots, x_m^o) \quad (\text{F.10})$$

を要素とするベクトルを $\mathbf{L}'_o = (l_1^o, l_2^o, \dots, l_m^o)$ で表す. また, $\mathbf{L}_o - \mathbf{L}_b = \mathbf{L}$ とする. ここで, 式 (F.2) をベクトル方程式で表現すれば,

$$\mathbf{L}_a = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (\text{F.11})$$

一方, $\mathbf{L}_a = \mathbf{L}_b + \mathbf{V}$, $\mathbf{X}_a = \mathbf{X}_o + \mathbf{X}$ であるから,

$$\mathbf{L}_b + \mathbf{V} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_o + \mathbf{X}) \quad (\text{F.12})$$

\mathbf{X} は最終的に求めたい未知の補正量である. しかし, 一般に \mathbf{X}_o の近似がよければ微小な量であるから, Taylor 展開の 1 次項まで用いて,

$$\mathbf{L}_b + \mathbf{V} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_o) + \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (\text{F.13})$$

である. ここに, \mathbf{A} はマトリックスで, その要素は,

$$a_{ij} = \frac{\partial l_i^o}{\partial x_j^o} \quad \left(\text{または } \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right) \quad (\text{F.14})$$

である.

$\mathbf{F}(\mathbf{X}_o) = \mathbf{L}_o$, $\mathbf{L} = \mathbf{L}_o - \mathbf{L}_b$ であるから, 式 (F.13) は,

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{A}\mathbf{X} - (\mathbf{L}_o - \mathbf{L}_b) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{L} \end{aligned} \quad (\text{F.15})$$

式 (F.15) は, 観測方程式 (F.2) の行列方程式である.

F.3 重み付き観測方程式

式 (F.15) の観測方程式は, n 個の測定が相互に独立で, 測定精度が総て等しい場合である.

一般に観測には常に誤差が含まれており, 観測の精度に応じて観測値に重みを付ける. すなわち, 精度のよい観測値はより平均計算に寄与し, 精度の劣る観測値は平均計算への寄与を少なくするような重み付けである.

F.3.1 重み付けの方法

正規分布の密度関数は, 式(F.129)(208 頁参照) から,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma_x^2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp \left\{ -\frac{v^2}{2\sigma_x^2} \right\}$$

である。

仮に、観測が距離測定だけで構成され、 n 辺の距離測定が行われた場合、各距離測定は独立なので、

$$f(x)_1 \cdot f(x)_2 \cdots f(x)_n = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_n} \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{v_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{v_2^2}{\sigma_2^2} + \cdots + \frac{v_n^2}{\sigma_n^2} \right\} \right] \quad (\text{F.16})$$

となる。このとき、式(F.130)の指数項を、

$$\frac{v_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{v_2^2}{\sigma_2^2} + \cdots + \frac{v_n^2}{\sigma_n^2} = \min. \quad (\text{F.17})$$

とするのが、正規分布密度関数のもとでの最小 2 乗法の別の考え方である。したがって、重みは各測辺の分散を分母にとる。

F.3.2 重み付き観測方程式

測定値の分散 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_m^2$ が異なる場合、未知の単位重みの分散 σ_0^2 と重み p_i を用いて、

$$\sigma_i^2 = \frac{\sigma_0^2}{p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{F.18})$$

とする。式 (F.8) の両辺に $\sqrt{p_i}$ を乗じて、

$$\sqrt{p_i} v_i = \sum_{j=1}^m \sqrt{p_i} a_{ij} x_j + \sqrt{p_i} (l_i^o - l_i^b) \quad (\text{F.19})$$

とすると、すべて、

$$\sqrt{p_i} (l_i^o - l_i^b) = \sigma_0 \quad (\text{F.20})$$

である。すなわち、式 (F.19) は等しい精度の観測方程式である。

重みを行列で表現するとき、測定が相互に独立な場合、重み行列 P は、 $p_i = p_{ii}$ を対角要素とする対角行列である。すなわち、

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & & 0 \\ & p_{22} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & p_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{or} \quad P^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{p_{11}} & & 0 \\ & \sqrt{p_{22}} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \sqrt{p_{nn}} \end{pmatrix} \quad (\text{F.21})$$

したがって、重み付き観測方程式は式 (F.15) の両辺に $P^{-\frac{1}{2}}$ を乗じて、

$$P^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A} \mathbf{X} + P^{-\frac{1}{2}} \mathbf{L} = P^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 \quad (\text{F.22})$$

である。

F.4 正規方程式

最小 2 乗法の目的は、誤差の 2 乗の和を最小にすることである。すなわち、

$$(P \frac{1}{2} V)^t P \frac{1}{2} V = V_0^t V_0 = V^t P V = \min. \quad (F.23)$$

である。したがって、観測方程式は式 (F.15) を用いて、

$$\begin{aligned} V^t P V &= (A X + L)^t P (A X + L) \\ &= (X^t A^t - L^t) P (A X - L) \\ &= X^t A^t P A X - X^t A^t P L - L^t P A X + L^t P L \end{aligned} \quad (F.24)$$

X と L はベクトルであるから、

$$X^t A^t P L = L^t P A X \quad (F.25)$$

であり、また、

$$N = A^t P A \quad (F.26)$$

$$U = A^t P L \quad (F.27)$$

である行列 N とベクトル U を用いると、式 (F.24) は、

$$V^t P V = X^t N X - 2 X^t U + L^t P L \quad (F.28)$$

となる。

ここで、 $V^t P V = \min.$ を満足させるためには、関数の最小値を求めることであるから、極値をとるための条件は、すなわち X の総ての要素についての微分がゼロにならなければならない。

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(V^t P V)}{\partial X} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(X^t N X)}{\partial X} - \frac{\partial X^t U}{\partial X} = 0 \quad (F.29)$$

ここで、行列の微分公式を用いると、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(X^t N X)}{\partial X} = X^t N \quad (F.30)$$

$$\frac{\partial X^t U}{\partial X} = U^t \quad (F.31)$$

となる。したがって、正規方程式 (F.29) は、行列を用いて

$$N X - U = 0 \quad (F.32)$$

のように表現できる。

F.5 最確値（最小 2 乗推定値）

正規方程式の係数行列 \mathbf{N} は、 m 行 m 列の正方かつ対称行列であり、さらに、 \mathbf{N} が正則のとき、すなわち、 \mathbf{N} の行列式 $|\mathbf{N}| \neq 0$ ならば、逆行列 \mathbf{N}^{-1} が存在する。このとき、測量網平均計算の場合、『固定網平均計算』である。したがって、正規方程式 (F.32) の両辺に \mathbf{N}^{-1} を乗じて、 \mathbf{X} の最確値は、

$$\mathbf{N}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{X} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{U} \quad (\text{F.33})$$

$$\begin{aligned} \therefore \mathbf{X} &= \mathbf{N}^{-1}\mathbf{U} \\ &= (\mathbf{A}^t\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^t\mathbf{P}\mathbf{L} \end{aligned} \quad (\text{F.34})$$

より求められる。

また、 \mathbf{N} の行列式 $|\mathbf{N}| = 0$ のとき、すなわち、正則でない場合、逆行列 \mathbf{N}^{-1} は存在しない。このとき、測量網平均計算の場合、『フリーネットワーク平均計算』であり、『 \mathbf{N} の一般逆行列 \mathbf{N}^+ 』(198 頁参照) を用いて最確値を得ることになる。正規方程式 (F.32) の両辺に \mathbf{N} の一般逆行列 \mathbf{N}^+ (Moore-Penrose 型一般逆行列) を乗じて、 \mathbf{X} の最確値は \mathbf{N} が正則のときと同様に、

$$\mathbf{N}^+\mathbf{N}\mathbf{X} = \mathbf{N}^+\mathbf{U} \quad (\text{F.35})$$

$$\begin{aligned} \therefore \mathbf{X} &= \mathbf{N}^+\mathbf{U} \\ &= (\mathbf{A}^t\mathbf{P}\mathbf{A})^+\mathbf{A}^t\mathbf{P}\mathbf{L} \end{aligned} \quad (\text{F.36})$$

より求められる。

F.6 測定値 L の精度 σ_o

m 個の未知量を n 個の測定により, 最小 2 乗法で最確値を求めた場合の測定値の精度を記述する. 測量網平均計算の場合, 測定精度 m_o に相当する.

簡単のため重みを 1 とする. すなわち, 単位行列 \mathbf{I} とし, $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ とする.

観測方程式 $\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{L}$ において, 未知のパラメータ \mathbf{X} の代わりに正しい値 ξ がわかっているものとし, さらに測定値のもつ真の誤差を ε とすれば, 観測方程式は,

$$\varepsilon = \mathbf{A}\xi - \mathbf{L} \quad (\text{F.37})$$

ただし, ξ, ε はそれぞれベクトルである. ε は偶然誤差だけでかつ相互に相関をもたない, すなわち正規分布するものとする,

$$\varepsilon^t = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \quad (\text{F.38})$$

$\varepsilon\varepsilon^t$ は, n 行 n 列の行列を作るが, その期待値は, $\mathbf{E}\{\varepsilon\varepsilon^t\} = 0, i \neq j$, および分散 σ^2 の定義, $\mathbf{E}\{\varepsilon\varepsilon^t\} = \sigma^2, i = j$ により,

$$\mathbf{E}\{\varepsilon\varepsilon^t\} = \mathbf{E} \begin{pmatrix} \varepsilon_1\varepsilon_1 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_1\varepsilon_n \\ \varepsilon_2\varepsilon_1 & & & \\ \vdots & & & \\ \varepsilon_n\varepsilon_1 & & & \varepsilon_n\varepsilon_n \end{pmatrix} \quad (\text{F.39})$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{E}\{\varepsilon_1\varepsilon_1\} & & & 0 \\ & \mathbf{E}\{\varepsilon_2\varepsilon_2\} & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & \mathbf{E}\{\varepsilon_n\varepsilon_n\} \end{pmatrix} \quad (\text{F.40})$$

$$= \sigma^2 \mathbf{I} \quad (\text{F.41})$$

式 (F.37) の両辺に \mathbf{A}^t を左から乗じ, 整理すると,

$$\xi = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t (\varepsilon + \mathbf{L}) \quad (\text{F.42})$$

上式 (F.42) の両辺に \mathbf{A} を乗じて, 式 (F.37) から ξ を消去することを考える. まず,

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}(\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \quad (\text{F.43})$$

とおけば, 式(F.42) は,

$$\varepsilon - \mathbf{A}^0 \varepsilon = \mathbf{A}^0 \mathbf{L} - \mathbf{L} \quad (\text{F.44})$$

となり, この式 (F.44) の転置をとり,

$$\varepsilon^t - \varepsilon^t \mathbf{A}^0 = \mathbf{L}^t - \mathbf{L}^t \mathbf{A}^0 \quad (\text{F.45})$$

とする．ここに， $\mathbf{A}^0 \mathbf{A}^0 = \mathbf{A}^0$ および $\mathbf{A}^0 = (\mathbf{A}^0)^t$ である．

したがって，誤差の 2 乗をとるために式(F.44) とその転置式(F.45) から，

$$\begin{aligned} (\varepsilon^t - \varepsilon^t \mathbf{A}^0)(\varepsilon - \mathbf{A}^0 \varepsilon) &= \varepsilon^t \varepsilon - \varepsilon^t \mathbf{A}^0 \varepsilon \\ &= (\mathbf{L}^t \mathbf{A}^0 - \mathbf{L}^t)(\mathbf{A}^0 \mathbf{L} - \mathbf{L}) \\ &= \mathbf{L}^t \mathbf{L} - \mathbf{L}^t \mathbf{A}^0 \mathbf{L} \end{aligned} \quad (\text{F.46})$$

したがって，式 (F.46) から誤差の 2 乗の和の形である次式 (F.47) が得られる．

$$\varepsilon^t \varepsilon - \varepsilon^t \mathbf{A}^0 \varepsilon = \mathbf{L}^t \mathbf{L} - \mathbf{L}^t \mathbf{A}^0 \mathbf{L} \quad (\text{F.47})$$

一方， ε はランダムな誤差であるから，その期待値は，

$$\mathbf{E}\{\varepsilon_i \varepsilon_j\} = \begin{cases} \sigma^2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (\text{F.48})$$

したがって，

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\varepsilon^t \varepsilon\} &= \sum_{i=j}^n \mathbf{E}\{\varepsilon_i^2\} \\ &= n\sigma^2 \end{aligned} \quad (\text{F.49})$$

また， $\mathbf{E}\{\varepsilon^t \mathbf{A}^0 \varepsilon\}$ についても \mathbf{A}^0 の主対角要素 \mathbf{A}_{ii}^0 以外はゼロになり，

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\varepsilon^t \mathbf{A}^0 \varepsilon\} &= \mathbf{E}\left\{\sum_{i=j}^n \mathbf{A}_{ii}^0 \varepsilon_i^2\right\} \\ &= \sigma^2 \sum_{i=j}^n \mathbf{A}_{ii}^0 \end{aligned} \quad (\text{F.50})$$

したがって，式(F.49) と式(F.50) から，

$$\mathbf{E}\{\varepsilon^t \varepsilon - \varepsilon^t \mathbf{A}^0 \varepsilon\} = \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{I} - \mathbf{A}^0) \quad (\text{F.51})$$

ただし， tr は，行列の主対角要素の和 (trace) の記号とする．

式 (F.47) と上式 (F.51) から，

$$\sigma^2 = \frac{\mathbf{E}\{\mathbf{L}^t \mathbf{L} - \mathbf{L}^t \mathbf{A}^0 \mathbf{L}\}}{\text{tr}(\mathbf{I} - \mathbf{A}^0)} \quad (\text{F.52})$$

式 (F.52) の分母は, $tr \mathbf{A}^0 = rank \mathbf{A}^0 = m$ であるから,

$$\begin{aligned} tr(\mathbf{I} - \mathbf{A}^0) &= tr \mathbf{I} - tr \mathbf{A}^0 \\ &= n - m \end{aligned} \quad (F.53)$$

である. すなわち,

(観測方程式の数: n) - (未知のパラメータの数: m) = (独立な条件の数)
であり, 自由度 (degree of freedom) という.

一方, 測定値に対する補正值 \mathbf{V} のうち, $\mathbf{V}^t \mathbf{P} \mathbf{V}$ を最小にする値を $\hat{\mathbf{V}}$ とし, 式(F.37) の ξ の消去と同じ要領で \mathbf{X} を消去する.

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{A} \mathbf{X} - \mathbf{L} \\ &= \mathbf{A}^0 (\mathbf{V} + \mathbf{L}) - \mathbf{L} \\ \hat{\mathbf{V}} &= \mathbf{V} - \mathbf{A}^0 \mathbf{V} \\ &= \mathbf{A}^0 \mathbf{L} - \mathbf{L} \end{aligned} \quad (F.54)$$

したがって,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{V}}^t \hat{\mathbf{V}} &= (\mathbf{L}^t \mathbf{A}^0 - \mathbf{L}^t)(\mathbf{A}^0 \mathbf{L} - \mathbf{L}) \\ &= \mathbf{L}^t \mathbf{L} - \mathbf{L}^t \mathbf{A}^0 \mathbf{L} \end{aligned} \quad (F.55)$$

ここで, 単位重みの標準偏差 (standard deviation of unit weight) を σ_o とし,

$$\begin{aligned} \sigma_o^2 &= \frac{\mathbf{L}^t \mathbf{L} - \mathbf{L}^t \mathbf{A}^0 \mathbf{L}}{tr(\mathbf{I} - \mathbf{A}^0)} \\ &= \frac{\hat{\mathbf{V}}^t \hat{\mathbf{V}}}{n - m} \end{aligned} \quad (F.56)$$

とおくと, σ_o^2 の期待値は,

$$\begin{aligned} E\{\sigma_o^2\} &= \frac{E\{\mathbf{L}^t \mathbf{L} - \mathbf{L}^t \mathbf{A}^0 \mathbf{L}\}}{tr(\mathbf{I} - \mathbf{A}^0)} \\ &= \sigma^2 \end{aligned} \quad (F.57)$$

となる. すなわち, 単位重みの標準偏差 σ_o^2 は, 分散 σ^2 の不偏推定量である.

したがって, ある量 x を n 回測定して x_1, x_2, \dots, x_n の測定値を得たとき, 単位重みの標準偏差 (この分散の不偏推定量) σ_o^2 は,

$$\sigma_o^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \quad (F.58)$$

である. ただし,

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \quad (F.59)$$

であり, 未知のパラメータである x の真値の代わりに用いる算術平均である.

F.7 最確値 \mathbf{X} の精度 σ_x

ここでは、最小 2 乗法によって調整された最確値 \mathbf{X} の精度（標準偏差）を記述する．測量網平均計算では、座標の精度 m に相当する．

正規方程式から最確値 \mathbf{X} を求める式(F.34) および(F.36)(192 頁)において、ここでも前節と同じく、簡単のため重みを 1 とする．すなわち、単位行列 \mathbf{I} とし、 $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ とする．したがって、

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{L}$$

において、測定値 \mathbf{L} が ε の誤差をもつとき、最確値 \mathbf{X} の誤差を ε_x とすれば、

$$\varepsilon_x = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \varepsilon \quad (\text{F.60})$$

両辺の転置をとって、

$$\varepsilon_x^t = \varepsilon^t \mathbf{A} (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \quad (\text{F.61})$$

したがって、式 (F.60) , 式 (F.61) から、

$$\varepsilon_x \varepsilon_x^t = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \varepsilon \varepsilon^t \mathbf{A} (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \quad (\text{F.62})$$

両辺の期待値をとって、 $\mathbf{E}\{\varepsilon \varepsilon^t\} = \sigma^2$ であるから、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\varepsilon_x \varepsilon_x^t\} &= \mathbf{E}\{(\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \varepsilon \varepsilon^t \mathbf{A} (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1}\} \\ &= \sigma^2 (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \end{aligned} \quad (\text{F.63})$$

上式 (F.63) で $\sigma^2 (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1}$ などは定数行列であるため、 $\mathbf{E}\{\}$ の外に出せる．式 (F.63) において、

$$\mathbf{E}\{\varepsilon_x \varepsilon_x^t\} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}\{\varepsilon_{x1}^2\} & \mathbf{E}\{\varepsilon_{x2} \varepsilon_{x1}\} & \cdots & \cdots \\ \mathbf{E}\{\varepsilon_{x1} \varepsilon_{x2}\} & \mathbf{E}\{\varepsilon_{x2}^2\} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{E}\{\varepsilon_{x1} \varepsilon_{xm}\} & \cdots & \cdots & \mathbf{E}\{\varepsilon_{xm}^2\} \end{pmatrix} \quad (\text{F.64})$$

いま、

$$\mathbf{E}\{\varepsilon_{xi}^2\} = \sigma_{xi}^2 \quad (\text{F.65})$$

$$\mathbf{E}\{\varepsilon_{xi} \varepsilon_{xj}\} = \sigma_{xi, xj} \quad (\text{F.66})$$

とすれば、

式 (F.65) の σ_{xi}^2 は、最確値 x_i の分散
 式 (F.66) の $\sigma_{xi, xj}$ は、最確値 x_i と x_j の共分散

したがって、 $(\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{N}^{-1}$ であるから、分散共分散行列 (variance covariance matrix) は、式 (F.63) から、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\varepsilon_x \varepsilon_x^t\} &= \begin{pmatrix} \sigma_{x1}^2 & \sigma_{x1x2} & \cdots & \sigma_{x1xm} \\ \vdots & \sigma_{x2}^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \sigma_{x1xm} & & & \sigma_{xm}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{F.67}) \\ &= \sigma^2 \mathbf{N}^{-1} \quad (\text{F.68}) \end{aligned}$$

となる。これより、 i 番目の最確値 x_i の分散は、

$$\sigma_{xi}^2 = \sigma^2 \mathbf{N}_{ii}^{-1} \quad (\text{F.69})$$

となる。ここに、 \mathbf{N}_{ii}^{-1} は \mathbf{N}^{-1} の主対角線の i 番目の要素である。

または、最確値 x_i の標準偏差 σ_{xi} は、式 (F.58) (195 頁) の σ_o を用いて、

$$\begin{cases} \sigma_{xi}^2 &= \sigma_o^2 \mathbf{N}_{ii}^{-1} \\ \sigma_o^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n p_i v_i^2}{n - m} \end{cases} \quad (\text{F.70})$$

より計算できる。

F.8 一般逆行列 A^+

$m \times m$ の正方行列 A について, $|A| \neq 0$ のとき, すなわち正則のとき,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = {}_mI_m \quad (F.71)$$

を満足する A^{-1} が存在し, 方程式 $AX = Y$ の解は,

$$X = A^{-1}Y \quad (F.72)$$

で得られる.

このとき, A が正則でないとき, すなわち $|A| = 0$ のときでも,

$$X = A^+Y \quad (F.73)$$

が成り立つ逆行列 A^+ を一般逆行列という.

一般逆行列の定義は, A を任意の行列とすると,

$$AA^+A = A \quad (F.74)$$

を満足する A^+ をいう. ただし, 式(F.74) を満足する一般逆行列 A^+ は必ず存在するが, 一意的ではなく, 通常無数に存在する.

一般逆行列 A^+ のうち, 次の性質を持つものを Moore-Penrose の一般逆行列という.

$$AA^+A = A \text{ 一般逆行列の基本条件} \quad (F.75)$$

$$A^+AA^+ = A^+ \text{ 反射型一般逆行列} \quad (F.76)$$

$$AA^+ = (AA^+)^t \text{ ノルム最小型一般逆行列} \quad (F.77)$$

$$A^+A = (A^+A)^t \text{ 最小 2 乗型一般逆行列} \quad (F.78)$$

上の 4 個の条件を満足するマトリックス A^+ は任意のマトリックス A について必ず存在し, かつ, ただ 1 個存在する (一意に決定される.).

この一般逆行列の求め方は, 代表的なもので 4 種類ある.

F.8.1 正則行列 U を組成する方法

A と直交する行列 C と D とゼロ行列 O を, A に付加して正則行列 U をつくる.

$$U = \begin{pmatrix} A & C \\ D & O \end{pmatrix} \quad (F.79)$$

$$A^tC = O \quad AD^t = O \quad (F.80)$$

$$C^tC \neq O \quad DD^t \neq O \quad (F.81)$$

とし、 $U^{-1} = (U^t U)^{-1} U^t$ を計算し、

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^+ & \mathbf{D}^+ \\ \mathbf{C}^+ & \mathbf{O} \end{pmatrix} \quad (\text{F.82})$$

とすれば、 \mathbf{A}^+ は U における \mathbf{A} を U^{-1} において転置した位置にある部分行列である。 \mathbf{A}^+ を計算する式としては、

(1) $U^{-1} = (U^t U)^{-1} U$ の場合

$$\begin{aligned} U^{-1} &= (U^t U)^{-1} U^t \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{A}^t & \mathbf{D}^t \\ \mathbf{C}^t & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^t & \mathbf{D}^t \\ \mathbf{C}^t & \mathbf{O} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^t \mathbf{A} + \mathbf{D}^t \mathbf{D} & \mathbf{A}^t \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^t & \mathbf{C}^t \mathbf{C} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^t & \mathbf{D}^t \\ \mathbf{C}^t & \mathbf{O} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \mathbf{D}^t \mathbf{D})^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & (\mathbf{C}^t \mathbf{C})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^t & \mathbf{D}^t \\ \mathbf{C}^t & \mathbf{O} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \mathbf{D}^t \mathbf{D})^{-1} \mathbf{A}^t & (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \mathbf{D}^t \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^t \\ (\mathbf{C}^t \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^t & \mathbf{O} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^+ & \mathbf{D}^+ \\ \mathbf{C}^+ & \mathbf{O} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{F.83})$$

したがって、

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \mathbf{D}^t \mathbf{D})^{-1} \mathbf{A}^t \quad (\text{F.84})$$

ただし、 $|\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \mathbf{D}^t \mathbf{D}| \neq 0$ 、 $\mathbf{A} \mathbf{D}^t = \mathbf{O}$ である。

式(F.84) が式(F.74)、(F.75) の一般逆行列の定義を満足することは、 \mathbf{D} が \mathbf{A} の直交行列であるから、式(F.75) のように、

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{D}^t &= \mathbf{O} \\ \mathbf{D} \mathbf{A}^t &= \mathbf{O} \end{aligned}$$

であり、 $\mathbf{D}^t \mathbf{D} \mathbf{A}^t \mathbf{A} = \mathbf{O}$ となるから、

$$\mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{A}^t \mathbf{A} = \mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{A}^t \mathbf{A} + \mathbf{D}^t \mathbf{D} \mathbf{A}^t \mathbf{A} = (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \mathbf{D}^t \mathbf{D}) \mathbf{A}^t \mathbf{A} \quad (\text{F.85})$$

すなわち、

$$(\mathbf{A}^t) \mathbf{A} + \mathbf{D}^t \mathbf{D} = \mathbf{A}^t \mathbf{A} \quad (\text{F.86})$$

$$\therefore (\mathbf{A}^t) \mathbf{A} + \mathbf{D}^t \mathbf{D})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A}^t)^{-1} \quad (\text{F.87})$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}\mathbf{A}^+ \mathbf{A} &= \mathbf{A} \{(\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \mathbf{D}^t \mathbf{D})^{-1} \mathbf{A}^t\} \mathbf{A} \\
 &= \mathbf{A} \{\mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A}^t)^{-1}\} \mathbf{A} \\
 &= \mathbf{A}
 \end{aligned} \tag{F.88}$$

となり, 一般逆行列の定義にしたがう.

また, 式(F.76) に関しては,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^+ \mathbf{A} \mathbf{A}^+ &= \{(\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \mathbf{D}^t \mathbf{D})^{-1} \mathbf{A}^t\} \mathbf{A} \mathbf{A}^+ \\
 &= \{\mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A}^t)^{-1}\} \mathbf{A} \mathbf{A}^+
 \end{aligned} \tag{F.89}$$

式(F.77) に関しては,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \mathbf{A}^+ &= \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A}^t)^{-1} \\
 &= (\mathbf{A}^t)^{-1} \\
 (\mathbf{A} \mathbf{A}^+)^t &= \{\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A}^t)^{-1}\}^t \\
 &= \{\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A}^t)^{-1}\}^t \\
 &= \{(\mathbf{A}^t)^{-1}\}^t \\
 &= (\mathbf{A}^t)^{-1}
 \end{aligned} \tag{F.90}$$

式(F.78) に関しては,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^+ \mathbf{A} &= \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A}^t)^{-1} \mathbf{A} \\
 (\mathbf{A}^+ \mathbf{A})^t &= \mathbf{A}^{-1} \{(\mathbf{A}^t)^{-1}\}^t \mathbf{A} \\
 &= \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A}^t)^{-1} \mathbf{A}
 \end{aligned} \tag{F.91}$$

となり, Moore-Penrose の一般逆行列の条件を満足させる.

(2) $U^{-1} = U^t(UU^t)^{-1}$ の場合

$$\begin{aligned}
 U^{-1} &= U^t(UU^t)^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^t & \mathbf{D}^t \\ \mathbf{C}^t & \mathbf{O} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^t & \mathbf{D}^t \\ \mathbf{C}^t & \mathbf{O} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^t & \mathbf{D}^t \\ \mathbf{C}^t & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^t \mathbf{A} + \mathbf{C}^t \mathbf{C} & \mathbf{A}^t \mathbf{D} \\ \mathbf{D} \mathbf{A}^t & \mathbf{D} \mathbf{D}^t \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^t & \mathbf{D}^t \\ \mathbf{C}^t & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \mathbf{C}^t \mathbf{C})^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & (\mathbf{D}^t \mathbf{D})^{-1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^t (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \mathbf{C}^t \mathbf{C})^{-1} & \mathbf{D}^t (\mathbf{D}^t \mathbf{D})^{-1} \\ \mathbf{A}^t (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \mathbf{C}^t \mathbf{C})^{-1} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^+ & \mathbf{D}^+ \\ \mathbf{C}^+ & \mathbf{O} \end{bmatrix} \tag{F.92}
 \end{aligned}$$

したがって,

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^t (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \mathbf{C}^t \mathbf{C})^{-1} \tag{F.93}$$

ただし, $|\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \mathbf{C}^t \mathbf{C}| \neq 0$, $\mathbf{A}^t \mathbf{C} = \mathbf{O}$ である.

式(F.93) は, 式(F.88),(F.89),(F.90),(F.91) と同様の計算によって Moore-Penrose の一般逆行列であることが点検できる.

F.8.2 対角行列を用いる方法

任意のマトリックス \mathbf{A} について, \mathbf{B} と \mathbf{C} をそれぞれ直交行列, Δ を対角行列とすると,

$$\mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{C} = \Delta \tag{F.94}$$

となるような \mathbf{A} の対角化が可能である. Δ を Δ^+ の一般逆行列とするとき, \mathbf{B}, \mathbf{C} は直交行列であるから $\mathbf{B}^t = \mathbf{B}^{-1}$, $\mathbf{C}^t = \mathbf{C}^{-1}$ なので,

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1} \Delta \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{B}^t \Delta \mathbf{C}^t \tag{F.95}$$

に対して,

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{C} \Delta^+ \mathbf{B} \tag{F.96}$$

である.

式(F.74),(F.75) の条件に関して, B と C が A に対して直交行列なので, $B^t = B^{-1}, C^t = C^{-1}$ であり, $BB^t = I, CC^t = I$ であるから,

$$AA^+A = (B^t\Delta C^t)(C\Delta^+B)(B^t\Delta C^t) \quad (\text{F.97})$$

また, Δ^+ が Δ の一般逆行列であるから,

$$\Delta\Delta^+\Delta = \Delta \quad (\text{F.98})$$

したがって,

$$AA^+A = B^t\Delta\Delta^+\Delta C^t = B^t\Delta C^t \quad (\text{F.99})$$

となり, 一般逆行列の条件を満足する.

また, 式(F.76) に関して,

$$\begin{aligned} A^+AA^+ &= (C\Delta^+B)(B^t\Delta C^t)(C\Delta^+B) \\ &= C\Delta\Delta^+\Delta B \\ &= C\Delta^+B \\ &= A^+ \end{aligned} \quad (\text{F.100})$$

となる.

式(F.77) に関して,

$$\begin{aligned} AA^+ &= (B^t\Delta C^t)(C\Delta^+B) \\ &= B^t\Delta\Delta^+B \end{aligned} \quad (\text{F.101})$$

$$\begin{aligned} (AA^+)^t &= \{(B^t\Delta C^t)(C\Delta^+B)\}^t \\ &= (C\Delta^+B)^t(B^t\Delta C^t)^t \\ &= B^t(\Delta^+)^tC^tC\Delta^tB \\ &= B^t\Delta\Delta^+B \end{aligned} \quad (\text{F.102})$$

式(F.78) に関して,

$$\begin{aligned} A^+A &= (C\Delta^+B)(B^t\Delta C^t) \\ &= C\Delta^+\Delta C^t \end{aligned} \quad (\text{F.103})$$

$$\begin{aligned} (A^+A)^t &= (B^t\Delta C^t)^t(C\Delta^+B)^t \\ &= C\Delta BB^t\Delta^tC^t \\ &= C\Delta^+\Delta C^t \end{aligned} \quad (\text{F.104})$$

となり, Moore-Penrose の一般逆行列の条件を満足させる.

F.8.3 近似的に求める方法

$|\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \delta \mathbf{I}| \neq 0$ ならば, $(\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \delta \mathbf{I})^{-1}$ が存在し,

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \delta \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \delta \mathbf{I}) \\ &= (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{A} + (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \delta \mathbf{I})^{-1} \delta \mathbf{I} \end{aligned} \quad (\text{F.105})$$

$(\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \delta \mathbf{I})^{-1}$ は δ^{-1} の 1 次項しか含まないから,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \delta \mathbf{I})^{-1} \delta = \text{有限} \quad (\text{F.106})$$

$$\therefore \lim_{\delta \rightarrow 0} (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{A} = \text{有限} \quad (\text{F.107})$$

$$\therefore \lim_{\delta \rightarrow 0} (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{A} \delta = \mathbf{O} \quad (\text{F.108})$$

式(F.106) の両辺に $\mathbf{A}^+ \mathbf{A}$ を乗じて, $\delta \rightarrow 0$ の極限で,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+ \mathbf{A} &= (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \delta \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \delta \mathbf{I}) \mathbf{A}^+ \mathbf{A} \\ &= (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{A}^+ \mathbf{A} + (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \delta \mathbf{I})^{-1} \delta \mathbf{A}^+ \mathbf{A} \end{aligned} \quad (\text{F.109})$$

となる. ここで, \mathbf{A}^+ の Moore-Penrose の条件式(F.78) から,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+ \mathbf{A} &= (\mathbf{A}^+ \mathbf{A})^t \\ &= \mathbf{A}^t \mathbf{A} (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \mathbf{D}^t \mathbf{D})^{-1} \end{aligned} \quad (\text{F.110})$$

式(F.109) は式(F.108) を用いて, $\delta \rightarrow 0$ の極限で,

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \delta \mathbf{I})^{-1} \delta \mathbf{A}^+ \mathbf{A} &= (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \delta \mathbf{I})^{-1} \delta \mathbf{A}^+ \mathbf{A} (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \mathbf{D}^t \mathbf{D})^{-1} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{F.111})$$

したがって,

$$\mathbf{A}^+ \mathbf{A} = (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{A}^+ \mathbf{A} \quad (\text{F.112})$$

この式(F.112) の両辺に右から \mathbf{A}^+ を乗じて,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+ \mathbf{A} \mathbf{A}^+ &= \mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{A}^+ \mathbf{A} \mathbf{A}^+ \\ &= (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{A}^+ \end{aligned} \quad (\text{F.113})$$

ただし, Moore-Penrose の一般逆行列 \mathbf{A}^+ の条件式(F.77)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{A}^+ &= \mathbf{A}^t (\mathbf{A} \mathbf{A}^+)^t \\ &= (\mathbf{A} \mathbf{A}^+ \mathbf{A})^t \\ &= (\mathbf{A} \mathbf{A}^+ \mathbf{A})^t \\ &= \mathbf{A}^t \end{aligned} \quad (\text{F.114})$$

式(F.113), (F.114) から,

$$\mathbf{A}^+ = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^t \quad (\text{F.115})$$

となる.

F.9 正規分布

最小 2 乗法は、誤差の発生する確率がランダムであり、最確値 μ を中心に、

- (1) 一方の側における誤差と他の側における誤差が発生する確率は同じである。
- (2) 小さい誤差の発生する確率は、大きい誤差の発生する確率よりも高い。
- (3) 非常に大きい誤差の確率はきわめて小さい。

の条件、すなわち誤差は正規分布することが大前提である。

ここでは、一般化した n 次元の正規分布から、測量の場合 $x - y$ の 2 量の最小 2 乗法を求めることになるため、2 次元の正規分布までを述べる。

さらに、1 次元正規分布の精度の表現として一般的な『標準偏差 σ 』に相当し、2 次元正規分布の精度の表現方法として『確率長円』について述べる。測量の場合、確率長円は『誤差楕円』として、 $x - y$ 平面内での誤差の分布を表現する方法として用いられる。

F.9.1 n 次元の正規分布の密度関数

n 次元の正規分布の密度関数は、

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{|\Sigma|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mu)^t \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \right\} \quad (\text{F.116})$$

となる。 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ であり、 μ はそれらの平均値である。また、 Σ は分散共分散行列 (variance-covariance matrix) であり、

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \quad (\text{F.117})$$

となる。ここで、

$$\sigma_{ij} = \mathbf{E}\{(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\} \quad (\text{F.118})$$

$$= \mathbf{E}\{(X_j - \mu_j)(X_i - \mu_i)\} \quad (\text{F.119})$$

$$= \sigma_{ji} \quad (\text{F.120})$$

であるから、分散共分散行列 Σ は対称行列である。さらに、相関行列 (correlation matrix) は対角要素が 1 であり、対角要素以外の i 行 j 列の要素が、

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad (\text{F.121})$$

に等しい対称行列である。

この一般化した n 次元の正規分布の密度関数から、2 次元、1 次元の正規分布の密度関数は次のとおりである。

F.9.2 1次元の正規分布の密度関数

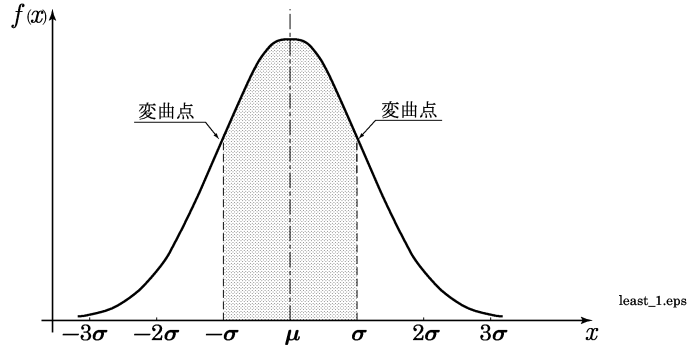


図 F.1: 1次元の正規分布の密度関数

式(F.116)において $n = 1$ であるから, Σ は,

$$\Sigma = \sigma_x^2 \quad (\text{F.122})$$

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_x^2} \quad (\text{F.123})$$

となる.

したがって, 式(F.116) で表される 1次元の正規分布の密度関数は,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma_x^2} \right\} \quad (\text{F.124})$$

となる. 式(F.129) で表される 1次元の正規分布の密度関数は, 最も標準的な関数で図 F.1 のように標準偏差 σ で $d^2 f(x)/dx^2 = 0$ (変曲点) となる.

F.9.3 2次元の正規分布の密度関数

式(F.116)において $n = 2$ であるから, Σ は,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_y\sigma_x & \sigma_y^2 \end{pmatrix} \quad (\text{F.125})$$

であるから,

$$\begin{aligned} |\Sigma| &= \sigma_x^2 \sigma_y^2 - \rho^2 \sigma_x^2 \sigma_y^2 \\ &= (1 - \rho^2) \sigma_x^2 \sigma_y^2 \end{aligned} \quad (\text{F.126})$$

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{(1 - \rho^2) \sigma_x^2 \sigma_y^2} \begin{pmatrix} \sigma_y^2 & -\rho\sigma_y\sigma_x \\ -\rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_x^2 \end{pmatrix} \quad (\text{F.127})$$

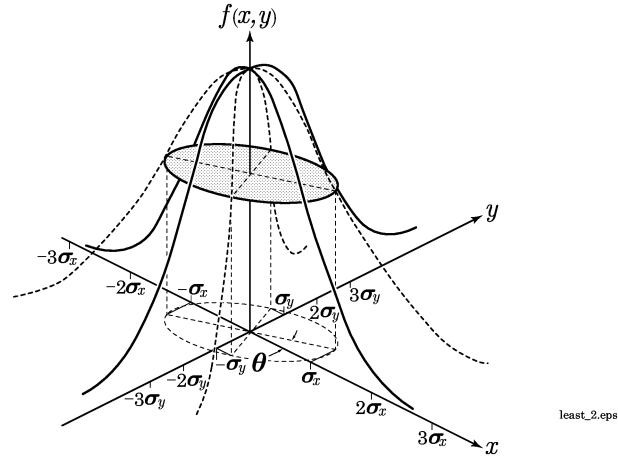


図 F.2: 2次元の正規分布の密度関数

となる.

したがって, 式(F.116) は,

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_x\sigma_y} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(x-\mu_x, y-\mu_y) \right. \\
 &\quad \times \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} \sigma_y^2 & -\rho\sigma_x\sigma_y \\ -\rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-\mu_x \\ y-\mu_y \end{pmatrix} \Big\} \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \right. \\
 &\quad \times \left. \left\{ \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right\} \right] \quad (\text{F.128})
 \end{aligned}$$

となる.

F.9.4 確率長円

確率長円は、2次元分布の場合の誤差の表現方法で、1次元正規分布の精度の表現として一般的な『標準偏差 σ 』に相当する。測量の場合、確率長円は『誤差楕円』として、 $x-y$ 平面内での誤差の分布を表現する方法として用いられる。

平均値の信頼区域は

$$(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) < c^2 \quad (\text{F.129})$$

で表される。

2次元の場合、式(F.128) から

$$\frac{1}{1 - \rho^2} \left\{ \frac{(X - \mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{(X - \mu_x)}{\sigma_x} \cdot \frac{(Y - \mu_y)}{\sigma_y} + \frac{(Y - \mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right\} < c^2 \quad (\text{F.130})$$

となる。式(F.130) は、 $(x, y) = (\mu_x, \mu_y)$ を中心とした楕円の内部を示している（図 F.3 参照）。この楕円を確率長円といい、 $c = 1$ のとき誤差楕円という。

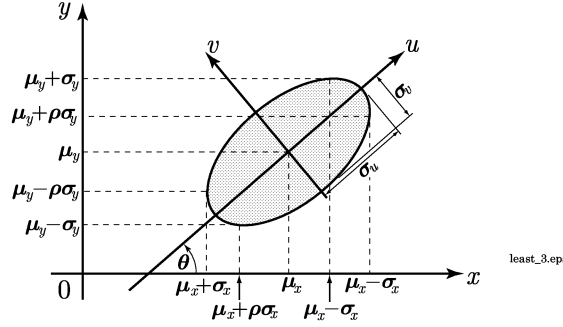


図 F.3: 確率長円

u 軸、 v 軸は楕円の長軸、短軸の方向に一致させたとき境界となる楕円の式は、

$$\frac{u^2}{\sigma_u^2} + \frac{v^2}{\sigma_v^2} = c^2 \quad (\text{F.131})$$

で表される。これは、式(F.130) から

$$\frac{1}{1 - \rho^2} \left\{ \frac{(X - \mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{(X - \mu_x)}{\sigma_x} \cdot \frac{(Y - \mu_y)}{\sigma_y} + \frac{(Y - \mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right\} = c^2 \quad (\text{F.132})$$

の楕円の式について、次のような座標変換によって求める。

まず、

$$\begin{cases} x' &= x - \mu_x \\ y' &= y - \mu_y \end{cases} \quad (\text{F.133})$$

の平行移動により,

$$\frac{1}{1-\rho^2} \left\{ \frac{x'^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{x'y'}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y'^2}{\sigma_y^2} \right\} = c^2 \quad (\text{F.134})$$

となり, 次の(F.135) のように表せる.

$$(x', y') \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_x^2} & -\frac{\rho}{(1-\rho^2)\sigma_x\sigma_y} \\ -\frac{\rho}{(1-\rho^2)\sigma_y\sigma_x} & \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = c^2 \quad (\text{F.135})$$

この式(F.135) に式(F.121) ($\rho = \sigma_{xy}/(\sigma_x\sigma_y)$) などによって,

$$(x', y') \cdot \frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2} \begin{pmatrix} \sigma_y^2 & -\sigma_{xy} \\ -\sigma_{yx} & \sigma_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = c^2 \quad (\text{F.136})$$

したがって, (F.132) は,

$$(x', y') \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = c^2 \quad (\text{F.137})$$

のように表せる.

次に, 平行移動させた確率長円 (式(F.135)) を回転させ, u 軸, v 軸を楕円の長軸, 短軸方向にとる回転角 θ を求める. これは, 式(F.137) の主軸の方向を求めることであり, 式(F.137) の固有ベクトルを求めることに等しい.

座標の回転角 θ および座標回転後の u 軸, v 軸方向の標準偏差を σ_u, σ_v とし,

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \Sigma_{xy} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_{uv} = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 \end{pmatrix} \quad (\text{F.138})$$

とする. Σ_{xy} は x, y の分散強分散行列である. また, Σ_{uv} は変換後の座標系 u, v の分散強分散行列である. u 軸, v 軸上の誤差楕円の方程式は, uv 項を含まないようにするので, Σ_{uv} は対角行列となる.

したがって, 式(F.137) の主軸 u, v と x, y 軸の関係は,

$$\Sigma_{uv} = \mathbf{R} \Sigma_{xy} \mathbf{R}^t \quad (\text{F.139})$$

であり, 回転行列 \mathbf{R} は直交行列 ($\mathbf{R}^t = \mathbf{R}^{-1}$) であるから,

$$\Sigma_{xy} = \mathbf{R}^t \Sigma_{uv} \mathbf{R} \quad (\text{F.140})$$

となる. ここで, λ を実数, \mathbf{I} を単位行列とすると,

$$\begin{aligned} \Sigma_{xy} - \lambda \mathbf{I} &= \mathbf{R}^t \Sigma_{uv} \mathbf{R} - \lambda \mathbf{I} \\ &= \mathbf{R}^t (\Sigma_{uv} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{R} \quad (\because \lambda \mathbf{R}^t \mathbf{I} \mathbf{R} = \lambda \mathbf{R}^{-1} \mathbf{I} \mathbf{R} = \lambda \mathbf{I}) \end{aligned} \quad (\text{F.141})$$

となる。すなわち,

$$\begin{aligned}
 |\Sigma_{xy} - \lambda \mathbf{I}| &= |\mathbf{R}^t (\Sigma_{uv} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{R}| \\
 &= |\mathbf{R}^t| |\Sigma_{uv} - \lambda \mathbf{I}| |\mathbf{R}| \\
 &= |\Sigma_{uv} - \lambda \mathbf{I}| \\
 &= (\sigma_u^2 - \lambda)(\sigma_v^2 - \lambda)
 \end{aligned} \tag{F.142}$$

となり, 分散 σ_u^2 , σ_v^2 は Σ_{xy} の固有値である。したがって, Σ_{xy} の固有方程式は,

$$|\Sigma_{xy} - \lambda| = \begin{vmatrix} \sigma_x^2 - \lambda & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{F.143}$$

すなわち,

$$\lambda^2 - (\sigma_u^2 + \sigma_v^2)\lambda + (\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2) = 0 \tag{F.144}$$

である。式(F.144)を解いて,

$$\lambda = \frac{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \pm \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2}}{2} \tag{F.145}$$

また, 確率長円の回転の傾斜角 θ は分散 σ_x^2 , σ_y^2 に対する固有ベクトルを $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ とすると, 次の関数が成り立つ。

$$\Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 \end{pmatrix} \tag{F.146}$$

$\sigma_u^2 \neq \sigma_v^2$ のとき $|\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2| \neq 0$ であるから,

$$\Sigma_{uv} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)^{-1} \Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \tag{F.147}$$

とでき, 式(F.139)と比較して,

$$(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \mathbf{R}^t = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \tag{F.148}$$

とすることができる。この式(F.148)と式(F.146)から,

$$\sigma_x^2 \cos \theta + \sigma_{xy} \sin \theta = \sigma_u^2 \cos \theta \tag{F.149}$$

$$\sigma_{yx} \cos \theta + \sigma_y^2 \sin \theta = \sigma_u^2 \sin \theta \tag{F.150}$$

となり,

$$\tan \theta = \frac{\sigma_u^2 - \sigma_x^2}{\sigma_{xy}} \tag{F.151}$$

$$= \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_u^2 - \sigma_y^2} \tag{F.152}$$

が得られる.

さらに, 同様に式(F.146) と式(F.148) より,

$$-\sigma_x^2 \sin \theta + \sigma_{xy} \cos \theta = -\sigma_v^2 \sin \theta \quad (\text{F.153})$$

$$-\sigma_{xy} \sin \theta + \sigma_y^2 \cos \theta = \sigma_v^2 \cos \theta \quad (\text{F.154})$$

となり,

$$\tan \left(\theta \pm \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sigma_v^2 - \sigma_{xx}^2}{\sigma_{xy}} \quad (\text{F.155})$$

$$= \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_v^2 - \sigma_y^2} \quad (\text{F.156})$$

を得る. 式(F.151), (F.152) から確率長円の長軸に対する回転角 θ が, 式(F.155), (F.156) から確率長円の短軸に対する回転角 θ が計算できる.

関連図書

- [1] 遠藤有聲,『Precise Alignment of Magnets for the High Energy Synchrotron Accelerators』, GeoInfo(July.1994)
- [2] 遠藤有聲,『シンクロトロン電磁石 (加速器設計シリーズ) 』, KEK Internal (2001,February)
- [3] E.D.Courant and H.S.Snyder , *Theory of the Alternating-Gradient Synchrotron* , ANNALS OF PHYSICS (1958)
- [4] Heavy Ion Medical Accelerator in Chiba , *A Design Summary and Update* (NIRS-M-89,HIMAC-001) , National Institute of Radiological Sciences , (1992,December).
- [5] CAS(CERN Accelerator School) , *APPLIED GEODESY FOR PARTICLE ACCELERATORS* (1986).
- [6] Survey and alignment Team,Mechanical Engineering Department on the SLAC , *The Use and Calibration of the Kern ME5000 MEKOMETER* , Stanford Linear Accelerator Center (1992,June).
- [7] D. Meier/R. Loser , *The ME5000 MEKOMETER a new precision distance meter* , AVN Switerland.
- [8] Ingobert Schmdel , *Geodetic Survey and Component Alignment of the Combined Heavy Ion Synchrotron SIS and the Experimental Strage Cooler Ring ESR* , metronom Germany
- [9] J. M. Rüger , *Electronic Distance Measurement* , Springer-Verlag(1990).
- [10] 亀井亮, 木原元央,『加速器科学』, 丸善 , (1993).
- [11] 原田建久,『測量厳密計算法』, 鹿島出版会 , (1992).
- [12] 田島稔, 小牧和雄,『最小 2 乗法の理論とその応用』, 東洋書店 , (1985)
- [13] E.W. Grafarend/F. Sansó , *Optimization and Design of Geodetic Networks* , Springer-Verlag(1985).

- [14] 『現代測量学 1 卷 (測量の数学的基礎)』, 日本測量協会, (1982)
- [15] 『現代測量学 2 卷 (測量計測概論)』, 日本測量協会, (1982)
- [16] 『現代測量学 3 卷 (一般測量)』, 日本測量協会, (1983)
- [17] 『現代測量学 4 卷 (測地測量 (1))』, 日本測量協会, (1984)
- [18] 『現代測量学 5 卷 (測地測量 (2))』, 日本測量協会, (1985)
- [19] 『現代測地学』, 日本測地学会, (1994)
- [20] T. J. M. Kennie/G. Petrie , *ENGINEERING SURVEYING TECHNOLOGY*, John Wiley and Sons,Inc(1990).
- [21] G. Bomford , *Geodesy* , Oxford University Press(1987).
- [22] 川村雅恭,『電磁気学』, 昭晃堂, (1975)
- [23] 有山正孝,『振動・波動』, 裳華房 (1976).
- [24] 矢野健太郎,『立体解析幾何学』, 裳華房 (1970).
- [25] 小林昭七,『曲線と曲面の微分幾何』, 裳華房 (1973).
- [26] 大石忠尚,『大寸法の標準』, 精密工学会誌 (1992)
- [27] 三島研二, 他,『野辺山電波望遠鏡設置精密測量』, 日本測量協会誌, (1993).
- [28] 三島研二, 他,『HIMAC 設置の精密測量』, 日本測量協会誌, (1994).
- [29] Kenji Mishima , *Survey and Alignment of the Siam Photon Project* , APAC 2001