

博士論文

モデル予測制御による
飛翔体の時間変化特性に対応可能な
ロバスト制御系設計

総合研究大学院大学 物理科学研究科 宇宙科学専攻
学籍番号 20181152
坂岡 恵美

指導教員 森田 泰弘 教授

2023年3月

Abstract

本研究ではモデル予測制御と呼ばれる比較的新しい制御理論を応用してロケットの姿勢制御系を設計する。ロケットの姿勢制御系を設計する上で考慮すべき二大特徴として、ダイナミクスの不確定性と時変性があげられる。ダイナミクスの不確定性が存在する原因はモデル化誤差や外乱である。モデル化誤差とは制御対象を数式モデルとして表現する際に発生する、実機とモデルの間に存在する誤差のことである。モデル化誤差は機体質量や推力など対象の運動を決定するパラメータを推定するときや、非線形なダイナミクスを線形化するとき発生する。さらに、ロケットが飛翔する空間は空気が存在するため、突風外乱が発生する。この影響を受けることで実機が想定と異なる挙動を示すことがある。以上がダイナミクスの不確定性の主な原因であり、制御器はこの特性に対応し、ロケットを安定に飛翔させることが求められる。ダイナミクスの二大特徴の2つ目は時変性である。ダイナミクスの時変性の一例として、飛翔中に機体の質量が大きく変化することがあげられる。これはロケットの全機体質量の約9割を推進薬が占めており、その推進薬を消費しながら飛翔することが原因である。この推進薬消費にともなう質量の変化により機体の安定性に関するパラメータが時間と共に大きく変化する。制御器はダイナミクスの不確定性に加えて、このようなパラメータの大規模な時間変化に対応することが求められる。

本研究は特に2つ目の特徴であるダイナミクスの時変性に対して新規性に富んだアプローチ法を提案する。従来の制御器設計手法では時変性に理論的に対応することができないため、ゲインスケジューリング法を適用している。ゲインスケジューリング法は、全飛翔時間を複数のブロックに区切り、そのブロック内ではダイナミクスは一定であると仮定して制御器を設計する手法である。この手法では、飛翔時間を制御対象の特性を考慮しながら区間分けするため、それ自体に専門的な経験と知識が必要である。さらに、複数個制御器を設計する必要があるため、1回の打上げに対して制御器設計にかかる時間が多く必要となる。本研究で提案する手法はこの手間を低減し、時変性に対して理論的に対応することでスケジューリングを不要とし、1回の打上げに必要な制御器の数を減らすことが最大の目的である。この目的を実現するため、本研究では比較的新しい制御理論であるモデル予測制御を利用する。モデル予測制御は逐次制御の結果をフィードバックしながら最適化計算を解く理論であるため、予め最適化計算を解くLQRや予めゲインを設定しておくPID制御と比較して良い性能が期待される。さらにモデル予測制御は、制御器内に有する制御対象のモデルや利用する最適化アルゴリズムを工夫することで、制御対象の不確定性に耐性のあるロバスト制御や制御対象の変化に積極的に対応する適応制御など様々な種

類の制御を行うことが可能である。本研究はモデル予測制御がロバスト制御および適応制御に対応できることに着目し、ダイナミクスの不確定性に対しては従来手法を踏襲してロバスト制御で対応し、ダイナミクスの時変性に対しては適応制御を適用することを検討する。本研究は3段階に分けて行われる。第1段階では既存のロバストモデル予測制御、適応型モデル予測制御を適用して制御器を設計し、ダイナミクスの不確定性と時変性それぞれに対応できることを確認する。第2段階では第1段階で設計した制御器を簡易的に組み合わせることで2つの制御理論の統合が可能である見込みを付けるとともに課題点を見出す。第3段階では第2段階で得られた知見をもとにダイナミクスの時変性と不確定性の両方に対応可能な制御理論を提案する。既存の理論では時間変化するシステムに対して安定性を保証できないという課題に対して、理論を拡張することで時間変化するシステムに対して安定性を保証できる新理論を提案する。各制御器の性能はシミュレーションにより確認し、制御器の安定性を評価する。

本論文は全11章で構成される。第1章では宇宙開発の動向やこれまで利用されてきたロケット、ロケットの姿勢制御系の発展の歴史について述べる。また、ロケット以外の制御対象に対して適用されている制御理論について述べ、ロケットのダイナミクスが特徴的であることを示す。第2章ではモデル予測制御の概要として、制御系の構成、モデル予測制御の種類とその応用例、ロケットに対しての応用例について各文献を引用しながら紹介する。第3章では本研究で扱う機体のダイナミクスとそのモデル化について述べる。制御対象の各パラメータや運動方程式、周波数応答を示す。第4章では問題設定としてロケットの姿勢制御系における入出力信号と、代表的なコマンド、シミュレーション条件について述べる。本研究ではフェアリング部分に取り付けられたレート積分センサからの出力である姿勢角レートと姿勢角を制御出力とし、操作量はアクチュエータの舵角とする。第5章では提案する制御器の比較用として設計する従来制御器の設計手法とその応答を示す。従来制御器として H_∞ 制御器を低次元化した制御器を模擬する。シミュレーションにて、制御器が制御対象をロバスト安定にできていることを示す。また、時変システムに対しても制御器を適用したシミュレーションを行い、時間変化する制御対象には対応出来ないことを確認する。第6章では研究の第1段階として、制御対象の時変性に対応可能な制御器の設計手法とその応答を示す。適応モデル予測制御器を設計し、時変システムに適用したシミュレーションを行うことで時間変化に対応可能であることを示す。一方で、不確定性を有するシステムに対して適用したシミュレーションを行うことで不確定性には対応不可能であることを示す。第7章では、引き続き本研究の第1段階として、制御対象の不確定性に対応可能な制御器の設計手法とその応答を示す。ロバストモデル予測制御器を設計し、不確定性を有するシステムに適用したシミュレーションを行うことで不確定性

に対応可能であることを示す。一方で、時変性を有するシステムに対して適用したシミュレーションを行うことで時変性には対応不可能であることを示す。第 8 章では研究の第 2 段階として、第 1 段階で設計した制御器を組み合わせる適応ロバストモデル予測制御器を設計し、不確実性を有する時変システムに適用する。シミュレーションにてダイナミクスの不確実性と時変性の両方に対応可能であることを示す。一方で、適用しているロバスト制御理論が成立する条件が時変システムに対応していないことを示し、時変システムに対して適用するにあたって修正すべき点を示す。研究の第 3 段階となる第 9 章では前章で示した課題点に対して検討したアプローチを示す。第 10 章では最終的に提案する制御理論を示し、提案する制御理論に基づいて設計した制御器を使ったシミュレーション結果を提示し、提案手法の有効性について述べる。最後に、第 11 章で本論文を総括する。

This study proposes a novel algorithm based on model predictive control for attitude controller design of launch vehicles. The two distinguishing characteristics to be considered in designing attitude controllers are uncertainty and time-varying characteristics of dynamics. The uncertainty is caused by modeling errors and gust disturbances. The modeling errors are differences between actual controlled systems and mathematical models and have two main causes. The 1st one is the estimation error of parameters that decide the motion, such as mass and thrust. The bending stiffness is also one example of these parameters. It can have an estimation error because the total length is so long that the bending stiffness of the whole vehicle cannot be measured directly, and the test results of each component are used to estimate it. The 2nd cause of the modeling errors is linearization of the controlled systems. The dynamics of launch vehicles have non-linearity. In attitude controller design, a controlled system is linearized to make it easier to handle. This procedure drops some non-linearly elements, and this leads to modeling errors. Additionally, gust disturbances exist in a phase where a launch vehicle flies, and they cause unexpected motion. The 2nd distinguishing characteristic of launch vehicles is the time-varying characteristics of dynamics. For example, the mass significantly changes in flight. This is because propellant accounts for about 90% of the total mass of the launch vehicle, and the launch vehicle consumes it during the flight. Because of this extensive mass change caused by propellant consumption, some parameters change significantly, which are related to the stability of the launch vehicle. Controllers are required to tackle them and make launch vehicles stable.

This study proposes a novel approach for mainly the 2nd distinguishing characteristic: the time-varying characteristics of dynamics. The current method cannot theoretically respond to it and tackles it with a gain-scheduling approach. In this approach, a whole flight time is divided into multiple blocks, and controllers are designed under the assumption that dynamics are constant within a block. This method requires specialized experience and knowledge for the division. Additionally, much time is necessary for controller design since multiple controllers are needed for one flight. This can be a problem in the improvement of the launch frequency in the future. The ultimate goal of this study is to reduce the number of controllers required for one flight by theoretically dealing with the time-varying characteristics to make division unnecessary. This decreases time and effort in attitude controller design and

leads to the improvement of the launch frequency. This study uses model predictive control for the goal. The model predictive control is one of the relatively new control theories and a theory that solves optimization problems with feedback results at every control interval. Hence, better performance is expected compared to LQR, which solves optimization problems in advance, and PID control, which calculates gains offline. Furthermore, the model predictive control can perform various control for each control purpose. For example, robust control is performed by devising an optimization algorithm, and adaptive control is achieved by using different models in every control interval. This study utilizes the model predictive control so that the robust control is performed for the uncertainty, and the adaptive control is conducted for the time-varying characteristics. This study is divided into three steps. In the 1st step, a robust model predictive controller and an adaptive model predictive controller are respectively designed for the uncertainty and the time-varying characteristics. In the 2nd step, a simulation is conducted with the controller by simply combining the controllers designed in the 1st step. Some problems are described when adapting to time-varying systems. In the 3rd step, an integration of these controllers is considered based on the knowledge obtained in the 2nd step. The difficulty in the integration is that the conventional robust theory is only satisfied under the assumption that a system is time-invariant. This study develops it so that the proposed robust theory can guarantee robust stability against time-varying systems. These controllers are evaluated with simulations.

This thesis consists of 11 chapters. Chapter 1 describes the trends in space development, rockets used so far, and the history of the development of rocket attitude control systems. Chapter 2 provides an overview of model predictive control, including the structure of the control system, basic optimization calculation methods, types of MPCs, and examples of MPC applications, by citing various references. Chapter 3 describes the dynamics of the vehicle treated in this study. The equations of motion and the frequency response are presented. Chapter 4 describes the input/output signals and typical commands in the rocket attitude control system. In this study, the attitude angle rate and the attitude angle from the sensor attached to the fairing are used as the control output, and the manipulated variable is the steering angle of the actuator. In Chapter 5, the design method and response of a conventional controller are shown. This controller is designed to mimic a reduced-order controller

of the conventional H_∞ controller, and it is for comparison with MPC controllers designed in this study. Simulations show the H_∞ controller can robustly stabilize the controlled system. Additionally, simulations are also performed for a time-varying system with the controller. This simulation is for confirmation that the controller cannot respond to the time-varying characteristics. In Chapter 6, as the 1st step of this study, an adaptive model predictive controller is designed for the time-varying characteristics. The ability to tackle the time-varying characteristics is evaluated by simulation. Chapter 7 is also the 1st step of this study. A robust model predictive controller is designed for the uncertainty. The controller is also evaluated by simulation. In Chapter 8, the 2nd step of this study, the adaptive robust model predictive controller is designed by integrating the controllers designed in the 1st step. This controller is applied to the time-varying systems with uncertainty. The simulation shows good performance, but robust stability doesn't be guaranteed. This is because the robust algorithm assumes application to time-invariant systems. This is a problem to be revised for adaption to the time-varying system. Chapter 9, which is the 3rd step of this study, presents the approaches solving the problems described in the previous chapter. In Chapter 10, the proposed theory is shown, and the controller is designed based on it and evaluated with simulations. Finally, Chapter 11 presents the conclusion of this thesis.

目次

第 1 章	序論	1
1.1	宇宙分野における研究開発の動向	1
1.1.1	宇宙開発の動向	1
1.1.2	ロケット開発の動向	4
1.2	ロケットの航法・誘導・制御	6
1.3	ロケットの姿勢制御	8
1.3.1	制御器への要求性能	8
1.3.2	ダイナミクスの特徴	9
1.3.3	制御理論の発展	10
1.4	ロケットの制御と他分野との関係	11
1.5	本論文の目的と構成	14
第 2 章	モデル予測制御	16
2.1	モデル予測制御の概要	16
2.2	制御系構成	17
2.2.1	最適化計算器	17
2.2.2	予測モデル	20
2.3	モデル予測制御の種類	21
2.3.1	適応モデル予測制御	21
2.3.2	ロバストモデル予測制御	22
2.4	ロケットに対するモデル予測制御の適用	23
2.5	本章のまとめ	23
第 3 章	制御対象	25
3.1	機体仕様	25

3.2	棒の曲げ振動	30
3.3	機体運動	32
	3.3.1 ラグランジアン	32
	3.3.2 運動方程式	32
3.4	状態空間	46
3.5	周波数特性	49
3.6	本章のまとめ	52
第 4 章	問題設定	53
4.1	制御入出力	53
4.2	制御目標	53
4.3	シミュレーション条件	55
4.4	本章のまとめ	55
第 5 章	従来制御器 (H_∞ 制御器)	56
5.1	制御系の構成	56
5.2	パラメータチューニング	58
	5.2.1 ゲイン設計	58
	5.2.2 フィルタ設計	61
5.3	シミュレーション結果	67
	5.3.1 不確定性のあるシステムへの適用	67
	5.3.2 時変システムへの適用	69
5.4	本章のまとめ	69
第 6 章	適応モデル予測制御	71
6.1	制御系の構成	71
6.2	状態量の推定	72
6.3	評価関数および制約条件	72
6.4	パラメータチューニング	73
6.5	時変システムに適用したシミュレーション結果	76
6.6	不確定性を有するシステムに適用したシミュレーション結果	80
6.7	本章のまとめ	80
第 7 章	ロバストモデル予測制御	82

7.1	制御系の構成	82
7.2	ロバスト安定性保証理論	83
7.3	計算アルゴリズム	85
7.4	最適化計算の実行可能性	88
7.5	パラメータチューニング	89
7.6	不確定性を有するシステムに適用したシミュレーション結果	91
7.7	時変システムへ適用したシミュレーション結果	93
7.8	本章のまとめ	93
第 8 章	適応ロバストモデル予測制御	97
8.1	制御器設計手法	97
8.2	パラメータチューニング	98
8.3	不確定性のある時変システムに適用したシミュレーション結果	98
8.4	安定性保証理論の破綻	100
8.5	本章のまとめ	101
第 9 章	新理論の検討	102
9.1	検討手法 1	102
9.1.1	理論	102
9.1.2	計算アルゴリズム	104
9.1.3	本節のまとめ	105
9.2	検討手法 2	105
9.2.1	理論	105
9.2.2	計算アルゴリズム	105
9.2.3	本節のまとめ	107
9.3	本章のまとめ	107
第 10 章	時変モデル予測制御による有限ホライズン制御理論	109
10.1	理論	109
10.2	計算アルゴリズム	112
10.3	可解性保証	116
10.4	安定性保証	120
10.5	性能評価	121
10.5.1	パラメータチューニング	121

10.5.2	シミュレーション	122
10.6	本手法の特徴	125
10.7	本章のまとめ	126
第 11 章	総括	127
付録 A	数学的基礎事項	129
A.1	正定値行列・半正定値行列	129
A.2	シュールの補題	129
A.3	線形行列不等式 [64]	130
A.4	ポリトープ	130
付録 B	パラメーター一覧	132
参考文献		137
業績目録		143
謝辞		144

目次

1.1	Integrated space-based observing system [4].	2
1.2	Launch trend of satellites less than 500kg [5].	3
1.3	History of rockets made in Japan [12].	5
1.4	Block diagram of guidance and control system.	7
1.5	Rocket guidance methods.	8
1.6	Rocket dynamics' characteristics.	9
1.7	Controlled systems and control theories.	12
2.1	Block diagram of MPC system.	17
2.2	Outline of optimization in MPC controller.	18
2.3	MPC variations.	21
3.1	Vehicle model.	26
3.2	Geometry for getting the moment of inertia of ring shape.	27
3.3	Geometries for getting the moment of inertia of the nozzle.	28
3.4	Frequency responses of the rocket at X+15 [s], X+35 [s], X+55 [s].	50
3.5	Frequency responses of the rocket with uncertainty at X+15 [s].	50
3.6	Effect of vibration on the rocket dynamics at X+15 [s].	52
4.1	Target attitude angles of M-V 5th rocket [58].	54
4.2	Target attitude angle example.	55
5.2	Block diagram of conventional controller.	56
5.1	Disign flow of H_∞ control system.	57
5.3	Comparison of K_θ	58
5.4	Comparison of $K_{\dot{\theta}}$	59

5.5	Gust disturbance.	60
5.6	Comparison of responsiveness to gust disturbance.	60
5.7	Compensation filter for M-V rocket [17].	61
5.8	Example of low pass filter.	62
5.9	Example of 2nd order notch filter.	63
5.10	Time responses of notch filter to the system with bending stiffness \times 0.5.	64
5.11	Time responses of notch filter to the nominal system.	64
5.12	Time responses of notch filter to the system with bending stiffness $\times 2$	64
5.13	Comparison of frequency responses of compensators.	66
5.14	Open-loop transfer function from θ_c to θ_{IMU}	67
5.15	Time responses of notch filter and lead-lag compensator to the system with bending stiffness $\times 0.5$	68
5.16	Time responses of notch filter and lead-lag compensator to the nom- inal system.	68
5.17	Time responses of notch filter and lead-lag compensator to the system with bending stiffness $\times 2$	68
5.18	Time responses of notch filter and lead-lag compensator to the TV nominal system.	70
6.1	Block diagram of AMPC system.	72
6.2	MPC designer.	73
6.3	Design flow of AMPC controller with MPC designer.	74
6.4	Time responses of AMPC controller to the TV nominal system.	77
6.5	Comparison of responsiveness.	78
6.6	Time-series data of thrust.	79
6.7	Comparison of MPC and AMPC.	79
6.8	Time responses of AMPC controller to the TV system with bending stiffness $\times 0.5$	81
7.1	Block diagram of RMPC system.	83
7.2	Design flow of RMPC controller.	89
7.3	Effect of uncertainty range on responsiveness.	91

7.4	Time responses of RMPC controller to the TI system with bending stiffness $\times 0.5$	92
7.5	Time responses of RMPC controller to the nominal TI system.	92
7.6	Time responses of RMPC controller to the TI system with bending stiffness $\times 2$	92
7.7	Time responses of RMPC controller to the TV system with bending stiffness $\times 0.5$	94
7.8	Time responses of RMPC controller to the TV nominal system.	95
7.9	Time responses of RMPC controller to the TV system with bending stiffness $\times 2$	96
8.1	Block diagram of ARMPC system.	97
8.2	Time responses of ARMPC controller to the TV system with bending stiffness $\times 0.5$	99
8.3	Time responses of ARMPC controller to the TV nominal system.	99
8.4	Time responses of ARMPC controller to the TV system with bending stiffness $\times 2$	99
8.5	Effect of models on state prediction.	101
10.1	Comparison of prediction models.	110
10.2	Infinite horizon control for TI system and TV system.	111
10.3	Finite horizon control for TV system.	111
10.4	Block diagram of TVRMPC system.	112
10.5	Relationship of Ω_l and Ω_{l+s}	117
10.6	Time responses of TVRMPC controller to the TV system with bending stiffness $\times 0.5$	124
10.7	Time responses of TVRMPC controller to the TV nominal system.	124
10.8	Time responses of TVRMPC controller to the TV system with bending stiffness $\times 2$	124
B.1	Time-series data of slope of normal force coefficient.	132
B.2	Time-series data of dynamic pressure.	134
B.3	Time-series data of moment of inertia.	134
B.4	Time-series data of mass.	135

B.5	Time-series data of thrust.	135
B.6	Time-series data of mass center position.	136

表目次

1.1	Positioning satellites.	2
1.2	Studies for reusable launch vehicles.	6
1.3	Spacecrafts vs Rockets.	8
1.4	Development of control theory for rockets.	11
1.5	Conventional methods vs proposed method in rocket control.	14
3.1	Time-invariant parameters of the controlled vehicle.	26
3.2	Parameters of 1st bending mode.	30
5.1	Parameters of notch filter.	63
5.2	Parameters of lead-lag compensator.	65
6.1	Parameters of adaptive MPC controller.	76
7.1	Parameters of robust MPC controller.	90
8.1	Parameters of adaptive robust MPC controller.	98
10.1	Parameters of time-varying robust MPC controller.	122
10.2	Comparison of controller design methods.	125
B.1	Time-series data of slope of normal force coefficients.	133

記号表

A, B	Coefficient matrix of state equation
C, D	Coefficient matrix of output equation
$C_{N\alpha}$	Slope of normal force coefficient [rad^{-1}]
D	Diameter [m]
EI	Bending stiffness [Nm^2]
G	Control gain
H_u, H_p	Control horizon, Prediction horizon
I	Area moment of inertia [m^4]
J	Moment of inertia [kgm^2]
K	Kinetic energy
L	Length [m]
l	Sampling step
M	Mass [kg]
N	Number of elements
q	Dynamic pressure [N/m^2]
S	Reference area [m^2]
T	Thrust [N]
U	Vector of manipulated variable vector
\mathbf{u}	Manipulated variable vector
V	Cost function
W	Weight matrix for cost function
x	Length parameter from the rear end [m]
\mathbf{x}	State vector
Y	Normalized mode shape function
y	Bending deflection [m]

\mathbf{y}	Output vector
α	Angle of attack [rad]
γ	Flight pass angle [rad]
Δ	Thickness [m]
δ	Nozzle deflection angle [rad]
ζ	Damping ratio
θ	Attitude pitch angle [rad]
Λ	Lagrangian
μ	Bending moment [Nm]
ξ	Generalized coordinate
ρ	Density [kg/m ³]
σ	Potential energy
Ω	Polytope
ω	Natural frequency [rad/s]

Subscription

F	Fearing
f	Terminal term
G	Mass center
k	Bending deflection mode
m	Motor
mc	Motor case
n	Nozzle
p	Polytope edge
R	Rigid body motion
v	Vehicle

Others

$\hat{\cdot}$	Prediction value of \cdot
---------------	-----------------------------

Abbreviation

AMPC	Adaptive Model Predictive Control
ARMPC	Adaptive Robust Model Predictive Control
BMI	Bilinear Matrix Inequality
FITH	Fire In The Hole
GNSS	Global Navigation Satellite System
GPS	Global Positioning System
IMU	Inertial Measurement Unite
MPC	Model Predictive Control
LMI	Linear Matrix Inequality
LPF	Low Pass filter
LQR	Linear Quadratic Regulator
LSS	Large Space Structure
RMPC	Robust Model Predictive Control
RNSS	Regional Navigation Satellite System
SMC	Sliding Mode Control
TV	Time-Varying
TVRMPC	Time-varying Robust Model Predictive Control
TI	Time-Invariant

第 1 章

序論

1.1 宇宙分野における研究開発の動向

1.1.1 宇宙開発の動向

我々の日常生活において、今や宇宙利用は欠かせないものである。その一例として、海洋・大気・氷河などを地球規模で観測する気象衛星があげられる。得られたデータは気候変動などの研究に使用されるだけでなく、我々の日常生活に必要な不可欠な天気予報にも利用される。多くの国や地域が独自の気象衛星を打ち上げており、日本の静止気象衛星は「ひまわり」である。この「ひまわり」は世界気象機関により展開されている世界気象衛星観測網を構成する重要な衛星のうちの 1 つである [1]。Fig. 1.1 に 2022 年現在の世界気象衛星観測網を示す。この世界気象衛星観測網によって地球全体を連続的に観測できている。静止気象衛星「ひまわり」は 1977 年にアメリカのデルタロケットにて初号機が打ち上げられて以降、後継機に運用が引継がれながら観測を継続している [2]。一方、他の宇宙利用の例として、測位衛星がある。日常生活でいわゆる GPS 機能として自分の位置情報を利用することがあるが、これは測位衛星による恩恵である。GPS は Global Positioning System の略称であり、米国によって航空機・船舶等の航法支援用として開発されたシステムである [3]。これが有益であったため、各国や地域によって同様なシステムが開発された。衛星測位システムとそれを有する国や地域、およびシステムを構成する衛星を打ち上げたロケット、ロケットを開発した組織を Table 1.1 に示す。上部 4 つは地球全体をカバーする Global Navigation Satellite System (GNSS) を構成する 4 システムである。一方、残りのインドと日本のシステムは特定地域のみをカバーするシステムであり、GNSS と区別して Regional Navigation Satellite System (RNSS) と呼ばれる。我々の日常で利

第 1 章 序論

用されている衛星は、以上の他にもテレビ放送やデータ送受信などを可能にする通信衛星がある。地球の周りには様々な用途に応じた衛星が数多く周回している。



Fig. 1.1: Integrated space-based observing system [4].

Table 1.1: Positioning satellites.

国・地域	システム名	打上げロケット	ロケット開発組織
アメリカ	GPS	アトラス	NASA
		デルタ	(アメリカ航空宇宙局)
		ファルコン 9	Space X
中国	北斗	長征	CASC (中国航天科技集团有限公司)
EU(欧州連合)	Galileo	ソユーズ アリアン 5	ロスコスモス ESA(欧州宇宙機関)
ロシア	GLONASS	ソユーズ プロトン	ロスコスモス
インド	NavIC	PSLV	ISRO (インド宇宙研究機関)
日本	QZSS	H-IIA	JAXA (宇宙航空研究開発機構)

以上のように我々の日常生活を支えるために打上げられた衛星の他にも、学術的な目標を実現するために数多くの衛星や探査機が打上げられている。その一例が「はやぶさ2」である。「はやぶさ2」は小惑星リュウグウを探査するため、2014年に日本のH-IIAロケットにて打上げられた衛星である。「はやぶさ2」は生命や太陽系の起源を明らかにすることを目的として打ち上げられ、現在も拡張ミッションを成功させるため宇宙空間を航行中である。

近年は、「はやぶさ2」のような大型衛星の他に、これまでは衛星開発に着手していなかった諸外国や大学による超小型衛星の開発が盛んになってきている。Fig. 1.2は衛星の重量ごとの打上げ数を各年度ごとに示した図である。2012年以降、10kg未満の衛星の開発が急激に盛んになってきていることが見て取れる。

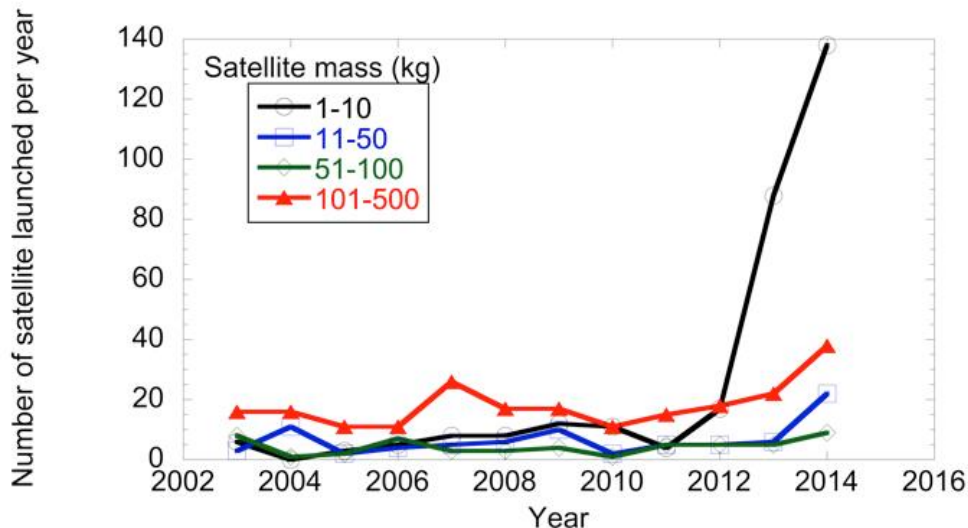


Fig. 1.2: Launch trend of satellites less than 500kg [5].

小型衛星は人材育成や新技術実証などを目的に開発されている。低コストで短い期間での開発が可能であるため、今後も小型衛星の開発は活発に行われると考えられる。これら小型衛星は、大型衛星に相乗り、もしくは小型衛星を複数個まとめることで宇宙空間へ打上げられる。日本ではJAXAによる革新的衛星技術実証プログラムとして複数の小型衛星を一度に打上げる取り組みが行われている。本プログラムの初号機である革新的衛星技術実証1号機は1つの小型衛星と6つの超小型衛星・キューブサットの計7つで構成されており、日本の固体ロケットであるイプシロンロケット4号機にて2019年に打上げられた[6].

ここまでに述べた衛星や探査機は目的や飛翔先は違えど、いずれもロケットによって打

ち上げられており，宇宙開発においてロケットは不可欠である．さらに，近年では民間人の宇宙空間への旅行や月面移住が検討されており，我々の生活においても将来的にロケットの存在は身近になると考えられる．今後は研究者だけでなく一般人にとってもロケット活用機会の増加が予想され，ロケットの打上げ需要は衰えることなくむしろ高まる一方である．

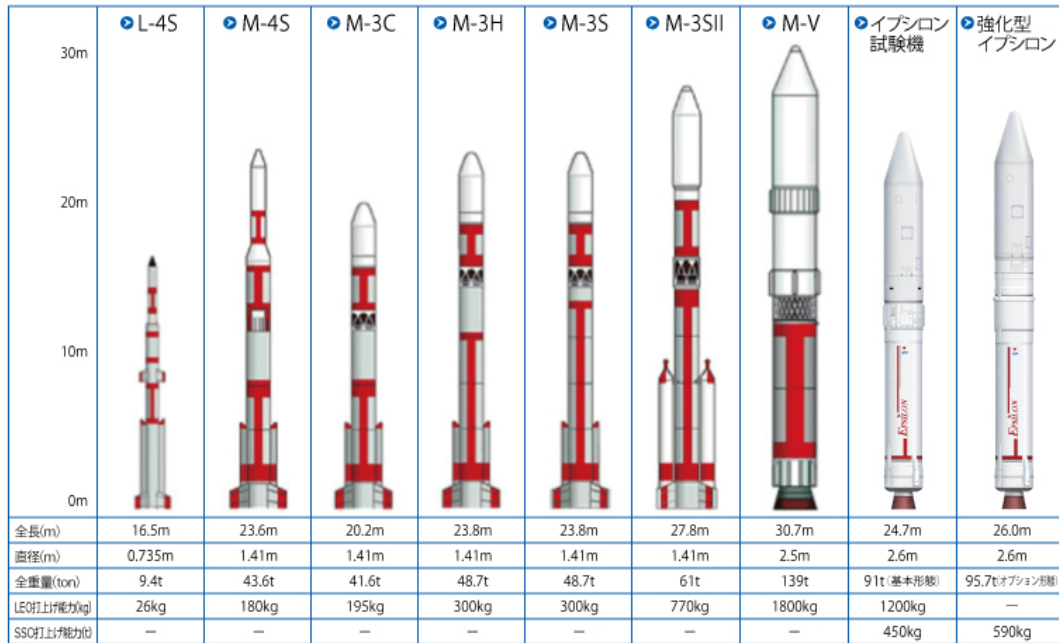
1.1.2 ロケット開発の動向

1.1.1 項で述べたように，衛星打上げのため，多くのロケットが活用されてきた．本項では日本のロケットの歴史を中心に振り返り，ロケットの研究開発の動向を示す．

日本が開発してきたロケットは推進薬の種類によって 2 つに分けることができる．固体推進剤を燃料とする固体ロケットと液体推進剤を燃料とする液体ロケットである．日本の基幹ロケットの歴史を Fig. 1.3 に示す．日本のロケットの始まりは糸川英夫らによって開発されたペンシルロケットである．技術進歩と共にロケットの開発は進み，1970 年に日本初の人工衛星である「おおすみ」を L-4S ロケットにて打上げた．その後，より大型のペイロード打上げを可能とするために M シリーズのロケットが開発された．M シリーズの最後のロケットである M-V ロケットは大型衛星を打上げられる性能を有していた一方で，高コストであることが課題点であった．これを解決し，以降利用機会の拡大が想定される小型衛星の打上げに対してより効率的に対応するため，イプシロンロケットの開発が開始された．イプシロンロケットでは機体だけではなく，打上げシステムを改革することでコスト低減を可能とした．イプシロンロケットは現在も運用中であり，後述する H3 ロケットとのシナジー効果を図ることで低コスト化を目的とした，イプシロン S ロケット [7] の開発が現在進行中である．以上が Fig. 1.3 (a) に示した固体ロケットの発展の流れである．

一方，実用衛星打上げを目的として，固体ロケットよりも打上げ能力の高いロケットの需要を満たすため，Fig. 1.3 (b) に示すような液体ロケットの開発が行われた．初期はアメリカの技術を活用して開発されたが，1994 年には H-II ロケットとして完全国産の液体ロケットの開発を達成した [8]．そして H-II ロケットをベースに，信頼性の向上や低コスト化を目的として H-IIA ロケットが開発された [9]．さらに，宇宙ステーション補給機による物資輸送を目的として H-IIA ロケットをベースにエンジンの大型化を行うことで打上げ能力を高めた物が H-IIB ロケットである [10]．現在は価格面，運用面および性能において世界との競争力を高めることを目的として H3 ロケット [11] の開発が進行中である．

1.1 宇宙分野における研究開発の動向



(a) Solid rockets.



(b) Liquid rockets.

Fig. 1.3: History of rockets made in Japan [12].

ここで、世界のロケットの開発動向に視野を広げると、小型衛星開発の増加に伴い、運用コストの低い輸送サービスが世界的に求められている。この需要に対応するための1つの方法として、近年は機体の再使用化を目指した研究開発が活発に行われている。この研究開発は従来のような公的機関や大学の範囲にとどまらず、民間企業の参入もここ数年で数が大幅に増加している。

世界初の再使用型宇宙機はアメリカの Space Shuttle である。Space Shuttle は宇宙空間まで飛行し、大気圏に再突入、着陸するものであった。大気圏突入時には非常に高温になるため、高い耐熱技術が必要である。Space Shuttle 引退後もロケットの低コスト化を目指して研究が行われ、近年では大気圏に突入しない第 1 段部分の再使用化が進んでいる。特に、アメリカの Space X 社の Falcon9, Blue Origin 社の New Shepard を中心に民間企業における開発が活発になってきている。

ロケットの再使用化を目指して行われている研究の一部を Table 1.2 にまとめる。この他、運用システム全体に関するヘルスマネジメント技術の検討などが進んでいる。特に制御分野では従来の使い捨てロケットでは行われなかった帰還飛行に焦点を当てた研究が数多くなされている。具体例を一部紹介すると、日本の三菱重工にて行われている研究 [13] では、エンジン故障時の機体姿勢変動を安定化させる研究が行われている。また、Elke ら [14] の研究では、より実用化へ向けた HILS シミュレーションが行われている。今後も再使用化を目的とした制御分野の研究は進むと考えられる。

Table 1.2: Studies for reusable launch vehicles.

分野	内容
材料	繰り返し使用可能な構造材開発, より安価な材質開発
構造	着陸脚開発, メンテナンス時のアクセス性を考慮した設計
流体	推進剤マネジメント法の検討
制御	再突入時や着陸時の姿勢制御アルゴリズム検討

1.2 ロケットの航法・誘導・制御

いわゆるロケットの制御は正確には航法・誘導・制御と呼ばれる3つの機能を有しており、誘導制御系と呼ばれる。ロケットの誘導制御系のブロック線図を Fig. 1.4 に示す。航法は機体の位置や速度など状態を計測・推定する機能である。誘導は目標軌道に到達するために必要な目標姿勢を導出し、目標軌道に所定の精度で投入する機能である。最後に、

制御は誘導層から与えられた目標姿勢を実現するため、アクチュエータへの指令値を変更する機能である。

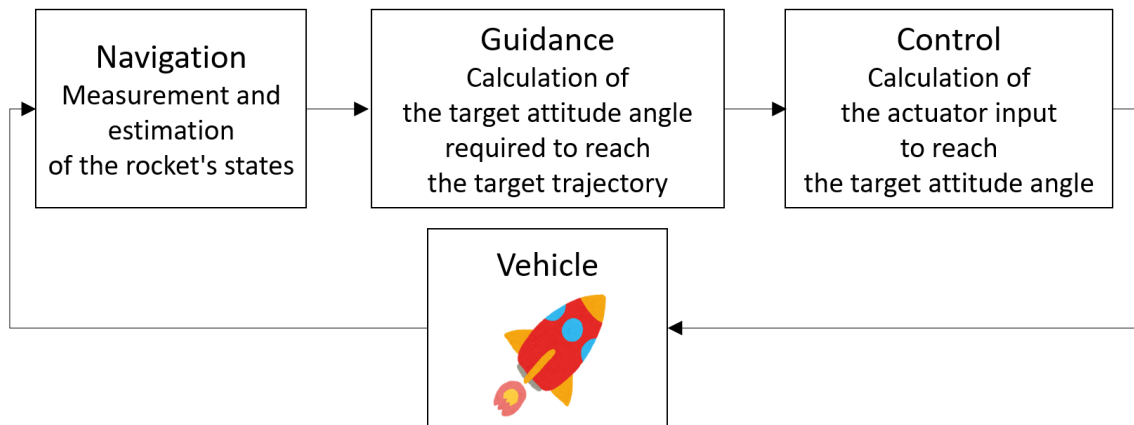


Fig. 1.4: Block diagram of guidance and control system.

航法は必要な装置が機体内に全て搭載されている自律航法とそうではない非自律航法に大別される。一般に、非自律航法には電波航法や GPS 航法、天測航法があり、自律航法には慣性航法がある。慣性航法に用いられる慣性計測装置 (Inertial Measurement Unite: IMU) の高精度化に伴い、1980 年代以降は専ら慣性航法が使用されている。

誘導の種類を分類したものを Fig. 1.5 に示す。誘導は事前に計算した値のみを利用する開ループ誘導と、随時実際の状態量をフィードバックし、その値を利用して計算する閉ループ誘導がある。一般に、空気力が大きい区間を出るまでは積極的な姿勢変更を行わず、開ループ誘導を行う。一方、ロケットの第 2 段以降の空気力が小さい区間では閉ループ誘導を行うことで姿勢精度の向上を図る。閉ループ誘導は間接誘導方式と直接誘導方式に分類される。間接誘導法は開ループ誘導によるノミナル軌道に対して誤差が生じた時にノミナル軌道に戻す方法である。一方、直接誘導法はロケットの現在の状態を初期点とし、ミッション要求を満足させる状態を終端点とする 2 点境界値問題を解く方法である。なお、直接誘導法でも正確に最適化問題を解く最適誘導法とあくまで解析的に近似最適解を計算する準最適誘導法に分かれる。

制御はロケットの運動特性を考慮して行われる。制御理論の発展と共にロケットの制御に応用される理論も発展してきた。詳細は 1.3 節に述べる。

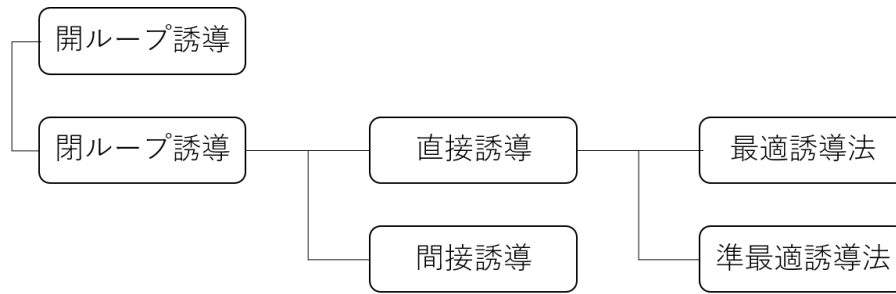


Fig. 1.5: Rocket guidance methods.

1.3 ロケットの姿勢制御

1.3.1 制御器への要求性能

ロケットの制御は宇宙空間を航行する宇宙機の制御とは全く異なる難しさがある。これはダイナミクスの特徴が異なることに起因する。ロケットと宇宙機の特徴を Table 1.3 に示す。宇宙機は長距離を限られた推進薬で航行しなければならない。また、宇宙空間では宇宙機の機体姿勢を短時間で不安定にするような外乱は存在せず、機体の安定度は比較的高い。一方、ロケットは基本的に空気力学的に不安定な形状をしており、さらに空気外乱の影響を受ける。したがって機体姿勢を安定させるため、推進薬を消費し続けながら短時間で空気力の大きい区間を突破しなければならない。すなわち、宇宙機は応答はゆっくりであろうと推進剤を節約し、姿勢の精度向上が求められる一方で、ロケットは推進薬の消費効率よりも素早く応答し機体を安定させることが要求される。つまり、ロケットの姿勢制御系は応答性と安定性の両方が求められる。

Table 1.3: Spacecrafts vs Rockets.

	宇宙機	ロケット
要求	推進薬消費効率	応答速度
機体安定度	安定	不安定
時定数	長い	短い

ここで、応答性と安定性の例として自動車の運転を考えてみる。レーンチェンジを行う場合、時速 100km で走行する場合と時速 20km で走行する場合では前者の方がより素早

くレーンを移動できる。一方、レーンキープを行う場合時速 100km で走行する場合と時速 20km で走行する場合では横風外乱を受けた際、後者の方がより車体を安定させながらレーンの中心に戻ることができる。つまり時速 100km 走行時には応答性が良い一方で安定性が悪いのに対し、時速 20km 走行時には応答性が悪い一方で安定性が良い。以上の例から考えられるように、応答性と安定性は相反する性能である。ロケットの場合には、機体姿勢について応答性と安定性を考慮する必要がある、制御系設計の際にはこのバランス設計が重要となる。

1.3.2 ダイナミクスの特徴

ロケットの姿勢制御系設計の際に考慮すべきダイナミクスの二大特徴は不確定性と時変性である。これを Fig. 1.6 に示す。

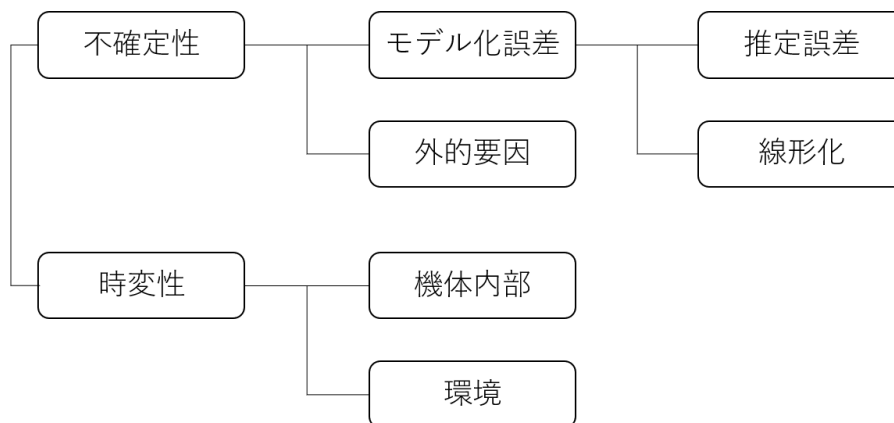


Fig. 1.6: Rocket dynamics' characteristics.

ダイナミクスに不確定性が存在する原因はモデル化誤差や外乱である。モデル化誤差とは制御対象を数式モデルとして表現する際に発生する、実機とモデルの間に存在する誤差のことである。モデル化誤差は機体質量や推力など対象の運動を決定するパラメータを推定するときや、非線形なダイナミクスを線形化するときが発生する。推定誤差が存在するパラメータの一例として機体剛性がある。これはロケットの全長は長いため直接値を測定することはできず、あくまで要素毎に剛性試験を行い、その結果を用いて機体全体の剛性を推定する必要があるためである。他にも推力や動圧などを正確に測定できないため、モデリングに使用するパラメータには推定誤差が存在する。また、ロケットのダイナミクスは非線形性を有しており、制御器を設計する段階ではそれを線形化してより単純で扱いや

すい形にしてから制御器の設計を行う。ここで線形化によって非線形要素が欠落するため、実際の機体と線形化したモデルにはモデル化誤差が存在する。以上のようなモデル化誤差の他に、不確定性の要因には外的要因がある。例えば、ロケットが飛翔する空間は空気が存在するため、突風外乱が発生する。このような外的要因によって実機が想定と異なる挙動を示すことがある。

ダイナミクスの二大特徴の 2 つ目は時変性である。時変性は機体のパラメータと環境のパラメータそれぞれに存在する。機体側の一例として、飛翔中に機体の質量が大きく変化することがあげられる。これはロケットの全機体質量の約 9 割を推進薬が占めており、その推進薬を消費しながら飛翔することに起因する。この推進薬消費にともなう質量の変化により、質量中心の位置や慣性能率など機体の安定性に関するパラメータが時間と共に大きく変化する。一方、ロケットが飛翔する周囲環境側の一例として動圧の変化がある。これは、空気密度が高度によって大きく異なることに起因する。制御器は以上に述べたダイナミクスの不確定性と大規模な時変性を考慮しながら、応答性と安定性のバランスをとることが要求される。

1.3.3 制御理論の発展

制御理論は 1950 年代に古典制御理論、1960 年代に現代制御理論、1980 年代にロバスト制御理論が確立された。特に、ロバスト制御理論が制御分野に与えた影響は大きく、従来からの理論である古典制御理論や現代制御理論がロバスト性の観点から再考察されている [15]。この制御理論の発展と共に、ロケットの姿勢制御系設計手法も変化してきた。ロケットの制御系設計における課題点と課題点に対する対策手法の発展を Table 1.4 に示す。日本の固体ロケットでは 80 年代を中心に活躍した M-3S ロケットの制御までは古典制御を、90 年代を中心に活躍した M-3SII 型ロケットでは現代制御が用いられるようになった [16]。そして 90 年代後半から活躍した M-V ロケット以降は H_∞ 制御や μ 制御といったロバスト制御理論を用いた設計が行われている [17]。また、海外のロケットも同様に制御系設計の手法は発展してきた [18]。現在第 1 段再使用飛行実験プロジェクトとして進んでいる CALLIST においても H_∞ 制御を用いることが検討されている [19]。また、近年は不確定性に対してロバスト制御以外に適応制御を用いて対応する手法 [20] やロバスト制御理論の 1 つであるスライディングモード制御や PID 制御と適応制御を組み合わせることで外乱やモデル内部の不確定性に対応する方法なども検討されている [21, 22]

様々な手法があるロバスト制御の中でも特に H_∞ 制御は幅広く利用されている。しかし、 H_∞ 制御は重み関数の調整に経験則と多くの時間を要することが課題点としてあげら

Table 1.4: Development of control theory for rockets.

	古典制御	現代制御	ロバスト制御
不確定性	試行錯誤的に調整		陽に考慮
時変性	ゲインスケジューリング法		

れる。近年はこの経験則に基づく部分を解消するために、パラメータ調整に最適化制御や遺伝的アルゴリズムが利用されるなど改良が進んでいる [22, 23]。[23] では制御系設計に必要な経験則や時間を削減するため、 H_∞ 制御のパラメータ調整に遺伝的アルゴリズムを用いた研究がなされている。

以上のようにダイナミクスの不確定性に対する対応手段は幅広く検討されることで、従来に比べて制御器設計における見通しは大いに改善された。一方、時変性には旧来よりゲインスケジューリング法を用いて対処することがほとんどである。ゲインスケジューリング法では飛行時間をダイナミクスの変化に応じてブロックに区切り、各ブロックに対して制御系を設計する必要があるため、時間と手間を要する。この手法は、近年活発に研究が行われている再使用型ロケットにも用いられている [24]。しかし、再使用型ロケットには打上げフェーズだけでなく着陸フェーズも存在するため、従来の手法では数多くの制御器を設計する必要があり、多大な時間と手間を要する。これはロケットの打上げ頻度を向上を図る上で課題となる。しかし、この課題点を解決するようなダイナミクスの時間変化に対応する制御器の検討や実用化例は数多くなく、あまり発展していないのが現状である。

1.4 ロケットの制御と他分野との関係

ロケットの制御に要求される性能とその他の制御対象に要求される性能を比較するため、各対象における制御系の要求およびそれに対してどのような制御理論が適用されているかを述べる。Fig. 1.7 に制御対象とそれに適用されている制御理論をまとめた図を示す。以降は各制御対象について制御系への要求とそれに対応している制御理論について詳細を述べる。

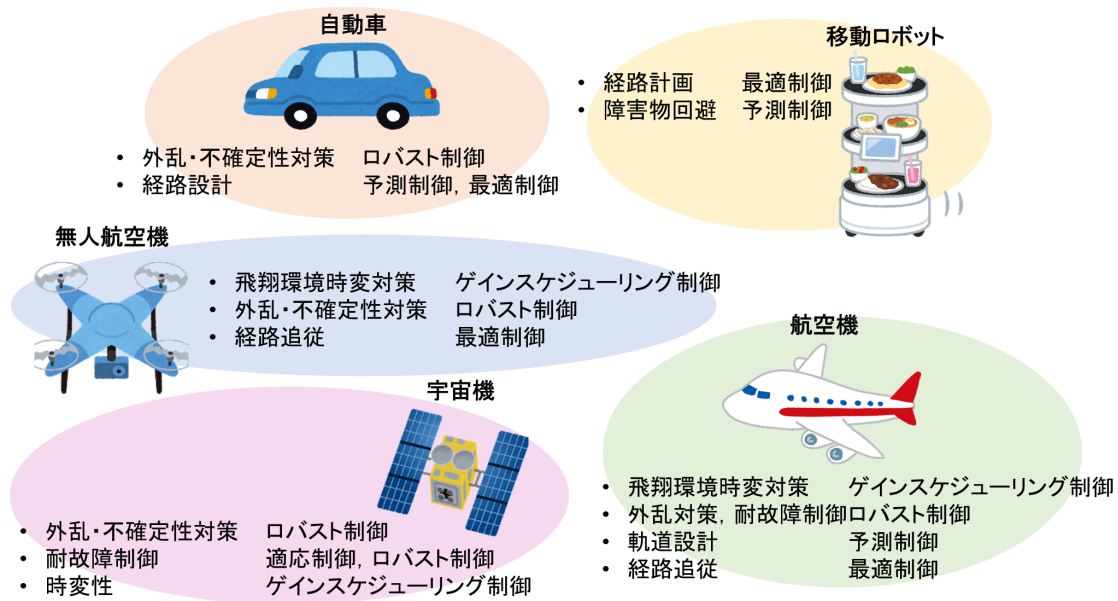


Fig. 1.7: Controlled systems and control theories.

● 自動車

自動車業界では近年自律自動運転化が世界的に盛んになっている。自動車の運転は認知、判断、操作の3段階に分けることができ、ドライバ側とAI側での役割分担の割合によって自動化レベルは0-5の6段階に分けられている。このレベル分けはアメリカ自動車技術会 (Society of Automotive Engineers : SAE) によって定義されたものであり、世界的に主流となっている。各国で研究の進捗割合には差があるが、日本では2023年4月にレベル4の公道での運行を認める改正道路交通法が施行される [25]。レベル1, 2の運転支援における技術としては操縦安定性向上のためレーンキープや車速の自動加減速など車両運動の制御があげられる。車線維持のための横風外乱対策や制御を行う際のモデル化誤差への対策として、ロバスト制御が利用されている。レベル3以降は運転動作の認知・判断の部分もAIが行う。したがって従来ドライバが行っていた運転行動の理解が不可欠であることからドライバモデルに関する研究、そして走行経路の設計および追従に関する研究が盛んとなっている。本分野においてはモデル予測制御をはじめとした予測制御や最適制御が適用されている [26, 27]。

● 移動ロボット

近年、製造業やサービス業における人手不足を解消する労働力の代替案として移動ロボット、特に自律走行ロボットの開発・普及が広がってきている。製造業では荷

物の運搬や簡単な作業をすることで人と協働するために導入されている。その他、サービス業でも移動ロボットの活躍の幅が広がってきており、ファミリーレストランでは人の代わりに配膳するロボットが走行している。移動ロボットが走行するにあたって、経路計画、経路追従制御、アクチュエータ制御が行われており、各フェーズにおいて研究が進んでいる。移動ロボットの走行にあたり、安全に走行するためには静的障害物だけではなく、人を含めた動的障害物を回避する経路生成が必要である。経路生成を行う際には、目的地に到達するまでの時間や経路長などのトレードオフを考えることが必要であり、これを実現するために最適制御が行われることが一般的である。また、動的障害物との衝突を回避するために、予測制御が行われる。

- 無人航空機 (ドローン)

近年は無人航空機の応用も進んでいる。農業における労働不足解消や災害現場での活躍が主な応用先である。空気中を飛翔することから空気外乱に対応可能である必要がある。また、システムの不確実性も考慮することからロバスト制御が利用されている [28]。また、飛翔環境が時々刻々と変化することに対してはゲインスケジューリング法が適用されていたり、目標軌道追従には最適制御が用いられたりしている [29]。

- 航空機

航空機は離着陸を行う地上から定常航行を行う約 1 万 km の高度まで幅広い高度を航行する。したがって、航空機が飛翔する環境は時間と共に変化し、空気密度が時間と共に変化する。また、航行速度も一定ではなく、時間と共に変化することから機体が受ける揚力や抗力は時変である。これらの時変性に対応するため、ゲインスケジューリング制御が適用されている [30]。また、パラメータの不確実性への対応や事故対策としての耐故障制御においてはロバスト制御が適用されている [31]。

- 宇宙機

人工衛星や探査機といった宇宙機は、長期間宇宙環境で動作することが要求される一方で、一度打上げてしまうと修理できないという特徴がある。何らかの故障が発生した場合にも安全に動作させるためには耐故障制御が重要となる。耐故障制御に適用される制御理論としては適応制御 [32] やロバスト制御 [33] が挙げられる。また、外乱対策としてもロバスト制御は利用されている。さらに、宇宙機に内在する時間変化する特性については一般にゲインスケジューリング制御によって対応されている [34]。

以上の通り，各制御対象に対する様々な要求を満たすために制御理論が多く実用化されているが，ロケットのようにダイナミクスの不確定性と大規模な時変性両方への対応を要求する制御対象はなく，ロケットは極めて特殊な制御対象である。

1.5 本論文の目的と構成

本研究ではロケットの姿勢制御系設計において，ダイナミクスの不確定性と時変性の両方に対応するために必要となっていた手間や時間を低減することを目的とする．従来手法と本研究で提案する手法を Table 1.5 に示す．従来手法では不確定性に対してはロバスト制御理論を適用することで試行錯誤の回数を減らし，より効率良く設計ができています．一方で時変性に対して理論的に対応することはできないため，ゲインスケジューリング法を適用しており，一回の打上げに対して複数個の制御器を設計しなければならない．本研究での提案手法は，不確定性に対しては引続きロバスト制御を適用しつつ，時変性に対して理論的に対応可能な適応制御を応用することで必要な制御器の数を低減する．この制御を行うために本研究ではモデル予測制御と呼ばれる比較的新しい制御理論を適用する．

本研究が完成した暁には，一回の打上げに対して必要な制御器が少なくなることで設計に要する時間を低減し，より高頻度の打上げに対応可能となることが期待される．

Table 1.5: Conventional methods vs proposed method in rocket control.

	古典制御	現代制御	ロバスト制御	提案手法
不確定性	試行錯誤的に調整		陽に考慮	陽に考慮
時変性	ゲインスケジューリング法			分割不要
設計する制御器数	複数			1つ

本論文の構成を本章の最後に示す．本章では宇宙開発の動向やこれまで利用されてきたロケット，ロケットの姿勢制御系の発展の歴史について述べた．第 2 章ではモデル予測制御の概要として，制御系の構成，モデル予測制御の種類とその応用例について各文献を引用しながら紹介する．第 3 章では本研究で扱う機体のダイナミクスとそのモデル化について述べる．第 4 章では問題設定としてロケットの姿勢制御系における入出力信号と，代表的なコマンド，シミュレーション条件について述べる．第 5 章では提案する制御器の比較用として設計した従来制御器の設計手法とその応答を示す．従来制御器として H_∞ 制御器を低次元化した制御器を模擬する．第 6 章では研究の第 1 段階として，制御対象の

時変性に対応可能な制御器として適応モデル予測制御器の設計手法と制御器を適用したシミュレーション結果を示す。第7章では引き続き本研究の第1段階として、制御対象の不確定性に対応可能な制御器としてロバストモデル予測制御器の設計手法と制御器を適用したシミュレーション結果を示す。第8章では研究の第2段階として、第1段階で設計した制御器を組み合わせることで適応ロバストモデル予測制御器を設計し、不確定性を有する時変システムに適用する。シミュレーションにて不確定性と時変性両方に対応可能であることを示す。一方で、適用しているロバスト制御理論が時変システムに対応していないことを示し、修正すべき点を示す。第9章では前章で示した課題点に対して検討したアプローチを示す。第10章では最終的に提案する制御理論を示し、提案する制御理論に基づいて設計した制御器の応答を提示して提案手法の有効性について述べる。最後に、第11章で本論文の結論を述べる。

第2章

モデル予測制御

本論文で適用するモデル予測制御についての概要および応用例を示す。モデル予測制御の基本的な考え方について説明したあと、その派生系の適応モデル予測制御、ロバストモデル予測制御について述べる。

2.1 モデル予測制御の概要

モデル予測制御 (Model Predictive Control: MPC) は評価関数を設計し、逐次最適化計算を解くことで制御入力を決定する制御手法である。時間領域における制御器設計法であるため、 H_∞ 制御などの周波数領域で設計する方法よりも直観的に設計することが可能となる。同様に評価関数を最適化して制御入力を求める手法の代表的なものとして、線形二次形式レギュレータ (Linear Quadratic Regulator: LQR) がある。LQR は予め最適化計算を解くことで制御入力を求める一方、MPC は制御周期ごとに未来の応答を予測し、それを利用しながら最適化計算を解く。したがって LQR に比べて MPC は外乱などの不確定性に対応可能である。また、MPC では操作量や出力に関する制約を考慮しながら最適化計算を解くため、制御器設計における試行回数を削減できる。一方、デメリットとしては毎度最適化計算を解くために計算コストが大きいことが挙げられる。

初期は化学プラントなど制御周期が長いプロセス制御への応用が主なものであった [35]。しかし、計算アルゴリズムや計算機の向上と共に 4 足歩行ロボットや医療用ロボットなど応答速度が小さい物へと応用例が広がってきている [36][37]。さらに近年は自動車業界における自動運転技術として多く MPC の活用が検討されている一方で、飛翔体への適用は未だなお数が少ないのが現状である。

2.2 制御系構成

MPC 制御系のシステム構成を Fig. 2.1 に示す. MPC 制御器は最適化計算器と予測モデルと呼ばれる制御対象のモデルを有しており, 上層から状態量の目標値を, 制御対象から出力を受け取る. 目標値と出力, さらに制御器内部に有する予測モデルを使用して最適化計算を解き, 操作量を求める. 内部に有する予測モデルと最適化計算器について以下に述べる.

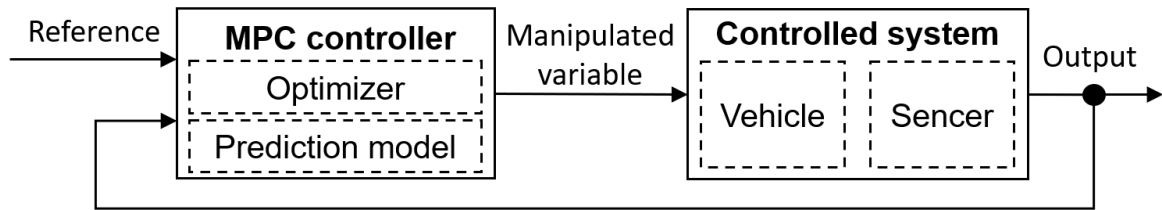


Fig. 2.1: Block diagram of MPC system.

2.2.1 最適化計算器

基本的な MPC で行われる最適化計算について述べる. 一般に評価関数には目標値と出力の偏差, 操作量の大きさ, 操作量の変化率などが考慮される. ここで MPC の基本的な最適化計算方法を示すため, システム (2.1) のもとで, 目標値と出力の偏差および操作量の変化率を考慮した評価関数 (2.2) を考える. ここで, $(l+i|l)$ は時刻 l における i ステップ後の時刻 $l+i$ の値を意味する.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(l+1) &= A\mathbf{x}(l) + B\mathbf{u}(l) \\ \mathbf{y}(l) &= C\mathbf{x}(l) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$V(U_l) = V_y(U_l) + V_{\Delta u}(U_l) \quad (2.2a)$$

subject to

$$V_y(U_l) = \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{i=1}^{H_p} \{w_{i,j}^y [\mathbf{r}_j(l+i|l) - \hat{\mathbf{y}}_j(l+i|l)]\}^2 \quad (2.2b)$$

$$V_{\Delta u}(U_l) = \sum_{j=1}^{N_u} \sum_{i=1}^{H_u} \{w_{i,j}^{\Delta u} [\hat{\mathbf{u}}_j(l+i|l) - \hat{\mathbf{u}}_j(l+i-1|l)]\}^2 \quad (2.2c)$$

評価関数 (2.2) において H_p と H_u はそれぞれ予測ホライズン, 制御ホライズンと呼ばれる設計パラメータである. これらを Fig. 2.2 に示す. 最適化計算において, 予測ホライズンは応答を予測する期間を, 制御ホライズンは操作量に変化する期間を表す. 制御ホライズン H_u は予測ホライズン H_p より短く設定され, 時刻 $l+H_u-1-l+H_p$ までの操作量は一定値であると仮定して出力の予測が行われる.

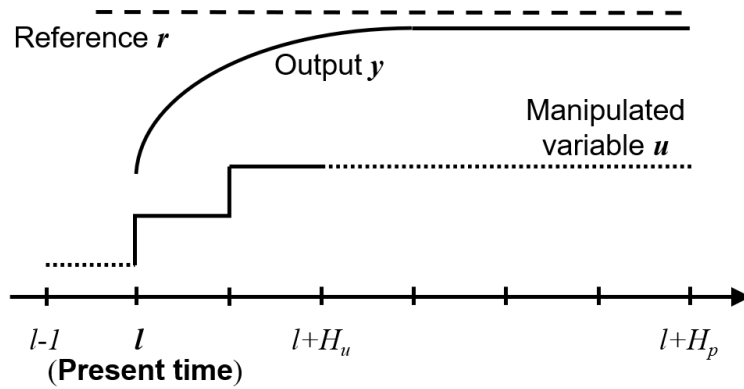


Fig. 2.2: Outline of optimization in MPC controller.

最適化計算では評価関数 (2.2) を最小化する操作量を求める. 最適化変数は $U_l^\top = [\hat{\mathbf{u}}(l|l)^\top \cdots \hat{\mathbf{u}}(l+H_p-1|l)^\top]$ である. 式 (2.2) は代数変形することで式 (2.3) に変形できる.

$$V(U_l) = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{r}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{r}(H_p) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{y}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(H_p) \end{bmatrix} \right)^\top W_{\mathbf{y}}^2 \left(\begin{bmatrix} \mathbf{r}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{r}(H_p) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{y}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(H_p) \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(0) \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}(H_p-1) \end{bmatrix}^\top W_{\Delta \mathbf{u}}^2 \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(0) \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}(H_p-1) \end{bmatrix} \quad (2.3a)$$

subject to

$$W_{\mathbf{y}} = \text{diag}(w_{1,1}^{\mathbf{y}}, w_{1,2}^{\mathbf{y}}, \cdots, w_{1,N_y}^{\mathbf{y}}, \cdots, w_{H_p,1}^{\mathbf{y}}, w_{H_p,2}^{\mathbf{y}}, \cdots, w_{H_p,N_y}^{\mathbf{y}}) \quad (2.3b)$$

$$W_{\Delta \mathbf{u}} = \text{diag}(w_{0,1}^{\Delta \mathbf{u}}, w_{0,2}^{\Delta \mathbf{u}}, \cdots, w_{0,N_u}^{\Delta \mathbf{u}}, \cdots, w_{H_p-1,1}^{\Delta \mathbf{u}}, w_{H_p-1,2}^{\Delta \mathbf{u}}, \cdots, w_{H_p-1,N_u}^{\Delta \mathbf{u}}) \quad (2.3c)$$

ここで, $\Delta \mathbf{u}(l)$ や $\mathbf{y}(l)$ はそれぞれ式 (2.4), (2.5) として表すことができる.

$$\Delta \mathbf{u}(l) = \mathbf{u}(l) - \mathbf{u}(l-1) \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(l) &= C\mathbf{x}(l) \\ &= C[A\mathbf{x}(l-1) + B\mathbf{u}(l-1)] \\ &= C \left\{ A^l \mathbf{x}(0) + \sum_{h=0}^{l-1} A^h B \left[\mathbf{u}(-1) + \sum_{m=0}^{l-h} \Delta \mathbf{u}(m) \right] \right\} \\ &= CA^l \mathbf{x}(0) + \sum_{h=0}^{l-1} CA^h B \mathbf{u}(-1) \\ &\quad + \begin{bmatrix} \sum_{h=0}^{l-1} CA^h B & \sum_{h=0}^{l-2} CA^h B & \dots & CB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(0) \\ \dots \\ \Delta \mathbf{u}(H_p - 1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.5)$$

式 (2.4), (2.5) を利用して式 (2.3) は式 (2.6) に代数変形することができる.

$$\begin{aligned} V(U_l) &= (c_{\mathbf{y}} + S_{\mathbf{u}} U_{\Delta})^{\top} W_{\mathbf{y}}^2 (c_{\mathbf{y}} + S_{\mathbf{u}} U_{\Delta}) + U_{\Delta}^{\top} W_{\Delta}^2 U_{\Delta} \\ &= U_{\Delta}^{\top} (S_{\mathbf{u}}^{\top} W_{\mathbf{y}}^2 S_{\mathbf{u}} + W_{\Delta}^2) U_{\Delta} + 2(c_{\mathbf{y}}^{\top} W_{\mathbf{y}}^2 S_{\mathbf{u}}) U_{\Delta} + c_{\mathbf{y}}^{\top} W_{\mathbf{y}}^2 c_{\mathbf{y}} \\ &= U_{\Delta}^{\top} \kappa_{\Delta \mathbf{u}} U_{\Delta} + 2 \left(\begin{bmatrix} \mathbf{r}(1) \\ \dots \\ \mathbf{r}(H_p) \end{bmatrix}^{\top} \kappa_{\mathbf{r}} + \mathbf{u}(-1)^{\top} \kappa_{\mathbf{u}} + \mathbf{x}(0)^{\top} \kappa_{\mathbf{x}} \right) U_{\Delta} \\ &\quad + c_{\mathbf{y}}^{\top} W_{\mathbf{y}}^2 c_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (2.6a)$$

subject to

$$c_{\mathbf{y}} = S_{\mathbf{x}} \mathbf{x}(0) + S_{\mathbf{u}1} \mathbf{u}(-1) - [\mathbf{r}(1)^{\top} \quad \dots \quad \mathbf{r}(H_p)^{\top}]^{\top} \quad (2.6b)$$

$$S_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{H_p} \end{bmatrix} \quad (2.6c)$$

$$S_{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} CB & 0 & \dots & 0 \\ CB + CAB & CB & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{h=0}^{H_p-1} CA^h B & \sum_{h=0}^{H_p-2} CA^h B & \dots & CB \end{bmatrix} \quad (2.6d)$$

$$S_{u1} = \begin{bmatrix} CB \\ CB + CAB \\ \cdots \\ \sum_{h=0}^{H_p-1} CA^h B \end{bmatrix} \quad (2.6e)$$

$$U_{\Delta} = [\Delta \mathbf{u}^{\top}(0) \quad \cdots \quad \Delta \mathbf{u}^{\top}(H_p - 1)]^{\top} \quad (2.6f)$$

式 (2.6a) より，評価関数が最適化変数 U_{Δ} に関する線形項と二次項にて表現できたことがわかる．

MATLAB のデフォルトのソルバーは active-set solver もしくは interior-point solver のいずれかである．本研究では active-set solver 手法 (射影法) を使用する．

設計パラメータはサンプリング時間，評価関数の重み関数 $W_{\mathbf{y}}$, $W_{\mathbf{u}}$ ，予測ホライズン H_p ，制御ホライズン H_u である．

2.2.2 予測モデル

予測モデルは各時刻で解かれる最適化計算にて，次の時刻の応答を予測するために使用される．予測モデルの扱いによって通常の MPC，適応 MPC，時変 MPC に分類することができる．これらの違いを Fig. 2.3 に示す．通常の MPC ではシミュレーションの間予測モデルは一切変化しない．一方，適応 MPC では，制御対象の不確定性やある程度限定された範囲内での変化に対応するため，各時刻で解かれる最適化計算ごとに予測モデルが変化する (Fig. 2.3 左図)．Fig. 2.3 右図に示す時変 MPC は適応 MPC をさらに発展させたものである．適応 MPC は最適化計算の間未来の応答を予測するのに使用する予測モデルが一定であるのに対し，時変 MPC は予測の間にも予測モデルが変化する．予測モデルの変化の仕方が分かっている場合には，時変 MPC を使うことでより制御性能をあげることができる [38]．

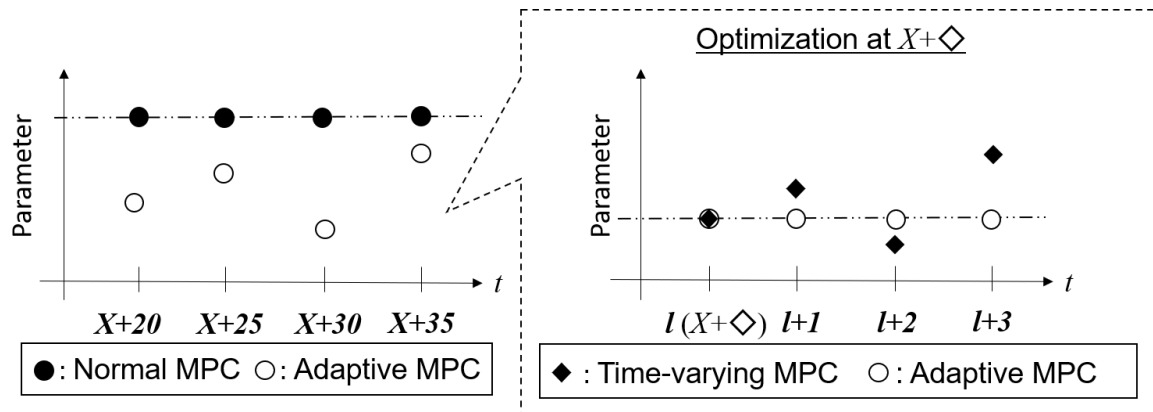


Fig. 2.3: MPC variations.

2.3 モデル予測制御の種類

MPC は予測モデルや最適化理論を工夫することで、適応制御やロバスト制御が可能となる。本研究で適用する適応モデル予測制御 (Adaptive Model Predictive Control: AMPC)、ロバストモデル予測制御 (Robust Model Predictive Control: RMPC) について近年の応用例を示す。

2.3.1 適応モデル予測制御

AMPC は MPC の一種である。通常の MPC と異なり、コントローラ内に持つ予測モデルが時間と共に変化するため、制御対象の変化に対してよりロバストな性能を持たせることができる。AMPC において、予測モデルの更新はオンラインでシステム同定を行うことで行う場合が多い。

特に、未知の時不変パラメータを有するシステムをオンラインで推定し、そのシステムに対してロバスト制御を行う問題設定の文献ではオンライン推定の方法が検討されている [39][40][41]。Tanaskovic らの論文 [42] ではダイナミクスに一定の範囲内で時間変化するシステムを想定している。ノミナルシステムを毎時刻同定しながら可解性を保証し、終端制約を設けることでロバスト安定性を保証している。

以上のように、不確実性を有する時不変システムや外乱を想定した問題以外にも時間変化するシステムを想定している研究も存在する。しかし、いずれも時間変化幅はある程度限られており、ダイナミクスが大規模に変化する程のパラメータの時間変化を想定している研究は数が少ないのが現状である。

2.3.2 ロバストモデル予測制御

RMPC も MPC の一種である。時変システム、もしくは外乱やシステムの不確定性に対するロバスト性を確保するために適用される。ロバスト安定性が重要となることから、MPC でロバスト制御を行う場合には安定性保証理論に関する文献が多い。安定性を保証する方法には次のような複数の種類があり、これらを組み合わせて制御を行う手法も検討されている。

- 終端制約・終端コスト
- tube-based の考え方
- H_∞ 制御との組み合わせ

終端制約を使用する手法では、範囲内に一度状態量が収まれば必ず安定化させることができるゲインが存在するような状態集合を設計し、最終的に状態量が設計した集合の範囲内に収まることを制限することで安定性を保証する。また、これと併用して考慮されることが多い終端コストは、予測の最後の時刻の評価関数の重みをそれまでの各時刻での評価関数 (ステージコスト) の重みと異なる重み関数を設定することで収束を図ることを目的として導入される。Pluymers らの研究 [43] ではロバスト MPC ではないものの終端コストや制約を用いて安定性を保証する MPC の発展系として計算コスト低減や安定性定理を導入した理論が提案されており、提案理論を倒立振子にて評価している。

tube-based 制御では許容されるシステムの不確かさに対して予測ホライズンの間に取りうる全ての軌道の領域を表す。軌道を可到達集合内に保ち状態および入力制約を時刻の経過と共に狭めることでロバスト化を達成する [44]。tube-based の考え方を利用している一例に移動ロボットの制御があげられる。市原らの [44] では外乱が発生する条件下でも参照軌道に追従するような制御が行われている。Gonzalez らの [45] ではオフラインにてパラメータの不確定性を考慮したときに到達しうる状態量を予め計算しておき、その範囲を制約として考える最適化計算をオンラインで計算し、実際の移動方向を決定する。時間変化するパラメータとしてタイヤのスリップ角が考慮されているが、変化する範囲そのものは固定であり、その一定の範囲内でパラメータが変化するとして考慮されている。

H_∞ 制御と組み合わせている例としては Orukpe らの [46] がある。 H_∞ ノルムに関する制約を最適化計算の拘束条件として追加し、LMI に帰着して最適化計算を解き、外乱に対するロバスト制御を実現している。Bortoff らの [47] では具体的な応用例としてマルチヒートポンプへの適用が検討されている。本文献では H_∞ ノルムを使った制約条件を導

入して最適化計算を解くのではなく、 H_∞ ループ整形法に MPC を導入することで外乱に対してロバストな制御を実現することが検討されている。

その他様々なロバスト MPC が検討されているが、いずれの場合も不確定性の存在する範囲は時不変であり、ある一定の範囲の中でパラメータが時間変化するシステムを対象としている。

2.4 ロケットに対するモデル予測制御の適用

近年は MPC の適用先としてロケットへの応用を検討する論文も増えてきている。これは近年の計算器の能力向上に伴い、MPC のように逐次最適化計算を解くアルゴリズムをオンボード化できるようになったことが1つの要因である。特に、誘導ブロックへの MPC の適用に関する研究が増加している。Mukundan らの [48] は固体燃料ロケットの誘導コマンドを計算するのに MPC を適用を検討した例である。空力パラメータと推力に対して不確実性を考慮した上でロバスト制御を行っている。Benedikter らの [49] はロケットにてペイロードのリリースを行う上段ステージの誘導コマンドの計算に MPC の適用を検討した例である。さらに、飛翔体研究のトレンドでもある再使用ロケットについても、着陸フェーズの誘導制御に対して MPC の適用を検討する研究が存在する。Guadagnini らの [50] では MPC をベースとした誘導アルゴリズムを 6 自由度系のモデルに適用しソフトランディングへの応用を検討している。Vignesh らの [51] では非線形 MPC を適用することが検討されている。

以上のように飛翔体への MPC の適用が検討され始めているが、未だ数は少なく、誘導ブロックに対するものがメインである。さらに飛翔体の特性である時変性と不確定性両方に対応することに焦点を当てた研究はなく、時間を固定したようにパラメータが固定、もしくは一定の狭い範囲内で変化するという不確定性を想定している。一方で本研究は時変性と不確定性の両方に対応することに焦点を当てたものである。

2.5 本章のまとめ

本章ではモデル予測制御 (MPC) の概要として、制御系の構成、基本的な最適化計算の方法、MPC の種類、そしてその他 MPC の種類やその応用例について各文献を引用しながら紹介した。予測モデルの扱いによって適用 MPC や時変 MPC があることを示し、パラメータ変化に対するアプローチ法として、積極的に対応していく適応 MPC と、変化する幅全体に対応するロバスト MPC があることを述べた。これらの研究はいずれも変化

第 2 章 モデル予測制御

する幅がある程度制限されており，大規模な時間変化と不確定性の両方を有している制御対象を想定した研究がないことがわかる．また，ロケットに対しての MPC の適用例について紹介し，ロケットの大きな特徴であるダイナミクスの時変性と不確定性の両方に対してアプローチを取る研究として本研究が新規性を有していることを述べた．

第 3 章

制御対象

本研究では衛星打上げロケットの第 1 段を想定する。この第 1 段を利用するフェーズではロケットは空気中を飛翔し、機体の風圧中心が質量中心よりも機体前方に位置するため、空力不安定である。したがって、制御器は空気力に対して可能な限り小さい応答時間でシステムを安定させることが求められる。一方、機体のダイナミクスには不確定性が存在するためロバスト安定性も重要である。しかし応答性とロバスト安定性は相反する要求であるため、この第 1 段は最も制御器設計が困難なフェーズである。本研究では Fig. 3.1 に示す平面内 (ピッチ面内) での運動のみを考慮する。なお、機体の対称性から Fig. 3.1 に示す平面内の運動であるピッチ運動とそれと垂直な平面内の運動であるヨー方向の運動は同様である。

3.1 機体仕様

機体のパラメータは日本の固体ロケットである M-V ロケットを参考に決定した。時間変化するパラメータを付録 B に示す。その他、時間変化しないパラメータを Table 3.1 に示す。なお、これらの値も M-V ロケットの資料 [52][53] を基に決定した。以上で設定したパラメータを基にノズルの慣性能率や局所法線力係数傾斜、機体剛性を導出する。

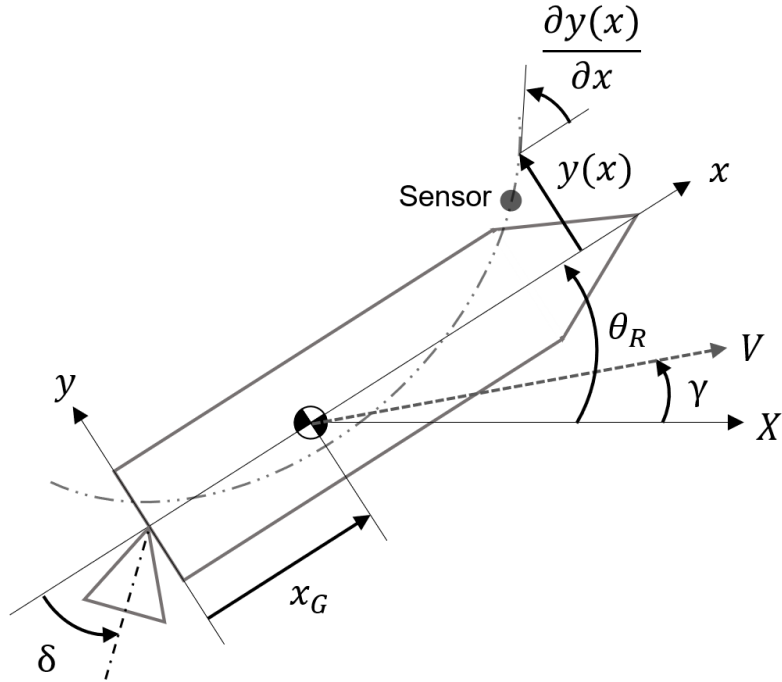


Fig. 3.1: Vehicle model.

Table 3.1: Time-invariant parameters of the controlled vehicle.

Length	L [m]	30.8
Diameter of the vehicle	D_v [m]	2.5
Length of the 1st stage motor	L_{1st} [m]	11
Fearing length	L_F [m]	3
Position of IMU center	x_{IMU} [m]	22.3
Nozzle length	L_n [m]	2.7
Nozzle bottom diameter	D_n [m]	2.5
Nozzle mass	M_n [kg]	3.5×10^3
Nozzle thickness	Δ_n [m]	20×10^{-3}
Motor case mass	M_{mc} [kg]	6.0×10^3
Motor initial inside diameter	D_m [m]	0.3

ノズルの慣性能率は以下のように導出する． Fig. 3.2 に示すような円環形状を考えると， x 軸周りの慣性モーメント J_{Rng} は式 (3.1) のとおり．

$$\begin{aligned}
 J_{Rng} &= \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} (r \sin \psi)^2 \cdot \rho \cdot r dr d\psi \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \rho r^3 \sin^2 \psi dr d\psi \\
 &= \frac{\pi}{4} (R_2^4 - R_1^4) \cdot \rho \\
 &= \frac{\pi}{4} (R_2^4 - R_1^4) \cdot \frac{m}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \\
 &= \frac{1}{4} (R_2^2 + R_1^2)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

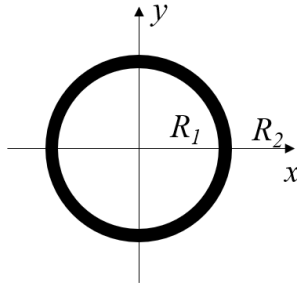


Fig. 3.2: Geometry for getting the moment of inertia of ring shape.

ノズルの慣性能率 J_n を求めるにあたって，体積密度 ρ_n を求める．ノズルを平面に開くと Fig. 3.3 (a) に示すような扇形形状に近似できる．この扇形の体積にてノズルの質量を割ることで体積密度 ρ_n を導出すると次式 (3.2) のようになる．

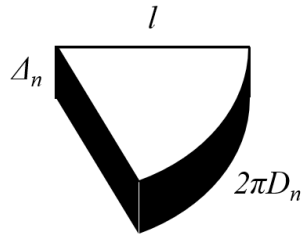
$$\rho_n = \frac{M_n}{\frac{1}{2}l \cdot 2\pi D_n \cdot \Delta_n} = \frac{M_n}{\pi l D_n \Delta_n} = \frac{M_n}{\pi \sqrt{L_n^2 + D_n^2} D_n \Delta_n} \tag{3.2}$$

ここで，ノズルが Fig. 3.3 (b) のような円錐形状をしているとすると，Z 軸上の位置 z における半径 r は $r : z = \frac{D_n}{2} : L_n$ が成立することから， $r = \frac{D_n}{2L_n} z$ となる．各位置 z における円環の x 軸周りの慣性能率 dJ_{Rng} は次式 (3.3) のようになる．

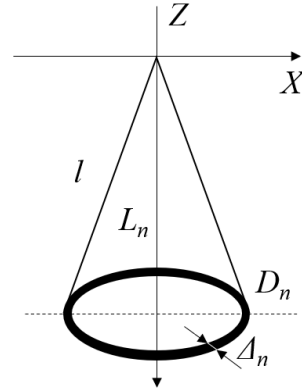
$$dJ_n = \frac{1}{4} [r^2 + (r - \Delta_n)^2] \cdot dm \tag{3.3}$$

平行軸の定理を適用することで X 軸周りのノズルの慣性能率 J_n は次式の通り．

$$\begin{aligned}
 J_n &= \int_0^{L_n} (dJ_n + dmz^2) \\
 &= \int_0^{L_n} \left[\frac{1}{4}[r^2 + (r - \Delta_n)^2] + z^2 \right] dm \\
 &= \int_0^{L_n} \left[\frac{1}{4}[r^2 + (r - \Delta_n)^2] + z^2 \right] \rho_n \cdot \pi[r^2 - (r - \Delta_n)^2] dz \\
 &= \int_0^{L_n} \left[\frac{1}{4}[r^2 + (r - \Delta_n)^2] + z^2 \right] \frac{M_n}{\pi \sqrt{L_n^2 + D_n^2} D_n \Delta_n} \cdot \pi[r^2 - (r - \Delta_n)^2] dz \\
 &= \frac{M_n}{\sqrt{L_n^2 + D_n^2} D_n \Delta_n} \int_0^{L_n} \left[\frac{1}{4}[r^2 + (r - \Delta_n)^2] + z^2 \right] [r^2 - (r - \Delta_n)^2] dz
 \end{aligned} \tag{3.4}$$



(a) Sector shape.



(b) Nozzle shape.

Fig. 3.3: Geometries for getting the moment of inertia of the nozzle.

以上の計算よりノズルの慣性能率 J_n は $5.06 \times 10^3 \text{ kgm}^2$ となる。

法線力係数傾斜は代表値をもとに局所法線力係数傾斜を導出する。

法線力係数傾斜は機体の断面積がほぼ変わらない部分をボディ部、機首部分の徐々に断面積が小さくなっていく部分をフェアリング部分として2つに分けて分布を検討する。法線力、そして法線力による機体に係るモーメントの大きさのオーダーが参考資料と一致するように注意しながら局所法線力係数傾斜を導出した。なお、本研究では機軸方向の要素分割数は1000として局所法線力係数傾斜や以降の計算を行った。求めた法線力係数傾斜の値を付録BのTable B.1に示す。

機体の剛性 EI は、最大動圧点の固有周波数が 5 Hz であると仮定してヤング率を求めることで導出する。本研究では固体ロケットを想定し、機体は中実ではなく中空であるとする。そして燃焼が進むごとに中の空間の径が大きくなるとする。このとき、推進薬の内部空間の初期径 D_m は Table 3.1 に示したように 0.3 m とする。

機体の単位体積あたりの質量 ρ_v は次の通り。

$$\begin{aligned}\rho_v &= \frac{\rho_m}{\pi \left[\left(\frac{D_v}{2} \right)^2 - \left(\frac{D_m}{2} \right)^2 \right]} \\ &= \frac{4\rho_m}{\pi(D_v^2 - D_m^2)}\end{aligned}\quad (3.5)$$

ここで最大動圧点での推進薬の空間の径 D_{mq} と断面二次モーメント I_{mq} を計算する。

$$\begin{aligned}D_v^2 - D_{mq}^2 &= \frac{4\rho_{mq}}{\pi\rho_v} \\ D_{mq}^2 &= D_v^2 - \frac{4\rho_{mq}}{\pi\rho_v}\end{aligned}\quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}I_{mq} &= \frac{\pi}{64}(D_v^4 - D_{mq}^2) \\ &= \frac{\pi}{64} \left(D_v^4 - D_v^2 + \frac{4\rho_{mq}}{\pi\rho_v} \right) \\ &= \frac{\rho_{mq}}{16\rho_v}\end{aligned}\quad (3.7)$$

最大動圧点における振動の固有周波数 ω_q 、推進薬の空間の径 D_{mq} 、断面二次モーメント I_{mq} を利用することで機体のヤング率 E を求める。

$$E = \frac{\rho_q \cdot \omega_{mq}}{\beta^4 \cdot I_{mq}}\quad (3.8)$$

各時刻の推進薬の空間の径、断面二次モーメントを同様に求めることでポテンシャルエネルギーを求める。

機体の振動モードに関するパラメータである振動の固有周波数 ω は実際には機体の材質や形状により決定される。本研究では運動のエッセンスを抽出するため、弾性振動は 1 次モードのみを考慮する。弾性振動の 1 次モードにおけるパラメータを Table 3.2 にまとめる。なお、その他機体のたわみ y に関するパラメータ (モード関数 Y 、一般化座標 ξ) は次節 3.2 にて説明する。

Table 3.2: Parameters of 1st bending mode.

Natural frequency at max Q	ω [Hz]	5
Damping ratio	ζ_1 [-]	0.05

3.2 棒の曲げ振動

機体の弾性振動は両端自由端の梁の曲げ振動として考慮することができる。曲げ振動の挙動は [54] を参考として以下の通りである。

- 鉛直方向

$$\left[Q(x, t) + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} dx \right] - Q(x, t) + f(x, t) dx = \rho(x, t) dx \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad (3.9)$$

- モーメント

$$\begin{aligned} \left[M_z(x, t) + \frac{\partial M_z(x, t)}{\partial x} dx \right] - M_z(x, t) \\ + \left[Q(x, t) + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} dx \right] dx + f(x, t) dx \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

微小項は無視できるとすると式 (3.9) , (3.10) より、梁の曲げ振動の微分方程式は式 (3.11) に示す形となる。

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x, t) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right] + f(x, t) = \rho(x, t) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad (3.11)$$

固有モードを求めるため、外力 $f(x, t) = 0$ として自由振動を考える。この場合、たわみ y は一般化座標 ξ とモード関数 Y を用いて空間座標と時間座標に分離し、 $y(x, t) = \sum_j Y_j(x) \xi_j(t)$ で表現できる。ここで ξ の固有振動数が ω であるとするとき式 (3.11) は次式 (3.12) のように変形することができる。

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x, t) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] = \omega^2(t) \rho(x, t) Y(x) \quad (3.12)$$

I_z および ρ は飛翔中、時間に依存して変化するが ξ に比べて変化のスペンが長いと考え、ここでは一定とすると次式のようなになる。

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] = \omega^2(t) \rho(x) Y(x) \quad (3.13)$$

これは2元変数係数非線形微分方程式となり、閉じた形の一般解は存在しない。梁が x 軸方向に一様であると仮定して解を求めるとすると、式 (3.13) は次式 (3.14) のように変形することができる。

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] \frac{1}{Y(x)} = \frac{\rho}{EI} \omega^2 \quad (3.14)$$

ここで $\frac{\rho \omega^2}{EI} = \beta^4$ とすると式 (3.15) が得られる。

$$\frac{d^4 Y(x)}{dx^4} - \beta^4 Y(x) = 0 \quad (3.15)$$

式 (3.15) の一般解は式 (3.16) に示す形となる。

$$Y(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x \quad (3.16)$$

自由端における境界条件は、曲げモーメントおよびせん断力が0であるため、 $\frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \Big|_{x=0,L} = 0$, $\frac{d^3 Y(x)}{dx^3} \Big|_{x=0,L} = 0$ である。この条件より式 (3.17) に示すような連立方程式を得られる。

$$\begin{cases} C_1(-\sin \beta L + \sinh \beta L) + C_2(-\cos \beta L + \cosh \beta L) = 0 \\ C_1(-\cos \beta L + \cosh \beta L) + C_2(\sin \beta L + \sinh \beta L) = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

この連立方程式を解くことで、モード関数 Y に関する式 (3.18) と特性方程式 (3.19) が得られる。

- モード関数

$$Y = \frac{C_1}{\sin \beta L + \sinh \beta L} [(\sin \beta L + \sinh \beta L)(\sin \beta x + \sinh \beta x) + (\cos \beta L - \cosh \beta L)(\cos \beta x + \cosh \beta x)] \quad (3.18)$$

- 特性方程式

$$\cos \beta L \cdot \cosh \beta L = 1 \quad (3.19)$$

モード関数の係数 C_1 は $\int_0^L \rho Y^2 dx = m$ となる正規化計算を行うことで、 $C_1 = \frac{\sin \beta_j L + \sinh \beta_j L}{\cos \beta_j L - \cosh \beta_j L}$ が得られる。また、特性方程式 (3.19) は数値的に求める必要があるため、ニュートンラプソン法を用いて固有値 β_j を求める。以上の計算より固有モード関数 Y_j は式 (3.20) として得られる。本研究では振動の1次モードのみ求める。

$$Y_j = \frac{1}{\cos \beta_j L - \cosh \beta_j L} [(\sin \beta_j L + \sinh \beta_j L)(\sin \beta_j x + \sinh \beta_j x) + (\cos \beta_j L - \cosh \beta_j L)(\cos \beta_j x + \cosh \beta_j x)] \quad (3.20)$$

3.3 機体運動

機体の運動方程式はラグランジアンを用いたラグランジュの運動方程式にて導出する。ラグランジュの運動方程式は座標系に依存せず求められることが利点である。

3.3.1 ラグランジアン

ラグランジアン Λ は運動エネルギー K とポテンシャルエネルギー σ を用いて $\Lambda = K - \sigma$ にて表現される。ラグランジアンを用いた運動方程式は一般化座標 q および一般化力 Q を用いて式 (3.21) のように表すことができる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_i} = Q_i \quad (3.21)$$

3.3.2 運動方程式

機体固定座標系において位置 x における y 方向の変位を $z(x)$ とすると、次のように表すことができる。

$$z(x) = (x - x_G)\theta_R + y(x) = (x - x_G)\theta_R + \sum_j Y_j(x)\xi_j \quad (3.22)$$

これを時間微分することで求められる各要素の速度 $\dot{z}(x)$ は式 (3.23) のとおり。

$$\begin{aligned} \dot{z}(x) &= \frac{d}{dt} \left[(x - x_G)\theta_R + \sum_j Y_j(x)\xi_j \right] \\ &= (\dot{x} - \dot{x}_G)\theta_R + (x - x_G)\dot{\theta}_R + \sum_j Y_j(x)\dot{\xi}_j \end{aligned} \quad (3.23)$$

機体の重心の位置を基準点としてエネルギーを考える。ノズルを除く全機体の運動エネルギー K とポテンシャルエネルギー σ 、ノズルの運動エネルギー K_n はそれぞれ式 (3.24) - (3.26) のように表せる。ここで、ポテンシャルエネルギーは曲げモーメントによるひずみエネルギーであり、曲げモーメント μ は $\mu(x) = EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$ で表される。

- ノズルを除く機体の運動エネルギー

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2} \int_0^{L_v} \rho(x) \dot{z}^2(x) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{L_v} \rho(x) \left[(\dot{x} - \dot{x}_G) \theta_R + (x - x_G) \dot{\theta}_R + \sum_j Y_j(x) \dot{\xi}_j \right]^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{L_v} \rho(x) (\dot{x} - \dot{x}_G)^2 dx \theta_R^2 + \frac{1}{2} \int_0^{L_v} \rho(x) (x - x_G)^2 dx \dot{\theta}_R^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^{L_v} \rho(x) \left[\sum_j Y_j(x) \dot{\xi}_j \right]^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^{L_v} \rho(x) [2(\dot{x} - \dot{x}_G)(x - x_G)] dx \theta_R \dot{\theta}_R \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^{L_v} \rho(x) \left[2(x - x_G) \sum_j Y_j(x) \dot{\xi}_j \right] dx \dot{\theta}_R \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^{L_v} \rho(x) \left[2(\dot{x} - \dot{x}_G) \sum_j Y_j(x) \dot{\xi}_j \right] dx \theta_R \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{L_v} \rho(x) (\dot{x} - \dot{x}_G)^2 dx \theta_R^2 + \frac{1}{2} \int_0^{L_v} \rho(x) (x - x_G)^2 dx \dot{\theta}_R^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^{L_v} \rho(x) \left[\sum_j Y_j(x) \dot{\xi}_j \right]^2 dx \\
&\quad + \int_0^{L_v} \rho(x) [(\dot{x} - \dot{x}_G)(x - x_G)] dx \theta_R \dot{\theta}_R \\
&\quad + \int_0^{L_v} \rho(x) \left[(x - x_G) \sum_j Y_j(x) \dot{\xi}_j \right] dx \dot{\theta}_R \\
&\quad + \int_0^{L_v} \rho(x) \left[(\dot{x} - \dot{x}_G) \sum_j Y_j(x) \dot{\xi}_j \right] dx \theta_R
\end{aligned} \tag{3.24}$$

- ポテンシャルエネルギー

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \frac{1}{2} \int_0^{L_v} \frac{\mu^2(x)}{EI} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{L_v} \frac{1}{EI} \left\{ EI \sum_j \left[\frac{d^2 Y_j(x)}{dx^2} \xi_j \right] \right\}^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} EI \int_0^{L_v} \left\{ \sum_j \left[\frac{d^2 Y_j(x)}{dx^2} \xi_j \right] \right\}^2 dx
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

- ノズルの運動エネルギー

$$\begin{aligned}
 K_n &= \frac{1}{2} M_n \dot{x}_G^2 + \frac{1}{2} I_n \left(\dot{\theta}_R + \frac{\partial^2 y(0)}{\partial t \partial x} + \dot{\delta} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} M_n \dot{x}_G^2 + \frac{1}{2} I_n \left(\dot{\theta}_R + \sum_j \left[\frac{dY_j(0)}{dx} \dot{\xi}_j \right] + \dot{\delta} \right)^2
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

以上のエネルギーを各一般化座標 θ_R , ξ_j , $\dot{\theta}_R$, $\dot{\xi}_j$ で偏微分したものは式 (3.27) – (3.29) のとおり。

- ノズルを除く機体の運動エネルギー

$$\frac{\partial K}{\partial \xi_k} = 0 \quad (3.27a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial \dot{\xi}_k} &= \int_0^{L_v} \rho(x) Y_k(x) \sum_j \left[Y_j(x) \dot{\xi}_j \right] dx \\ &+ \int_0^{L_v} \rho(x) (x - x_G) Y_k(x) dx \dot{\theta}_R \end{aligned} \quad (3.27b)$$

$$\begin{aligned} &+ \int_0^{L_v} \rho(x) (\dot{x} - \dot{x}_G) Y_k(x) dx \theta_R \\ \frac{\partial K}{\partial \theta_R} &= \int_0^{L_v} \rho(x) (\dot{x} - \dot{x}_G)^2 dx \theta_R \\ &+ \int_0^{L_v} \rho(x) [(\dot{x} - \dot{x}_G)(x - x_G)] dx \dot{\theta}_R \end{aligned} \quad (3.27c)$$

$$\begin{aligned} &+ \int_0^{L_v} \rho(x) (\dot{x} - \dot{x}_G) \sum_j Y_j(x) \dot{\xi}_j dx \\ \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_R} &= \int_0^{L_v} \rho(x) (x - x_G)^2 dx \dot{\theta}_R \\ &+ \int_0^{L_v} \rho(x) [(\dot{x} - \dot{x}_G)(x - x_G)] dx \theta_R \\ &+ \int_0^{L_v} \rho(x) (x - x_G) \sum_j Y_j(x) \dot{\xi}_j dx \end{aligned} \quad (3.27d)$$

• ポテンシャルエネルギー

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \xi_k} = EI \int_0^{L_v} \left[\sum_j \frac{d^2 Y_k(x)}{dx^2} \frac{d^2 Y_j(x)}{dx^2} \xi_j \right] dx \quad (3.28a)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\xi}_k} = 0 \quad (3.28b)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta_R} = 0 \quad (3.28c)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\theta}_R} = 0 \quad (3.28d)$$

$$\frac{\partial K_n}{\partial \xi_k} = 0 \quad (3.28e)$$

$$\frac{\partial K_n}{\partial \dot{\xi}_k} = I_n \frac{dY_k(0)}{dx} \left(\dot{\theta}_R + \sum_j \left[\frac{dY_j(0)}{dx} \dot{\xi}_j \right] + \dot{\delta} \right) \quad (3.28f)$$

$$\frac{\partial K_n}{\partial \theta_R} = 0 \quad (3.28g)$$

$$\frac{\partial K_n}{\partial \dot{\theta}_R} = I_n \left(\dot{\theta}_R + \sum_j \left[\frac{dY_j(0)}{dx} \dot{\xi}_j \right] + \dot{\delta} \right) \quad (3.28h)$$

• ノズルの運動エネルギー

$$\frac{\partial K_n}{\partial \xi_k} = 0 \quad (3.29a)$$

$$\frac{\partial K_n}{\partial \dot{\xi}_k} = I_n \frac{dY_k(0)}{dx} \left(\dot{\theta}_R + \sum_j \left[\frac{dY_j(0)}{dx} \dot{\xi}_j \right] + \dot{\delta} \right) \quad (3.29b)$$

$$\frac{\partial K_n}{\partial \theta_R} = 0 \quad (3.29c)$$

$$\frac{\partial K_n}{\partial \dot{\theta}_R} = I_n \left(\dot{\theta}_R + \sum_j \left[\frac{dY_j(0)}{dx} \dot{\xi}_j \right] + \dot{\delta} \right) \quad (3.29d)$$

ここで固有モードの直交性より式 (3.30) , (3.31) が成立する.

$$\int_0^{L_v} \rho(x) Y_k(x) \sum_j \left[Y_j(x) \dot{\xi}_j \right] dx = \int_0^{L_v} \rho(x) Y_k^2(x) dx \dot{\xi}_k \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned}
EI \int_0^{L_v} \left[\sum_j \frac{d^2 Y_k(x)}{dx^2} \frac{d^2 Y_j(x)}{dx^2} \xi_j \right] dx &= EI \sum_j \int_0^{L_v} \left[\frac{d^2 Y_k(x)}{dx^2} \frac{d^2 Y_j(x)}{dx^2} \xi_j \right] dx \\
&= EI \int_0^{L_v} \left[\frac{d^2 Y_k(x)}{dx^2} \right]^2 dx \xi_k
\end{aligned} \tag{3.31}$$

以上より, ラグランジアンを各一般化座標 θ_R , ξ_j で偏微分したものは式 (3.32), (3.33) に示されるとおりである.

- θ_R で偏微分したもの

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_R} &= \frac{\partial K}{\partial \theta_R} + \frac{\partial K_n}{\partial \theta_R} - \frac{\partial \sigma}{\partial \theta_R} \\
&= \int_0^{L_v} \rho(x) (\dot{x} - \dot{x}_G)^2 dx \theta_R + \int_0^{L_v} \rho(x) [(\dot{x} - \dot{x}_G)(x - x_G)] dx \dot{\theta}_R \\
&\quad + \int_0^{L_v} \rho(x) (\dot{x} - \dot{x}_G) \sum_j [Y_j(x) \dot{\xi}_j] dx
\end{aligned} \tag{3.32a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\theta}_R} &= \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_R} + \frac{\partial K_n}{\partial \dot{\theta}_R} - \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\theta}_R} \\
&= \int_0^{L_v} \rho(x) (x - x_G)^2 dx \dot{\theta}_R + \int_0^{L_v} \rho(x) (x - x_G) \sum_j [Y_j(x) \dot{\xi}_j] dx \\
&\quad + \int_0^{L_v} \rho(x) (x - x_G) (\dot{x} - \dot{x}_G) dx \theta_R \\
&\quad + I_n \left(\dot{\theta}_R + \sum_j \left[\frac{dY_j(0)}{dx} \dot{\xi}_j \right] + \dot{\delta} \right) \\
&= \left(\int_0^{L_v} \rho(x) (x - x_G)^2 dx + I_n \right) \dot{\theta}_R \\
&\quad + \int_0^{L_v} \rho(x) (x - x_G) (\dot{x} - \dot{x}_G) dx \theta_R \\
&\quad + \left(\int_0^{L_v} \rho(x) (x - x_G) \sum_j [Y_j(x) \dot{\xi}_j] dx + I_n \sum_j \left[\frac{dY_j(0)}{dx} \dot{\xi}_j \right] \right) \\
&\quad + I_n \dot{\delta}
\end{aligned} \tag{3.32b}$$

- ξ で偏微分したもの

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Lambda}{\partial \xi_k} &= \frac{\partial K}{\partial \xi_k} + \frac{\partial K_n}{\partial \xi_k} - \frac{\partial \sigma}{\partial \xi_k} \\
 &= -EI \int_0^{L_v} \left[\frac{d^2 Y_k(x)}{dx^2} \right]^2 dx \xi_k \\
 &= -\frac{\rho(t) \omega_k^2(t)}{\beta_k^4} \int_0^{L_v} \left[\frac{d^2 Y_k(x)}{dx^2} \right]^2 dx \xi_k \\
 &= -\frac{\rho(t) \omega_k^2(t)}{\beta_k^4} \beta_k^4 \int_0^{L_v} Y_k^2(x) dx \xi_k \\
 &= -EI \beta_k^4 L \xi_k = -M_v(t) \omega_k^2(t) \xi_k
 \end{aligned} \tag{3.33a}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\xi}_k} &= \frac{\partial K}{\partial \dot{\xi}_k} + \frac{\partial K_n}{\partial \dot{\xi}_k} - \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\xi}_k} \\
 &= \int_0^{L_v} \rho(x) Y_k^2(x) dx \dot{\xi}_k + \int_0^{L_v} \rho(x) (x - x_G) Y_k(x) dx \dot{\theta}_R \\
 &\quad + \int_0^{L_v} \rho(x) (\dot{x} - \dot{x}_G) Y_k(x) dx \theta_R \\
 &\quad + I_n \frac{dY_k(0)}{dx} \left(\dot{\theta}_R + \sum_j \left[\frac{dY_j(0)}{dx} \dot{\xi}_j \right] + \dot{\delta} \right) \\
 &= \int_0^{L_v} \rho(x) Y_k^2(x) dx \dot{\xi}_k \\
 &\quad + \left(\int_0^{L_v} \rho(x) (x - x_G) Y_k(x) dx + I_n \frac{dY_k(0)}{dx} \right) \dot{\theta}_R \\
 &\quad + \int_0^{L_v} \rho(x) (\dot{x} - \dot{x}_G) Y_k(x) dx \theta_R + I_n \frac{dY_k(0)}{dx} \sum_j \left[\frac{dY_j(0)}{dx} \dot{\xi}_j \right] \\
 &\quad + I_n \frac{dY_k(0)}{dx} \dot{\delta} \\
 &= M_v(t) \dot{\xi}_k + \left(\int_0^{L_v} \rho(x) (x - x_G) Y_k(x) dx + I_n \frac{dY_k(0)}{dx} \right) \dot{\theta}_R \\
 &\quad + \int_0^{L_v} \rho(x) (\dot{x} - \dot{x}_G) Y_k(x) dx \theta_R + I_n \frac{dY_k(0)}{dx} \sum_j \left[\frac{dY_j(0)}{dx} \dot{\xi}_j \right] \\
 &\quad + I_n \frac{dY_k(0)}{dx} \dot{\delta}
 \end{aligned} \tag{3.33b}$$

したがって式 (3.21) に示す運動方程式の左辺は式 (3.34) , (3.35) に示すものとなる.

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\theta}_R} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_R} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_R} + \frac{\partial K_n}{\partial \dot{\theta}_R} - \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\theta}_R} \right) - \left(\frac{\partial K}{\partial \theta_R} + \frac{\partial K_n}{\partial \theta_R} - \frac{\partial \sigma}{\partial \theta_R} \right) \\
& = \frac{d}{dt} \left[\left(\int_0^{L_v} \rho(x)(x - x_G)^2 dx + I_n \right) \dot{\theta}_R + \int_0^{L_v} \rho(x)(x - x_G)(\dot{x} - \dot{x}_G) dx \theta_R \right. \\
& \quad + \left. \left(\int_0^{L_v} \rho(x)(x - x_G) \sum_j [Y_j(x) \dot{\xi}_j] dx + I_n \sum_j \left[\frac{dY_j(0)}{dx} \dot{\xi}_j \right] \right) + I_n \dot{\delta} \right] \\
& \quad - \left[\int_0^{L_v} \rho(x)(\dot{x} - \dot{x}_G)^2 dx \theta_R + \int_0^{L_v} \rho(x)[(\dot{x} - \dot{x}_G)(x - x_G)] dx \dot{\theta}_R \right. \\
& \quad \left. + \int_0^{L_v} \rho(x)(\dot{x} - \dot{x}_G) \sum_j [Y_j(x) \dot{\xi}_j] dx \right] \\
& = \left[\int_0^{L_v} \rho(x)(x - x_G)^2 dx + I_n \right] \ddot{\theta}_R \\
& \quad + \left[\int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)(x - x_G)^2 dx + 2 \int_0^{L_v} \rho(x)(x - x_G)(\dot{x} - \dot{x}_G) dx \right] \dot{\theta}_R \\
& \quad + \left[\int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)(x - x_G)(\dot{x} - \dot{x}_G) dx + \int_0^{L_v} \rho(x)(x - x_G)(\ddot{x} - \ddot{x}_G) dx \right] \theta_R \\
& \quad + \left[\int_0^{L_v} \rho(x)(x - x_G) \sum_j Y_j(x) \ddot{\xi}_j dx + I_n \sum_j \frac{dY_j(0)}{dx} \ddot{\xi}_j \right] \\
& \quad + \int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)(x - x_G) \sum_j Y_j(x) \dot{\xi}_j dx + I_n \ddot{\delta}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\xi}_k} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial \xi_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\xi}_k} + \frac{\partial K_n}{\partial \dot{\xi}_k} - \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\xi}_k} \right) - \left(\frac{\partial K}{\partial \xi_k} + \frac{\partial K_n}{\partial \xi_k} - \frac{\partial \sigma}{\partial \xi_k} \right) \\
 & = \frac{d}{dt} \left[M_v(t) \dot{\xi}_k + \left(\int_0^{L_v} \rho(x)(x - x_G) Y_k(x) dx + I_n \frac{dY_k(0)}{dx} \right) \dot{\theta}_R \right. \\
 & \quad + \int_0^{L_v} \rho(x)(\dot{x} - \dot{x}_G) Y_k(x) dx \theta_R + I_n \frac{dY_k(0)}{dx} \sum_j \left[\frac{dY_j(0)}{dx} \dot{\xi}_j \right] \\
 & \quad \left. + I_n \frac{dY_k(0)}{dx} \dot{\delta} \right] - [-M_v(t) \omega_k^2(t) \xi_k] \\
 & = \left[\int_0^{L_v} \rho(x)(x - x_G) Y_k(x) dx + I_n \frac{dY_k(0)}{dx} \right] \ddot{\theta}_R \\
 & \quad + \left[\int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)(x - x_G) Y_k(x) dx + 2 \int_0^{L_v} \rho(x)(\dot{x} - \dot{x}_G) Y_k(x) dx \right] \dot{\theta}_R \\
 & \quad + \left[\int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)(\dot{x} - \dot{x}_G) Y_k(x) dx + \int_0^{L_v} \rho(x)(\ddot{x} - \ddot{x}_G) Y_k(x) dx \right] \theta_R \\
 & \quad + \left[M_v(t) \ddot{\xi}_k + I_n \frac{dY_k(0)}{dx} \sum_j \frac{dY_j(0)}{dx} \ddot{\xi}_j \right] \\
 & \quad + \int_0^{L_v} \dot{\rho}(x) Y_k^2(x) \dot{\xi}_k dx + M_v(t) \omega_k^2(t) \xi_k + I_n \frac{dY_k(0)}{dx} \ddot{\delta}
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

一方、運動方程式 (3.21) の右辺は式 (3.36), (3.37) の通り.

$$Q_\theta = qS \int_0^{L_v} C_{N\alpha x} \alpha_x (x - x_G) dx - T \cos \bar{\delta} y(0) - T \sin \bar{\delta} x_G \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{\xi_k} &= F_y \frac{\partial y}{\partial \xi_k} = F_y \sum_j Y_j \frac{d\xi_j}{d\xi_k} = F_y Y_k \\
 &= qS \int_0^{L_v} C_{N\alpha x} \alpha_x Y_k(x) dx + T \sin \bar{\delta} Y_k(0)
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

ここで局所迎角 α_x , 機体のたわみ角を考慮したノズル角度 $\bar{\delta}$ は以下の式 (3.38) に示すとおりである. さらに, ノズルの偏向角 δ は微小角であり, 近似 $\sin \bar{\delta} \simeq \bar{\delta}$, $\cos \bar{\delta} \simeq 1$ が成立するとする.

$$\cdot \text{局所迎角} \quad \alpha_x = \theta_R - \gamma + \frac{\partial y(x)}{\partial x} \tag{3.38a}$$

$$\cdot \text{機体のたわみ角を考慮したノズル角度} \quad \bar{\delta} = \delta + \frac{\partial y(0)}{\partial x} \tag{3.38b}$$

式 (3.36) , (3.37) に式 (3.38) を代入することで, 次式 (3.39) , (3.40) として表すことができる.

$$\begin{aligned}
Q_\theta &= qS \int_0^{L_v} C_{N\alpha x} \alpha_x (x - x_G) dx - T \cos \bar{\delta} y(0) - T \sin \bar{\delta} x_G \\
&= qS \int_0^{L_v} C_{N\alpha x} \left(\theta_R - \gamma + \frac{\partial y(x)}{\partial x} \right) (x - x_G) dx - T y(0) - T \bar{\delta} x_G \\
&= qS \int_0^{L_v} C_{N\alpha x} \left(\theta_R - \gamma + \frac{\partial y(x)}{\partial x} \right) (x - x_G) dx - T y(0) \\
&\quad - T \left(\delta + \frac{\partial y(0)}{\partial x} \right) x_G \tag{3.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= qS \int_0^{L_v} C_{N\alpha x} \left(\theta_R - \gamma + \sum_j \frac{dY_j(x)}{dx} \xi_j \right) (x - x_G) dx - T \sum_j Y_j(0) \xi_j \\
&\quad - T \left(\delta + \sum_j \frac{dY_j(0)}{dx} \xi_j \right) x_G \\
Q_{\xi_k} &= F_y \frac{\partial y}{\partial \xi_k} = F_y \sum_j Y_j \frac{d\xi_j}{d\xi_k} = F_y Y_k \\
&= qS \int_0^{L_v} C_{N\alpha x} \alpha_x Y_k(x) dx + T \sin \bar{\delta} Y_k(0) \\
&= qS \int_0^{L_v} C_{N\alpha x} \left(\theta_R - \gamma + \frac{\partial y(x)}{\partial x} \right) Y_k(x) dx + T \bar{\delta} Y_k(0) \\
&= qS \int_0^{L_v} C_{N\alpha x} \left(\theta_R - \gamma + \frac{\partial y(x)}{\partial x} \right) Y_k(x) dx + T \left(\delta + \frac{\partial y(0)}{\partial x} \right) Y_k(0) \tag{3.40} \\
&= qS \int_0^{L_v} C_{N\alpha x} \left(\theta_R - \gamma + \sum_j \frac{dY_j(x)}{dx} \xi_j \right) Y_k(x) dx \\
&\quad + T \left(\delta + \sum_j \frac{dY_j(0)}{dx} \xi_j \right) Y_k(0)
\end{aligned}$$

以上よりラグランジアンを用いて導出した運動方程式は式 (3.41) , (3.42) にて表される.

• 剛体運動

$$\begin{aligned}
 & \left[\int_0^{L_v} \rho(x)(x - x_G)^2 dx + I_n \right] \ddot{\theta}_R \\
 & + \left[\int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)(x - x_G)^2 dx + 2 \int_0^{L_v} \rho(x)(x - x_G)(\dot{x} - \dot{x}_G) dx \right] \dot{\theta}_R \\
 & + \left[\int_0^{L_v} \ddot{\rho}(x)(x - x_G)(\dot{x} - \dot{x}_G) dx + \int_0^{L_v} \rho(x)(x - x_G)(\ddot{x} - \ddot{x}_G) dx \right] \theta_R \\
 & + \left[\int_0^{L_v} \rho(x)(x - x_G) \sum_j Y_j(x) \ddot{\xi}_j dx + I_n \sum_j \frac{dY_j(0)}{dx} \ddot{\xi}_j \right] \\
 & + \int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)(x - x_G) \sum_j Y_j(x) \dot{\xi}_j dx + I_n \dot{\delta} \\
 & = qS \int_0^{L_v} C_{N\alpha x} \left(\theta_R - \gamma + \sum_j \frac{dY_j(x)}{dx} \xi_j \right) (x - x_G) dx - T \sum_j Y_j(0) \xi_j \\
 & - T \left(\delta + \sum_j \frac{dY_j(0)}{dx} \xi_j \right) x_G
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

- 弾性振動

$$\begin{aligned}
& \left[\int_0^{L_v} \rho(x)(x - x_G)Y_k(x)dx + I_n \frac{dY_k(0)}{dx} \right] \ddot{\theta}_R \\
& + \left[\int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)(x - x_G)Y_k(x)dx + 2 \int_0^{L_v} \rho(x)(\dot{x} - \dot{x}_G)Y_k(x)dx \right] \dot{\theta}_R \\
& + \left[\int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)(\dot{x} - \dot{x}_G)Y_k(x)dx + \int_0^{L_v} \rho(x)(\ddot{x} - \ddot{x}_G)Y_k(x)dx \right] \theta_R \\
& + \left[M_v(t)\ddot{\xi}_k + I_n \frac{dY_k(0)}{dx} \sum_j \frac{dY_j(0)}{dx} \ddot{\xi}_j \right] \\
& + \int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)Y_k^2(x)\dot{\xi}_k dx + M_v(t)\omega_k^2(t)\xi_k + I_n \frac{dY_k(0)}{dx} \ddot{\delta} \\
& = qS \int_0^{L_v} C_{N\alpha x} \left(\theta_R - \gamma + \sum_j \frac{dY_j(x)}{dx} \xi_j \right) Y_k(x)dx \\
& + T \left(\delta + \sum_j \frac{dY_j(0)}{dx} \xi_j \right) Y_k(0)
\end{aligned} \tag{3.42}$$

ここで、振動は空気抵抗などにおいて減衰するため、弾性振動の式に減衰項 $2\zeta_k M_v(t)\omega_k(t)\dot{\xi}_k$ を追加する。最終的な弾性振動を表す運動方程式は式 (3.43) に示すものになる。

$$\begin{aligned}
& \left[\int_0^{L_v} \rho(x)(x - x_G)Y_k(x)dx + I_n \frac{dY_k(0)}{dx} \right] \ddot{\theta}_R \\
& + \left[\int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)(x - x_G)Y_k(x)dx + 2 \int_0^{L_v} \rho(x)(\dot{x} - \dot{x}_G)Y_k(x)dx \right] \dot{\theta}_R \\
& + \left[\int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)(\dot{x} - \dot{x}_G)Y_k(x)dx + \int_0^{L_v} \rho(x)(\ddot{x} - \ddot{x}_G)Y_k(x)dx \right] \theta_R \\
& + \left[M_v(t)\ddot{\xi}_k + I_n \frac{dY_k(0)}{dx} \sum_j \frac{dY_j(0)}{dx} \ddot{\xi}_j \right] + 2\zeta_k M_v(t)\omega_k(t)\dot{\xi}_k \quad (3.43) \\
& + \int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)Y_k^2(x)\dot{\xi}_k dx + M_v(t)\omega_k^2(t)\xi_k + I_n \frac{dY_k(0)}{dx} \ddot{\delta} \\
& = qS \int_0^{L_v} C_{N\alpha x} \left(\theta_R - \gamma + \sum_j \frac{dY_j(x)}{dx} \xi_j \right) Y_k(x) dx \\
& + T \left(\delta + \sum_j \frac{dY_j(0)}{dx} \xi_j \right) Y_k(0)
\end{aligned}$$

ここで機体ノミナルの姿勢角からの偏差のみを考慮することから経路角 γ のダイナミクスは無視できる程小さいとする。また、重心位置の 2 階微分 \ddot{x}_G およびノズル偏向角の 2 階微分 $\ddot{\delta}$ は無視できる程に小さいとする。さらに、本研究では運動のエッセンスを抽出するため、振動は 1 次モードのみを考慮することから、運動方程式は式 (3.44) , (3.45) のようになる。

- 剛体運動

$$\begin{aligned}
& \left[\int_0^{L_v} \rho(x)(x - x_G)^2 dx + I_n \right] \ddot{\theta}_R \\
& + \left[\int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)(x - x_G)^2 dx + 2 \int_0^{L_v} \rho(x)(x - x_G)(\dot{x} - \dot{x}_G) dx \right] \dot{\theta}_R \\
& + \int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)(x - x_G)(\dot{x} - \dot{x}_G) dx \theta_R \\
& + \left[\int_0^{L_v} \rho(x)(x - x_G) Y_1(x) \xi_1 \ddot{\xi}_1 dx + I_n \frac{dY_1(0)}{dx} \ddot{\xi}_1 \right] \\
& + \int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)(x - x_G) Y_1(x) \dot{\xi}_1 dx \\
& = qS \int_0^{L_v} C_{N\alpha x} \left(\theta_R + \frac{dY_1(x)}{dx} \xi_1 \right) (x - x_G) dx - T Y_1(0) \xi_1 \\
& - T \left(\delta + \frac{dY_1(0)}{dx} \xi_1 \right) x_G
\end{aligned} \tag{3.44}$$

- 弾性振動

$$\begin{aligned}
& \left[\int_0^{L_v} \rho(x)(x - x_G) Y_1(x) dx + I_n \frac{dY_1(0)}{dx} \right] \ddot{\theta}_R \\
& + \left[\int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)(x - x_G) Y_1(x) dx + 2 \int_0^{L_v} \rho(x)(\dot{x} - \dot{x}_G) Y_1(x) dx \right] \dot{\theta}_R \\
& + \int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)(\dot{x} - \dot{x}_G) Y_1(x) dx \theta_R \\
& + \left[M_v(t) \ddot{\xi}_1 + I_n \left(\frac{dY_1(0)}{dx} \right)^2 \ddot{\xi}_1 \right] + 2\zeta_1 M_v(t) \omega_1(t) \dot{\xi}_1 \\
& + \int_0^{L_v} \dot{\rho}(x) Y_1^2(x) \dot{\xi}_1 dx + M_v(t) \omega_1^2(t) \xi_1 \\
& = qS \int_0^{L_v} C_{N\alpha x} \left(\theta_R + \frac{dY_1(x)}{dx} \xi_1 \right) Y_1(x) dx \\
& + T \left(\delta + \frac{dY_1(0)}{dx} \xi_1 \right) Y_1(0)
\end{aligned} \tag{3.45}$$

3.4 状態空間

前節で求めた線形運動方程式 (3.44), (3.45) を状態空間表現にする. 状態量として, 剛体運動の姿勢角 θ_R および, 振動を表す一般化座標の ξ_k を用いる. また, 出力としてセンサで計測される姿勢角 θ_{IMU} , 剛体運動の姿勢角 θ_R , 振動を表す一般化座標の ξ を用いる.

運動方程式 (3.44), (3.45) を剛体運動の姿勢角 θ_R , 振動を表す一般化座標の ξ , ノズルの偏向角 δ についてそれぞれ項をまとめると式 (3.46), (3.47) のようになる.

- 剛体運動

$$\begin{aligned}
 & \left[\int_0^{L_v} \rho(x)(x - x_G)^2 dx + I_n \right] \ddot{\theta}_R \\
 & + \left[\int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)(x - x_G)^2 dx + 2 \int_0^{L_v} \rho(x)(x - x_G)(\dot{x} - \dot{x}_G) dx \right] \dot{\theta}_R \\
 & + \left[\int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)(x - x_G)(\dot{x} - \dot{x}_G) dx - qS \int_0^{L_v} C_{N\alpha x}(x - x_G) dx \right] \theta_R \\
 & + \left[\int_0^{L_v} \rho(x)(x - x_G)Y_1(x) dx + I_n \frac{dY_1(0)}{dx} \right] \ddot{\xi}_1 \\
 & + \int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)(x - x_G)Y_1(x)\dot{\xi}_1 dx \\
 & + \left[-qS \int_0^{L_v} C_{N\alpha x} \frac{dY_1(x)}{dx} (x - x_G) dx + TY_1(0) + T \frac{dY_1(0)}{dx} x_G \right] \xi_1 \\
 & = -Tx_G\delta
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

- 弾性振動

$$\begin{aligned}
& \left[\int_0^{L_v} \rho(x)(x - x_G)Y_1(x)dx + I_n \frac{dY_1(0)}{dx} \right] \ddot{\theta}_R \\
& + \left[\int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)(x - x_G)Y_1(x)dx + 2 \int_0^{L_v} \rho(x)(\dot{x} - \dot{x}_G)Y_1(x)dx \right] \dot{\theta}_R \\
& + \left[\int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)(\dot{x} - \dot{x}_G)Y_1(x)dx - qS \int_0^{L_v} C_{N\alpha x} Y_1(x)dx \right] \theta_R \\
& + \left[M_v(t) + I_n \left(\frac{dY_1(0)}{dx} \right)^2 \right] \ddot{\xi}_1 \\
& + \left[2\zeta_1 M_v(t)\omega_1(t) + \int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)Y_1^2(x)dx \right] \dot{\xi}_1 \\
& + \left(M_v(t)\omega_1^2(t) - qS \int_0^{L_v} C_{N\alpha x} \frac{dY_1(x)}{dx} Y_1(x)dx - T \frac{dY_1(0)}{dx} Y_1(0) \right) \xi_1 \\
& = TY_1(0)\delta
\end{aligned} \tag{3.47}$$

状態空間表現する際の表記簡略化のため，式 (3.46) ， (3.47) をそれぞれ式 (3.48) ， (3.49) のように表現する．

- 剛体運動

$$A_\theta \ddot{\theta}_R + B_\theta \dot{\theta}_R + C_\theta \theta_R + D_\theta \ddot{\xi}_1 + E_\theta \dot{\xi}_1 + F_\theta \xi_1 = H_\theta \delta \tag{3.48}$$

- 弾性振動

$$A_\xi \ddot{\theta}_R + B_\xi \dot{\theta}_R + C_\xi \theta_R + D_\xi \ddot{\xi}_1 + E_\xi \dot{\xi}_1 + F_\xi \xi_1 = H_\xi \delta \tag{3.49}$$

第 3 章 制御対象

ただし、各係数は以下の通りである.

$$A_\theta = \int_0^{L_v} \rho(x)(x - x_G)^2 dx + I_n \quad (3.50a)$$

$$B_\theta = \int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)(x - x_G)^2 dx + 2 \int_0^{L_v} \rho(x)(x - x_G)(\dot{x} - \dot{x}_G) dx \quad (3.50b)$$

$$C_\theta = \int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)(x - x_G)(\dot{x} - \dot{x}_G) dx - qS \int_0^{L_v} C_{N\alpha x}(x - x_G) dx \quad (3.50c)$$

$$D_\theta = \int_0^{L_v} \rho(x)(x - x_G)Y_1(x) dx + I_n \frac{dY_1(0)}{dx} \quad (3.50d)$$

$$E_\theta = \int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)(x - x_G)Y_1(x) \quad (3.50e)$$

$$F_\theta = -qS \int_0^{L_v} C_{N\alpha x} \frac{dY_1(x)}{dx} (x - x_G) dx + TY_1(0) + T \frac{dY_1(0)}{dx} x_G \quad (3.50f)$$

$$H_\theta = -Tx_G \quad (3.50g)$$

$$A_\xi = \int_0^{L_v} \rho(x)(x - x_G)Y_1(x) dx + I_n \frac{dY_1(0)}{dx} \quad (3.51a)$$

$$B_\xi = \int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)(x - x_G)Y_1(x) dx + 2 \int_0^{L_v} \rho(x)(\dot{x} - \dot{x}_G)Y_1(x) dx \quad (3.51b)$$

$$C_\xi = \int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)(\dot{x} - \dot{x}_G)Y_1(x) dx - qS \int_0^{L_v} C_{N\alpha x} Y_1(x) dx \quad (3.51c)$$

$$D_\xi = M_v(t) + I_n \left(\frac{dY_1(0)}{dx} \right)^2 \quad (3.51d)$$

$$E_\xi = 2\zeta_1 M_v(t)\omega_1(t) + \int_0^{L_v} \dot{\rho}(x)Y_1^2(x) dx \quad (3.51e)$$

$$F_\xi = M_v(t)\omega_1^2(t) - qS \int_0^{L_v} C_{N\alpha x} \frac{dY_1(x)}{dx} Y_1(x) dx - T \frac{dY_1(0)}{dx} Y_1(0) \quad (3.51f)$$

$$H_\xi = TY_1(0) \quad (3.51g)$$

式 (3.46), (3.47) は式 (3.48), (3.49) を利用することで式 (3.52) のような状態空間として示すことができる. なお, 表記簡略化のため ξ の添え字 1 は省略する.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_R \\ \ddot{\theta}_R \\ \dot{\xi} \\ \ddot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A11 & A12 & A13 & A14 \\ A21 & A22 & A23 & A24 \\ A31 & A32 & A33 & A34 \\ A41 & A42 & A43 & A44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_R \\ \dot{\theta}_R \\ \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B1 \\ B2 \\ B3 \\ B4 \end{bmatrix} \delta \quad (3.52a)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_{IMU} \\ \dot{\theta}_{IMU} \\ \theta_R \\ \dot{\theta}_R \\ \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C11 & C12 & C13 & C14 \\ C21 & C22 & C23 & C24 \\ C31 & C32 & C33 & C34 \\ C41 & C42 & C43 & C44 \\ C51 & C52 & C53 & C54 \\ C61 & C62 & C63 & C64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_R \\ \dot{\theta}_R \\ \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D1 \\ D2 \\ D3 \\ D4 \\ D5 \\ D6 \end{bmatrix} \delta \quad (3.52b)$$

係数行列は以下のとおり.

$$\begin{aligned} A11 &= 0 & A12 &= 1 & A13 &= 0 & A14 &= 0 \\ A21 &= \frac{-(C_\theta D_\xi - C_\xi D_\theta)}{-(D_\theta A_\xi - D_\xi A_\theta)} & A22 &= \frac{-(B_\theta D_\xi - B_\xi D_\theta)}{-(D_\theta A_\xi - D_\xi A_\theta)} \\ A23 &= \frac{-(F_\theta D_\xi - F_\xi D_\theta)}{-(D_\theta A_\xi - D_\xi A_\theta)} & A24 &= \frac{-(E_\theta D_\xi - E_\xi D_\theta)}{-(D_\theta A_\xi - D_\xi A_\theta)} \\ A31 &= 0 & A32 &= 0 & A33 &= 0 & A34 &= 1 \\ A41 &= \frac{-(C_\theta A_\xi - C_\xi A_\theta)}{D_\theta A_\xi - D_\xi A_\theta} & A42 &= \frac{-(B_\theta A_\xi - B_\xi A_\theta)}{D_\theta A_\xi - D_\xi A_\theta} \\ A43 &= \frac{-(F_\theta A_\xi - F_\xi A_\theta)}{D_\theta A_\xi - D_\xi A_\theta} & A44 &= \frac{-(E_\theta A_\xi - E_\xi A_\theta)}{D_\theta A_\xi - D_\xi A_\theta} \end{aligned} \quad (3.53a)$$

$$B1 = 0 \quad B2 = \frac{G_\theta D_\xi - G_\xi D_\theta}{-(D_\theta A_\xi - D_\xi A_\theta)} \quad B3 = 0 \quad B4 = \frac{G_\theta A_\xi - G_\xi A_\theta}{D_\theta A_\xi - D_\xi A_\theta} \quad (3.53b)$$

3.5 周波数特性

入力をアクチュエータの角度, 出力を機体のセンサが計測する姿勢角としたときの周波数応答のうち, ノミナルシステムの時間変化を Fig. 3.4 に, 最大動圧点 (X+35 秒) において機体剛性に 0.5 倍と 2 倍の不確実性が存在するシステムを Fig. 3.5 に示す.

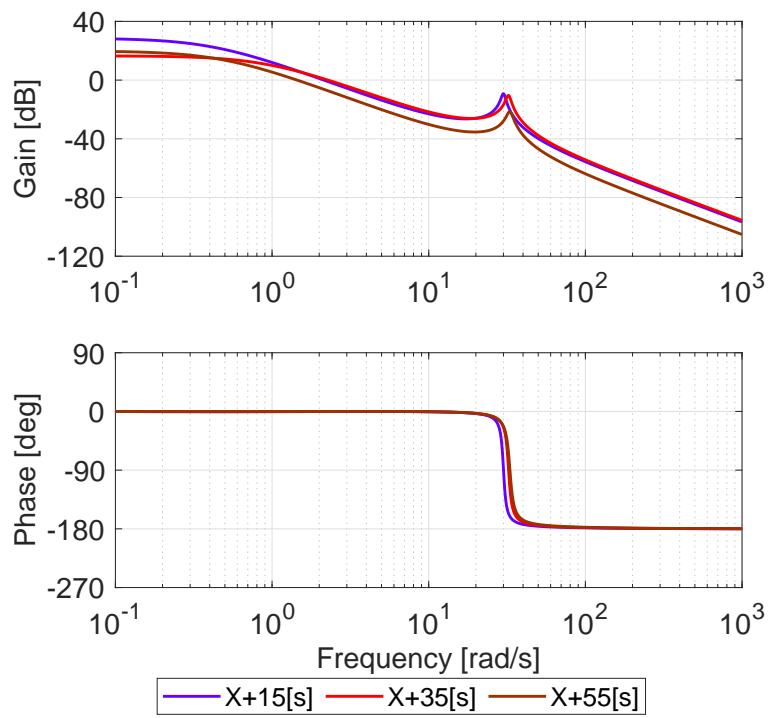


Fig. 3.4: Frequency responses of the rocket at X+15 [s], X+35 [s], X+55 [s].

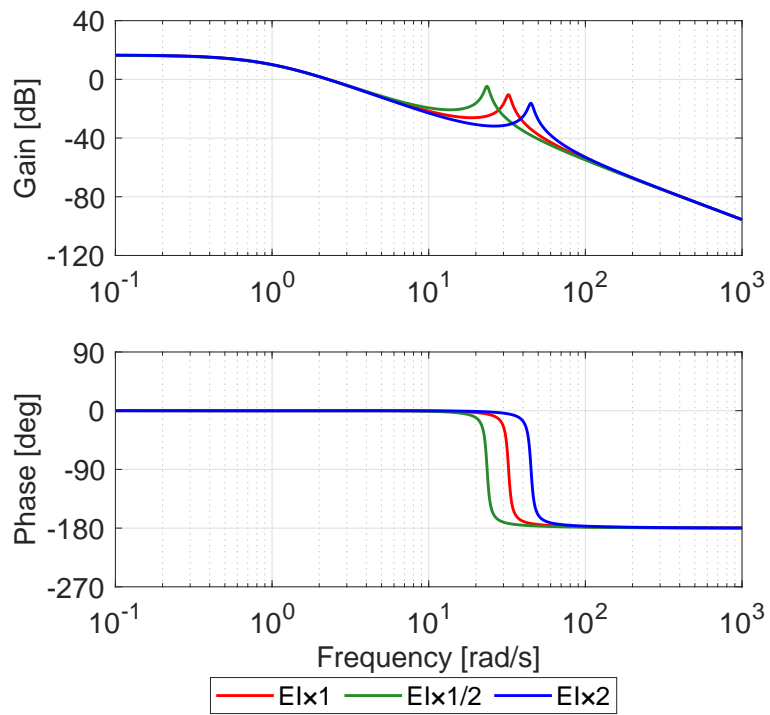


Fig. 3.5: Frequency responses of the rocket with uncertainty at X+15 [s].

ゲイン線図は入力であるアクチュエータ角度に対する出力の機体姿勢角の比率を表し、0 dB であれば1倍であることを意味する。一方、位相線図は入力であるアクチュエータ角度と出力の機体姿勢角の位相差を表す。位相差 180 度はアクチュエータを正の方向に振ったとき、機体の姿勢角は負の方向に振れることを意味する。Fig. 3.4, Fig. 3.5 ともに、定常ゲイン (10^{-1} rad/s におけるゲイン) が正の値であり、これはアクチュエータの偏向角の変化量に対して機体姿勢角の変化量の方が大きいことを意味する。

ここで、剛体運動のみを考慮したときの周波数応答と、弾性振動を考慮しているときの周波数応答を比較した図を Fig. 3.6 に示す。Fig. 3.6 より、弾性振動によって位相が 180 度変化し、ゲインにピークが発生することがわかる。このピークが立っている周波数は機体の 1 次振動モードの固有周波数に該当する。この 1 次振動モードによって位相が逆位相となることで機体の不安定度はより悪化する。

Fig. 3.4 は時間とともにシステムのダイナミクスが変化することを示す。特にゲイン線図の低周波部分の定常ゲインに違いが見られる。これはアクチュエータを同じ角度動かし、た際の姿勢角の変化量が時間ごとに異なることを意味している。

一方、Fig. 3.5 は不確実性によってシステムのダイナミクスにばらつきが存在することを示す。剛性が小さいものほど弾性振動の固有周波数は小さく、より剛体運動の固有周波数に近いことがわかる。また、機体剛性の不確実性によって機体の 1 次振動モードの固有周波数には約 20 rad/s のばらつきが存在することがわかる。機体を安定化させるためには、制御器はこれら時変性や不確実性によるシステムの周波数特性の変化やばらつきに対応する必要がある。

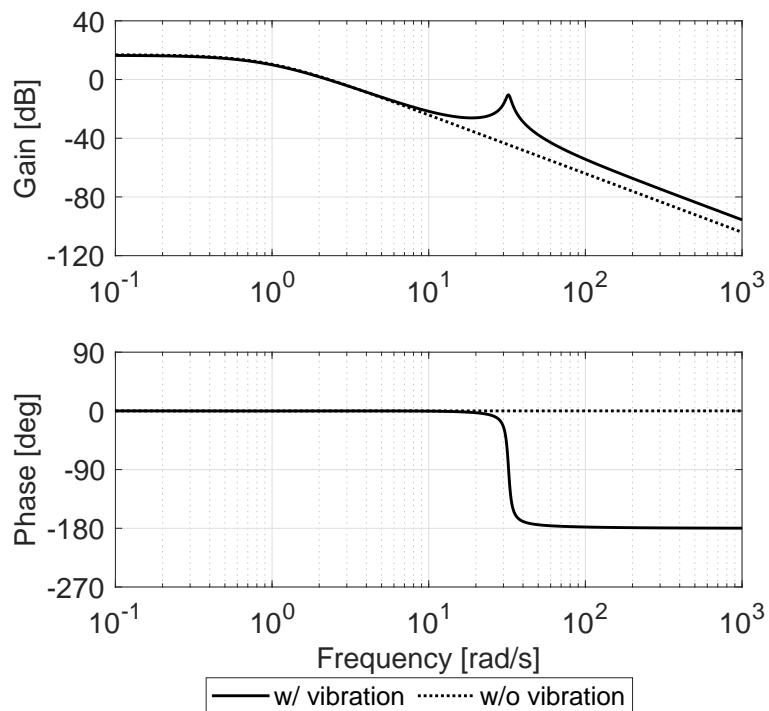


Fig. 3.6: Effect of vibration on the rocket dynamics at X+15 [s].

3.6 本章のまとめ

本章では制御対象の各パラメータや運動方程式，および周波数応答を示した．設計した制御対象は時間と共に周波数応答が変化することが示された．特に定常ゲインが時刻と共に大きく変化する．また，振動の固有周波数では位相が逆転することが示された．さらに機体剛性に不確実性を与えた場合，振動の固有周波数が約 20 rad/s の幅でばらつくことが示された．制御対象を安定させ，コマンドに追従させるには，制御器はこの時間変化や不確実性によるばらつきに対応可能である必要がある．

第4章

問題設定

4.1 制御入出力

一般に、大型宇宙構造物 (Large Space Structures : LSS) のような機械システムを線形化した運動方程式は、行列微分方程式で表現することができる。この微分方程式の係数行列は質量、減衰、剛性などの物理量を表わす行列であり、これらは特別な構造と定性的性質をもっている。この性質を利用することによって、センサとアクチュエータの位置が一致するコロケーション条件を満たすとき、物理パラメータに依存しないロバスト安定性を保証できることが知られている [55][56]。しかし誘導制御を行うような宇宙飛翔体は多段式の場合が多い。この場合アクチュエータの近くにセンサを設置すると、各ステージ用にセンサを複数用意する必要があるためコストがかかる。したがって実際の宇宙飛翔体では、機体の先端部にレート積分ジャイロを、比較的安価なレートジャイロをアクチュエータ付近に設置する手法が取られている [57]。

本研究でも同様の条件を想定し、フェアリング部に取り付けられたレート積分センサから得られる姿勢角および姿勢角レートを出力とする。また、制御入力はノズル舵角である。

4.2 制御目標

Fig. 4.1 は M-V ロケット 5 号機のノミナル姿勢目標角の時間履歴である。本研究は主にロケット第 1 段の燃焼開始から燃焼終了時点进行を想定する。これは 1/2 段分離までと考えると、M-V ロケット 5 号機のタイムシーケンスでは打上げから 75 秒の時点に相当する。0-75 秒の部分に着目するとピッチ方向の目標姿勢角の変化はなめらかであることが

第 4 章 問題設定

わかる.

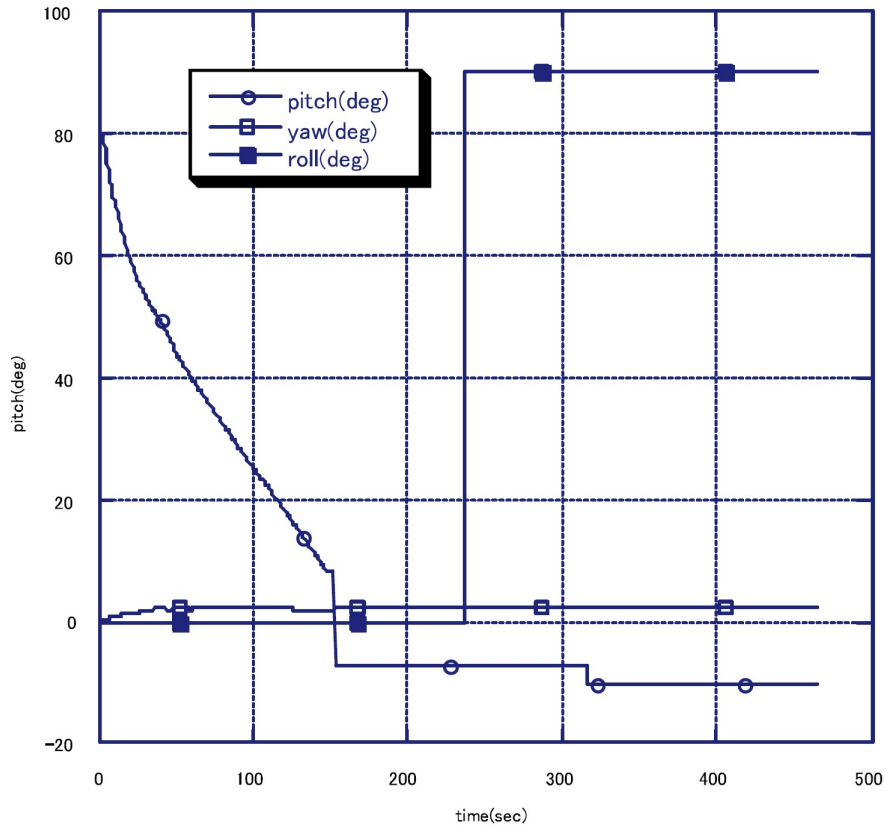


Fig. 4.1: Target attitude angles of M-V 5th rocket [58].

本研究でも同様な目標姿勢角であることを想定する。ただし本研究では、目標姿勢角と実際の姿勢角との偏差に着目し、偏差が0になるために必要な目標姿勢角が制御器に与えられるとする。突風外乱が入った場面をステップ状のコマンドとして模擬する。突風外乱が姿勢角に与える影響は±2度程度であると想定し、Fig. 4.2 に示すような、随時立ち上がるステップコマンドを目標姿勢角として与える。

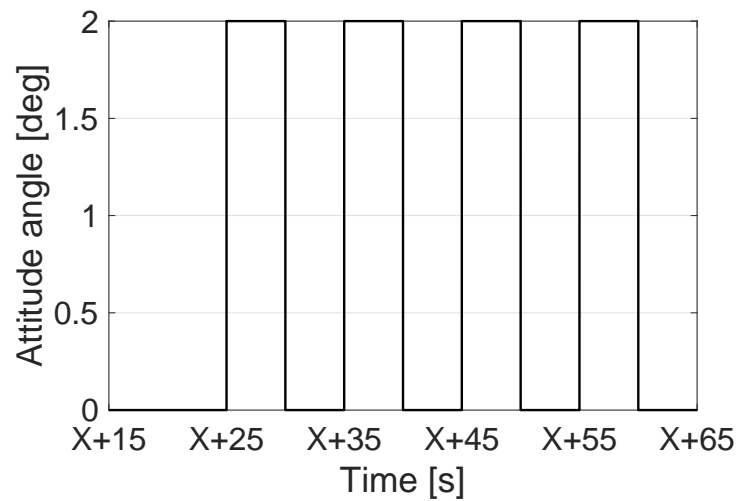


Fig. 4.2: Target attitude angle example.

4.3 シミュレーション条件

- 制約
ノズルの偏向角 $\pm 5^\circ$ とする.
- 時間
 - サンプル時間
0.001 秒とする.
 - 時間変化するモデルの変化スパン
0.01 秒とする.

4.4 本章のまとめ

本章では、制御対象から得られる出力および制御目標について述べた。本研究ではフェーリング部分に取り付けられたレート積分センサからの出力である姿勢角レートと姿勢角を制御出力とし、操作量はアクチュエータの舵角とする。制御目標としては突風外乱の影響を受けた姿勢角を元のノミナルに戻すことを想定し、ステップ状の姿勢角コマンドを制御システム全体への入力とする。

第5章

従来制御器 (H_∞ 制御器)

現行の制御器設計の流れを Fig. 5.1 に示す. 現在はゲインスケジューリング法を適用しているため, 飛行時間をブロッキングしたあと, 各ブロックで H_∞ 制御器を設計し, 設計した H_∞ 制御器をオンボードで計算できるレベルまで低次元化している. 本研究では低次元化された結果の制御器を模擬した制御器の設計を行う.

5.1 制御系の構成

設計した制御器の構成を Fig. 5.2 に示す. 姿勢角の目標値がコマンドとして, センサで計測した姿勢角と姿勢角レートが出力として制御器にフィードバックされる. 姿勢角誤差と姿勢角レートにゲインをかけた上でフィルタを通すことで, アクチュエータの偏向角を出力する. 姿勢角誤差および姿勢角レートに対するゲインは運動の応答性と安定性に影響する. しかし, 3.5 節で示したように, 制御対象の剛体運動と弾性振動には位相差が存在するため, ゲインをかけるだけでは十分に安定化することができない. この位相差を補償するため, フィルタを導入する.

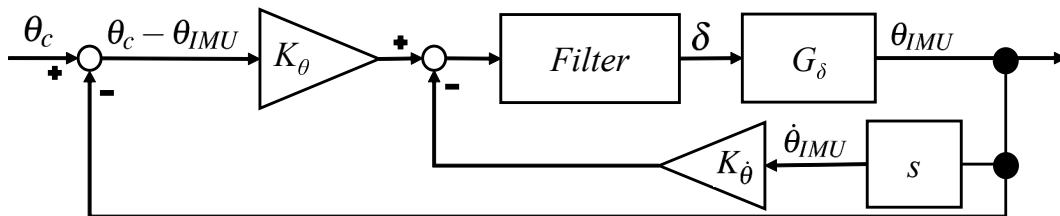
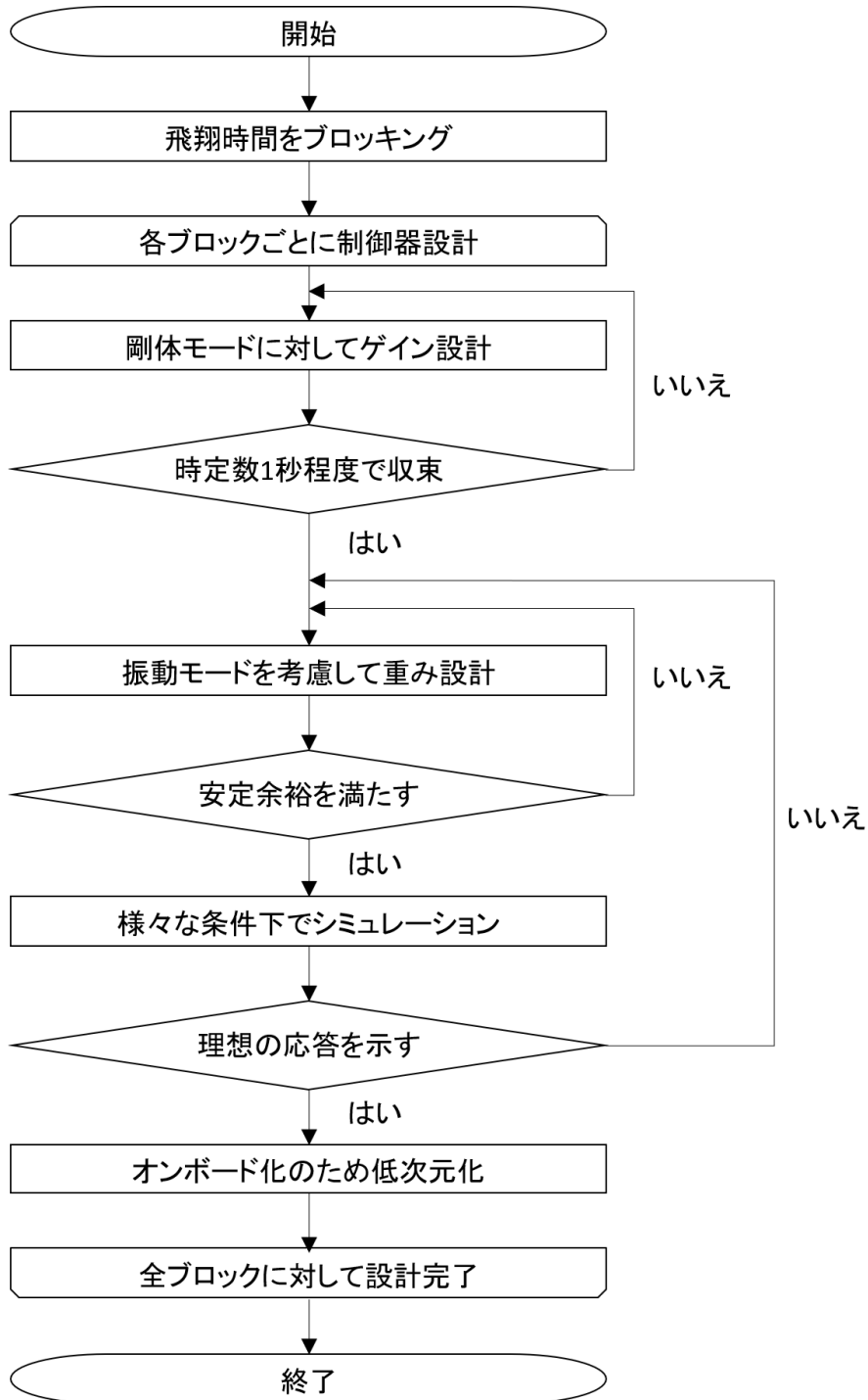


Fig. 5.2: Block diagram of conventional controller.

Fig. 5.1: Design flow of H_∞ control system.

5.2 パラメータチューニング

制御器の設計は 2 段階に分け、ゲインを設計してからフィルタの設計を行う。なお、システム全体の安定性に対する要求の目安を M-V ロケットでの設計手法に倣い、ゲイン余裕 6 dB 以上、位相余裕 20 deg 以上として制御系を設計する。

5.2.1 ゲイン設計

機体の剛体運動による回転を安定化させることを目的としてゲインを設計する。弾性振動を考慮せず、剛体運動のみを考慮したダイナミクスを有する制御対象に対して設計を行う。

各ゲインをチューニングする際の目安にするため、運動方程式から安定条件を計算する。運動方程式において操作量 $\delta = K_\theta(\theta_c - \theta_{IMU}) - K_{\dot{\theta}}\dot{\theta}_{IMU}$ を代入し、剛性項が正となることを安定の条件とすることでゲインの範囲を計算する。

姿勢角レートゲイン $K_{\dot{\theta}}$ を -0.8 に固定したときの、姿勢角ゲイン K_θ の大きさによる応答性の違いを Fig. 5.3 に示す。ゲインの絶対値が大きい程オーバーシュートが大きくなる一方で応答時間は早くなることがわかる。

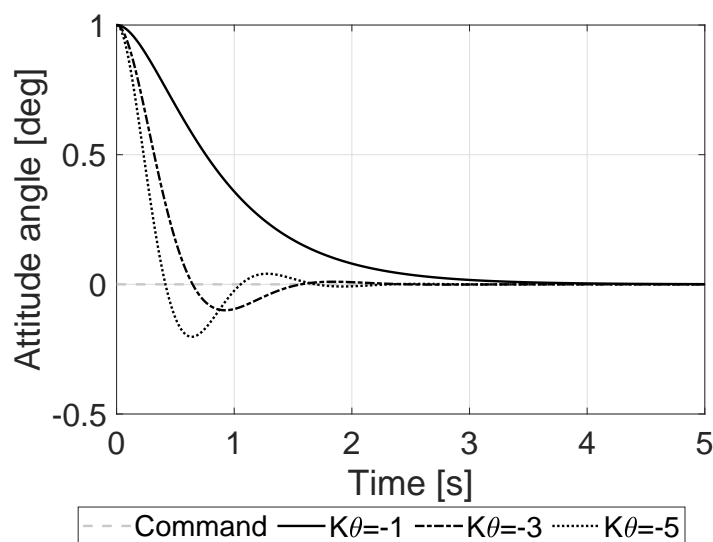


Fig. 5.3: Comparison of K_θ .

一方、姿勢角レートのゲインは応答の即応性に影響を与える項である。姿勢角ゲイン K_θ を -5 に固定したときに、姿勢角レートと姿勢角のゲイン比率 $K_{\dot{\theta}}/K_\theta$ を変化させたときの応答性の違いを Fig. 5.4 に示す。ゲイン比率が小さい程振動的になり、応答の安定化に時間を要することがわかる。

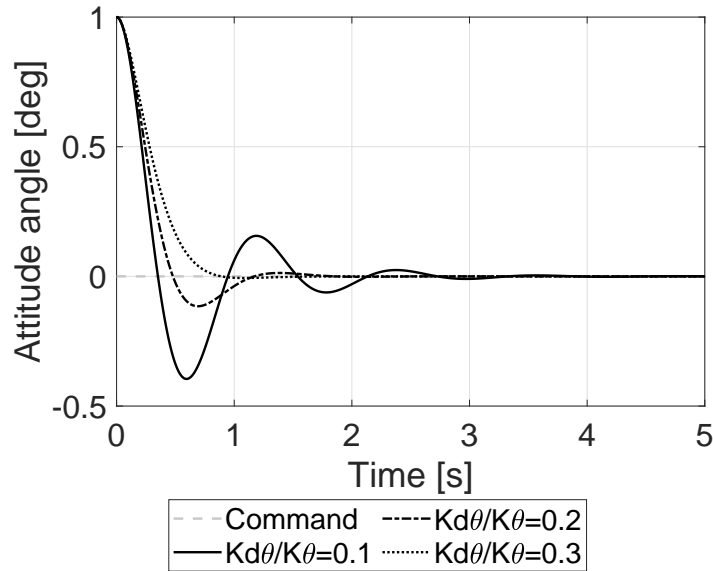


Fig. 5.4: Comparison of $K_{\dot{\theta}}$.

Fig. 5.5 にあるような突風外乱を与えた時の応答性を確認しつつ姿勢角レートゲインを調整した。姿勢角ゲイン K_θ が -5 のときに、姿勢角レートゲイン $K_{\dot{\theta}}$ を変化させた時の時間応答を Fig. 5.6 に示す。Fig. 5.6 において 3 秒以降の応答を比較すると、より姿勢角レートゲイン $K_{\dot{\theta}}$ の絶対値が大きい程、応答の減衰性が高く、外乱が取り除かれた時の追従性も良いことがわかる。時定数 1 秒程度である場合に、突風などの外乱に対しても十分な応答性であると考え、設計を行った結果、姿勢角ゲイン K_θ : -3.5 、姿勢角レートゲイン $K_{\dot{\theta}}$: -0.8 を使用して以降フィルタ設計を行う。

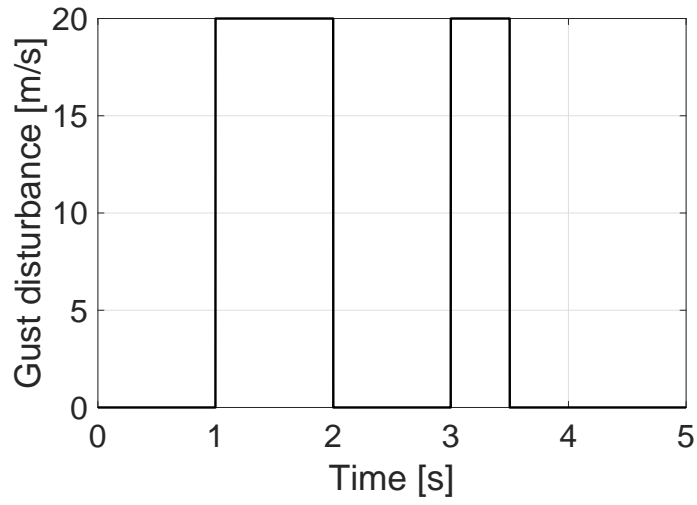
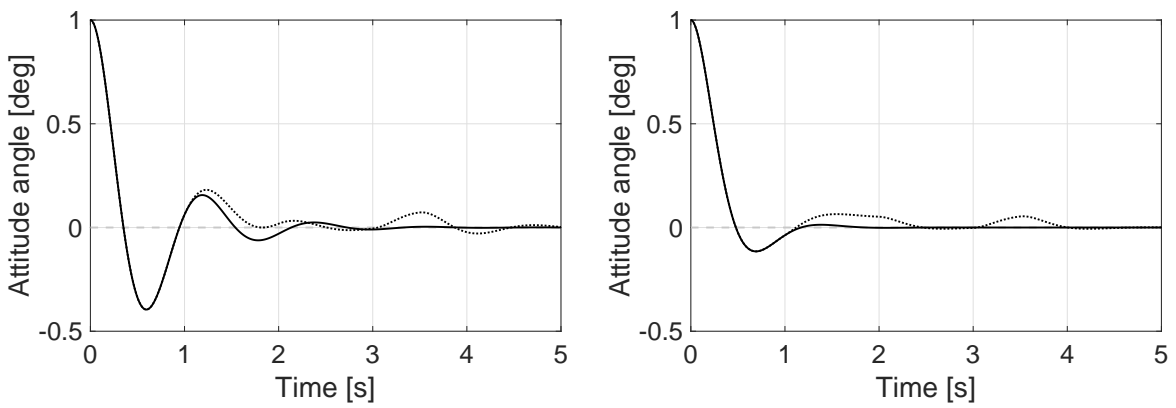


Fig. 5.5: Gust disturbance.



(a) $K_{\dot{\theta}} = -0.5$.

(b) $K_{\dot{\theta}} = -1$.

— w/o disturbance w/ disturbance

Fig. 5.6: Comparison of responsiveness to gust disturbance.

5.2.2 フィルタ設計

運動方程式において剛体運動と弾性振動の減衰項に着目する。推力着力点のたわみが正であるとすると、センサ位置におけるたわみも正である。この時、剛体運動を安定させるために必要な姿勢角レートゲインは正である一方、弾性振動を安定させるために必要な姿勢角レートゲインは負である。このような剛体運動と弾性振動の位相差を補償するためにフィルタを設計する。

Fig. 5.7 に M-V ロケットに使用された補償器の一例を示す。高周波帯域でゲインを大きく低下させることで安定余裕を確保している。本研究ではこの補償器を参考にフィルタの設計を行う。

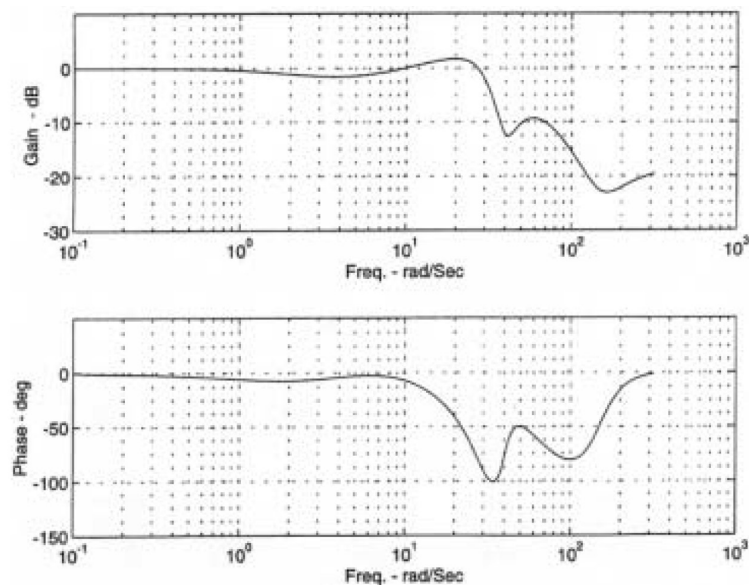


Fig. 5.7: Compensation filter for M-V rocket [17].

フィルタには位相を安定化する位相安定化フィルタとゲインを安定化するゲイン安定化フィルタが存在する。位相安定化フィルタの場合は、Fig. 5.8 に示すような位相差を補償したい周波数において位相が遅れるようなローパスフィルタ (Low Pass Filter: LPF) が考えられる。

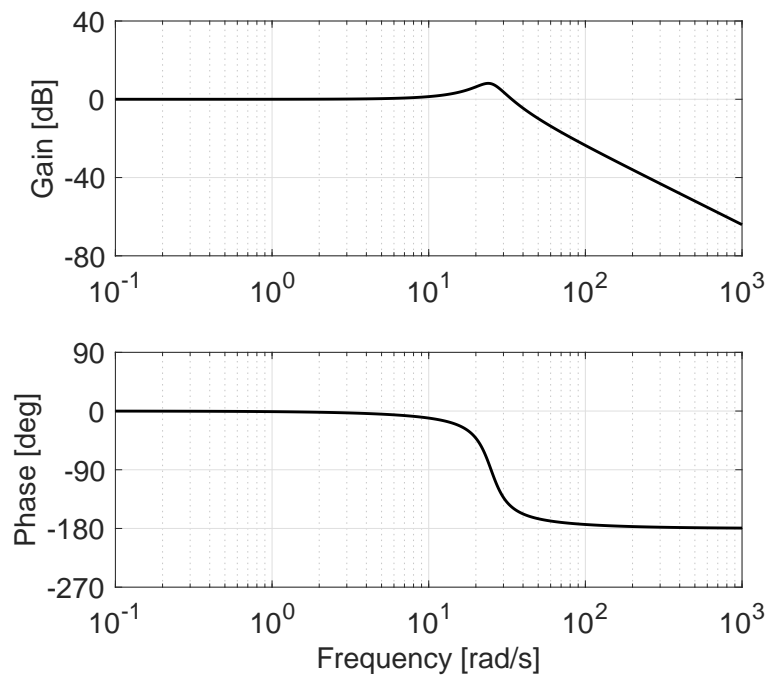


Fig. 5.8: Example of low pass filter.

ここで、ダイナミクスに不確定性が存在しなければ位相差のある周波数が1つに決まるが、ダイナミクスに不確定性が存在する場合、位相差が発生しうる周波数が広域に渡る。この場合、位相差が発生しうる周波数のうち最も低い周波数で位相が十分に低下するようなLPFを設計しようとする、低周波数領域から位相が遅れ始める。低周波数領域から位相が遅れることによりゲイン交差周波数が低下し、剛体運動の即応性の低下に繋がる。そこで、位相を直接補償するフィルタではなく、ゲインを補償するフィルタを設計する。

弾性振動の周波数領域において広範囲に渡ってゲインを下げるため、ノッチフィルタを複数個設計する。ノッチフィルタとは Fig. 5.9 のように特定の周波数領域のゲインを大きく下げることができるフィルタである。

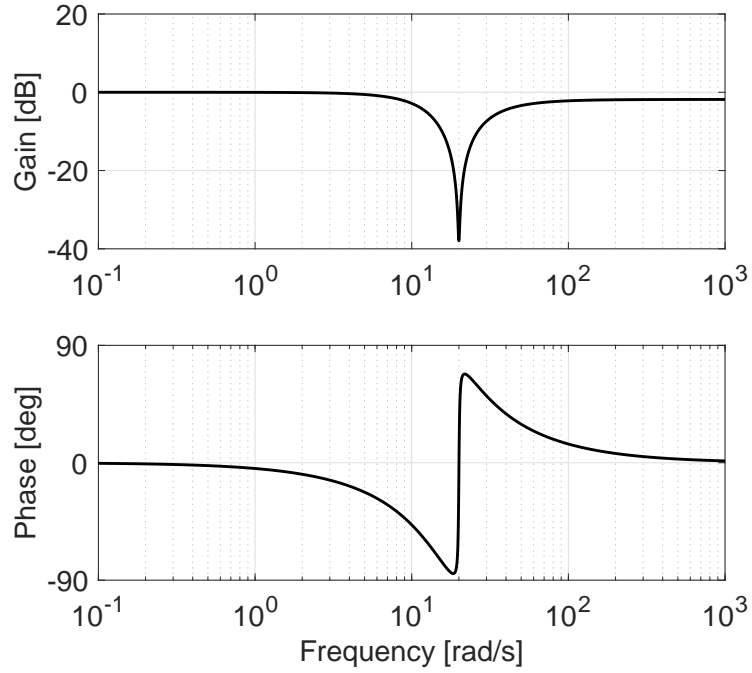


Fig. 5.9: Example of 2nd order notch filter.

本研究では2次のノッチフィルタを2つ使用し、式(5.1)に示すような4次のフィルタを設計する。ダイナミクスに不確実性が存在するため、ピークが発生しうる周波数帯域においてゲインが低下するようにチューニングを行った。最終的なチューニング結果をTable 5.1に示し、このときのノミナルシステムおよび不確実性を有するシステムとして剛性が0.5倍と2倍のシステムに対して制御器を適用したシミュレーション結果をFig. 5.10 – Fig. 5.12に示す。

$$G_{Notch}(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_1\omega_1s + \omega_1^2}{s^2 + 2\zeta_2\omega_2s + \omega_2^2} \cdot \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \cdot \frac{s^2 + 2\zeta_3\omega_3s + \omega_3^2}{s^2 + 2\zeta_4\omega_4s + \omega_4^2} \cdot \frac{\omega_4^2}{\omega_3^2} \quad (5.1)$$

Table 5.1: Parameters of notch filter.

ω_1	ζ_1	ω_2	ζ_2	ω_3	ζ_3	ω_4	ζ_4
22	0.3	18	0.8	38	0.15	26	0.37

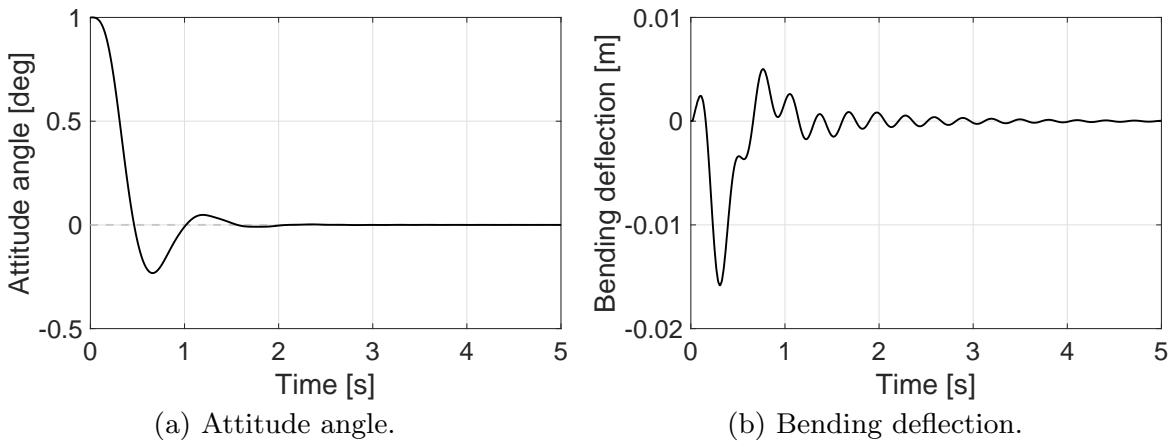


Fig. 5.10: Time responses of notch filter to the system with bending stiffness $\times 0.5$.

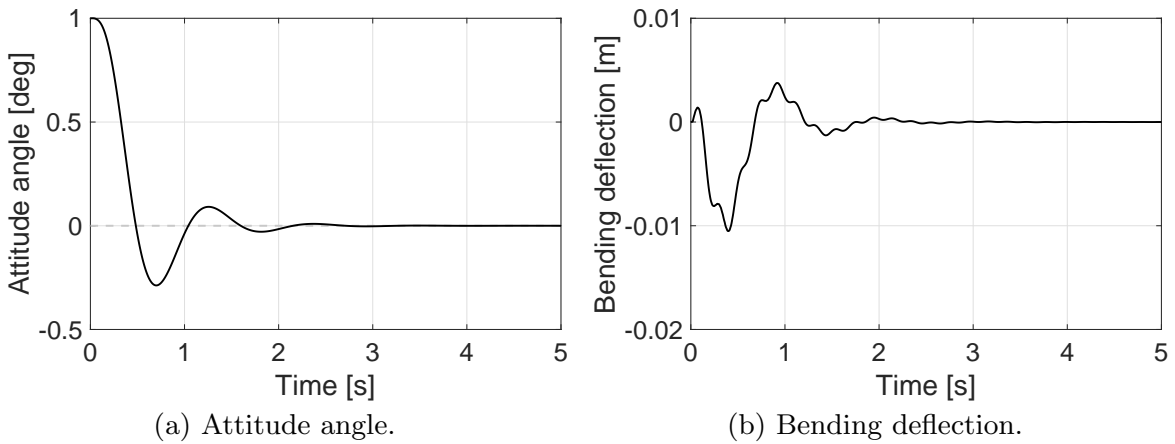


Fig. 5.11: Time responses of notch filter to the nominal system.

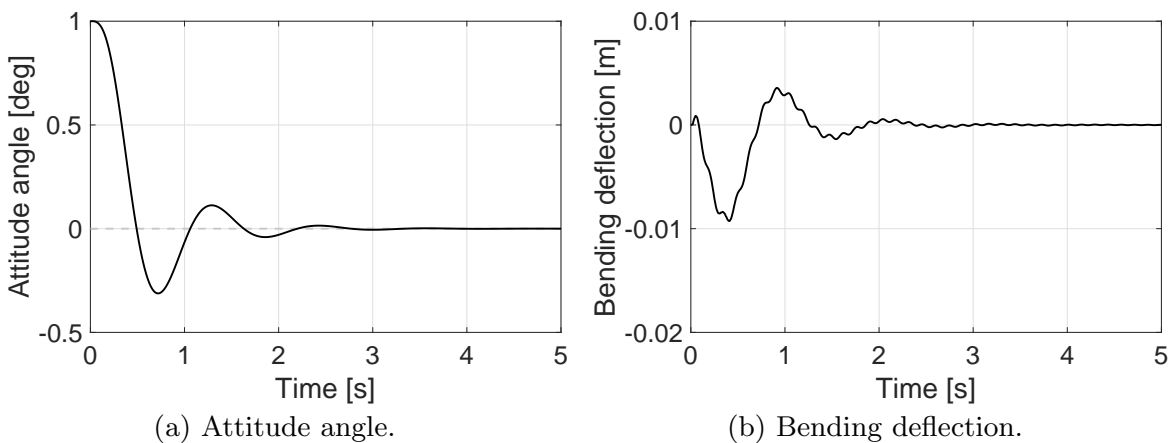


Fig. 5.12: Time responses of notch filter to the system with bending stiffness $\times 2$.

Fig. 5.10 – Fig. 5.12 の (b) に示す弾性振動を比較してみると、いずれも振動を安定化できており、ロバスト性を有することがわかる。一方で、(a) の姿勢角をみると、応答の安定化に少し時間がかかり、時定数が 1 秒を超えていることがわかる。これは 2 次のノッチフィルタを 2 つ使用したことにより、低域の周波数にて大きく位相が低下したことでゲイン交差周波数が低下したことが原因と考えられる。これを改善するため、式 (5.2) に示すような位相進み遅れ補償器を追加することで低周波数領域の位相を進める。安定余裕が設計要件 (ゲイン余裕 6 dB, 位相余裕 20 deg) を満たすこと、剛性に不確定性が存在する場合にも時定数が 1 秒程度になるようにチューニングを行うことで最終的にパラメータは Table 5.2 の通りとした。この設計した位相進み遅れ補償器の有無によるフィルタの周波数応答の違いを Fig. 5.13 に示す。位相進み遅れ補償器を追加することで低周波領域における位相遅れを改善できていることがわかる。

Table 5.2: Parameters of lead-lag compensator.

ω_{ld}	ϕ_{ld}	ω_{lg}	ϕ_{lg}
4	10	6	-5

$$G_{Lead-lag}(s) = \frac{Ts + 1}{\Gamma Ts + 1} \quad (5.2a)$$

ただし、 T と Γ は次で表される。

$$T = \frac{1}{\omega\sqrt{\Gamma}} \quad (5.2b)$$

$$\Gamma = \frac{1 - \sin\phi}{1 + \sin\phi} \quad (5.2c)$$

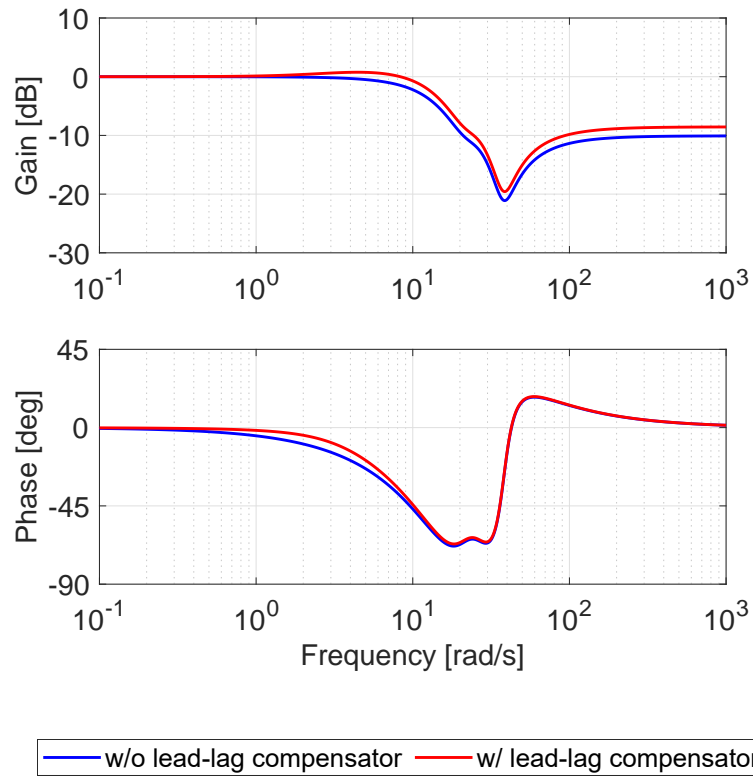
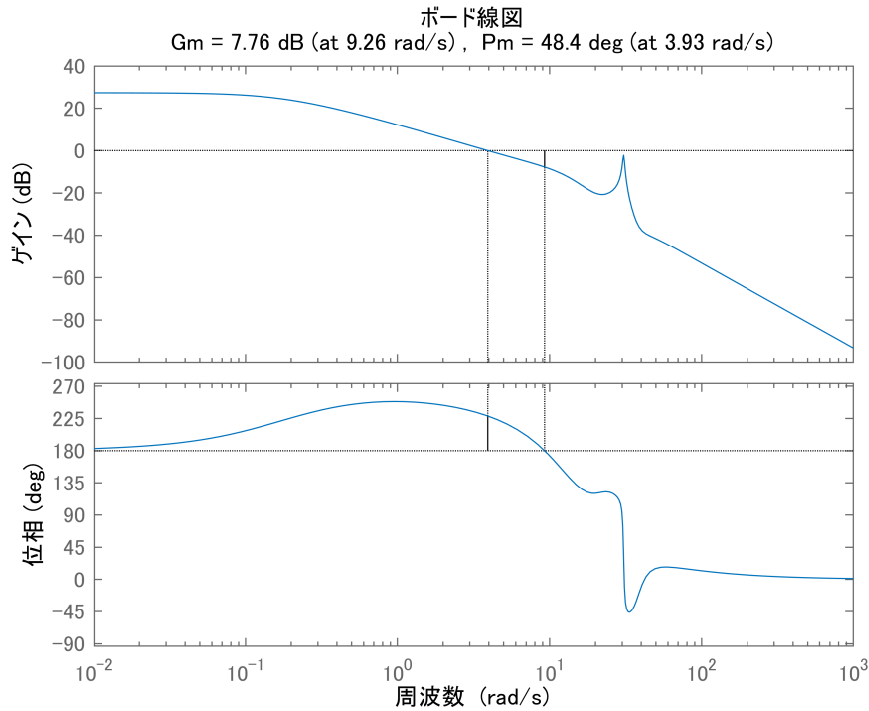


Fig. 5.13: Comparison of frequency responses of compensators.

また、ノミナルシステムに対してこのフィルタを適用したときの一巡伝達関数に Fig. 5.14 示す。設計要求としていたゲイン余裕 6 dB、位相余裕 20 deg を満たせていることがわかる。

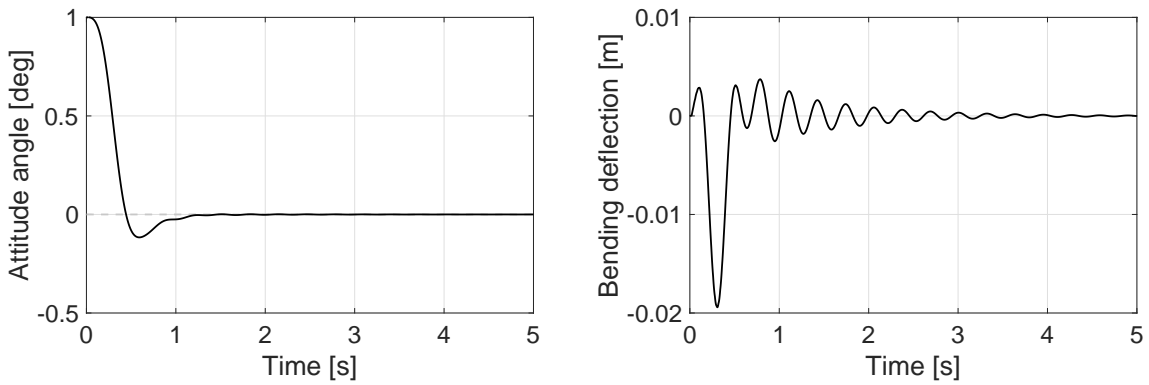
Fig. 5.14: Open-loop transfer function from θ_c to θ_{IMU} .

5.3 シミュレーション結果

設計した制御器を制御対象に適用したシミュレーションの結果を示す。

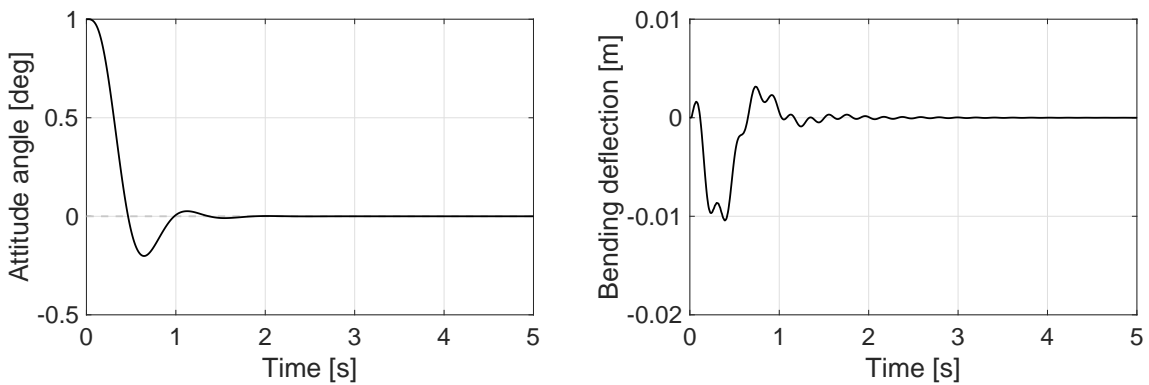
5.3.1 不確定性のあるシステムへの適用

ノッチフィルタに位相進み遅れ補償器を追加したフィルタを用いてシミュレーションを行った結果を Fig. 5.15 – 5.17 に示す。Fig. 5.10 – 5.12 と比較すると、姿勢角の安定化に必要な時間が短くなり、おおよそ 1 秒で姿勢を安定化させつつ、剛性の不確定性に対してもロバスト性を確保できていることがわかる。



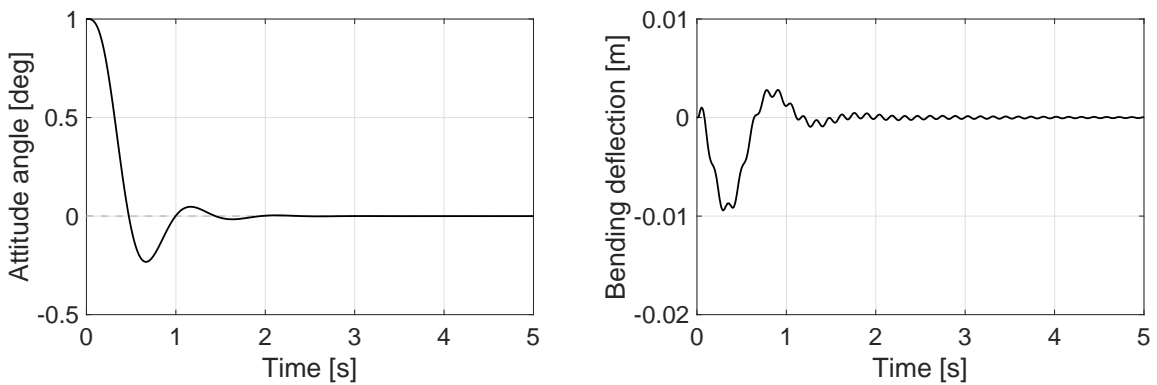
(a) Attitude angle. (b) Bending deflection.

Fig. 5.15: Time responses of notch filter and lead-lag compensator to the system with bending stiffness $\times 0.5$.



(a) Attitude angle. (b) Bending deflection.

Fig. 5.16: Time responses of notch filter and lead-lag compensator to the nominal system.



(a) Attitude angle. (b) Bending deflection.

Fig. 5.17: Time responses of notch filter and lead-lag compensator to the system with bending stiffness $\times 2$.

5.3.2 時変システムへの適用

剛性がノミナルで時間変化する制御対象に対してシミュレーションを行った結果を Fig. 5.18 に示す. (a) が機体姿勢角を, (b) が機体の弾性振動を, (c) が操作量を示す. (a) より, 制御器設計点 ($X+35$ 秒) 付近ではコマンドに追従できているが, 制御対象のダイナミクスが時間と共に変化するに従いコマンド姿勢角に追従出来なくなっている. したがって, 設計した制御器は時間変化するシステムに対しては対応できていないと言える. また (c) より, H_∞ 制御では操作量制約を陽に考慮することはできないため, 本研究でノズル舵角の制約として設けている $\pm 5^\circ$ を超えている部分がある. 実際には制約を超える舵角をアクチュエータに入力することはできないため, 与えるべき舵角を与えることが出来ず姿勢角はよりコマンドに追従しづらくなる.

5.4 本章のまとめ

従来制御器の課題点を明確化し, 提案する制御器と応答を比較することを目的として, H_∞ 制御器を低次元化した制御器を模擬して制御器を設計した. 低次元化された制御器は直流ゲインと, 剛体運動と弾性振動の位相差を補償するためのフィルタをチューニングすることで模擬した. 直流ゲインは弾性振動の影響を取り除いた剛体運動のみを考慮し, 時定数が約 1 秒になるようにチューニングを行った. フィルタは弾性振動の不確定性に対応するため 4 次のノッチフィルタを導入することでゲインを補償し, それに伴って悪化した剛体運動の応答性を改善するため位相進み遅れ補償器を追加した. 不確定性を有する制御対象に対して適用したシミュレーションを行った結果, ロバスト安定性を有していることを確認した. 一方で, 時間変化する制御対象に対しては対応出来ず, 姿勢角を安定化することはできないことを再現した.

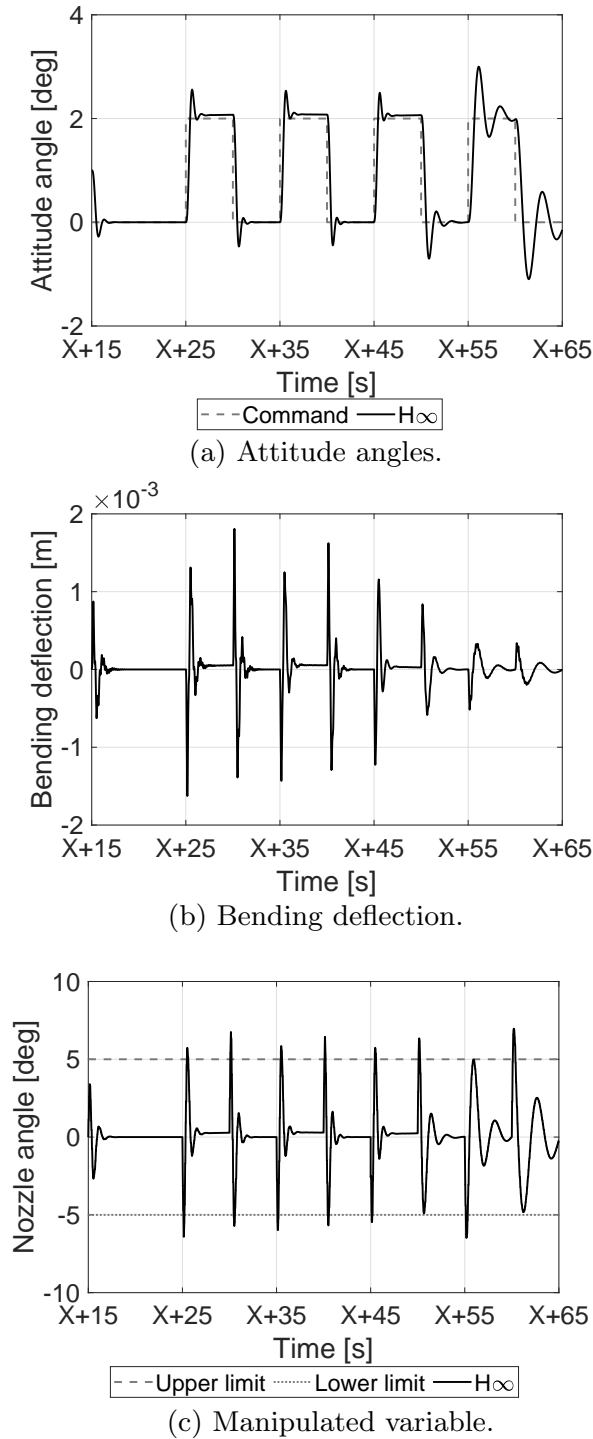


Fig. 5.18: Time responses of notch filter and lead-lag compensator to the TV nominal system.

第6章

適応モデル予測制御

制御対象の時変性に対応するため、モデル予測制御を利用した適応制御 (Adaptive Model Predictive Control: AMPC) を行うことを検討する。本章では、設計した AMPC 制御器について構成、制御器のチューニング結果、そしてシミュレーションの結果を示す。

6.1 制御系の構成

本研究で設計する AMPC 制御系の構成を Fig. 6.1 に示す。AMPC 制御器では予測モデルが一定ではなく各時刻の最適化計算ごとに異なることが特徴である。予測モデルが時間とともに変化することにより毎ステップの計算精度が向上するため、予測モデルが時不変の場合に比べて良い性能を見込むことができる。予測モデルを時間変化させる方法として、逐次モデルを推定する方法が一般的であるが、本研究では計算コスト低減を目的としてオフラインで予め計算したノミナルシステムの時系列データを予測モデルに与え、各時刻の最適化計算ごとに変化させる。未来のシステム変化が分かっている場合には、最適化計算中に予測モデルが変化する時変 MPC を適用することも可能である。しかし、本段階は MPC が時変システムに適用可能であるかを探るための設計であるため、時変 MPC 精度は要求しないとして AMPC 制御器を設計した。

制御器を構成するもう 1 つの要素である最適化計算器であるが、通常の MPC と同様に評価関数を最小化する問題を二次計画法で解く。本制御器を時間変化するノミナルシステムに対して適用し、時変システムに対して AMPC 制御器が有用であるか否かを評価する。

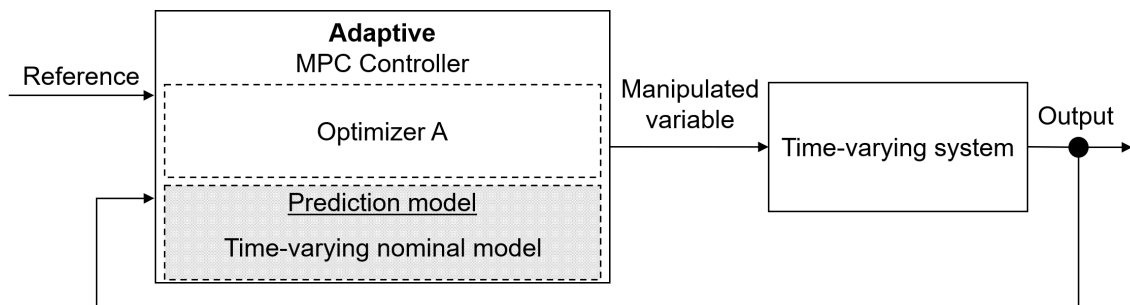


Fig. 6.1: Block diagram of AMPC system.

6.2 状態量の推定

MPC 制御器での計算には状態量を使用する。本研究では制御対象から姿勢角レートと姿勢角のみをフィードバックするため、その他状態量はカルマンフィルタを用いて推定する。AMPC 制御器では MATLAB の既定のルーチン [59] を利用することで状態量を推定した。

6.3 評価関数および制約条件

最適化計算は式 (6.1) に示す評価関数と操作量制約の下で行われる。式 (6.1) に示すとおり、出力偏差と操作量の変化率にペナルティを与える。最適化計算は通常の MPC と同様に、有限ホライズン制御で行い二次計画法を用いる。操作量の大きさの制約は $\pm 5^\circ$ と設定する。

$$\min_{U(l)} \sum_{i=1}^{H_p} \|\mathbf{r}(l+i|l) - \hat{\mathbf{y}}(l+i|l)\|_{W_y}^2 + \sum_{i=0}^{H_u-1} \|\hat{\mathbf{u}}(l+i|l) - \hat{\mathbf{u}}(l+i-1|l)\|_{W_{\Delta u}}^2 \quad (6.1a)$$

subject to

$$\mathbf{u}_{min} < \hat{\mathbf{u}} < \mathbf{u}_{max} \quad (6.1b)$$

$\hat{\mathbf{u}}(l+i|l)$ は時刻 l にて仮定される操作量の未来値を、 $\hat{\mathbf{y}}(l+i|l)$ は仮定の操作量が印加された場合に予測される出力ベクトルを表し、最適化変数は操作量の変化率とする。設計パラメータは通常の MPC と同様に、サンプリング時間、予測ホライズン、制御ホライズン、重み関数である。

6.4 パラメータチューニング

MATLAB において MPC のチューニングはコマンドラインか Fig. 6.2 に示すような MPC designer と呼ばれる UI を用いて設計できる。MPC designer の詳細な使用方法は [60] にて確認することができる。パラメータ調整の際には時間応答を見ながらチューニングができるため、直観的なチューニングが可能である。

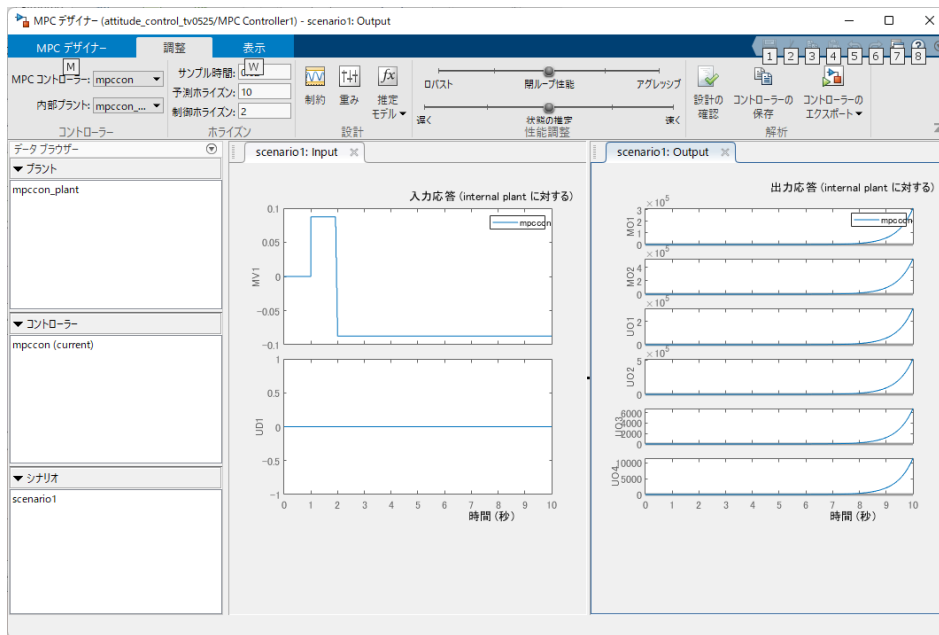


Fig. 6.2: MPC designer.

本研究で行ったチューニングプロセスを Fig. 6.3 に示す。Fig. 6.3 に示す流れに沿い、各パラメータのチューニングを行った。

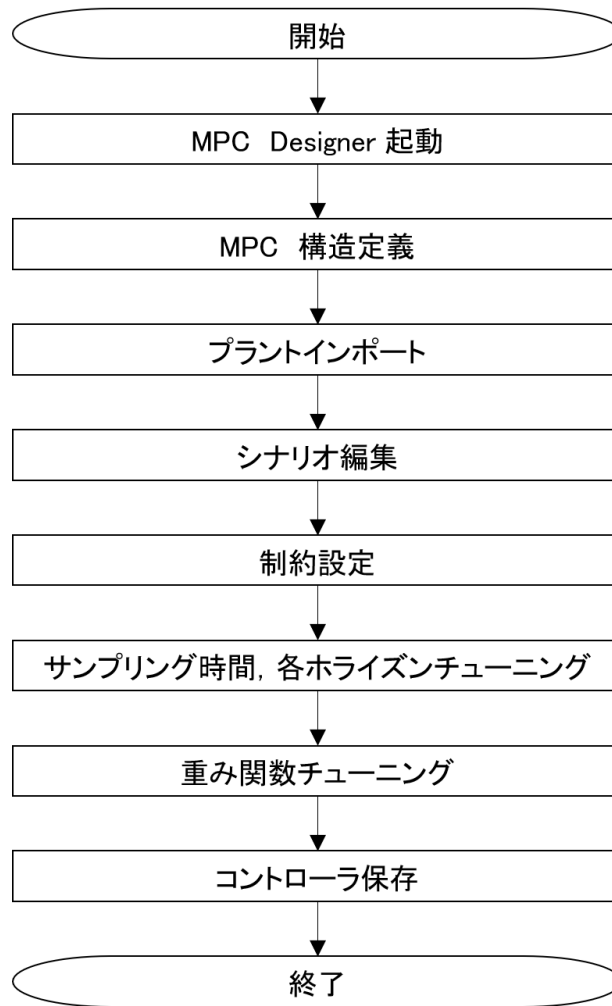


Fig. 6.3: Design flow of AMPC controller with MPC designer.

設計するパラメータとそのパラメータの設計指針は以下の通りである。

- サンプル時間

制御器が最適化計算を行う頻度を表す。サンプル時間と予測ホライズンの積が理想とする閉ループの応答時間に近くなる値から試行錯誤的に設計される。ある程度サンプル時間を小さくしなければ、どれほど予測ホライズンを小さくしても十分な応答性を得られない。一方で、サンプル時間が小さすぎると最適化計算を行う頻度が多くなり、計算コストが増加する。

- 予測ホライズン
同一のサンプリング時間において予測ホライズンが大きい程、応答速度が小さくなる一方で、小さくしすぎると応答を安定化できない。時間シミュレーションの波形にて応答速度を確認しながら調整を行う。
- 制御ホライズン
サンプリング時間および予測ホライズンをおおよそ調整してから制御ホライズンを調整する。制御ホライズンは最適化する変数の数を表しており、直接計算負荷へ影響を与える。計算コスト低減のために可能な限り小さくなるよう適宜予測ホライズンと並行して調整する。
- 重み関数
サンプリング時間、制御ホライズン、予測ホライズンを先に調整してから重み関数を調整する。各パラメータが与える影響をそれぞれ以下に示す。
 - 姿勢角 θ_{IMU} , θ_R
応答性に最も影響を与えるパラメータである。 θ_{IMU} と θ_R を比較すると、 θ_R に重みを与える方が、オーバーシュートを出しつつ応答性が良くなる。
 - 姿勢角レート $\dot{\theta}_{IMU}$, $\dot{\theta}_R$
重みを付けると、姿勢角変化が遅くなるため、応答性が悪化する。
 - たわみ, たわみレート ξ , $\dot{\xi}$
いずれに重みを与えてもたわみに対して同様の影響が出る。大きな重みを与えると弾性振動において剛体運動が顕在化する。弾性振動に剛体運動が顕在化している時は、剛体運動と弾性振動の固有周波数が近くなり、応答性が劣化しているという状況である。一方で、小さすぎる場合には振動がなかなか減衰しない。以上を考慮し、約 1 秒で弾性振動が減衰するようにチューニングを行う。
 - ノズル舵角レート $\Delta\delta$
重みを与えると操作量が変化しづらくなり、弾性振動をなかなか安定化することができない。

以上の検討事項を考慮しながら設計したパラメータ一覧を Table 6.1 に示す。

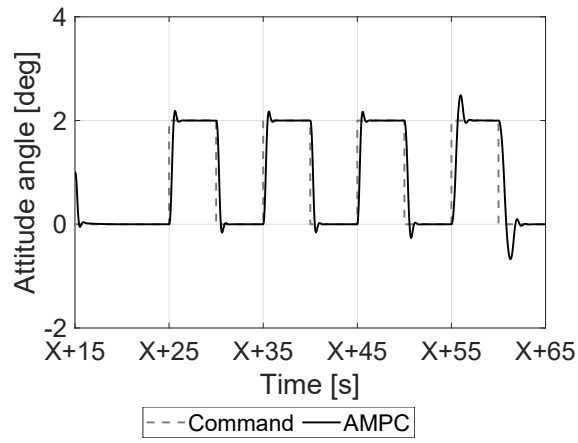
Table 6.1: Parameters of adaptive MPC controller.

Step size (Sampling time)		10 ms	
Control span		30 ms	
Prediction horizon		300 ms	(10 steps)
Control horizon		150 ms	(5 steps)
Weights for stage cost	W_y	θ_{IMU}	0
		$\dot{\theta}_{IMU}$	0
		θ	1
		$\dot{\theta}$	0
		ξ	0
	$\dot{\xi}$	0.02	
	$W_{\Delta u}$	$\Delta\delta$	0.1

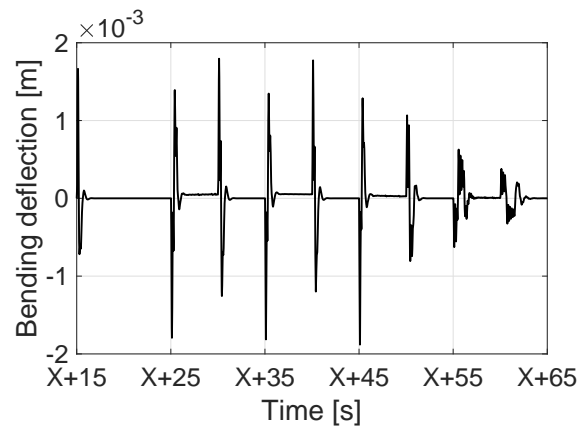
6.5 時変システムに適用したシミュレーション結果

設計した制御器を時変システムに適用したシミュレーション結果を Fig. 6.4 に示す. (a) が機体姿勢角を, (b) が機体の弾性振動を, (c) が操作量を示す. (a) より, 制御器設計点である $X + 35$ 秒以外でもコマンドに姿勢角を追従させることができている. また, 機体の姿勢角をより不安定にする原因である弾性振動も安定化できていることが (b) から読み取れる. さらに, MPC は制約を陽に考慮しながら最適化計算を行うことができるため, 操作量が制約の範囲内で入力されていることが (c) よりわかる.

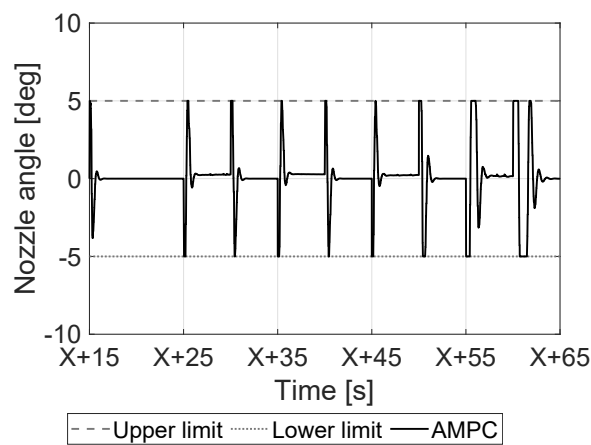
ここで, (a) に着目すると, $X+55$ 秒以降応答性が悪化しているように見える. Fig. 6.4 (a) における $X+30$ 秒から 5 秒間の応答と $X+60$ 秒から 5 秒間の応答を Fig. 6.5 に示す. (a) が制御器設計点 $X+35$ 秒付近の応答, (b) が $X+60$ 秒からの時間応答である. (a),(b) を比較すると, $X+30$ 秒からは約 1 秒で応答がコマンドに追従できているのに対して, $X+60$ 秒からは約 2 秒で応答がコマンドに追従するようになっており, 応答性が若干悪化している. これは $X+45$ 秒以降推力が大規模に減少していることが原因として考えられる.



(a) Attitude angles.

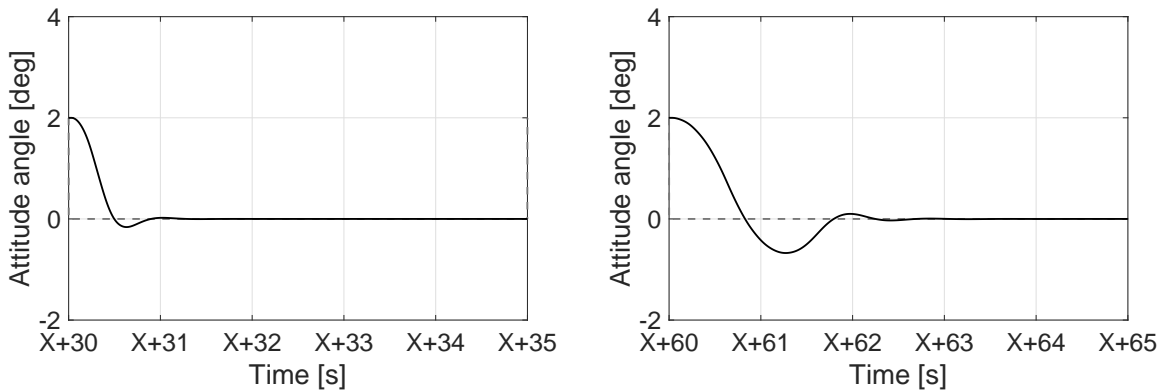


(b) Bending deflection.



(c) Manipulated variable.

Fig. 6.4: Time responses of AMPC controller to the TV nominal system.



(a) X+30 秒-X+35 秒.

(b) X+60 秒-X+65 秒.

Fig. 6.5: Comparison of responsiveness.

Fig. 6.6 に本研究で使用した推力の時系列データを示す. 本推力履歴は M-V ロケットを参考としており, X+45 秒以降の推力履歴が特徴的である. M-V ロケットは 1/2 段分離と第 2 段ロケットの点火を同時に行うファイアインザホールという段間分離方式を採用している. ファイアインザホール (Fire In The Hole: FITH) を採用することで重力損失を低減し打上げ能力を向上できる一方で, 分離時に発生する擾乱が大きく, 制御アルゴリズムの性能次第では応答遅れの大きい可動ノズルによる姿勢の収束に時間を要し軌道投入精度の劣化を招く [61]. ファイアインザホールでは推力曲線が段階的に変化するのではなく, なだらかに減少しながら尾部が長く伸びることが特徴である. 本研究で使用したデータでは X + 45 秒以降がファイアインザホール部分に相当しており, 従来制御器では姿勢を安定化させることさえ難しい部分である. このようなダイナミクスを有する領域において, 他の領域での応答速度よりもわずかながら遅れが見られるものの十分にコマンド追従できている AMPC 制御器は有用である.

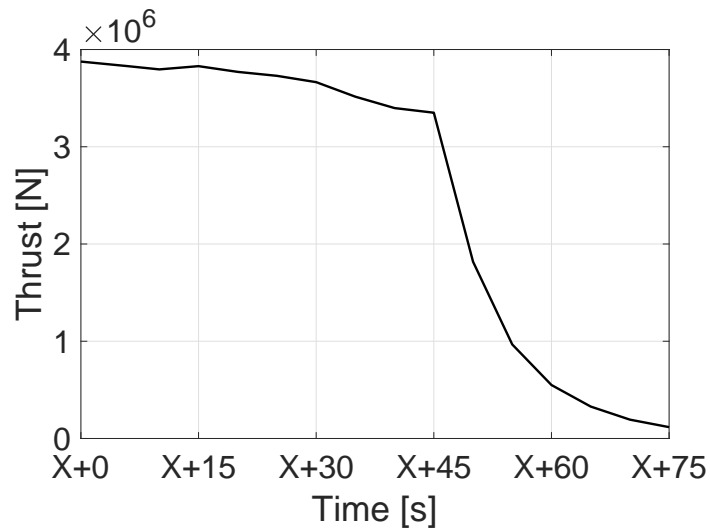


Fig. 6.6: Time-series data of thrust.

ここで、予測モデルが変化しない通常モデル予測制御と、適応モデル予測制御を適用した時の応答を比較する。時間変化する制御対象に対して両制御器を適用した時の応答結果を Fig. 6.7 に示す。予測モデルが変化しない通常 MPC では、 H_∞ 制御を時間変化するシステムに適用したときの応答 Fig. 5.18(a) と同様に X + 55 秒以降に応答性が劣化している。一方で、AMPC は X + 55 秒以降も良い応答性を示す。この結果より、予測モデルを時間変化させることで時間変化により対応可能となると言える。

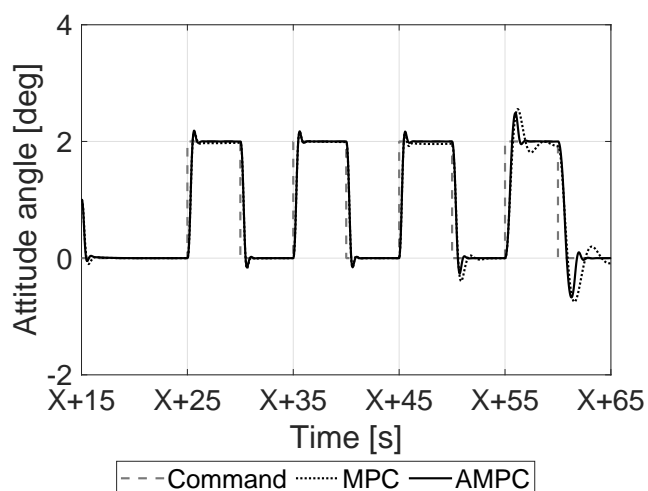


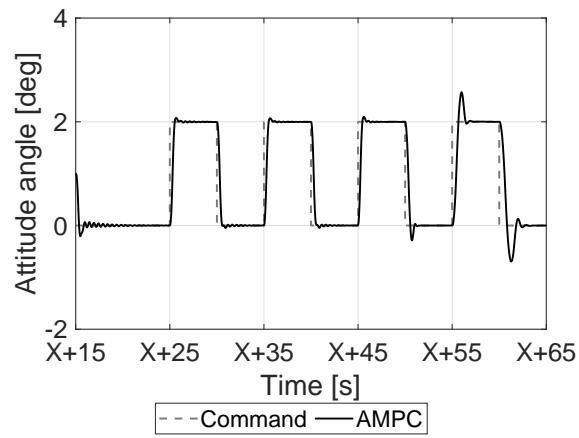
Fig. 6.7: Comparison of MPC and AMPC.

6.6 不確定性を有するシステムに適用したシミュレーション結果

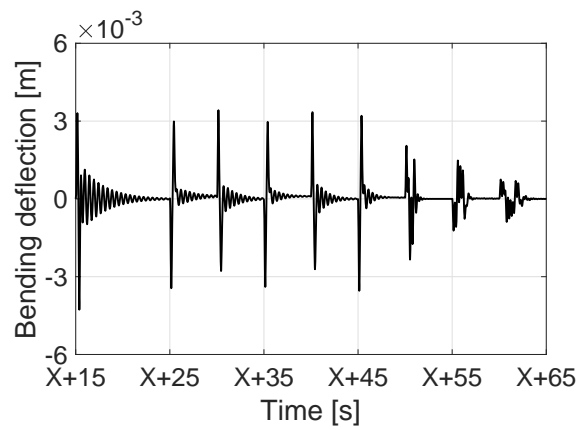
設計した制御器を機体剛性 0.5 倍のシステムに適用したシミュレーション結果を Fig. 6.8 に示す. (a) が機体姿勢角を, (b) が機体の弾性振動を, (c) が操作量を示す. Fig. 6.4 のノミナルシステムの応答と比較すると, 特に (b), (c) に顕著に振動が表れている. これより, 本制御器は不確定性に対するロバスト安定性は有していないと言える.

6.7 本章のまとめ

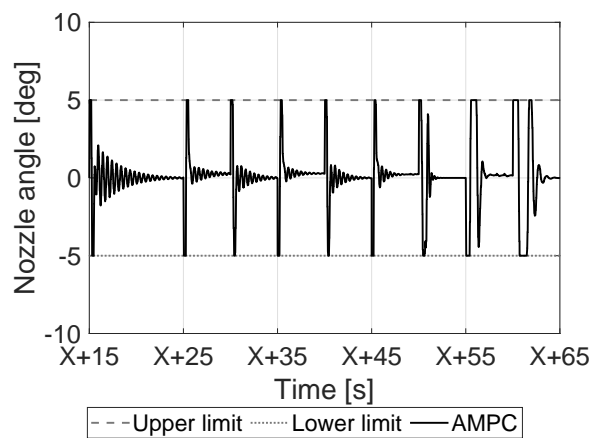
本章では時間ともにダイナミクスの変化する制御対象に対応するため, 適応モデル予測制御器 (AMPC 制御器) を設計した. 予測モデルを時系列データで与えておくことで, 各時刻の最適化計算ごとに予測モデルを変化させた. シミュレーションの結果, 適応モデル予測制御 (AMPC) によってダイナミクスの時変性に対応可能であることが分かった. 一方でダイナミクスの不確定性には対応出来ず, 時変性と不確定性の両方に対応するには不十分であるといえる.



(a) Attitude angles.



(b) Bending deflection.



(c) Manipulated variable.

Fig. 6.8: Time responses of AMPC controller to the TV system with bending stiffness $\times 0.5$.

第7章

ロバストモデル予測制御

制御対象の不確定性に対応するため、モデル予測制御を利用したロバスト制御 (Robust Model Predictive Control: RMPC) を行うことを検討する。本章では、設計した RMPC 制御器の構成、安定性保証理論や最適化計算のアルゴリズム、チューニング方法とその結果、そしてシミュレーションの結果を示す。

RMPC には様々な手法が存在するが、線形行列不等式に帰着させる手法を利用する。モデルの不確定性と外乱に対してアプローチできることや、 H_∞ 制御と組み合わせた物があることなどから、より手法を発展させやすいものであると考えたためである。

7.1 制御系の構成

本研究で設計する RMPC 制御系の構成を Fig. 7.1 に示す。RMPC 制御器では予測モデルに制御器設計点である最大動圧点 (X+35 秒) のノミナルシステムと不確定性を有するシステムを与える。最適化計算器ではロバストアルゴリズムを活用する。不確定性を考慮して制御器を設計することで、制御対象の不確定性に対してロバストな制御器にすることができる。

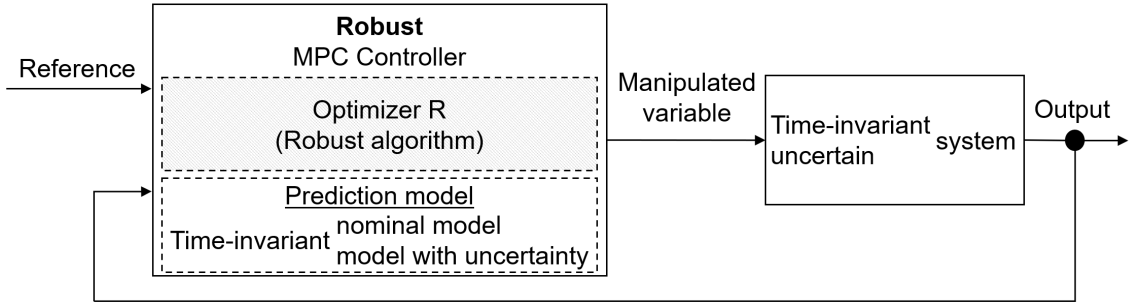


Fig. 7.1: Block diagram of RMPC system.

7.2 ロバスト安定性保証理論

本研究ではロバスト安定性をリアプノフ定理によって保証する．本研究では [62] で記されている安定性保証理論を使用する．本節ではその保証理論についてまとめる．

制御対象は式 (7.1) に示されるような凸ポリトープ Ω の中に存在すると仮定する．

$$[A, B] \in \Omega \quad (7.1)$$

ここで，凸ポリトープ $\Omega = [A, B]$ は式 (7.2) の通りである．式 (7.2) において h はポリトープの端点を表しており， $h = 1$ であれば不確定性のないシステムであることを表す．

$$[A, B] = \sum_{h=1}^{N_p} \lambda_h [A_h, B_h], \quad \sum_{h=1}^{N_p} \lambda_h = 1, \quad h = 1, 2, \dots, N_p \quad (7.2)$$

評価関数を式 (7.3) として定義する．制御対象に不確定性が存在する場合，評価関数の値は1つに決まらない．

$$V_\infty(l) = \sum_{i=0}^{\infty} \{ \|\hat{\mathbf{x}}(l+i|l)\|_{W_x}^2 + \|\hat{\mathbf{u}}(l+i|l)\|_{W_u}^2 \} \quad (7.3)$$

したがって最適化問題は，評価関数の上限値を最小化するミニマックス問題 (7.4) となる．

$$\min_{U(l)} \max_{[A, B] \in \Omega} V_\infty(l) \quad (7.4)$$

式 (7.4) は直接扱うには複雑であるため，式 (7.5) の条件を満たすような関数 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top P \mathbf{x}$ ($P > 0$) を導入することで問題を置き換える．

$$V(\hat{\mathbf{x}}(l+i+1|l)) - V(\hat{\mathbf{x}}(l+i|l)) \leq -\|\hat{\mathbf{x}}(l+i|l)\|_{W_x}^2 - \|\hat{\mathbf{u}}(l+i|l)\|_{W_u}^2 \quad (7.5)$$

式 (7.5) の両辺を $i = 0 \rightarrow \infty$ まで和を取ると、式 (7.6) となる。

$$-V(\hat{\mathbf{x}}(\infty|l)) + V(\mathbf{x}(l|l)) \geq V_\infty(l) \quad (7.6)$$

ここで、 $V_\infty(l) < \infty$ とすると状態量 $\hat{\mathbf{x}}(\infty|l) = 0$ となり、 $V(\hat{\mathbf{x}}(\infty|l)) = 0$ となる。したがって式 (7.6) の左辺は $V(\hat{\mathbf{x}}(l|l))$ が残る。これより、式 (7.7) の関係が得られる。

$$\max_{[A,B] \in \Omega} V_\infty(l) \leq V(\mathbf{x}(l|l)) \quad (7.7)$$

これは、関数 V が評価関数 V_∞ の上界になることを表しており、式 (7.4) の問題は式 (7.8) のように問題を簡単化することができる。

$$\min_{U(l)} V(\mathbf{x}(l|l)) \quad \text{subject to Eq.(7.5), } P > 0 \quad (7.8)$$

式 (7.8) の問題を解くことにより、時刻 l で P_l という解が得られたとする。式 (7.5) が成立するため、現時刻での状態 $\mathbf{x}(l|l)$ が $\|\mathbf{x}(l|l)\|_{P_l}^2 \leq \phi$ を満たすならば、予測された状態量 $\hat{\mathbf{x}}(l+i|l)$ は $\|\hat{\mathbf{x}}(l+i|l)\|_{P_l}^2 \leq \phi$ を満たす。したがって、不確定なモデルから予測された状態量の不変集合を式 (7.9) のように定義することができる。

$$\varepsilon_\phi = \{z : \|z\|_P^2 \leq \phi\}, \quad \phi = \|\mathbf{x}(l|l)\|_P^2 \quad (7.9)$$

一方、式 (7.10) が成立する範囲の外乱の大きさと仮定し、その外乱や制御対象の不確定性に対してロバストな制御を考える。なお、 s は最適化計算を行うサンプリング時間に対応するステップ数を表す。つまり、 $l+s$ は次に最適化計算を行う時刻を表す。

$$\max_{[A,B] \in \Omega} \mathbf{x}^\top(l+s|l+s) P_l \mathbf{x}(l+s|l+s) = \max_{[A,B] \in \Omega} \hat{\mathbf{x}}^\top(l+s|l) P_l \hat{\mathbf{x}}(l+s|l) \quad (7.10)$$

式 (7.9), (7.10) より式 (7.11) が成立する。

$$\max_{[A,B] \in \Omega} \mathbf{x}^\top(l+s|l+s) P_l \mathbf{x}(l+s|l+s) = \max_{[A,B] \in \Omega} \hat{\mathbf{x}}^\top(l+s|l) P_l \hat{\mathbf{x}}(l+s|l) \leq V(\mathbf{x}(l|l)) \quad (7.11)$$

ここで、時刻 l で得られた解 P_l は時刻 $l+s$ でも実行可能であるので (7.4 節で説明)、次式 (7.12) が得られる。

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{x}(l+s|l+s)) &= \mathbf{x}^\top(l+s|l+s)P_{l+s}\mathbf{x}(l+s|l+s) \\
&\leq \mathbf{x}^\top(l+s|l+s)P_l\mathbf{x}(l+s|l+s) \\
&\leq V(\mathbf{x}(l|l))
\end{aligned} \tag{7.12}$$

式 (7.12) より，関数 $V(\mathbf{x}(l|l))$ は不確定性のあるシステムに対してリアプノフ関数になり，閉ループはロバスト安定となる．

次節では式 (7.8) の最適化問題を LMI を用いて解く方法について述べる．

7.3 計算アルゴリズム

最適化計算を実際に解くにあたって線形行列不等式の形に変形して解く．なお，これは [62]，[63] で記されている手法である．本節ではその手法について述べる．

式 (7.8) の最適化問題は式 (7.13) の問題と等価である．

$$\min_{\eta, P} \eta \tag{7.13a}$$

subject to

$$V(\mathbf{x}(l|l)) = \mathbf{x}^\top(l|l)P\mathbf{x}(l|l) \leq \eta \tag{7.13b}$$

ここで $P > 0$ であることから， $Q = \eta P^{-1} > 0$ と定義できる．これを用いると，式 (7.13b) は式 (7.14) に変形できる．

$$1 - \frac{1}{\eta} \mathbf{x}^\top(l|l)P\mathbf{x}(l|l) \geq 0 \tag{7.14a}$$

ここで $\frac{1}{\eta}P = Q^{-1}$ であるので，

$$1 - \mathbf{x}^\top(l|l)Q^{-1}\mathbf{x}(l|l) \geq 0 \tag{7.14b}$$

シュールの補題 (付録 A.2) を活用することで，

$$\begin{bmatrix} Q & \mathbf{x}(l|l) \\ \mathbf{x}^\top(l|l) & 1 \end{bmatrix} \geq 0 \tag{7.14c}$$

制御信号は状態フィードバック則 $\hat{\mathbf{u}}(l+i|l) = G_l \hat{\mathbf{x}}(l+i|l)$ によって決定されると仮定する. 式 (7.5) より式 (7.15) が得られる.

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{x}}^\top(l+i+1|l)P\hat{\mathbf{x}}(l+i+1|l) - \hat{\mathbf{x}}^\top(l+i|l)P\hat{\mathbf{x}}(l+i|l) \leq \\ & -\hat{\mathbf{x}}^\top(l+i|l)W_x\hat{\mathbf{x}}(l+i|l) - \hat{\mathbf{x}}^\top(l+i|l)G_l^\top W_u G_l \hat{\mathbf{x}}(l+i|l) \end{aligned} \quad (7.15a)$$

ここで $\hat{\mathbf{x}}(l+i+1|l) = A_{l+i}\hat{\mathbf{x}}(l+i|l) + B_{l+i}\hat{\mathbf{u}}(l+i|l) = (A_{l+i} + B_{l+i}G_l)\hat{\mathbf{x}}(l+i|l)$ であるので,

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{x}}^\top(l+i|l)[(A_{l+i} + B_{l+i}G_l)^\top P(A_{l+i} + B_{l+i}G_l) - P]\hat{\mathbf{x}}(l+i|l) \leq \\ & \hat{\mathbf{x}}^\top(l+i|l)[-W_x - G_l^\top W_u G_l]\hat{\mathbf{x}}(l+i|l) \end{aligned} \quad (7.15b)$$

$$\hat{\mathbf{x}}^\top(l+i|l)[(A_{l+i} + B_{l+i}G_l)^\top P(A_{l+i} + B_{l+i}G_l) - P + W_x + G_l^\top W_u G_l]\hat{\mathbf{x}}(l+i|l) \leq 0 \quad (7.15c)$$

これがいずれの $i \geq 0$ でも成立するためには, 式 (7.16) が成立することが必要である.

$$(A_{l+i} + B_{l+i}G_l)^\top P(A_{l+i} + B_{l+i}G_l) - P + W_x + G_l^\top W_u G_l \leq 0 \quad (7.16)$$

ここで左右から Q をかけることで式 (7.17) となる.

$$(A_{l+i}Q + B_{l+i}G_lQ)^\top P(A_{l+i}Q + B_{l+i}G_lQ) - QPQ + QW_xQ + QG_l^\top W_u G_lQ \leq 0 \quad (7.17a)$$

$QP = \eta$ を代入し, $Z = G_lQ$ を導入する.

$$(A_{l+i}Q + B_{l+i}Z)^\top P(A_{l+i}Q + B_{l+i}Z) - \eta Q + QW_xQ + Z^\top W_u Z \leq 0 \quad (7.17b)$$

$$Q - (A_{l+i}Q + B_{l+i}Z)^\top Q^{-1}(A_{l+i}Q + B_{l+i}Z) - \frac{1}{\eta}QW_xQ - \frac{1}{\eta}Z^\top W_u Z \geq 0 \quad (7.17c)$$

シュールの補題を利用することで, 式 (7.18) のような LMI に変形することができる.

$$\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & A_{l+i}Q + B_{l+i}Z \\ 0 & \eta E & 0 & W_x^{1/2}Q \\ 0 & 0 & \eta E & W_u^{1/2}Z \\ QA_{l+i}^\top + Z^\top B_{l+i}^\top & QW_x^{T/2} & Z^\top W_u^{T/2} & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (7.18)$$

$[A_{l+i}, B_{l+i}]$ が式 (7.2) で定義される凸ポリトープに属しているとする. 式 (7.18) の LMI は $[A_{l+i}, B_{l+i}]$ に関してアフィンなので, 凸ポリトープの端点であるすべての対 (A_h, B_h)

に対して成立するとき、不確定性を仮定した範囲内すべてのモデルに対して成立する。したがって、式 (7.19) の LMI の集合が成立する必要がある。

$$\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & A_h Q + B_h Z \\ 0 & \eta E & 0 & W_x^{1/2} Q \\ 0 & 0 & \eta E & W_u^{1/2} Z \\ QA_h^\top + Z^\top B_h^\top & QW_x^{\top/2} & Z^\top W_u^{\top/2} & Q \end{bmatrix} \geq 0, h = 1, \dots, N_p \quad (7.19)$$

以上より、式 (7.13), (7.15) の問題は式 (7.20) の問題に変形できる。

$$\min_{\eta, Q, Z} \eta \quad \text{subject to Eq.(7.14), Eq.(7.19)} \quad (7.20)$$

制約を考慮する場合は、式 (7.20) の最適化問題にさらに制約の不等式を追加する。本研究では操作量の制約を検討しているため、操作量の大きさに関して以下の式 (7.21) ような制約を課すとする。

$$|\hat{\mathbf{u}}(l + i|l)| \leq \mathbf{u}_{max} \quad (7.21)$$

これに対して、式 (7.22) のような十分条件を得ることができる。ただし、3 行目から 4 行目への変形にはコーシーシュワルツの不等式を、4 行目から 5 行目の式変形には式 (7.9) より状態量が不変集合に収まることを利用している。

$$\begin{aligned} \max_i |\hat{\mathbf{u}}(l + i|l)|^2 &= \max_i |ZQ^{-1} \hat{\mathbf{x}}(l + i|l)|^2 \\ &= \max_{\mathbf{z} \in \varepsilon_\phi} |ZQ^{-1} \mathbf{z}|^2 \\ &= \max_{\mathbf{z} \in \varepsilon_\phi} |ZQ^{-1/2} Q^{-1/2} \mathbf{z}|^2 \\ &\leq \|(ZQ^{-1/2})^\top\|_2^2 \|Q^{-1/2} \mathbf{z}\|^2 \\ &\leq \|(ZQ^{-1/2})^\top\|_2^2 \\ &= ZQ^{-1} Z^\top \end{aligned} \quad (7.22)$$

式 (7.22) より、式 (7.23) を満たす $X = X^\top$ が存在するならば、式 (7.21) は満たされる。

$$\begin{bmatrix} X & Z \\ Z^\top & Q \end{bmatrix} \geq 0, X \leq \mathbf{u}_{max}^2 \quad (7.23)$$

以上より、最終的に解くべき問題は式 (7.24) のようになる。

$$\min_{\eta, Q, Z, X} \eta \quad \text{subject to Eq.(7.14c), Eq.(7.19), Eq.(7.23)} \quad (7.24)$$

これを解くことによって、操作量制約付き予測制御問題のロバスト解を得ることができる。

7.4 最適化計算の実行可能性

7.2 節の理論は 7.3 節の最適化計算が可解である場合に成立する。最適化計算が可解であることの必要十分条件は、時刻 l で得られた解が次に最適化計算を行う時刻 $l + s$ における条件式を満たすことである。

ここで、最終的な最適化問題 (7.24) における条件式 (7.14c), (7.19), (7.23) を以下に再度示す。

- 式 (7.14c)

$$\begin{bmatrix} Q & \mathbf{x}(l|l) \\ \mathbf{x}^\top(l|l) & 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

- 式 (7.19)

$$\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & A_h Q + B_h Z \\ 0 & \eta E & 0 & W_x^{1/2} Q \\ 0 & 0 & \eta E & W_u^{1/2} Z \\ QA_h^\top + Z^\top B_h^\top & QW_x^{\top/2} & Z^\top W_u^{\top/2} & Q \end{bmatrix} \geq 0, h = 1, \dots, N_p$$

- 式 (7.23)

$$\begin{bmatrix} X & Z \\ Z^\top & Q \end{bmatrix} \geq 0, X \leq \mathbf{u}_{max}^2$$

以上 3 式のうち、式 (7.14c) のみ状態量 \mathbf{x} に依存する。つまり式 (7.19), 式 (7.23) は時不変システムの場合は時刻に依存する項がないため、一度満たされると常に満たされ続ける。したがって、式 (7.14c) についてのみ、時刻 $l + s$ でも満たされるか否かについての検討が必要である。

式 (7.14c) は式 (7.14b) とともに表現できたのでこの形で検討を進める。最適化計算を解くことができた場合、式 (7.9) が成立するため次式 (7.25) が成立する。

$$\mathbf{x}^\top(l|l)Q^{-1}\mathbf{x}(l|l) \geq \max_{[A,B] \in \Omega} \hat{\mathbf{x}}^\top(l+s|l)Q^{-1}\hat{\mathbf{x}}(l+s|l) \quad (7.25)$$

さらに外乱が存在しないという条件下では式 (7.26) が成立する。

$$\max_{[A,B] \in \Omega} \hat{\mathbf{x}}^\top(l+s|l)Q^{-1}\hat{\mathbf{x}}(l+s|l) \geq \mathbf{x}^\top(l+s|l+s)Q^{-1}\mathbf{x}(l+s|l+s) \quad (7.26)$$

式 (7.25), (7.26) より次式 (7.27) が成立する。

$$\mathbf{x}^\top(l|l)Q^{-1}\mathbf{x}(l|l) \geq \mathbf{x}^\top(l+s|l+s)Q^{-1}\mathbf{x}(l+s|l+s) \quad (7.27)$$

したがって、式 (7.28) となり、時刻 l で得られた解は時刻 $l+s$ における条件式 (7.14c) を満たす。

$$0 \leq 1 - \mathbf{x}^\top(l|l)Q^{-1}\mathbf{x}(l|l) \leq 1 - \mathbf{x}^\top(l+s|l+s)Q^{-1}\mathbf{x}(l+s|l+s) \quad (7.28)$$

以上の検討より、時刻 l で得られた解は時刻 $l+s$ における条件式を全て満たすため、最適化計算は一度解が見つければ可解であり続ける。

7.5 パラメータチューニング

本研究で行ったチューニングプロセスを Fig. 7.2 に示し、設計するパラメータとそのパラメータが応答に及ぼす影響、設計指針を以下に示す。

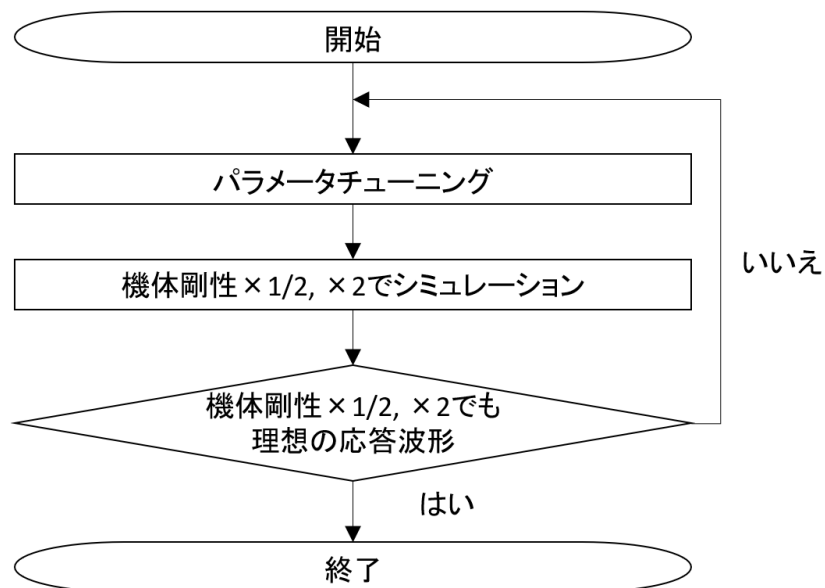


Fig. 7.2: Design flow of RMPC controller.

- 重み関数

基本方針としては、振動を抑えつつ姿勢角が約 1 秒で目標値に追従するよう試行錯誤的に設計する。

- 姿勢角 θ_R

オーバーシュート、応答性に影響を与える。

- 姿勢角レート $\dot{\theta}_R$

姿勢角変化を抑えてしまうため、応答性が劣化する。

- 弾性振動 ξ
振動を抑えて安定化するためには ξ もしくは $\dot{\xi}$ に対して重みを入れる必要がある。
- 弾性振動レート $\dot{\xi}$
 ξ に重みを入れたときよりも振動が減衰しやすい。振動を抑すぎてしまい応答性が悪くなるので基本的に振動は ξ に重みを与えて減衰させる。
- ノズル舵角 δ
重みを入れると十分な舵角を生み出せず、コマンドへの追従性が悪化する。
- 予測モデル
制御器に与える不確定性の範囲を調整する。最適化計算器はここで与えられた不確定性に対して必ずロバスト性を確保できるような制御入力を計算する。

以上の検討事項を考慮しながら設計したパラメータ一覧を Table 7.1 に示す。なお、最適化計算を行うサンプリング時間は AMPC と同様に 0.03 秒とした。

Table 7.1: Parameters of robust MPC controller.

Weights for stage cost	W_x	θ	2
		$\dot{\theta}$	0
		ξ	8
		$\dot{\xi}$	0
	W_u	δ	0

Table 7.1 に示したパラメータを用いて、予測モデルの不確定性が応答性に与える影響を検討する。制御対象として、最大動圧点 (X+35 秒) の最も応答が不安定になりやすい、剛性が 0.5 倍のモデルに対してシミュレーションをした結果を Fig. 7.3 に示す。予測モデルにノミナルシステム、剛性を 2 倍したシステム、0.5 倍したシステムを使用して最適化計算を行った結果を Wide, ノミナルシステム、剛性を 1.2 倍したシステム、0.8 倍したシステムを使用して最適化計算を行った結果を Narrow の凡例で示す。

Fig. 7.3 の (b) の弾性振動を比較するといずれの場合もしっかりと安定化できている。一方、(a) の姿勢角を比較するとロバスト性の要求幅に応じて応答性に差が生まれることがわかる。これよりロバスト安定性と応答性のトレードオフ関係を考えると、予測モデル

に与える不確定性には検討の余地があると言える。本研究では応答性を重視し、剛性を1.2倍したシステムと0.8倍したシステムを予測モデルとして与えることにした。

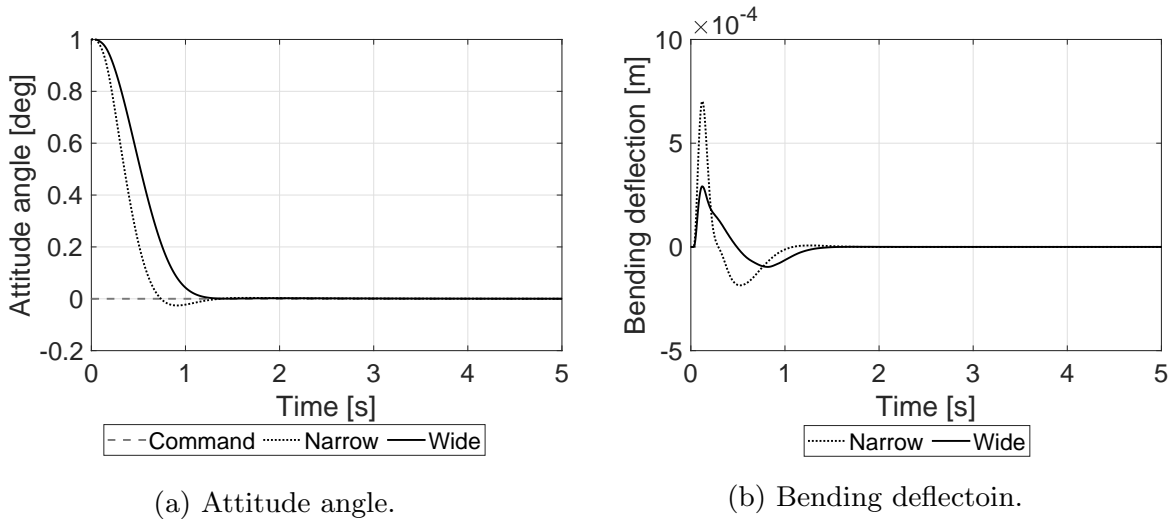


Fig. 7.3: Effect of uncertainty range on responsiveness.

7.6 不確定性を有するシステムに適用したシミュレーション結果

設計した制御器をダイナミクスに不確定性を有しているシステムに適用したシミュレーション結果を Fig. 7.4 – 7.6 に示す。制御対象は制御器設計点 (X + 35 秒) のダイナミクスである。なお、制御対象の不確定性として機体の剛性が2倍、0.5倍である場合を想定している。(a) が機体姿勢角を、(b) が機体の弾性振動を示す。(a) より、制御対象が不確定性を有している場合でもノミナルシステムの場合と大きな差がない程度にコマンドに姿勢角を追従させることができている。また、機体の姿勢角をより不安定にする原因である弾性振動も安定化できていることが (b) から読み取れる。以上より RMPC 制御器によって不確定性に対してロバストな制御器を設計することができたと言える。

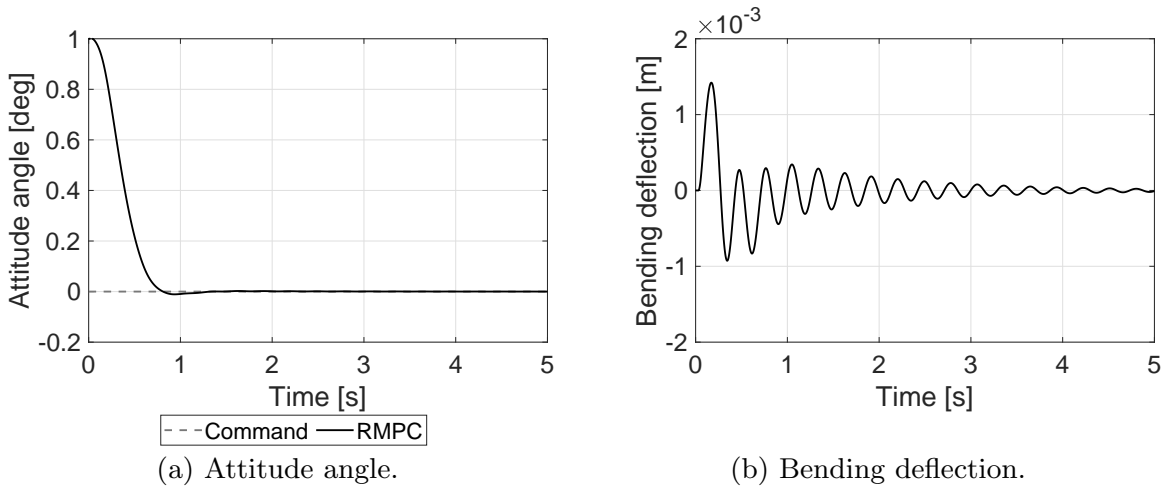


Fig. 7.4: Time responses of RMPC controller to the TI system with bending stiffness $\times 0.5$.

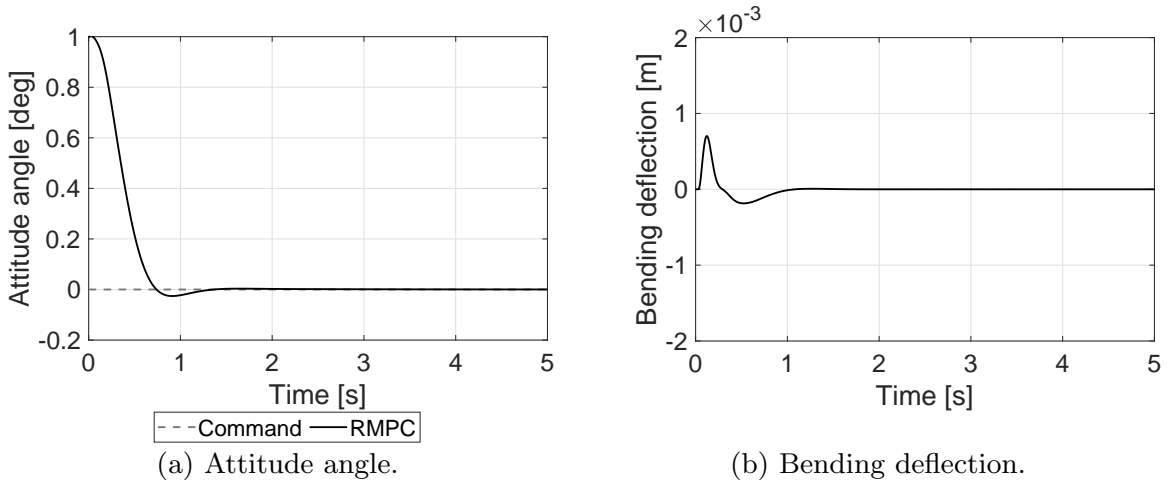


Fig. 7.5: Time responses of RMPC controller to the nominal TI system.

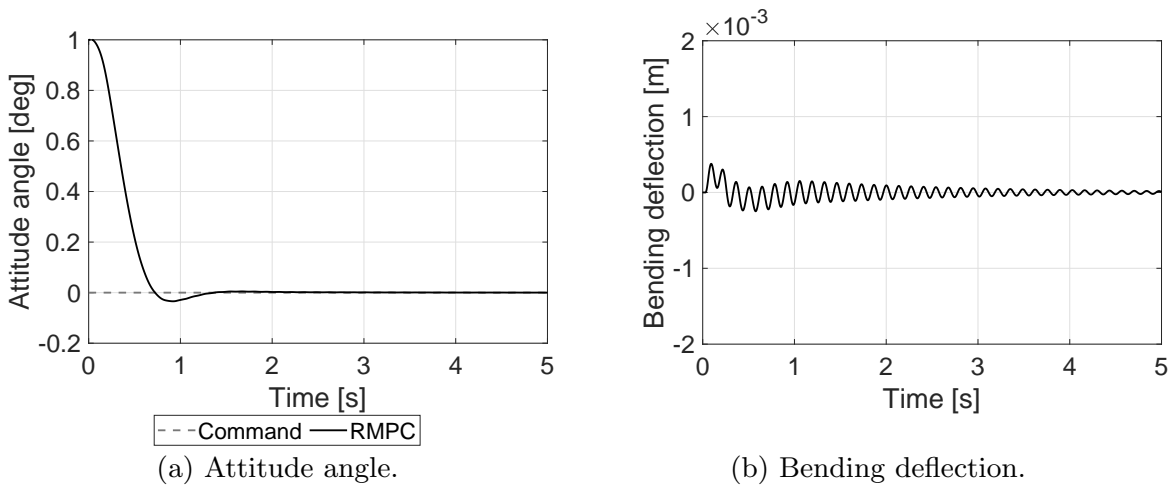


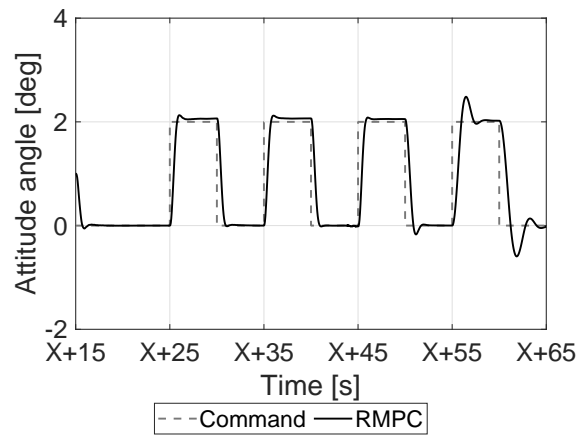
Fig. 7.6: Time responses of RMPC controller to the TI system with bending stiffness $\times 2$.

7.7 時変システムへ適用したシミュレーション結果

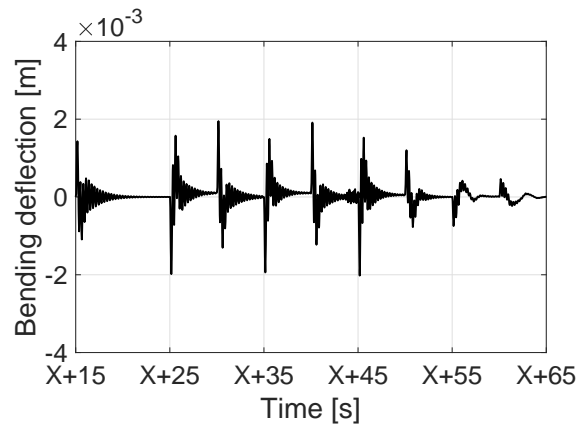
剛性が 0.5 倍, ノミナル, 2 倍の時変システムそれぞれに対して, 設計した RMPC 制御器を適用しシミュレーションを行った結果を Fig. 7.7 –Fig. 7.9 に示す. それぞれ (a) が機体姿勢角を, (b) が機体の弾性振動を, (c) が操作量を示す. いずれの剛性の場合もシステムが制御器設計点 (X+35 秒) からダイナミクスが変化する程, (a) に示す姿勢角の追従性が悪く, さらに (c) の操作量を見てみると X+45 秒の時点で操作量が振動的になっていることがわかる. これらの応答より, 時変システムには対応できないことがわかる.

7.8 本章のまとめ

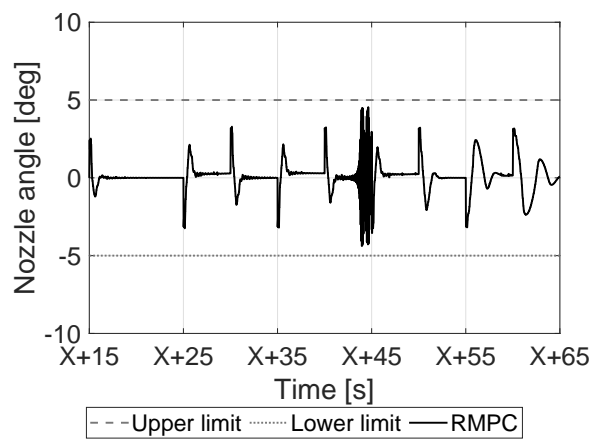
本章ではダイナミクスに不確定性を有する制御対象に対してロバストモデル予測制御 (RMPC) を適用することで対応した. MPC にてロバスト制御を行うため, 制御器にはノミナルシステムだけでなく不確定性のあるシステムを与えた. 設計パラメータとして予測モデルに与えるモデルの不確定性の幅が応答性に影響があることを示した. また, 最適化計算にはロバスト制御理論を適用した. これらにより, 制御対象の不確定性を考慮しながら操作量を計算できるため, ロバスト性を有する制御器の設計が可能である. シミュレーションの結果, ロバストモデル予測制御によってダイナミクスの不確定性に対応可能であることが示された.



(a) Attitude angles.

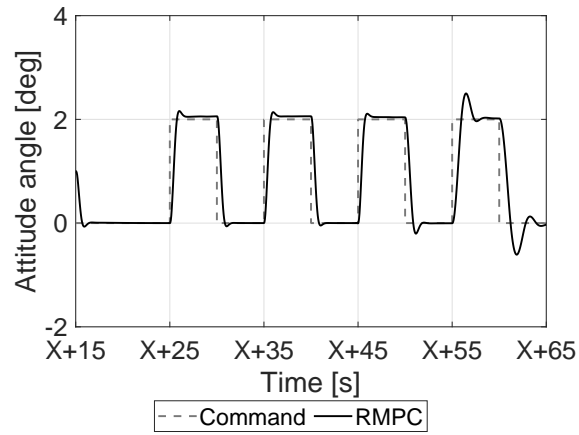


(b) Bending deflection.

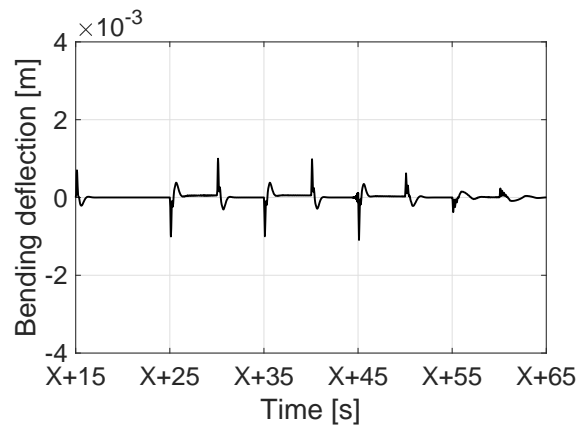


(c) Manipulated variable.

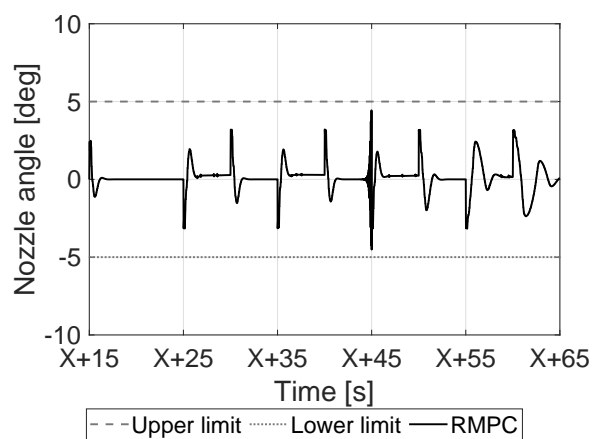
Fig. 7.7: Time responses of RMPC controller to the TV system with bending stiffness $\times 0.5$.



(a) Attitude angles.

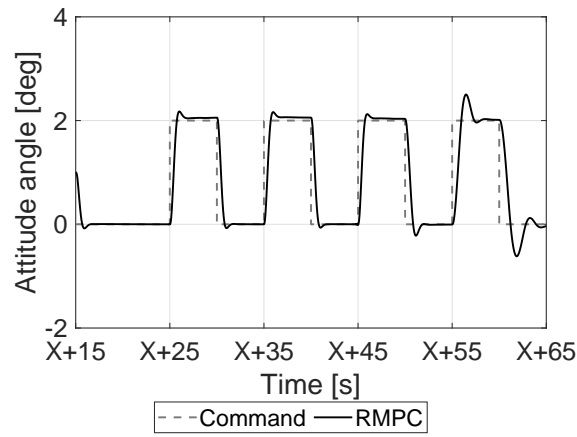


(b) Bending deflection.

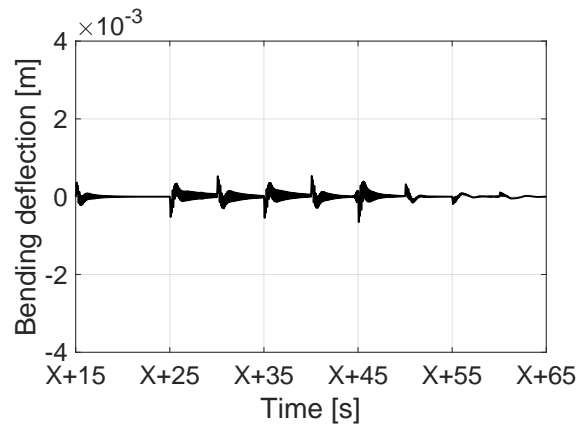


(c) Manipulated variable.

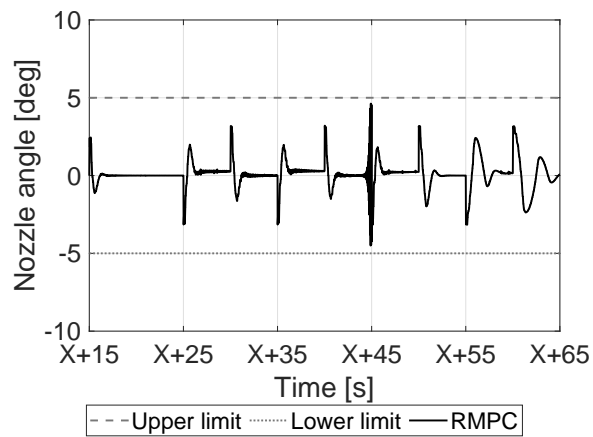
Fig. 7.8: Time responses of RMPC controller to the TV nominal system.



(a) Attitude angles.



(b) Bending deflection.



(c) Manipulated variable.

Fig. 7.9: Time responses of RMPC controller to the TV system with bending stiffness $\times 2$.

第 8 章

適応ロバストモデル予測制御

制御対象の時間変化特性と不確定性の両方の性質に対応可能な制御器を設計するため、第 6 章と第 7 章でそれぞれ設計した適応モデル予測制御器 (AMPC 制御器) とロバストモデル予測制御器 (RMPC 制御器) を統合する。本論文では以降この制御器を適応ロバストモデル予測制御器 (ARMPC 制御器) と呼ぶことにする。

8.1 制御器設計手法

Fig. 8.1 に制御器の構成を示す。ロバスト制御要素としては予測モデルに不確定性を与える他、最適化計算のアルゴリズムとして第 7 章で使用したロバストアルゴリズムを適用する。適応制御要素としては、予測モデルを時系列データとする。

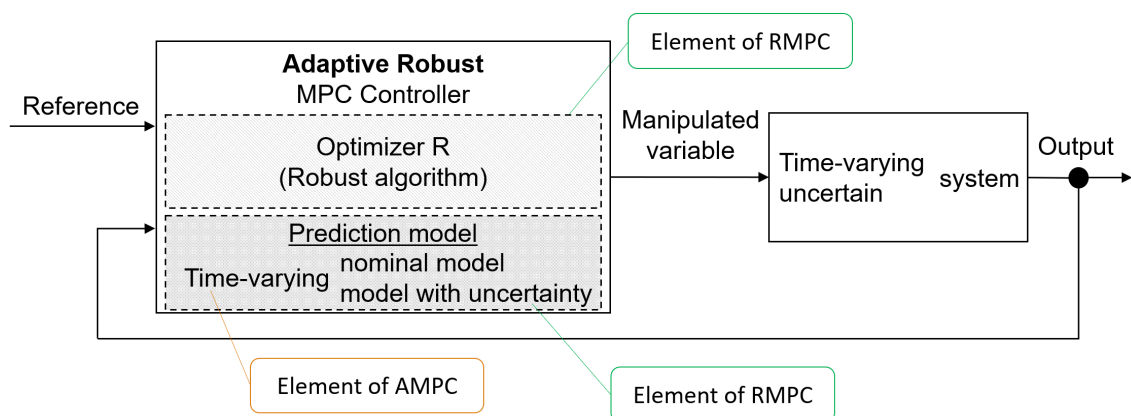


Fig. 8.1: Block diagram of ARMPC system.

8.2 パラメータチューニング

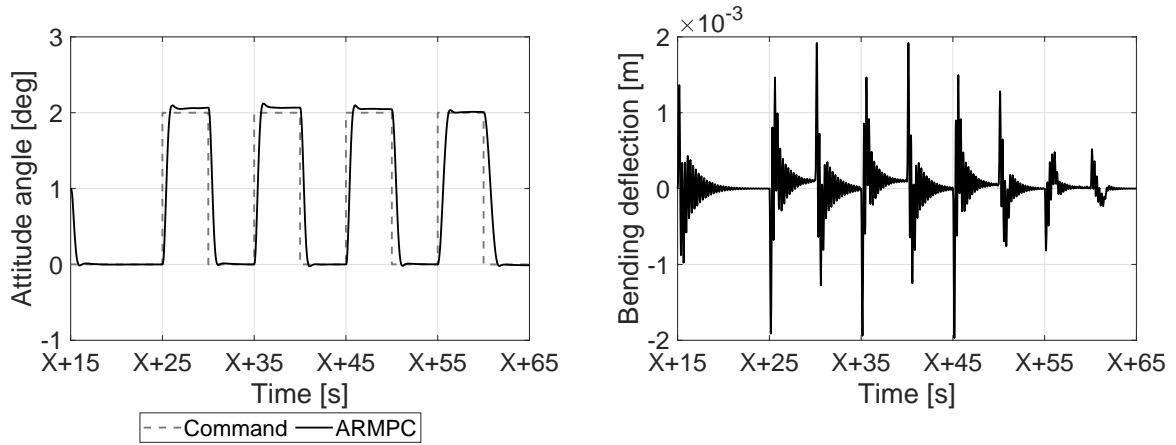
最適化計算器は 7 章の RMPC 制御器と同一であり，設計パラメータはサンプリング時間，評価関数における重み関数 W_x , W_u ，予測モデルの不確定性の範囲である．RMPC 制御器と同じ不確定性の範囲となる剛性 0.8 倍のモデル，剛性 1.2 倍のモデルの時系列データを予測モデルとして与え，サンプリング時間は 0.03 秒とし，評価関数の重み関数も同一の物とした．具体的な値を Table 8.1 に示す．

Table 8.1: Parameters of adaptive robust MPC controller.

Weights for stage cost	W_x	θ	2
		$\dot{\theta}$	0
		ξ	8
		$\dot{\xi}$	0
	W_u	δ	0

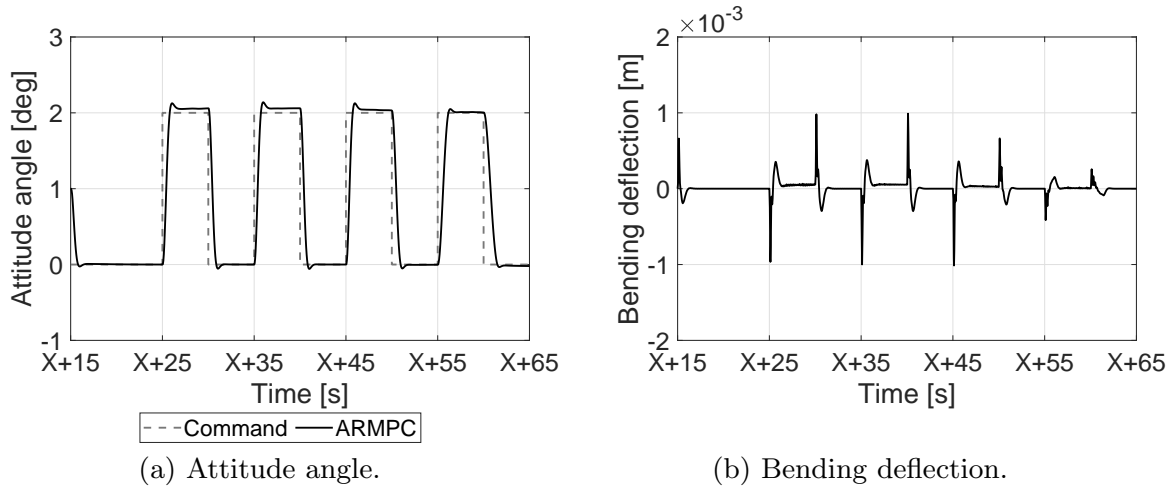
8.3 不確定性のある時変システムに適用したシミュレーション結果

設計した ARMPC 制御器を不確定性のある時変システムに適用し，シミュレーションを行った．システムの不確定性ごとに結果を Fig. 8.2 – Fig. 8.4 に示す．いずれも (a) が機体姿勢角を，(b) が機体の弾性振動を示す．(a) より適応ロバストモデル予測制御器を適用することで，不確定性を有する時変システムに対してもノミナル時変システムと同様にコマンド追従できていることがわかる．X + 55 秒以降はそれ以前と比較するとコマンド追従に時間がかかっているように見える．ここでの時定数は約 2 秒になっているが，これはこの時刻において推力が大幅に減少することが原因である．(b) からは，不確定性を有するシステムであっても，弾性振動を安定化できていることがわかる．



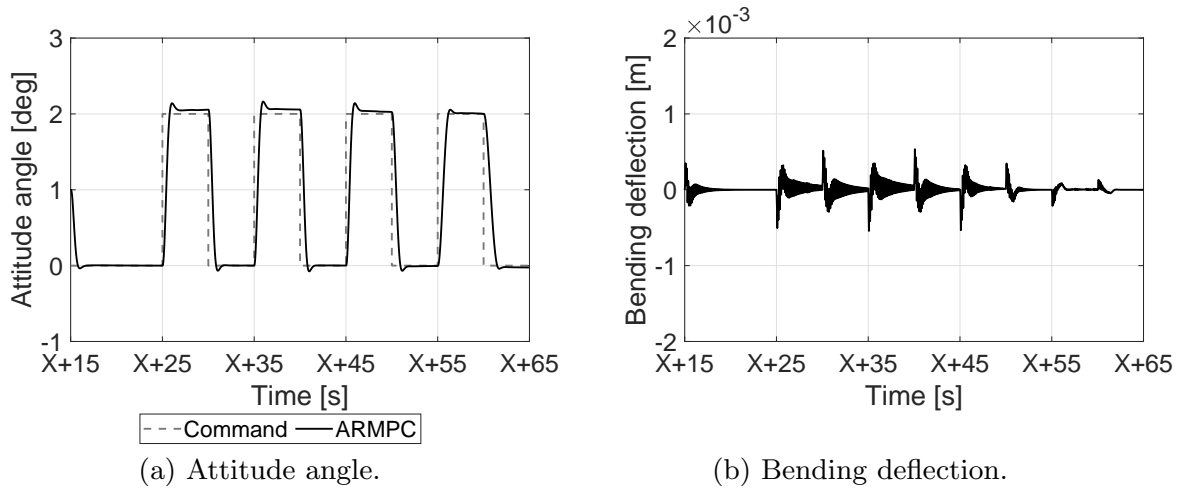
(a) Attitude angle. (b) Bending deflection.

Fig. 8.2: Time responses of ARMPC controller to the TV system with bending stiffness $\times 0.5$.



(a) Attitude angle. (b) Bending deflection.

Fig. 8.3: Time responses of ARMPC controller to the TV nominal system.



(a) Attitude angle. (b) Bending deflection.

Fig. 8.4: Time responses of ARMPC controller to the TV system with bending stiffness $\times 2$.

8.4 安定性保証理論の破綻

AMPC と RMPC を統合することで、ダイナミクスの不確定性と時変性の両方に対して対応可能である見込みがあることをシミュレーションにて確認した。一方で、飛行体の制御器設計を行う上で制御システムの安定性は非常に重要な要素である。そこで本節では安定性保証理論について検討を行う。

RMPC では安定性を保証する際、式 (7.12) のように評価関数がリアプノフ関数となることを利用している。式 (7.12) は再掲すると次式の通りである。

$$V(\mathbf{x}(l+s|l+s)) = \mathbf{x}^\top(l+s|l+s)P_{l+s}\mathbf{x}(l+s|l+s) \quad (8.1)$$

$$\leq \mathbf{x}^\top(l+s|l+s)P_l\mathbf{x}(l+s|l+s) \quad (8.2)$$

$$\leq V(\mathbf{x}(l|l)) \quad (8.3)$$

各不等式が成立する条件は以下の通りである。

- 式 (8.2) の説明

時刻 l での解 P_l は時刻 $l+s$ でも実行可能であるならば、時刻 $l+s$ にて求めた解の方が時刻 l での解よりもより良くなるため、本不等式が成立する。本不等式が成立するには、最適化計算が実行可能であることが十分条件である。

- 式 (8.3) の説明

2 つ目の不等式は式 (7.10) が成立する場合に成立する。式 (7.10) を再掲すると次式の通りである。

$$\max_{[A,B] \in \Omega} \mathbf{x}^\top(l+s|l+s)P_l\mathbf{x}(l+s|l+s) = \max_{[A,B] \in \Omega} \hat{\mathbf{x}}^\top(l+s|l)P_l\hat{\mathbf{x}}(l+s|l)$$

時変システムの場合、式 (8.3) が成立しなくなる。ここで、Fig. 8.5 にてシステムモデルと状態量の関係性を図で示す。式 (8.3) は、システム行列が時不変の場合は問題なく成立する。しかしシステム行列が時変でサンプリング時間が大きい場合、制御器は現在時刻のシステムを利用したまま予測を行うため、Fig. 8.5 に示すように実際の制御対象と予測モデルに誤差が生じる。システム行列を用いて状態量は計算されるため、式 (7.10) が成立しなくなる。つまり、システムの時変性が大きい

場合でも理論的にロバスト安定性を保証するためには，理論に新たな要素を追加する必要がある．

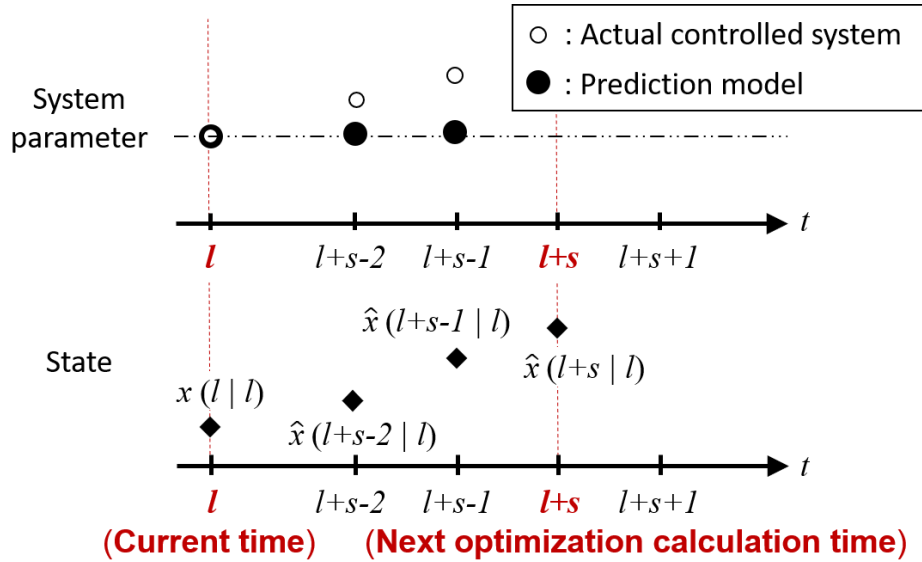


Fig. 8.5: Effect of models on state prediction.

8.5 本章のまとめ

本章ではダイナミクスの不確定性と時変性の両方に対応可能な制御器を設計するため，適応制御とロバスト制御を統合することを検討した．適応ロバストモデル予測制御器 (ARMPC 制御器) を設計してシミュレーションを行い，不確定性と時変性の両方に対応可能である見込みが見ついた．一方で，安定性保証理論が時変システムには対応できておらず，理論的に安定性を保証するには修正が必要であることを示した．

第9章

新理論の検討

前章で述べたロバストアルゴリズムでは時変システムに対してロバスト安定性を理論的に保証できない点を修正するため、本研究では4つの方法を検討した。最終的に利用する理論は第10章で述べるが、それ以外の検討した方法とそれを提案するに至らなかった理由について本章で述べる。

9.1 検討手法1

ロバスト安定性が理論的に保証されるためには最適化計算が実行可能であることが必要条件である。つまり最適化計算の拘束条件全てが時間が進んでも成立し続けることが必要となる。本節では3つの拘束条件のうちシステム行列が関係する拘束条件式に着目し、最適化計算の次ステップでも成立するように前後のシステムの関係性を拘束する条件式を追加することを検討する。

9.1.1 理論

ロバストモデル予測制御においては、式(7.24)で与えられた以下の3つの拘束条件式のもとで最適化計算を解く。最適化計算の可解性が保証されるとは、最適化計算の時刻が進んでもこれらの拘束条件式が常に成立することが保証されるということである。

1. 状態量に関する式 (7.14c)
2. 制約条件に関する式 (7.23)
3. システム行列に関する式 (7.19)

時変システムの場合に式 (7.24) で与えられた最適化問題の 3 つの拘束条件式に与える影響をそれぞれ以下に示す.

- 状態に関する条件式 (7.14c)

これが最適化計算が進んでも常に成立するとは次の十分条件 (9.1) が成立するということを意味する.

$$\mathbf{x}(l|l)^\top Q_l^{-1} \mathbf{x}(l|l) \leq 1 \implies \mathbf{x}(l+s|l+s)^\top Q_{l+s}^{-1} \mathbf{x}(l+s|l+s) \leq 1 \quad (9.1)$$

式 (9.1) は以下に再掲する式 (7.10) が成立する場合に成立する.

$$\max_{[A,B] \in \Omega} \mathbf{x}^\top(l+s|l+s) P_l \mathbf{x}(l+s|l+s) = \max_{[A,B] \in \Omega} \hat{\mathbf{x}}^\top(l+s|l) P_l \hat{\mathbf{x}}(l+s|l)$$

これは 8.4 節で述べたように時変システムの場合には成立しなくなるため改善が必要である.

- 制約条件に関する条件式 (7.23)

求める解と制約条件による不等式であり操作量の制約条件は時間変化しないので、システムが時変の場合も特に変更は必要ない.

- システム行列に関する条件式 (7.19)

式 (7.19) は変形することで式 (9.2) のように表現することが可能である. 式 (9.2) において右辺がシステム行列に関する式であり、システム行列の変化に伴い変化する.

$$Q - \frac{1}{\eta} Q W_x Q - \frac{1}{\eta} Z^\top W_y Z \geq (AQ + BZ)^\top Q^{-1} (AQ + BZ) \quad (9.2)$$

ロバスト安定性を確保するためには、時刻 l にて求めた解が時刻 $l+s$ の条件を満たすことが十分条件であり、これは時刻 l にて求めた解が次ステップである $l+s$ のシステムにおいても実行可能であることを意味する. 時刻 l にて求めた解が次ステップである $l+s$ のシステムにおいても実行可能であるとは、式 (9.3) が成立するということである.

$$Q_l - \frac{1}{\eta} Q_l W_x Q_l - \frac{1}{\eta} Z_l^\top W_y Z_l \geq (\bar{A}Q_l + \bar{B}Z_l)^\top Q_l^{-1} (\bar{A}Q_l + \bar{B}Z_l) \quad (9.3)$$

この十分条件として式 (9.4) を考える.

$$(AQ + BZ)^\top Q^{-1}(AQ + BZ) \geq (\bar{A}Q + \bar{B}Z)^\top Q^{-1}(\bar{A}Q + \bar{B}Z) \quad (9.4a)$$

subject to

$$[A, B] \in \Omega_l \quad \text{and} \quad [\bar{A}, \bar{B}] \in \Omega_{l+s} \quad (9.4b)$$

したがって予め式 (9.4) を満たす Q , Z の条件を求めておき, 最適化計算の条件式として予め組み込めば時刻 l での解は時刻 $l + s$ の制約条件を満たす.

9.1.2 計算アルゴリズム

式 (9.4) を満たす Q , Z の条件を求めるアルゴリズムを検討する. 時刻 l と $l + s$ で制御対象のダイナミクスが異なるとし, 各時刻のシステム行列は式 (9.5) に示されるように別の凸ポリトープ Ω_l, Ω_{l+s} の中にそれぞれ存在すると仮定する.

$$[A, B] \in \Omega_l, \quad [\bar{A}, \bar{B}] \in \Omega_{l+s} \quad (9.5)$$

ここで, 凸ポリトープ $\Omega_l = [A, B]$, $\Omega_{l+s} = [\bar{A}, \bar{B}]$ は式 (9.6) の通りである. 式 (9.6) において h はポリトープの端点を表しており, $h = 1$ であれば不確定性のないシステムであることを表す.

$$[A, B] = \sum_{h=1}^{N_p} \lambda_h [A_h, B_h], \quad \sum_{h=1}^{N_p} \lambda_h = 1, \quad h = 1, 2, \dots, N_p \quad (9.6a)$$

$$[\bar{A}, \bar{B}] = \sum_{h=1}^{N_p} \bar{\lambda}_h [\bar{A}_h, \bar{B}_h], \quad \sum_{h=1}^{N_p} \bar{\lambda}_h = 1, \quad h = 1, 2, \dots, N_p \quad (9.6b)$$

このとき次式 (10.28a) を満たす Q , Z の条件を導出する.

$$(AQ + BZ)^\top Q^{-1}(AQ + BZ) \geq (\bar{A}Q + \bar{B}Z)^\top Q^{-1}(\bar{A}Q + \bar{B}Z) \quad (9.7)$$

Q から両辺を引くことで

$$Q - (AQ + BZ)^\top Q^{-1}(AQ + BZ) \leq Q - (\bar{A}Q + \bar{B}Z)^\top Q^{-1}(\bar{A}Q + \bar{B}Z) \quad (9.8)$$

$Q = Q^\top$ であるのでこれは次式と等価である. 式 (9.9b) は, この右辺を行列 T とすると, 行列 T が半正定であることを表す.

$$\begin{bmatrix} Q & AQ + BZ \\ (AQ + BZ)^\top & Q \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} Q & \bar{A}Q + \bar{B}Z \\ (\bar{A}Q + \bar{B}Z)^\top & Q \end{bmatrix} \quad (9.9a)$$

$$0 \leq \begin{bmatrix} 0 & (\bar{A} - A)Q + (\bar{B} - B)Z \\ ((\bar{A} - A)Q + (\bar{B} - B)Z)^\top & 0 \end{bmatrix} \quad (9.9b)$$

式 (9.9b) は \bar{A} と A は時間刻み幅が小さい場合、ほぼ差がない。この場合、 $\bar{A} - A = 0$ となり式 (9.9b) が常に成立することになり、最適化変数 Q , Z について有意な条件を求めることができない。

9.1.3 本節のまとめ

本節ではシステム行列に関する式について実行可能性を保証するため、前後の時刻のシステム行列に対する条件式を追加することを検討した。本節で検討した方法は時間刻み幅が小さい場合に最適化変数 Q , Z について有意な条件を求めることができないものとなった。より理論を一般化するにあたっては時間刻み幅に依存しない理論拡張が必要である。

9.2 検討手法 2

9.1 節と同様に、最適化計算の実行可能性を保証するための策を検討した。システムに有意差が出るように、システム行列を時間と共に大きく変化する部分とそうでない部分を分解し、時間と共に大きく変化する部分についてのみ上の提案手法 1 と同様に前後の時刻のシステムの差を考慮する。

9.2.1 理論

システム行列を対角化した際に振動モードと剛体モードに分かれることを利用する。振動モードは不確実性があるものの時間変化は小さく、剛体モードでは時変性があるものの不確実性の影響が大きいことを利用する。

9.2.2 計算アルゴリズム

式 (7.18) においてシステム行列を不確実性の影響が大きい部分と時変性の影響が大きい部分に分けた式を式 (9.10) に示す。システム行列 $A_{l+i} = A_0 + \Delta_{l+i}$ とし、 A_0 は不確実性の影響が大きいブロック (振動モード) を抽出した行列、 Δ_{l+i} は時変性の影響が大きい

いブロック (剛体モード) を抽出した行列とする.

$$\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & (A_0 + \Delta_{l+i})Q + B_{l+i}Z \\ 0 & \eta E & 0 & W_x^{1/2}Q \\ 0 & 0 & \eta E & W_u^{1/2}Z \\ Q(A_0 + \Delta_{l+i})^\top + Z^\top B_{l+i}^\top & QW_x^{\top/2} & Z^\top W_u^{\top/2} & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 0 \cdots \infty \quad (9.10)$$

各時刻における最適化計算中はシステム行列は時間変化していないとする. つまり時刻 l における最適化計算において, システム行列のうち時変性の影響が大きいブロック Δ_{l+i} と, 制御行列 B_{l+i} は時間変化しないとすると, それぞれ Δ_l, B_l として表すことができる. この場合, 上式は次式として表すことができる.

$$\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & (A_0 + \Delta_l)Q + B_lZ \\ 0 & \eta E & 0 & W_x^{1/2}Q \\ 0 & 0 & \eta E & W_u^{1/2}Z \\ Q(A_0 + \Delta_l)^\top + Z^\top B_l^\top & QW_x^{\top/2} & Z^\top W_u^{\top/2} & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (9.11)$$

ここで行列 A_0 は振動モードを表しており機体剛性 EI の不確定性による影響を有しているが, これは飛翔中にわずかながら時間変化する. しかし, この時間変化は Δ_l, B_l の時間変化に比べて非常に小さく, 不確定性として扱えると仮定し, $A_0 \in \Omega$ が成立するとする. つまり, 式 (9.11) が Ω 内のシステム行列に対して成立することを条件式として考える.

9.1 節と同様, 式 (9.11) を次式に変形して考える.

$$Q - \frac{1}{\eta}QW_xQ - \frac{1}{\eta}Z^\top W_yZ \geq [(A_0 + \Delta_l)Q + B_lZ]^\top Q^{-1}[(A_0 + \Delta_l)Q + B_lZ] \quad (9.12)$$

ここで, 時刻 l にて求めた解が時刻 $l + s$ において実行可能である, すなわち, 時刻 l にて求めた解が時刻 $l + s$ の条件式を満たすことができる, とは次式が成立することを意味する.

$$Q_l - \frac{1}{\eta}Q_lW_xQ_l - \frac{1}{\eta}Z_l^\top W_yZ_l \geq [(A_0 + \Delta_{l+s})Q + B_{l+s}Z]^\top Q_l^{-1}[(A_0 + \Delta_{l+s})Q + B_{l+s}Z] \quad (9.13)$$

これが常に成立するための十分条件として、次式 (9.14) を追加する.

$$\begin{aligned} & [(A_0 + \Delta_l)Q + B_l Z]^\top Q^{-1} [(A_0 + \Delta_l)Q + B_l Z] \geq \\ & [(A_0 + \Delta_{l+s})Q + B_{l+s} Z]^\top Q^{-1} [(A_0 + \Delta_{l+s})Q + B_{l+s} Z] \end{aligned} \quad (9.14)$$

両辺を Q から引き、 $Q = Q^\top$ が成立することを利用して次のように変形することができる.

$$\begin{aligned} & Q - [(A_0 + \Delta_l)Q + B_l Z]^\top Q^{-1} [(A_0 + \Delta_l)Q + B_l Z] \leq \\ & Q - [(A_0 + \Delta_{l+s})Q + B_{l+s} Z]^\top Q^{-1} [(A_0 + \Delta_{l+s})Q + B_{l+s} Z] \end{aligned} \quad (9.15a)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} Q & (A_0 + \Delta_l)Q + B_l Z \\ [(A_0 + \Delta_l)Q + B_l Z]^\top & Q \end{bmatrix} \leq \\ & \begin{bmatrix} Q & (A_0 + \Delta_{l+1})Q + B_{l+1} Z \\ [(A_0 + \Delta_{l+1})Q + B_{l+1} Z]^\top & Q \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.15b)$$

$$0 \leq \begin{bmatrix} 0 & (\Delta_{l+s} - \Delta_l)Q + (B_{l+s} - B_l)Z \\ ((\Delta_{l+s} - \Delta_l)Q + (B_{l+s} - B_l)Z)^\top & 0 \end{bmatrix} \quad (9.15c)$$

以上より、式 (9.15c) を全ての前後するシステムに対して考えた解を十分条件として最適化問題に追加する.

9.2.3 本節のまとめ

システム行列の時間変化する部分のみに着目した. 提案手法 1 と同様, 時間刻み幅が小さいことを前提としている場合, 十分条件として追加した式は常に成立するものとなり, 必要性がないものとなる. より理論を一般化するにあたっては時間刻み幅が大きい場合への理論拡張が必要である.

9.3 本章のまとめ

本章では適応ロバストモデル予測制御において, 時変システムへの適用する際に破綻した安定性保証理論を修正するために行った検討について記した. 時変システムへの適用を行うにあたっては最適化計算の実行可能性が重要であることから, 最適化計算の各拘束条

件式が時間進んでも成立するために必要な条件を検討した。特に拘束条件式のうちシステム行列に関する条件式については前後の時間のシステム行列間の関係式を追加することが有意義であると考えた。一方で、本章で検討した理論は最適化計算中にはシステムが変化しないことを仮定しており、これはシステムの時変性が小さいことを意味する。つまり本章で検討した方法では時変性がある程度限定されたシステムへの適用にとどまる物となった。

第 10 章

時変モデル予測制御による有限ホライズン制御理論

第 9 章で検討した方法は最適化計算中にシステムが変化しないことを仮定しており，時変性がある程度限定されたシステムへの適用にとどまる物であった．本章ではさらに理論の適用先を拡張することを目的として最適化計算中にもシステムが変化することを想定した理論を提案する．

10.1 理論

ロバストモデル予測制御の理論を時変システムに適用可能とするために拡張するにあたり，課題点は 2 つである．課題点とそれに対する対応策を本節で述べる．

1. システムが時間変化することにより最適化計算に使用する予測モデルと実際のシステムに誤差が生じることで予測精度が低下し，安定性を保証している理論の一部が破綻することが課題点であると．この対策として適用モデル予測制御ではなく，時変モデル予測制御を適用することで，予測精度を向上させる．

Fig. 10.1 に前章までに扱っていた適応モデル予測制御と，本章で適用する時変モデル予測制御における予測モデルの違いを表す概略図を示す．適応モデル予測制御の場合は毎度の最適化計算の度に予測モデルが変化するが，一度の最適化計算中に使用するモデルは 1 つのみである．一方，時変モデル予測制御では一度の最適化計算中にも予測モデルが変化することで，時間変化が大きい場合にも予測モデルと

実際のシステムとの誤差を小さくすることができる。システム誤差をなくすことで状態量予測の精度をあげることができ、8.4 節にて述べた既存の理論では破綻した式 (7.10) が成立する。

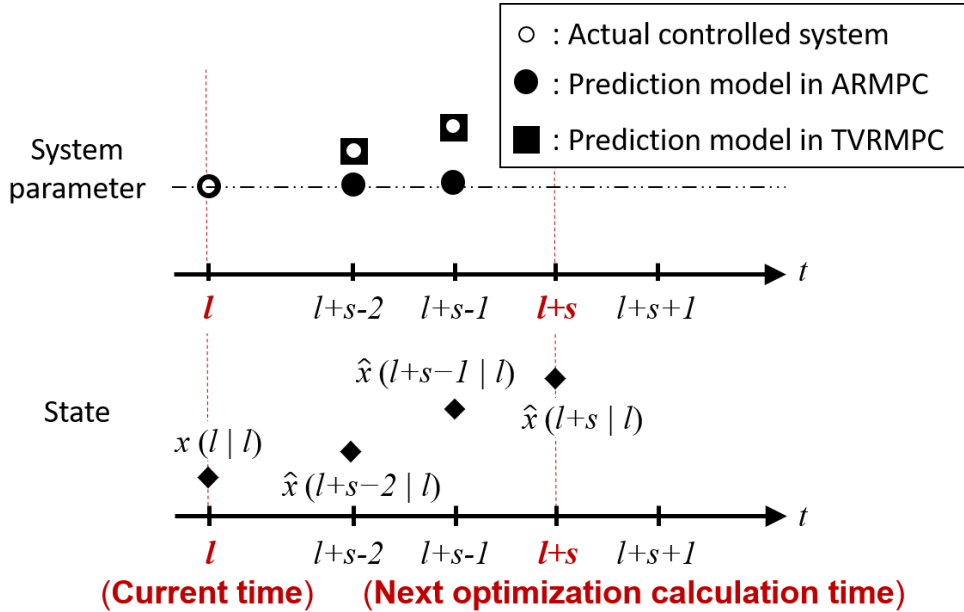


Fig. 10.1: Comparison of prediction models.

2. 時変モデル予測制御を適用するに伴い、ノミナル応答性の劣化が課題点となる。これはノミナル応答性と相反する要求である、ロバスト性の要求幅が広がるのが原因である。

Fig. 10.2 (a) に既存のロバスト理論におけるロバスト性要求幅の概要図を示す。既存のロバスト理論は時不変システムを前提としていることから、最適化計算が飛行終了時刻までを予測するに相当する無限ホライズン制御であってもロバスト性を要求する幅は時不変である。

一方、前項 1 で提案したように最適化計算を無限ホライズンのまま時変モデル予測制御に拡張した場合のロバスト性要求幅の概要図を Fig. 10.2 (b) に示す。無限ホライズン制御では飛行終了時刻までを最適化計算の予測期間とし、さらに時変モデル予測では予測の間モデルが変化する。したがって最適化計算開始時刻から飛行終了時刻までの全システムに対してロバスト性を要求することになる。これは相反する要求であるノミナル応答性の劣化に繋がる。

そこで本研究では無限ホライズン制御から有限ホライズン制御に変更する。Fig. 10.3 に、時変モデル予測制御にて最適化計算を有限ホライズンとした時のロバスト性要求幅の概要図を示す。有限ホライズン制御にすることで予測の範囲を限定することが可能となり、ロバスト性とノミナル応答性の要求のバランスを調整することが可能となる。

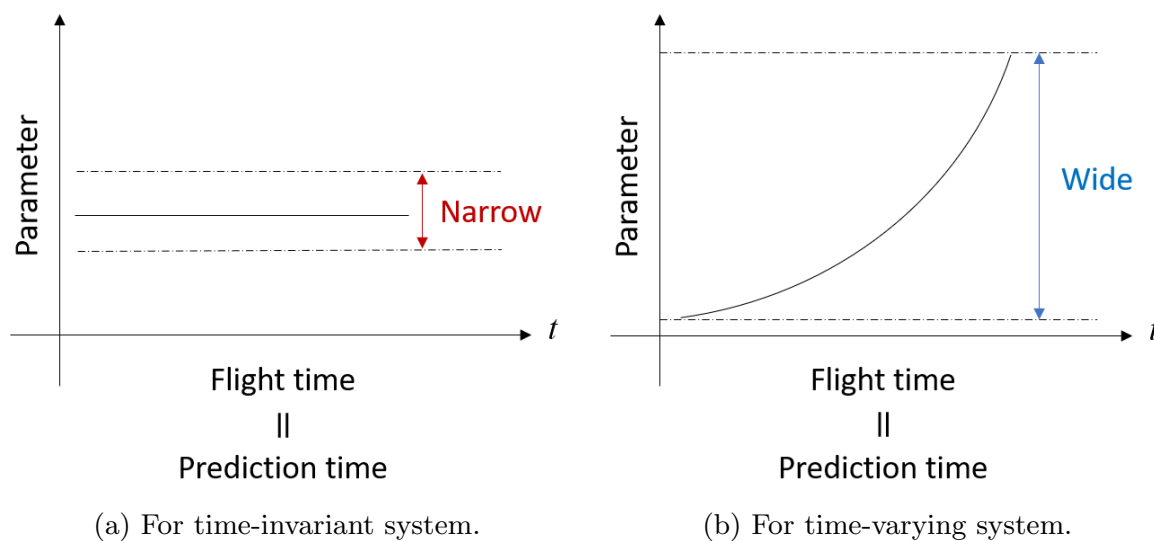


Fig. 10.2: Infinite horizon control for TI system and TV system.

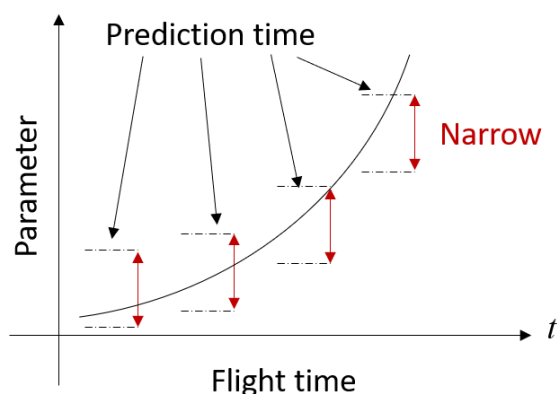


Fig. 10.3: Finite horizon control for TV system.

以上を踏まえて、時変モデル予測制御による有限ホライズン制御の計算アルゴリズムを検討した。Fig. 10.4 に設計した時変ロバストモデル予測制御のブロック線図を示す。Fig. 8.1 とは最適化計算のアルゴリズムおよび予測モデルの扱いが異なる。本章では具体

的な式変形や計算方法について記したあと、可解性保証・安定性保証について説明し、シミュレーションにて制御器の性能を評価する。

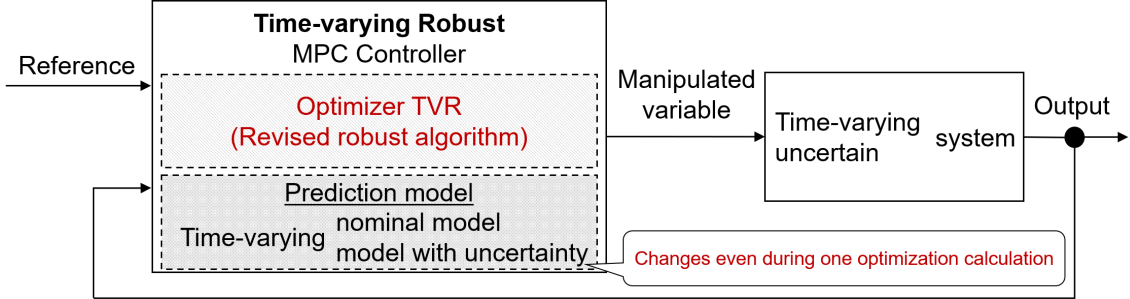


Fig. 10.4: Block diagram of TVRMPC system.

10.2 計算アルゴリズム

評価関数を式 (10.1) として設計する。評価関数を式 (10.1) のように定義すると、モデルの不確実性に対するロバスト性は式 (10.2) で表されるようなミニマックス問題を解くことによって得られる。

$$V_f(l) = \sum_{i=0}^{H_u-1} \{ \|\hat{\mathbf{x}}(l+i|l)\|_{W_x}^2 + \|\hat{\mathbf{u}}(l+i|l)\|_{W_u}^2 \} + \|\hat{\mathbf{x}}(l+H_u|l)\|_{W_f}^2 \quad (10.1)$$

$$\min_{U(l)} \max_{[A,B] \in \Omega} V_f(l) \quad \text{subject to} \quad \mathbf{u} \in U \quad (10.2)$$

ここで、 H_u は予測する範囲を表すパラメータの予測ホライズンである。式 (10.2) はミニマックス問題であり直接扱うには複雑であるため、式 (10.3) の条件を満たすような関数 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top P \mathbf{x}$ ($P > 0$) を導入することで問題を解ける形に置き換える。

$$V(\hat{\mathbf{x}}(l+i+1|l)) - V(\hat{\mathbf{x}}(l+i|l)) \leq -\|\hat{\mathbf{x}}(l+i|l)\|_{W_x}^2 - \|\hat{\mathbf{u}}(l+i|l)\|_{W_u}^2 \quad (10.3)$$

式 (10.3) の両辺を $j = 0-H_u-1$ までの和をとり、両辺から $\|\hat{\mathbf{x}}(l+H_u|l)\|_{W_f}^2$ を引く。さらに全体に -1 をかけることで式 (10.4) が得られる。

$$-V(\hat{\mathbf{x}}(l+H_u|l)) + V(\hat{\mathbf{x}}(l|l)) + \|\hat{\mathbf{x}}(l+H_u|l)\|_{W_f}^2 \geq \sum_{i=0}^{H_u-1} \{ \|\hat{\mathbf{x}}(l+i|l)\|_{W_x}^2 + \|\hat{\mathbf{u}}(l+i|l)\|_{W_u}^2 \} + \|\hat{\mathbf{x}}(l+H_u|l)\|_{W_f}^2 \quad (10.4)$$

式 (10.4) の右辺は評価関数 (10.1) であることから、評価関数の上限は式 (10.4) の左辺で表すことができる。つまり式 (10.5) となる。

$$-V(\hat{\mathbf{x}}(l + H_u|l)) + V(\hat{\mathbf{x}}(l|l)) + \|\hat{\mathbf{x}}(l + H_u|l)\|_{W_f}^2 \geq V_f(l) \quad (10.5)$$

ここで 7.2 節の従来の RMPC の安定性保証理論と同様の形に帰着するため、式 (10.6) を導入する。

$$0 \geq -V(\hat{\mathbf{x}}(l + H_u|l)) + \|\hat{\mathbf{x}}(l + H_u|l)\|_{W_f}^2 \quad (10.6)$$

式 (10.6) が成立するとすると、式 (10.7) が成立する。

$$V(\mathbf{x}(l|l)) \geq \max_{[A,B] \in \Omega} V_f(l) \quad (10.7)$$

式 (10.7) は、関数 V が評価関数 V_f の上界になることを表しており、式 (10.2) の最適化問題は最終的に式 (10.8) の問題に簡単化することができる。

$$\min_{U(l)} V(\mathbf{x}(l|l)) \quad \text{subject to Eq.(10.3), (10.6), } P > 0, \mathbf{u} \in U \quad (10.8)$$

さらにこれを LMI で計算できる形に帰着するために $\mathbf{x}^\top(l|l)P\mathbf{x}(l|l) \leq \eta$ を導入することで、式 (10.8) の最適化問題は式 (10.9) に変形できる。

$$\min_{\eta, P} \eta \quad (10.9a)$$

subject to

$$\text{Eq.(10.3)}$$

$$\text{Eq.(10.6)}$$

$$\mathbf{x}^\top(l|l)P\mathbf{x}(l|l) \leq \eta \quad (10.9b)$$

$$\mathbf{u} \in U \quad (10.9c)$$

以下の通り、各条件式 (10.3), (10.6), (10.9b), (10.9c) を LMI で計算できる形に変形する。

• 式 (10.3)

制御信号は 7 章と同様に状態フィードバック則 $\hat{u}(l+i|l) = G_l \hat{x}(l+i|l)$ によって決定されると仮定すると、式 (10.10) が得られる。

$$\hat{x}^\top(l+i|l)[\|A_{l+i} + B_{l+i}G_l\|_{P_l}^2 - P_l + \|G_l\|_{W_u}^2 + W_x]\hat{x}(l+i|l) \leq 0 \quad (10.10)$$

式 (10.10) がいずれの $i \geq 0$ に対して成立するためには、式 (10.11) が成立すれば良い。

$$\|A_{l+i} + B_{l+i}G_l\|_{P_l}^2 - P_l + \|G_l\|_{W_u}^2 + W_x \leq 0 \quad (10.11)$$

このままでは変数の積の項が存在するため、双線形行列不等式 (Bilinear Matrix Inequality: BMI) となり解くことが困難である。ここで、以降の式変形に向けて式 (10.12) を導入する。

$$P = \eta Q^{-1} \quad (10.12)$$

$Q \geq 0$ であるため Q を左右から乗じた上で式 (10.12) を代入する。さらに $Z = G_l Q$ と置き換えることで式 (10.13) のような LMI に変形することができる。

$$\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & A_{l+i}Q + B_{l+i}Z \\ 0 & \eta E & 0 & W_x^{1/2}Q \\ 0 & 0 & \eta E & W_u^{1/2}Z \\ QA_{l+i}^\top + Z^\top B_{l+i}^\top & QW_x^{\top/2} & Z^\top W_u^{\top/2} & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (10.13)$$

式 (10.13) が予測が行われる H_u ステップの間の全てのシステム (ノミナルシステムと不確定性を有するシステム) に対して成立しなければならない。

なお、システムはポリトープ表現されるため全てのシステムに対して式 (10.13) を考える必要がなく、 Ω_l の全ての端点で式 (10.13) が成立すると Ω_l 内全てのシステムで成立する。式 (10.13) が Ω_l の全ての端点で成立するとは式 (10.14) が成立することである。

$$\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & A_{j,\tau}Q + B_{j,\tau}Z \\ 0 & \eta E & 0 & W_x^{1/2}Q \\ 0 & 0 & \eta E & W_u^{1/2}Z \\ QA_{j,\tau}^\top + Z^\top B_{j,\tau}^\top & QW_x^{\top/2} & Z^\top W_u^{\top/2} & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (10.14)$$

$j = 1, \dots, N_p, \quad \tau = 1, \dots, H_u$

- 式 (10.6)

式 (10.6) は書き下すことで式 (10.15) のように変形できる.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(l + H_u|l)^\top W_f \hat{\mathbf{x}}(l + H_u|l) &\leq \hat{\mathbf{x}}(l + H_u|l)^\top P_l \hat{\mathbf{x}}(l + H_u|l) \\ \hat{\mathbf{x}}(l + H_u|l)^\top (P_l - W_f) \hat{\mathbf{x}}(l + H_u|l) &\geq 0 \end{aligned} \quad (10.15)$$

これがどのような $\hat{\mathbf{x}}(l + H_u|l)$ に対しても成立するために式 (10.16) を条件式とする.

$$P_l - W_f \geq 0 \quad (10.16)$$

これが満たされるか否かは終端重み W_f の決め方に依存する.

- 式 (10.9b)

式 (10.12) より $Q = \eta P^{-1} > 0$ である. これを用いることで, 式 (10.9b) は式 (10.17) のように変形できる.

$$\begin{bmatrix} Q & \mathbf{x}(l|l) \\ \mathbf{x}^\top(l|l) & 1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (10.17)$$

- 式 (10.9c)

操作量制約として以下の式 (10.18) ような制約を課すとする.

$$|\hat{\mathbf{u}}(l + i|l)| \leq \mathbf{u}_{max} \quad (10.18)$$

$\hat{\mathbf{u}}(l + i|l) = G_l \mathbf{x}(l + i|l) = Z_l Q_l^{-1} \mathbf{x}(l + i|l)$ として操作量は状態量を用いて表すことができることを利用し, 式 (10.18) を状態量を使った形に帰着する.

現在の状態量と予測した未来の状態量の関係性について検討する. 最適化問題 (10.9) が可解であるとする, 式 (10.3) が成立する. つまり, 現時刻での状態量が $\|\mathbf{x}\|_P \leq \phi$ を満たせば, 現在予測された状態量 $\hat{\mathbf{x}}(l + i|l)$ は $\|\hat{\mathbf{x}}(l + i|l)\|_P \leq \phi$ を満たす. したがって, 楕円 $\varepsilon_\phi = \{\mathbf{z} : \|\mathbf{z}\|_P \leq \phi, \phi = \|\mathbf{x}\|_P\}$ は現在予測された状態量の不変集合となる.

この現在の状態量と予測した未来の状態量の関係性を活用して, 式 (10.18) が成立するような十分条件 (10.19) を得ることができる. なお, 式 (10.19b) は現在予測された状態量の不変集合に収まることを, 式 (10.19d) はコーシーシュワルツの不等式 $|\mathbf{a}^\top \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$ を, 式 (10.19f) は $\mathbf{z}^\top Q^{-1} \mathbf{z} \leq 1$ であることを利用している.

$$\max_i |\hat{\mathbf{u}}(l+i|l)|^2 = \max_i |ZQ^{-1}\hat{\mathbf{x}}(l+i|l)|^2 \quad (10.19a)$$

$$= \max_{\mathbf{z} \in \varepsilon_\phi} |ZQ^{-1}\mathbf{z}|^2 \quad (10.19b)$$

$$= \max_{\mathbf{z} \in \varepsilon_\phi} |ZQ^{-1/2}Q^{-1/2}\mathbf{z}|^2 \quad (10.19c)$$

$$\leq \|(ZQ^{-1/2})^\top\|^2 \|Q^{-1/2}\mathbf{z}\|^2 \quad (10.19d)$$

$$= \|(ZQ^{-1/2})^\top\|^2 \cdot \mathbf{z}^\top Q^{-1}\mathbf{z} \quad (10.19e)$$

$$\leq \|(ZQ^{-1/2})^\top\|^2 \quad (10.19f)$$

$$= ZQ^{-1}Z^\top \quad (10.19g)$$

式 (10.19) より, 式 (10.20) を満たす $X = X^\top$ が存在するならば, 式 (10.18) は満たされる.

$$\begin{bmatrix} X & Z \\ Z^\top & Q \end{bmatrix} \geq 0, X \leq \mathbf{u}_{max}^2 \quad (10.20)$$

以上の式変形の結果, 解くべき最適化計算は式 (10.21) のようになる.

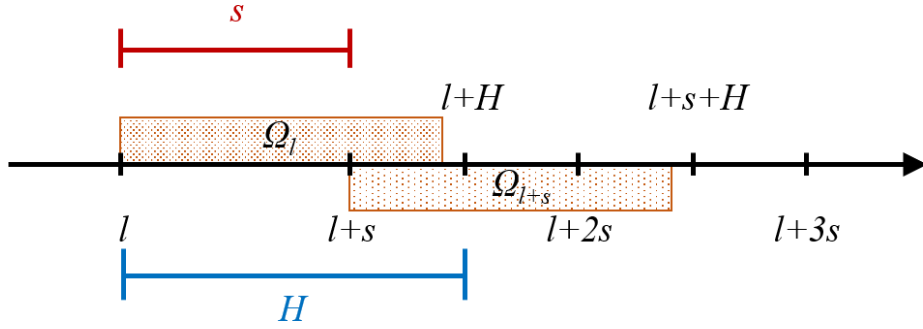
$$\min_{\eta, P} \eta \quad \text{subject to Eq.(10.14), Eq.(10.16), Eq.(10.17), Eq.(10.20)} \quad (10.21)$$

10.3 可解性保証

最適化計算の可解性を保証するには, 現在の時刻 l にて求めた解が次ステップ $l+s$ の最適化計算の条件式 (10.14), (10.16), (10.17), (10.20) を満たすことが十分条件となる. この各条件式について次ステップでも問題なく成立することを示す.

- 式 (10.14)

これが時刻 $l+s$ でも成立するとは, システムの範囲が Ω_l ではなく Ω_{l+s} にもつつても成立するということである. Fig. 10.5 に Ω_l と Ω_{l+s} の関係性を示す.

Fig. 10.5: Relationship of Ω_l and Ω_{l+s} .

Ω_l は時刻 l での最適化計算でのホライズン内のシステムの集合である．つまり $[A_l, B_l], \dots, [A_{l+H_u-1}, B_{l+H_u-1}]$ をさす．式 (10.14) が時刻 $l+s$ でも成立するとは，システム $[A_{l+s}, B_{l+s}], \dots, [A_{l+s+H_u-1}, B_{l+s+H_u-1}]$ でも成立することを意味する．以降では， Ω_l のシステムに対して式 (10.14) が満たされた場合に，システム $[A_{l+H_u}, B_{l+H_u}]$ から $[A_{l+s+H_u-1}, B_{l+s+H_u-1}]$ に対しても満たされるための十分条件を検討する．

システムを不確定性の影響が大きい部分と時変性の影響が大きい部分に分ける．システム行列 $A_{j,\tau} = \tilde{A}_j + \Delta_\tau$ とし， \tilde{A}_j は不確定性の影響が大きいブロック (振動モード) を抽出した行列， Δ_τ は時変性の影響が大きいブロック (剛体モード) を抽出した行列とする．式 (10.14) においてシステム行列を分解したものを次式 (10.22) に示す．

$$\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & (\tilde{A}_j + \Delta_\tau)Q + B_{j,\tau}Z \\ 0 & \eta E & 0 & W_x^{1/2}Q \\ 0 & 0 & \eta E & W_u^{1/2}Z \\ Q(\tilde{A}_j + \Delta_\tau)^\top + Z^\top B_{j,\tau}^\top & QW_x^{\top/2} & Z^\top W_u^{\top/2} & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, \dots, N_p, \quad \tau = 1, \dots, H_u - 1 \quad (10.22)$$

なお，これはシュールの補題を利用して次式 (10.23) に変形できる．

$$Q - [(\tilde{A}_j + \Delta_\tau)Q + B_{j\tau}Z]^\top Q^{-1} [(\tilde{A}_j + \Delta_\tau)Q + B_{j\tau}Z] \geq \frac{1}{\eta} Q W_x Q + \frac{1}{\eta} Z^\top W_u Z \quad (10.23a)$$

表記簡略化のため、二次形式の表記を変更すると、以下の形に変形できる。

$$Q - \|(\tilde{A}_j + \Delta_\tau)Q + B_{j\tau}Z\|_{Q^{-1}} \geq \frac{1}{\eta} \|Q\|_{W_x} + \frac{1}{\eta} \|Z\|_{W_u} \quad (10.23b)$$

なお、右辺の重み関数 $W_x > 0$, $W_u > 0$ かつ $\eta > 0$ であるため、式 (10.24) が成立する。

$$Q - \|(\tilde{A}_j + \Delta_\tau)Q + B_{j\tau}Z\|_{Q^{-1}} \geq \frac{1}{\eta} \|Q\|_{W_x} + \frac{1}{\eta} \|Z\|_{W_u} > 0 \quad (10.24)$$

これが Ω_l 内の最後のシステム $[A_{l+H_u-1}, B_{l+H_u-1}]$ に対して成立するならば Ω_{l+s} 内の最後のシステム $[A_{l+s+H_u-1}, B_{l+s+H_u-1}]$ に対して成立するような十分条件を検討する。

システム $[A_{l+H_u-1}, B_{l+H_u-1}]$ に対して式 (10.24) が成立している時、得られる解 Q_l, Z_l を用いることで式 (10.25) として表される。

$$\begin{aligned} Q_l - \|(\tilde{A}_j + \Delta_{l+H_u-1})Q_l + B_{l+H_u-1}Z_l\|_{Q_l^{-1}} \\ \geq \frac{1}{\eta} \|Q_l\|_{W_x} + \frac{1}{\eta} \|Z_l\|_{W_u} > 0 \end{aligned} \quad (10.25)$$

一方でシステム $[A_{l+s+H_u-1}, B_{l+s+H_u-1}]$ に対して式 (10.24) が成立する時、式 (10.26) のように表すことができる。

$$\begin{aligned} Q_l - \|(\tilde{A}_j + \Delta_{l+s+H_u-1})Q_l + B_{l+s+H_u-1}Z_l\|_{Q_l^{-1}} \\ \geq \frac{1}{\eta} \|Q_l\|_{W_x} + \frac{1}{\eta} \|Z_l\|_{W_u} > 0 \end{aligned} \quad (10.26)$$

そこで、式 (10.25) が成立するならば式 (10.26) が成立することの十分条件として、次式 (10.27) を考える。左辺は式 (10.26) の左辺、右辺は式 (10.25) の左辺である。

$$\begin{aligned} Q_l - \|(\tilde{A}_j + \Delta_{l+s+H_u-1})Q_l + B_{l+s+H_u-1}Z_l\|_{Q_l^{-1}} \geq \\ Q_l - \|(\tilde{A}_j + \Delta_{l+H_u-1})Q_l + B_{l+H_u-1}Z_l\|_{Q_l^{-1}} \end{aligned} \quad (10.27)$$

ここで式 (10.25) ,(10.26) より式 (10.27) の両辺は正定値である．さらに， Q は正定値という仮定がされていることから，シュールの補題を利用することで式 (10.27) は式 (10.28) に変形される．なお， $(*)$ は非対角項の転置行列を意味する．

$$\begin{bmatrix} Q_l & (\tilde{A}_j + \Delta_{l+s+H_u-1})Q_l + B_{l+s+H_u-1}Z_l \\ (*) & Q_l \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} Q_l & (\tilde{A}_j + \Delta_{l+H_u-1})Q_l + B_{l+H_u-1}Z_l \\ (*) & Q_l \end{bmatrix} \quad (10.28a)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & (\Delta_{l+s+H_u-1} - \Delta_{l+H_u-1})Q_l + (B_{l+s+H_u-1} - B_{l+H_u-1})Z_l \\ (*) & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (10.28b)$$

以上より，次式 (10.29) を全ての時刻 l に対して考えた式を十分条件として最適化問題に追加する．

$$\begin{bmatrix} 0 & (\Delta_{l+s} - \Delta_l)Q + (B_{l+s} - B_l)Z \\ (*) & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (10.29)$$

- 式 (10.16)

式 (10.16) は状態量に依存しないため時刻 $l + s$ でも成立し，最適化計算は実行可能である．

- 式 (10.17)

式 (10.17) は変形すると式 (10.30) の通りである．

$$\mathbf{x}^\top(l|l)Q_l^{-1}\mathbf{x}(l|l) \leq 1 \quad (10.30)$$

最適化計算が解ける場合には式 (10.3) が成立するため，現在予測される状態量は不変集合内に収まる．したがって式 (10.31) が成立する．

$$\max_{[A,B] \in \Omega_l} \hat{\mathbf{x}}^\top(l+s|l)Q_l^{-1}\hat{\mathbf{x}}(l+s|l) \leq \mathbf{x}^\top(l|l)Q_l^{-1}\mathbf{x}(l|l) \quad (10.31)$$

さらに，時変 MPC によって予測モデルが最適化計算中も変化することで，予測された状態量 $\hat{\mathbf{x}}(l+s|l)$ はシステム $[A_{l+s-1}, B_{l+s-1}]$ にて計算される．予測の間システムが変化しない場合にはシステム $[A_l, B_l]$ で計算されるため，時変 MPC にすることで予測の精度が向上する．RMPC と同様に式 (7.10) が成立する範囲の外乱の大きさだとすると式 (10.32) が成立する．

$$\mathbf{x}^\top(l+s|l+s)Q_l^{-1}\mathbf{x}(l+s|l+s) \leq \max_{[A,B] \in \Omega_l} \hat{\mathbf{x}}^\top(l+s|l)Q_l^{-1}\hat{\mathbf{x}}(l+s|l) \quad (10.32)$$

式 (10.31), (10.32) より, 式 (10.33) が成立するため, 次に最適化計算が行われるステップ $l+s$ においても条件式 (10.17) は満たされる. したがって式 (10.17) に関して可解性は保たれる.

$$\mathbf{x}^\top(l+s|l+s)Q_l^{-1}\mathbf{x}(l+s|l+s) \leq \mathbf{x}^\top(l|l)Q_l^{-1}\mathbf{x}(l|l) \leq 1 \quad (10.33)$$

- 式 (10.20)

操作量の制約は時不変であるため, 操作量制約に関する不等式は時不変であり, 一度満たされた場合には満たされ続ける. したがって式 (10.20) に関して可解性は保たれる.

以上の検討より可解性を保証する最適化計算は次式 (10.34) の通りとなる.

$$\min_{\eta, P} \eta \quad \text{subject to Eq.(10.14), Eq.(10.29), Eq.(10.16), Eq.(10.17), Eq.(10.20)} \quad (10.34)$$

10.4 安定性保証

評価関数 V_f を上から押さえる関数 V がリアプノフ関数になることを示す.

証明したいのは以下の不等式 (10.35) の関係である. これを証明できれば評価関数 V_f を上から押さえた関数 V がリアプノフ関数となるため, 安定性を保証することができる.

$$V(\mathbf{x}(l+s|l+s)) = \mathbf{x}^\top(l+s|l+s)P_{l+s}\mathbf{x}(l+s|l+s) \quad (10.35a)$$

$$\leq \mathbf{x}^\top(l+s|l+s)P_l\mathbf{x}(l+s|l+s) \quad (10.35b)$$

$$\leq V(\mathbf{x}(l|l)) \quad (10.35c)$$

- 式 (10.35b)

時刻 l での解 P_l は時刻 $l+s$ でも実行可能であり, かつ, 時刻 $l+s$ にて求めた解の方が良くなるため成立する.

- 式 (10.35c)
式 (10.33) かつ, $Q^{-1} = \frac{1}{\eta}P$ であることから, 成立する.

以上の検討より, 式 (10.35) が成立するといえるので, 安定性を保証することができる.

10.5 性能評価

10.5.1 パラメータチューニング

設計時に検討する内容を以下に示す.

- 制御更新スパン
最適化計算を行う頻度となるため, 小さすぎると計算コストが大きくなりすぎる. 一方で大きくなりすぎると今回の制御対象は不安定システムであることから, 制御が間に合わず応答が発散する. 安定性と計算コストのトレードオフを考慮しながら小さい値から調整する.
- 予測ホライズン
最適化計算のステージコストを何ステップ先まで予測し考慮するかを決定するパラメータである. 制御更新スパンよりも長い必要がある.
- 予測モデルの変化するスパン
制御対象のボード線図より定常ゲインが特に有意に変化する時間に設定する.
- ステージコストの重み関数
応答性および安定性を確認しつつ設計する. パラメータ調整は RMPC のときと同様に θ と ξ のパラメータを中心に調整する.
- 終端コストの重み関数
この重みが大きい程, 予測の最終ステップにおいて目標値からの偏差が小さいことを要求することになる. 予測ホライズンが短い場合には十分に制御を行う猶予がなく, 偏差が大きくなりがちであるため, 終端コストが大きくなることに繋がる. したがって予測ホライズンがある程度長い場合には終端コストの大きさを大きめに取ることが可能である.

以上の検討事項を考慮しながら設計したパラメータ一覧を Table 10.1 に示す.

Table 10.1: Parameters of time-varying robust MPC controller.

Control update span		100 ms
Prediction horizon		150 ms
Model change span		1 s
Weights for stage cost	Q_θ	1
	$Q_{\dot{\theta}}$	0
	Q_ξ	0.5
	$Q_{\dot{\xi}}$	0
	R	0
Weights for terminal cost	Qt_θ	1e-4
	$Qt_{\dot{\theta}}$	0
	Qt_ξ	1e-3
	$Qt_{\dot{\xi}}$	0

10.5.2 シミュレーション

最適化計算の条件式の内今回追加を提案する式 (10.29) (以下に再掲) は十分条件を取ることによって時変システムに対しても安定性を保証する物であり、比較的厳しい条件となっており、このままではシミュレーションが実行不可能であったため、式 (10.36) のように緩和することでシミュレーションを行った。

- 式 (10.29)

$$\begin{bmatrix} 0 & (\Delta_{l+s} - \Delta_l)Q + (B_{l+s} - B_l)Z \\ (*) & 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

- 条件緩和後

$$\begin{bmatrix} 0 & (\Delta_{l+s} - \Delta_l)Q + (B_{l+s} - B_l)Z \\ (*) & 0 \end{bmatrix} \geq -1e-3 \quad (10.36)$$

また、本理論は一度最適化計算が実行可能となれば常に可解となるアルゴリズムである。したがって想定以上の突風外乱が入力された際には実行不可能となり計算が停止する可能性がある。そこで、本シミュレーションでは初期条件未満の突風外乱を想定し、コマンド姿勢角は初期値の 1 度以内とした。

設計した制御器をダイナミクスに不確定性を有する時変システムに適用したシミュレーション結果を Fig. 10.6 – Fig. 10.8 に示す. (a) が機体姿勢角を, (b) が機体の弾性振動を示す. (a) より, 不確定性を有する時変システムに対してもノミナル時変システムと同様に応答を安定化し, コマンド追従できていることがわかる. また, (b) からは制御対象が不確定性を有していても, 弾性振動を安定化できていることがわかる.

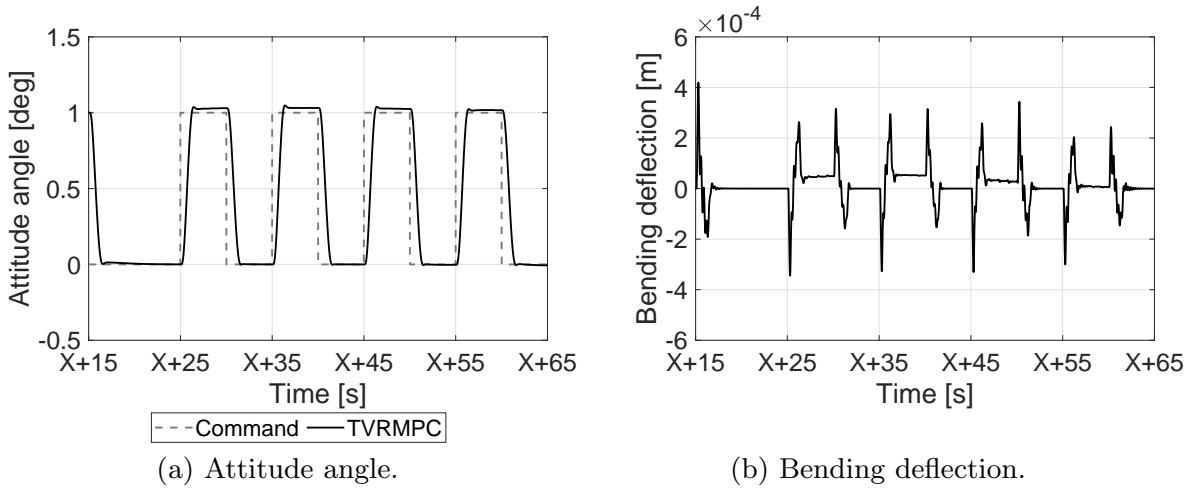


Fig. 10.6: Time responses of TVR MPC controller to the TV system with bending stiffness $\times 0.5$.

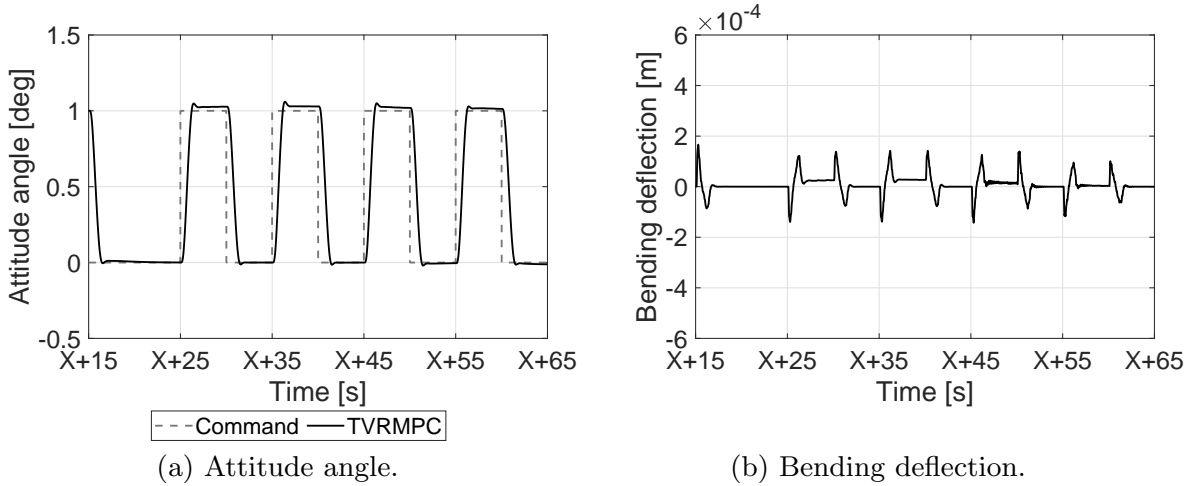


Fig. 10.7: Time responses of TVR MPC controller to the TV nominal system.

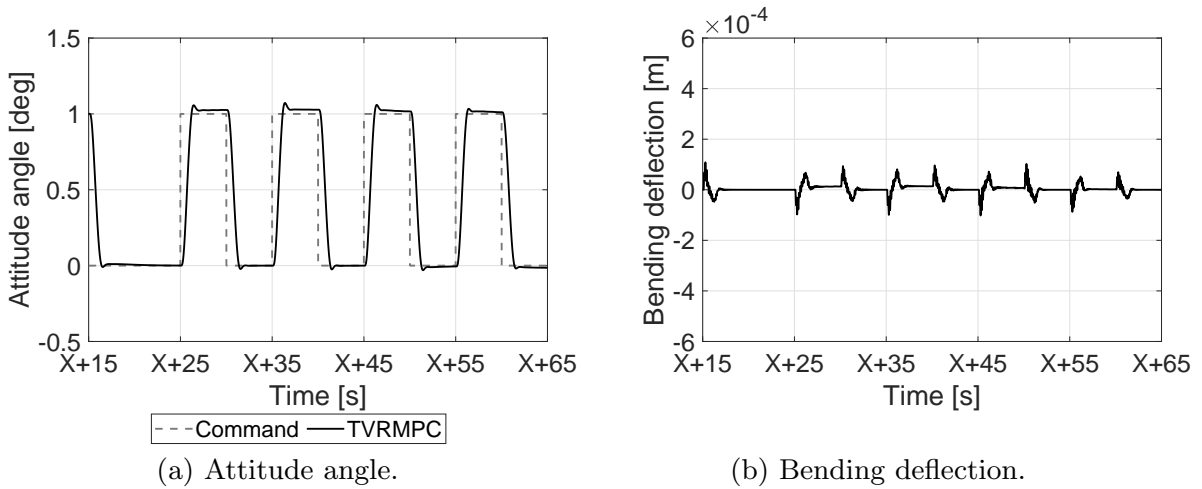


Fig. 10.8: Time responses of TVR MPC controller to the TV system with bending stiffness $\times 2$.

10.6 本手法の特徴

本手法と従来手法である H_∞ 制御による設計手法を様々な観点から比較したものを Table 10.2 に示し、各項目について述べる。

Table 10.2: Comparison of controller design methods.

	従来手法	提案手法
チューニング	周波数領域	時間領域
制約	考慮不可	考慮可
性能評価	イタレーションによる評価	可解条件による安定性の理論的保証
設計工程数	ブロックごとの設計	設計点 1 点での設計

- チューニング

従来手法の H_∞ 制御の場合は周波数応答を確認しながらの設計であるため、設計者は周波数特性に関して造詣があることが要求された。一方で、本研究で提案する手法では実際に時間応答を見ながらの設計であるため、より直観的な設計が可能である。

- 制約

本手法で適用している MPC の特徴として、制約を陽に考慮できることがあげられる。制御器にて制約を考慮できることにより、考慮することができない場合に比べて性能の向上が見込まれる。

- 性能評価

本手法はシミュレーションの最初に最適化計算が可解であれば、想定外の外乱が加わらない限り常に可解であることが最大の特徴である。

- 設計工程数

従来手法のゲインスケジューリング法を用いた H_∞ 制御器と比較して、設計の時間が軽減される。

一方で、現在の理論は安定性に対して十分条件となる条件を組み合わせた物であるため、要求よりも厳しい理論となっていることが懸念される。条件の緩和について検討の余地があり、これが実現された暁にはより実用性の高い制御系設計手法として活用が可能であると考えられる。

10.7 本章のまとめ

従来のロバストモデル予測制御 (RMPC) の理論では対応不可能な時変システムに対応可能なロバスト制御理論を提案した。最適化計算の予測の範囲を有限にし、予測の最中にも予測モデルが変化する時変 MPC にすることで、時変システムに対して対応可能なロバスト制御理論を提案した。従来のロバスト制御理論からの変更にあたり、システム行列に関する条件式を追加することで、最適化計算の実行可能性および可解性を保証する理論を提案した。さらに提案する理論をもとに制御器を設計し、時間シミュレーションより時間変化する制御対象に対しても理論的に安定性を保証した解を求められることを示した。

第 11 章

総括

本研究では制御対象の時変性および不確定性に対応するため、モデル予測制御を用いた制御系設計手法を提案した。

研究は 3 段階に分けて行われた。第 1 段階目ではダイナミクスの時変性、不確定性それぞれに対してモデル予測制御が有用であることを検証するためそれぞれに対して制御系を設計した。

- 対時変性

適応モデル予測制御器 (AMPC 制御器) を設計した。通常のモデル予測制御 (MPC) と異なる点は制御器に与える制御対象のモデルを各時刻の最適化計算ごとに変化させる点である。計算コスト低減のため、一般的な AMPC のように毎時刻システム同定を行うのではなく、予めノミナルシステムを時系列データとして与えた。AMPC 制御器によるシミュレーションでは、通常の MPC では対応できない部分においても、適応化したことで、時変システムであってもコマンドに追従可能にした。ダイナミクスの時変性に対して AMPC が有用であると言える。

- 対不確定性

ロバストモデル予測制御器 (RMPC 制御器) を設計した。制御器には制御対象のモデルとしてノミナルモデルと、不確定性を有するシステムを予測モデルとして与えた。最適化計算器には、リアプノフの定理によってロバスト安定性を保証する制御理論を適用した。剛性に不確定性を与えたモデルに対してシミュレーションを行い、不確定性に対して対応可能であることが分かった。

第 2 段階ではそれらを統合して適応ロバストモデル予測制御器 (ARMPC 制御器) を設計した。第 1 段階で設計したロバストモデル予測制御器 (RMPC 制御器) をベースに、予測モデルを時系列データにすることで適用制御の要素を追加した。シミュレーションより、不確定性のある時変システムに対しても応答を安定化し、コマンドを追従することが分かった。しかし、使用しているロバスト制御理論は時不変システムを前提とした理論であり、制御対象が時間変化する場合には、ロバスト安定性を保証することが出来ない。具体的に、理論が破綻する部分は以下の 2 点である。

- 最適化計算の実行可能性
- 予測の精度

第 3 段階では以上の課題点を解決する新たな理論の提案を行い、シミュレーションによって理論の性能を評価した。具体的には以下の 2 点を修正した。

- 予測の間にもシステムが変化する時変 MPC に変更
- 時変 MPC でもノミナル応答性とロバスト安定性のバランスをとるために予測を無限ホライズンから有限ホライズンに変更

以上の理論を基に制御器の設計を行いシミュレーションを行った。提案する理論は十分条件を取り続けることで最適化計算の安定性と可解性を保証するものであったが、厳しい条件になりがちであることが分かった。そこで、条件を実用の範囲内で一部緩和することでシミュレーションを実行可能とし、不確定性と時変性両方に対応可能であることが分かった。今後は条件の緩和について検討を進めることで、より実用性の高い制御系設計手法として活用可能であることが期待される。

本研究の制御系設計手法と従来の制御器設計手法と比較した際の本手法の長所としては、一度の打上げに対して必要な制御器の数を大幅に低減できたこと、制御系設計において周波数領域の造詣が必要であった部分を時間領域における設計手法に変更することでより直観的な設計が可能となったことなどがあげられる。本論文で提案した手法によって制御系設計に必要な手間が減少したことで設計に要する時間を低減し、より高頻度の打上げに対応可能であることが期待できる他、再使用ロケットなど他の打上げフェーズへの応用も期待できる。

付録 A

数学的基礎事項

A.1 正定値行列・半正定値行列

行列 A を n 次の実対称行列, x を n 次の実列ベクトルとする.

$$x^T Ax > 0 \quad (\text{A.1})$$

が成立する行列 A を正定値行列,

$$x^T Ax \geq 0 \quad (\text{A.2})$$

が成立する行列 A を半正定値行列という.

A.2 シュールの補題

実対称行列 $A = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}$ が正定行列であるための必要十分条件は次の 1 または 2 である.

1.

$$Q > 0 \quad (\text{A.3})$$

かつ

$$R - S^T Q^{-1} S > 0 \quad (\text{A.4})$$

2.

$$R > 0 \quad (\text{A.5})$$

かつ

$$Q - S R^{-1} S^T > 0 \quad (\text{A.6})$$

各条件に対する証明は以下の通りである.

$$1. \quad \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S^\top Q^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & S \\ S^\top & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -Q^{-1}S \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R - S^\top Q^{-1}S \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

となるため, $\begin{bmatrix} Q & S \\ S^\top & R \end{bmatrix} > 0$ が成立する場合, $\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R - S^\top Q^{-1}S \end{bmatrix} > 0$ となる.

$$2. \quad \begin{bmatrix} I & -SR^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & S \\ S^\top & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -R^{-1}S^\top & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q - SR^{-1}S^\top & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

となるため, $\begin{bmatrix} Q & S \\ S^\top & R \end{bmatrix} > 0$ が成立する場合, $\begin{bmatrix} Q - SR^{-1}S^\top & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} > 0$ となる.

A.3 線形行列不等式 [64]

システム行列の固有値を求めることなくシステムの安定性を判別したい. このような場合に適した別の必要十分条件の1つで有用なものが, 「行列に関する不等式

$$A^\top X + XA \leq 0, X \geq 0 \quad (\text{A.9})$$

を満たす解行列 X が存在すること」である. この不等式が線形行列不等式 (linear matrix Inequality: LMI) と呼ばれるものの一例. この LMI を満たす行列を変数とする最適化問題は半正定値計画 (semidefinite programming: SDP) 問題と呼ばれる.

LMI が制御系設計にもたらした最大の恩恵は, 従来は仕様を満足する制御器を解析的に導けなかった設計問題に対して理論的な保証を持つ数値解を与えられるようになったことである.

A.4 ポリトープ

不確かさのポリローブ表現は他の構造的な不確かさの表現に比べ, システムの構造的変動をより直接的に表現することができる [65]. また, ポリトープ型の不確かさは LMI との親和性が高い [66].

システムがポリトープ表現に基づいた不確かさをもつことは式 (A.10) で表現できる.

$$A = \sum_{i=1}^N \lambda_i A_i, \quad B = \sum_{i=1}^N \lambda_i B_i \quad (\text{A.10})$$

ここで、 λ は式 (A.11) を満たすパラメータである。また、行列 A_i, B_i は端点行列と呼ばれる。

$$\lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \quad (\text{A.11})$$

付録 B

パラメーター一覧

本研究ではパラメータとして日本の固体ロケットである M-V ロケットの値を線形補完したものを使用した。以降に法線力係数傾斜，動圧，ノズルを除く全機体の慣性能率，全機体の質量，推力，重心の位置を示す。なお，推力は Fig. 6.6 の再掲である。

- 法線力係数傾斜

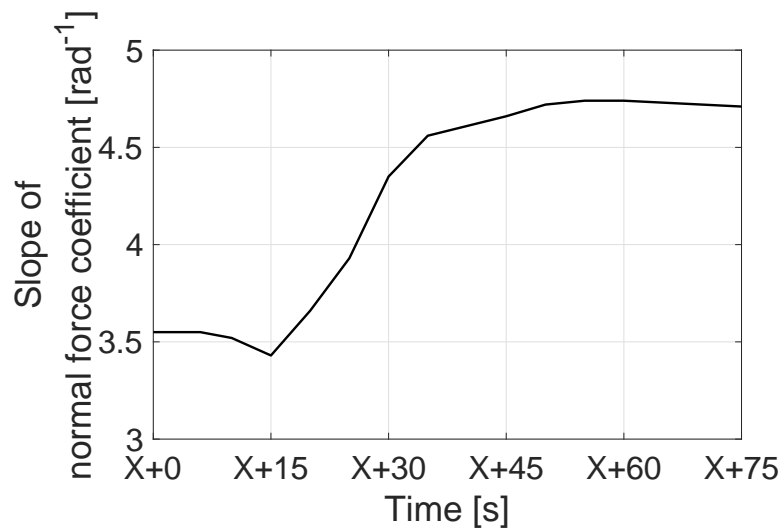


Fig. B.1: Time-series data of slope of normal force coefficient.

Fig. B.1 に示した機体全体の法線力係数傾斜を基に計算した局所法線力係数傾斜の時系列データを Table B.1 に示す.

Table B.1: Time-series data of slope of normal force coefficients.

Time [s]	M-V [rad^{-1}]	Local value	
		Body part [rad^{-1}]	Fearing part [rad^{-1}]
3	3.55	0.1264	0.1252
6	3.55	0.1264	0.1252
10	3.52	0.1253	0.1242
15	3.43	0.1221	0.1210
20	3.66	0.1303	0.1291
25	3.93	0.1399	0.1386
30	4.35	0.1549	0.1534
35	4.56	0.1624	0.1608
40	4.61	0.1641	0.1626
45	4.66	0.1659	0.1644
50	4.72	0.1681	0.1665
55	4.74	0.1688	0.1672
60	4.74	0.1688	0.1672
65	4.73	0.1684	0.1668
70	4.72	0.1681	0.1665
75	4.71	0.1677	0.1661

- 動圧

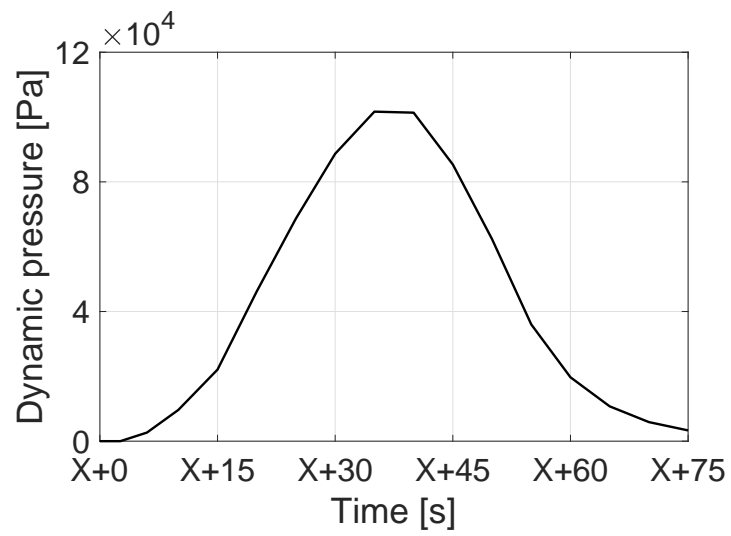


Fig. B.2: Time-series data of dynamic pressure.

- ノズルを除く全機体の慣性能率

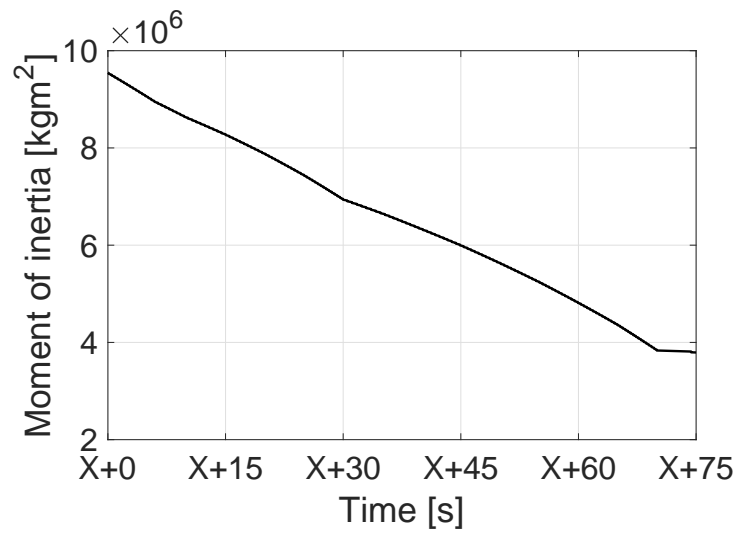


Fig. B.3: Time-series data of moment of inertia.

- 全機体の質量

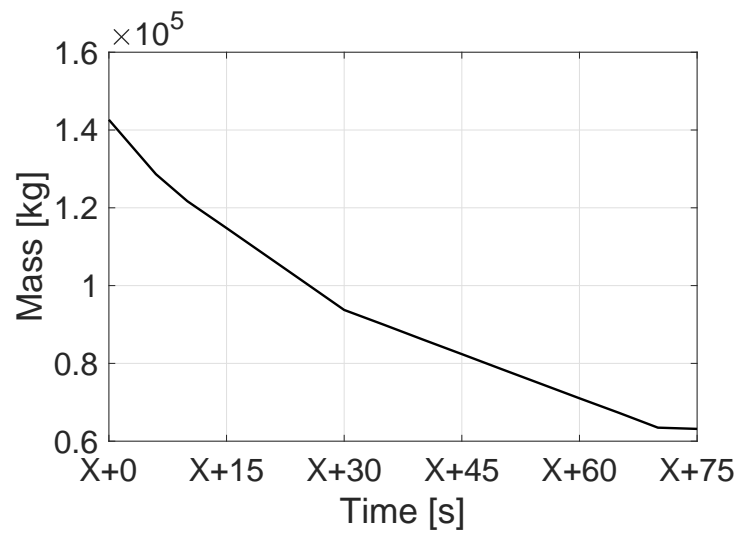


Fig. B.4: Time-series data of mass.

- 推力 (再掲)

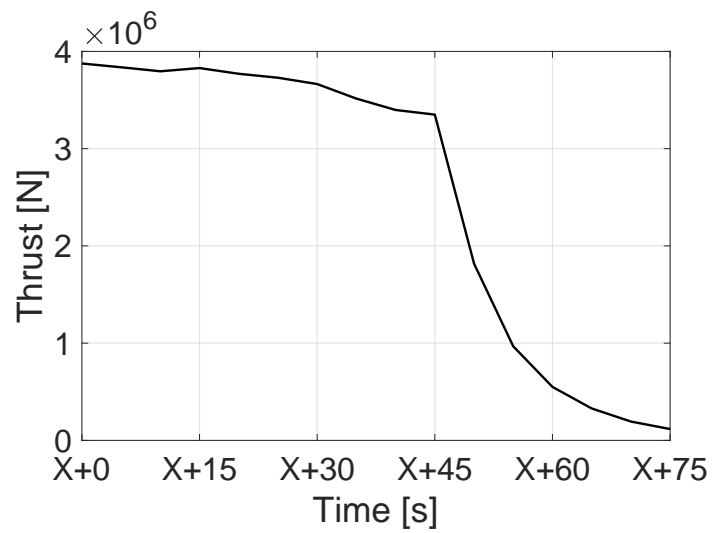


Fig. B.5: Time-series data of thrust.

- 重心の位置

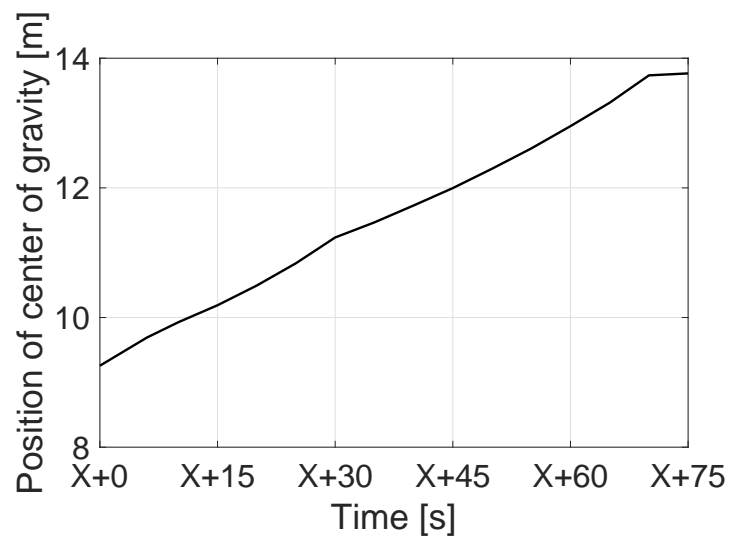


Fig. B.6: Time-series data of mass center position.

参考文献

- [1] 気象衛星センター, ”世界の気象衛星観測網”, 気象庁, 2022, <https://www.data.jma.go.jp/mscweb/ja/general/www.html>, (参照 22/10/04).
- [2] 気象庁, ”日本の静止気象衛星のあゆみ”, 国土交通省, 2022, https://www.data.jma.go.jp/sat_info/himawari/enkaku.html#gms, (参照 22/10/04).
- [3] 国土地理院, ”GNSS とは”, 国土交通省, https://www.gsi.go.jp/denshi/denshi_aboutGNSS.html, (参照 22/10/04).
- [4] World Meteorological Organization (WMO), ”Integrated space-based observing system”, 2022, <https://public.wmo.int/en/our-mandate/what-we-do/observations/integrated-space-based-observing-system>, (参照 22/10/04).
- [5] M. Cho, M. Hirokazu and F. Graziani, Introduction to lean satellite and ISO standard for lean satellite, 7th International Conference on Recent Advances in Space Technologies (RAST), pp.789-792, (2015).
- [6] 国立研究開発法人宇宙航空研究開発機構, ”イプシロンロケット 4号機による革新的衛星技術実証 1号機の打上げ結果について”, 2019, https://www.jaxa.jp/press/2019/01/20190118_epsilon4_j.html, (参照 22/10/05).
- [7] S. Yamada, M. Horikawa, H. Izumi, K. Yagi, and T. Imoto, Advancements in the Epsilon Launch Vehicle's Rideshare Capability and Future Missions, SSC22-XI-05, 2022.
- [8] 祖父江 照雄, 柴藤 羊二, 佐木 誠夫, 遠藤 守, H-II ロケット, 日本航空宇宙学会誌, 43 巻, 500 号, pp.485-499, 1995.
- [9] 前村 孝志, 渥美 正博, 日本の液体ロケットエンジン開発, 高温学会誌, 33 巻, 5 号, pp. 229-236, 2007.
- [10] 堀 秀輔, H-IIB ロケットの開発及びそれを支える技術, 混相流, 24 巻, 2 号, pp. 132-137, 2010.

- [11] T. Nara, T. Onga, M. Niitsu, J. Takida, A.Sato, and N. Negoro, Development Status of H3 Launch Vehicle -To compete and survive in the global commercial market-, Mitsubishi Heavy Industries Technical Review, Vol. 54, No. 4, pp.32–39, 2017.
- [12] <https://www.rocket.jaxa.jp/column/knowledge/rocketHistory.html>, (参照 22/05/01).
- [13] 望月 一憲, 坪井 正徳, 辻岡 光俊, 金子 敬郎, 尾場瀬 公人, 坂本 登, 再使用型ロケット開発に向けた技術実証, 三菱重工技報, Vol.54, No.4, 2017.
- [14] W. J. Elke, J. Pei, R. J. Caverly, and D. Gebre-Egziabher, A Low-Cost and Low-Risk Testbed for Control Design of Launch Vehicles and Landing Systems,IEEE Aerospace Conference, pp. 1–12, 2021.
- [15] 野波 健蔵, 西村 秀和, 平田 光男, MATLAB による制御系設計, 第 1 版 8 刷, 学校法人 東京電機大学 東京電機大学出版局, 2011.
- [16] 川口 淳一郎, M-3S-II 型ロケットの制御理論の応用, 計測と制御, Vol. 23, No. 1, pp.93–99, 1984.
- [17] 森田 泰弘, 川口 淳一郎, 後藤 晋一, M-V ダイナミクスと姿勢制御論理の設計, 宇宙科学研究所報告, 特集第 47 号, pp.141–154, 2003.
- [18] B. Wie, W. Du, and M. Whorton, Analysis and design of launch vehicle flight control systems, AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, 2008.
- [19] Robust Control for Reusable Rockets via Structured H-infinity Synthesis
- [20] Hybrid adaptive launch vehicle ascent flight control
- [21] S. Dey, D. K. Giri, V. Laxmi, and A. K. Ghosh: Time-Varying Non-Singular Terminal Sliding Mode Attitude Control of Reusable Launch Vehicle, 15th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, pp. 984–989, 2018.
- [22] D. Trotta, A. Zavoli, and G. D. Matteis: Optimal tuning of adaptive augmenting controller for launch vehicles in atmospheric flight, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 43 No. 11, pp. 2133–2140, 2020.
- [23] J. P. Belletti Araque, A. Zavoli, D. Trotta, and G. D. Matteis, Genetic Algorithm Based Parameter Tuning for Robust Control of Launch Vehicle in Atmospheric Flight, IEEE Access, Vol. 9, pp. 108175–108189, 2021.
- [24] L. Zhang, C. Wei, R. Wu, and N. Cui: Adaptive fault-tolerant control for a

- VTVL reusable launch vehicle, *Acta Astronautica*, Vol. 159, pp. 362–370, 2019.
- [25] 警視庁, 道路交通法の一部を改正する法律の施行に伴う関係政令の整備に関する政令 (令和4年政令第391号), <https://www.npa.go.jp/laws/kaisei/seirei.html>, (参照 23/1/20).
- [26] 鶴生 知輝, R. Quirynen, S. D. Cairano, K. Berntorp, GNSS を用いた自動運転システムにおける非線形モデル予測制御による車両統合制御, 自動車技術会論文集, Vol. 50, No. 4, pp. 1176–1181, 2019.
- [27] 北澤 章平, 山口 昌志, 金子 哲也, リスクポテンシャルを用いたすれ違い場面における自動運転車両の操舵および速度制御目標生成, 日本機械学会論文集, 85 巻, 880 号, pp. 19-00145, 2019.
- [28] G. V. Raffo, M. G. Ortega, F. R. Rubio, An integral predictive/nonlinear H_∞ control structure for a quadrotor helicopter, *Automatica*, Vol. 46, No. 1, pp. 29–39, 2010.
- [29] 野波 健蔵, ドローン工学入門 —モデリングから制御まで, コロナ社, 2020.
- [30] 下村 卓, LPV 制御理論による航空機の制御, 計測と制御, Vol. 57, No. 4, pp. 272–278, 2018.
- [31] E. Prempain, I. Postlethwaite, H_∞ loop shaping control of a fly-by-wire helicopter, *Automatica*, Vol. 41, No. 9, pp. 1517–1528, 2005.
- [32] Y. Han, J. Biggs, and N. Cui, Adaptive fault-tolerant control of spacecraft attitude dynamics with actuator failures, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 38, No. 10, pp. 2033–2042, 2015.
- [33] Godard, and K. D. Kumar, Robust attitude stabilization of spacecraft subject to actuator failures, *Acta Astronautica*, Vol. 68, No. 7-8, pp. 1242–1259, 2011.
- [34] 佐々木 貴広, 櫻又 直, 下村 卓, DGVSCMG を搭載した宇宙機の LPV 制御理論による姿勢制御, 日本航空宇宙学会論文集, 63 巻, 3 号, pp. 77–82, 2015.
- [35] 西谷 紘一, モデル予測制御の応用, 計測と制御, 28 巻, 11 号, pp. 996–1004, 1989.
- [36] J. D. Carlo, P. M. Wensing, B. Katz, G. Bledt and S. Kim, Dynamic Locomotion in the MIT Cheetah 3 Through Convex Model-Predictive Control, *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pp. 1–9, 2018.
- [37] C. Shin, P. W. Ferguson, S. A. Pedram, J. Ma, E. P. Dutton and J. Rosen, Autonomous Tissue Manipulation via Surgical Robot Using Learning Based Model Predictive Control, *International Conference on Robotics and Automa-*

- tion (ICRA), pp. 3875–3881, 2019.
- [38] A. Bemporad, N.L. Ricker, and M. Morari, Time-Varying MPC Control of a Time-Varying Plant, Model Predictive Control Toolbox User’s Guide, pp. 6–66 – 6–72, Mathworks, 2019.
- [39] J. Kohler, E. Andina, R. Soloperto, M. A. Muller and F. Allgower, Linear robust adaptive model predictive control: Computational complexity and conservatism, IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC), pp. 1383–1388, 2019.
- [40] X. Lu and M. Cannon, Robust Adaptive Tube Model Predictive Control, American Control Conference (ACC), pp. 3695–3701, 2019.
- [41] M. Lorenzen, F. Allgöwer, and M. Cannon, Adaptive Model Predictive Control with Robust Constraint Satisfaction, IFAC-PapersOnLine, Vol. 50, No. 1, pp. 3313–3318, 2017,
- [42] M. Tanaskovic, L. Fagiano, and V. Gligorovski, Adaptive model predictive control for linear time varying MIMO systems, Automatica, Vol.105, pp.237–245, 2019.
- [43] B. Pluymers, L. Roobrouck, J. Buijs, J.A.K. Suykens, B. De Moor, Constrained linear MPC with time-varying terminal cost using convex combinations, Automatica, Vol. 41, No. 5, pp. 831–837, 2005.
- [44] 市原 裕之, 藤田 雅貴, Tube-based モデル予測制御による移動ロボットの動的障害物回避, 計測自動制御学会論文集, 54 巻, 2 号, pp. 269–280, 2018.
- [45] R. Gonzalez, M. Fiacchini, J. L. Guzman, T. Alamo, and F. Rodriguez, Robust tube-based predictive control for mobile robots in off-road conditions, Robotics and Autonomous Systems, Vol. 59, No. 10, pp. 711–726, 2011.
- [46] P. E. Orukpe and I. M. Jaimoukha, Robust model predictive control based on mixed H_2/H_∞ control approach, European Control Conference (ECC), pp. 2223–2228, 2009.
- [47] S. A. Bortoff, P. Schwerdtner, C. Danielson, S. D. Cairano and D. J. Burns, H-Infinity Loop-Shaped Model Predictive Control With HVAC Application, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 30, No. 5, pp. 2188–2203, 2022.
- [48] V. Mukundan, A. Maity, S. R. Kumar, and U. P. Rajeev, Trajectory optimization and guidance for solid motor propelled launch vehicle ascent, Proceedings of the American Control Conference, pp. 3575–3580, 2019.
- [49] B. Benedikter, A. Zavoli, G. Colasurdo, S. Pizzurro, and E. Cavallini, Autonomous

- upper stage guidance using convex optimization and model predictive control, Accelerating Space Commerce, Exploration, and New Discovery Conference (ASCEND), pp.1–19, 2020.
- [50] J. Guadagnini, M. Lavagna, P. Rosa, Model predictive control for reusable space launcher guidance improvement, *Acta Astronautica*, Vol. 193, pp. 767–778, 2022.
- [51] S. A. Vignesh, I. H. APM, A. K. VP, A. P, M. P. Abraham and I. Habeeb, Trajectory Planning and Soft Landing of RLV Using Non-Linear Model Predictive Control, 2021 Seventh Indian Control Conference (ICC), pp. 87–92, 2021.
- [52] 小野田 淳次郎, 峯杉 賢治, M-V 型ロケットの構造・機構, 宇宙科学研究所報告, 特集第 47 号, pp. 25–84, 2003.
- [53] 高野 雅弘, 嶋田 徹, 堀 恵一, 徳留 真一郎, 羽生 宏人, M - V 型ロケットの推進性能, 宇宙科学研究所報告, 特集 第 47 号, pp. 85–116, 2003.
- [54] L. マイクロビッチ 著, 砂川 恵 訳, 電子計算機活用のための振動解析の理論と応用 (上), ブレイン図書出版株式会社, 2008.
- [55] 糺谷 和久, 池田 雅夫, 木田 隆, Collocated Feedback による宇宙構造物の最適制御, 計測自動制御学会論文集, 25 巻, 8 号, pp.882–888, 1989.
- [56] 黒滝 勇貴, 長塩 知之, 木田 隆, コロケーション条件を満たすジャイロシステムの出カフィードバックによるロバスト安定化と LMI による最適設計, 計測自動制御学会論文集, 49 巻, 10 号, pp. 952–960, 2013.
- [57] 川口 淳一郎, M-3S-II 型ロケットの制御理論の応用, 計測と制御, 23 巻, 1 号, pp. 93–99, 1984.
- [58] 山川 宏, 前田 行雄, 石井 信明, 小川 博之, 野中 聡, 山本 高行ら, M-V ロケットの飛翔軌道/風補正/電波誘導, 宇宙航空研究開発機構特別資料 M-V 型ロケット (5 号機から 8 号機まで), pp.477–525, 2008.
- [59] A. Bemporad, N.L. Ricker, and M. Morari, Adaptive MPC, Model Predictive Control Toolbox User’s Guide, pp. 7-2 – 7-5, Mathworks, 2019.
- [60] Design Controller Using MPC Designer, <https://jp.mathworks.com/help/mpc/gs/introduction.html>, (参照 22/10/13).
- [61] 森田 泰弘, 後藤 晋一, M-V ロケットのダイナミクスと姿勢制御アルゴリズムの設計, 宇宙航空研究開発機構特別資料 M-V 型ロケット (5 号機から 8 号機まで), pp. 199–203, 2008.
- [62] J. M. Maciejowski 著, 足立修一, 菅野政明 訳, モデル予測制御 制約の下での最適制御, 東京電機大学出版局, 2019.

- [63] M. V. Kothare, V. Balakrishnan, and M. Morari: Robust Constrained Model Predictive Control using Linear Matrix Inequalities, *Automatica*, Vol. 32, No. 10, pp.1361–1379, 1996.
- [64] 小原 敦美, 行列不等式アプローチによる制御系設計, コロナ社.
- [65] 藤井 隆雄, 2次安定化とロバスト制御, *計測と制御*, Vol.29, No.2, pp. 142–150, 1990.
- [66] 岡島 寛, ポリトープ型不確かさを有する連続時間線形時不変システムに対するモデル誤差抑制補償器のロバスト性能解析, *計測自動制御学会論文集*, Vol.55, No.12, pp. 800–807, 2019.

業績目録

1. 発表論文

- (a) 坂岡 恵美, モデル予測制御による宇宙飛翔体の姿勢制御系設計 (Attitude Control of Space Launch Vehicles by Using Model Predictive Control), 計測自動制御学会論文集, Vol.58 No.3, pp.168-178, 2022.

2. 口頭発表

- (a) Emi Sakaoka, Novel Attitude Control Design of Space Launch Vehicle, 71st International Astronautical Congress, IAC-20/E2/2/6/x57997, on-line, 2020.
- (b) 坂岡 恵美, 宇宙飛翔体のダイナミクス変化に対応可能な適応制御器設計, 第 65 回宇宙科学技術連合講演会, オンライン, 2021.
- (c) Emi Sakaoka, Attitude Control Design for Launch Vehicle with Time-Varying Characteristics, 33rd International Symposium on Space Technology and Science, 2022-g-09, online, 2022.
- (d) Emi Sakaoka, Controller Design for Launch Vehicles by Integrating Adaptive Control with Robust Control Based on Model Predictive Control, 73rd International Astronautical Congress, IAC-22/E2/2/x70987, Paris, France, 2022.

3. ポスター発表

- (a) 坂岡 恵美, 宇宙飛翔体のロバスト制御に関する研究および今後の展望, 第 7 回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム, 1145 番, 徳島, 日本, 2020.
- (b) 坂岡 恵美, モデル予測制御による宇宙飛翔体の時変性を考慮した姿勢制御系設計, 第 8 回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム, PS1-1, オンライン, 2021.

謝辞

本研究は著者が総合研究大学院大学 物理科学研究科 宇宙科学専攻に在籍し、宇宙航空研究開発機構 宇宙科学研究所にて行いました。研究を遂行するにあたって多くの方々のご指導とご助力を賜りました。皆様にはこの場を借りて御礼申し上げます。

指導教員である宇宙科学研究所 森田泰弘教授には5年間ご指導いただきました。専門分野に関する知識のみならず、広い視野を持って業界を見る力、プレゼンテーションスキルなど研究者として必要な能力を向上させるにあたって多くのことを学ばせていただきました。また、宇宙科学研究所 三浦政司准教授には最後の約1年半の間、副指導教員としてご指導いただきました。日々の研究の進捗だけでなく、研究室OBとして研究生活も気にかけていただいたことで、細やかな不安が取り除かれ、研究に邁進できました。

宇宙科学研究所 川勝康弘教授、佐伯孝尚教授、ならびに野中聡教授にはご多用の中、論文審査にお時間を割いていただきました。

研究室秘書の酒井菜保氏には5年間、研究生活の支援だけでなく、人として成長するためのご助言を多く賜りました。

研究室での生活は諸先輩方に支えていただきました。岩崎祥大博士、武藤智太郎博士には研究対象に関する文献の輪読に誘っていただき、日々の研究での悩みについても相談にのっていただきました。また、学生生活の後半は平田大氏をはじめとした後輩諸氏にもお世話になりました。各々研究分野が異なる中ゼミを行うことで、宇宙分野の広域に渡って知識を深めるだけでなく、物事を伝える能力を向上させることができました。皆様のおかげで最後の学生生活が豊かになりました。総合研究大学院大学の同期の大平元希氏とは5年間の大学院生活を共にし、実習や審査など辛かった時期に励ましていただきました。

最後に、長い学生生活を経済的に支えてくれた父、精神的に支えてくれた母、幼少期からの著者の夢を尊重し大学院進学を後押ししてくれた兄2人、そして夢に向かって走り続けた著者を励まし応援してくれた全ての友人に感謝の意を表し、結びといたします。

坂岡 恵美