

氏 名 高橋 翔大

学位(専攻分野) 博士(統計科学)

学位記番号 総研大甲第 2407 号

学位授与の日付 2023 年 3 月 24 日

学位授与の要件 複合科学研究科 統計科学専攻
学位規則第6条第1項該当

学位論文題目 Bregman Proximal Algorithms Exploiting DC Structure for
Nonconvex Optimization and Their Applications

論文審査委員 主 査 池田 思朗
統計科学専攻 教授
Bruno Figueira Lourenço
統計科学専攻 准教授
田中 未来
統計科学専攻 准教授
竹之内 高志
政策研究大学院大学 政策研究科 教授

博士論文の要旨

氏名 高橋 翔大

論文題目 Bregman Proximal Algorithms Exploiting DC Structure for Nonconvex Optimization and Their Applications

Optimization theory is an important technique in the fields of science and engineering. In optimization theory, the objective function measures the performance of a certain model on a constraint set. For example, in machine learning and signal processing, the objective function measures the goodness of fit between observation data, a model or the prior of a model, and some constraints.

An optimization problem is said to be convex if its objective function and its constraint set are convex. Otherwise, it is said to be nonconvex. In many interesting applications, including those of machine learning and signal processing, the objective function often becomes nonconvex. In this thesis, we propose a general class of algorithms for nonconvex optimization problems.

Convex optimization has been studied for a long time and is known to be a powerful tool, such as least-squares and linear programming problems. In convex optimization, any local optimal solution is also a global optimal solution. On the other hand, in nonconvex optimization, a local optimal solution is not always a global optimal solution. Therefore, it is generally impossible to obtain a global optimal solution, and we discuss local optimality. The goal of nonconvex optimization is to obtain a stationary point if the objective function is continuously differentiable, or a limiting stationary point, otherwise. In general, any local optimal solution is a (limiting) stationary point and not vice versa.

Difference of convex functions (DC) optimization is a general and effective approach to nonconvex optimization. In this thesis, exploiting DC structure for nonconvex optimization problems, we propose algorithms based on the Bregman distance. The Bregman distance is a generalization of the squared Euclidean distance. Thus, it generalizes algorithms applicable to a wide range of optimization problems. Firstly, we propose the Bregman proximal DC algorithm (BPDCA), which is the proximal DC algorithm based on the Bregman distance. Because DC decomposition is not unique, we have flexibility in the choice of the Bregman distance. The sufficiently decreasing property of the objective function is guaranteed by the L -smooth adaptable (L -smad) property, which is less restrictive than L -smoothness. We establish global convergence of BPDCA to a limiting stationary point or a limiting critical point under the Kurdyka-Łojasiewicz (KL) property or subanalyticity of the objective function, respectively. Furthermore, we evaluate the rates of convergence of BPDCA. Secondly, we propose the

Bregman proximal DC algorithm with extrapolation, which is accelerated by the extrapolation technique adapted to the Bregman distance. This extrapolation technique requires fewer computational tasks and is easy to implement. We also establish global convergence and the rate of convergence of BPDCAe under the L -smad property and the KL property or subanalyticity. Finally, we propose the hybrid Bregman proximal DC algorithm (HBPDCA). It alternately minimizes the two subproblems: One is the same as BPDCA, while the other is a convex optimization problem. For HBPDCA, we establish global subsequential convergence.

In this thesis, we demonstrate the performance of our proposed algorithms through some applications, which are phase retrieval, blind deconvolution, and self-calibration in radio interferometric imaging. They are known to be ill-posed because their solution may not be unique. Adding some regularization, we write these problems as nonconvex optimization problems.

Firstly, we applied our methods to phase retrieval. Phase retrieval is the problem of recovering the phase from magnitude measurements. We reformulate the nonconvex optimization problem of phase retrieval as a DC optimization problem. Exploiting DC structure, we obtain larger step sizes than the existing one. By using these step sizes, we succeed in accelerating BPDCA(e) in phase retrieval. Numerical experiments on phase retrieval showed that BPDCAe outperformed existing Bregman proximal algorithms.

Secondly, we solved blind deconvolution with our approach. Blind deconvolution is a technique to recover an original signal without knowing a convolving filter from its convolution. Existing Bregman algorithms were not obvious to apply to blind deconvolution because the objective function has the quartic and bilinear term. On the other hand, exploiting DC structure, we obtain an appropriate Bregman distance and apply our proposed algorithms. Through numerical experiments on image deblurring, BPDCAe successfully recovered the original image and outperformed other existing algorithms.

Finally, we show that self-calibration in radio interferometric imaging can be solved with our approach. A radio interferometer has several antennas to observe radio waves. It measures the complex visibilities of Fourier-transformed images with noise. The purpose of calibration is to remove noise in the visibilities arising from measuring instruments and the atmosphere. Self-calibration is a calibration of complex gains given by each antenna. For this application, exploiting DC structure, we obtain an appropriate Bregman distance and the L -smad parameter. Besides, we provided the closed-form solution of the subproblem of HBPDCA.

博士論文審査結果

Name in Full
氏名 高橋 翔大

Title
論文題目 Bregman Proximal Algorithms Exploiting DC Structure for Nonconvex Optimization and Their Applications

2023年1月26日14時から約90分にわたり、高橋翔大氏の博士論文審査委員会を開催した。出願者による1時間の公開發表による概要説明と質疑応答、さらに審査委員による30分の審査を行なった結果、審査委員会は本論文が学位の授与に値すると判断した。

[論文の概要]

出願論文は最適化問題における非凸最適化問題を扱う。非凸最適化問題とは目的関数や制約条件が凸性を持たない問題を指す。一般に大域的最適解はおろか局所的最適解を求めることさえ難しく、停留条件を満たす解を求めることが現実的な目標となる。出願論文は目的関数が非凸である無制約最適化問題に対して Difference of Convex (DC, 凸関数の差) 構造を利用した最適化手法の開発および信号処理の諸問題への応用についてまとめられている。英文で記述され、全5章と参考文献リストを合わせて101ページである。

第1章は序論である。ヘッセ行列など2次以上の微分情報を利用しない無制約最適化手法の既存研究を概観し、当該研究の貢献を示している。まず、機械学習などで用いられる加速近接勾配法と、その拡張である Bregman 距離を用いた加速近接勾配法を説明している。次に、非凸最適化問題に対して DC 構造を利用した近接 DC アルゴリズムを説明し、本研究ではその拡張である Bregman 距離を用いた近接 DC アルゴリズムとその加速法などを提案することを述べている。さらに、提案するアルゴリズムを信号処理分野の問題に適用した結果を示すことが述べられている。

第2章では提案手法を理解するために必要な数学的概念を導入している。具体的には、停留条件を記述するために必要な極限劣微分、提案手法を記述するために必要な Bregman 距離、提案手法の収束性の保証のために仮定される L -平滑適応可能性、Kurdyka-Łojasiewicz (KL) 性、劣解析性、そして信号処理分野の問題において複素変数実数値関数の勾配として用いる Wirtinger 微分について定義や性質が与えられている。

第3章では Bregman 距離を用いた近接 DC アルゴリズム (BPDCA) とその加速化法 (BPDCAe)、さらにブロック交互最小化と組み合わせたアルゴリズム (HBPDCA) が提案され、それぞれの手法の理論保証が与えられている。BPDCA は近接 DC アルゴリズムに現れる2乗 L_2 距離を Bregman 距離で置き換える拡張であり、BPDCAe はそれに慣性項を追加して加速化を施したものである。これらの提案手法について L -平滑適応可能性を含む仮定のもとでの大域的収束性と KL 性のもとでの局所的収束性が示されている。また、BPDCA の1反復と凸最適化を交互に行なう HBPDCA も提案され、部分列の大域的収束性が示されている。

第4章では、前章で提案された提案手法を信号処理分野の問題に適用している。この適用は汎用的な手法を機械的に適用すればよいというものではなく、目的関数の DC 分解、適切な Bregman 距離、L-平滑適応可能性を成り立たせる定数 L の評価、子問題に対する効率のよい解法、といった複数の観点を総合的に勘案する必要がある。具体的には、3つの適用例を与えている。(a) 位相回復に対応する最適化問題に対して BPDCA(e) を適用する方法を示し、計算機実験によって既存の最適化手法よりも優れていることを示している。(b) 暗中逆畳み込みに対応する最適化問題に対して BPDCA(e) を適用する方法を示し、理論と実験の両面から既存手法に対する優位性を示している。(c) 電波干渉計の自己較正と画像構成を同時に行なう際に解く必要のある最適化問題に対して HBPDCA を適用する手順を示している。

第5章では出願論文で述べられた結果の要約と今後の課題が述べられている。

[論文の評価]

本論文は既存の最適化手法では、解くことが難しい非凸最適化問題に対し、DC 分解と適切な Bregman 距離を用いて効率の良い最適化手法を構成する方法を提案している。さらに信号処理分野の3つの問題に適用してその有効性を示している。本論文のアプローチは非凸最適化問題に対する新たな方向性を与えるものであり、最適化理論への貢献度は高い。応用を通じて実際の有効性を示していることも高く評価できる。審査委員会は、本論文が学位の授与に値すると判断した。

本論文の第 3.1, 3.2, 4.1 節の内容は学術雑誌 *Computational Optimization and Applications* に掲載された査読付き論文に基づいている。また、第 4.2 節の内容は学術雑誌 *Signal Processing* に掲載された査読付き論文に基づいている。