

氏 名 小森田 祐一

学位(専攻分野) 博士(情報学)

学位記番号 総研大甲第 2415 号

学位授与の日付 2023 年 3 月 24 日

学位授与の要件 複合科学研究科 情報学専攻
学位規則第6条第1項該当

学位論文題目 Fibrational Theory of Behaviors and Observations:
Bisimulation, Logic, and Games from Modalities

論文審査委員 主 査 蓮尾 一郎
情報学専攻 教授
龍田 真
情報学専攻 教授
関山 太朗
情報学専攻 助教
長谷川 真人
京都大学 数理解析研究所 教授
Bartek Klin
オックスフォード大学 准教授

(様式3)

博士論文の要旨

氏名 小森田 祐一

論文題目 Fibrational Theory of Behaviors and Observations: Bisimulation, Logic, and Games from Modalities

Mathematical modeling of computer systems is of fundamental importance in software verification. Some of such mathematical models focus on the possible states and transitions of the target system. Such "state-and-transition" models are unified, using the language of category theory, into the concept called coalgebra. It generalizes models in automata theory and process theory. One way to view coalgebra theory is that it is "a theory of observable behaviors": Notions like bisimulation relation and simulation preorder are defined in such a way that they are invariant under coalgebra morphisms, which morally means that they depend only on "observable" information. These are generalized to fibrational coinduction, which is parametrized in fibrations and functor liftings. It gives rise to a wide range of examples, including quantitative ones like behavioral metrics. However, it lacks explicit modeling of "observation." Bisimulation relation and behavioral distance are known to be tightly connected to games and modal logic through "observations" on the system, but in this fibrational framework, such connections are not understood well.

This thesis proposes a new framework in which observations are modeled as certain morphisms. The main point is to adopt codensity lifting, a known method to define functor lifting to use in fibrational coinduction. The resulting object generalizes bisimulation relation and simulation preorder, and we call it codensity bisimilarity. The definition of codensity lifting involves a set of morphisms, which represents the set of "observations." This feature makes it possible to connect codensity bisimilarity to games and modal logic.

After introducing our framework, we show two main results. The first is a game characterizing codensity bisimilarity, which we call the codensity bisimilarity game or just the codensity game. Just like the conventional bisimilarity game, the codensity game is played by two players named Duplicator and Spoiler, and it may last indefinitely long, in which case Duplicator wins. The difference between the conventional game and our game is the players' moves. Spoiler's moves are "observations," i.e., arrows from the state space object. Duplicator's moves are predicates themselves: for example, in the codensity game for bisimilarity relation, Duplicator chooses an equivalence relation as a move each time. We show that the codensity game characterizes the codensity bisimilarity in general: both the statement and the proof are independent of the specific property of the behavior functor and the

fibration. For some better-behaved fibrations, we construct another game called the trimmed codensity bisimilarity game. In this game, the set of Duplicator's moves is smaller: for example, in the game for bisimilarity relation, Duplicator's moves are restricted to pairs of states instead of equivalence relations on the state space. We instantiate the underlying fibrations of codensity games so that they can characterize bisimilarity relation and behavioral distance. We also consider the fibration of topologies and devise a new concept called bisimulation topology with a game characterization.

The second main result concerns the adequacy and expressivity of modal logic for codensity bisimilarity. We define fibrational logical equivalence, a generalization of logical equivalence and logical distance, and show some adequacy and expressivity results. We adopt coalgebraic modal logic and fix a predicate on the "truth value" object, which we call an expressivity situation. We define two concepts from this: the fibrational logical equivalence and the codensity bisimilarity. The fibrational logical equivalence is a generalization of logical equivalence and is defined through modal logic. The codensity bisimilarity is defined through the codensity lifting, using part of the expressivity situation as the parameter of codensity lifting. We define adequacy and expressivity as the comparison between the fibrational logical equivalence and the codensity bisimilarity. Here adequacy turns out to be implied automatically. On the other hand, to prove expressivity, we need to investigate "observation" arrows in more depth. By abstracting from existing approximation arguments, we introduce approximating families and use the notion to formulate our expressivity result. We instantiate this to recover a few known expressivity results for bisimulation relations and behavioral distances. We also define a new kind of codensity bisimilarity called bisimulation uniformity. We use a known Stone-Weierstrass-type theorem for uniform spaces to derive an expressive modal logic for bisimulation uniformity.

Along with these main results, we show another technical result about codensity lifting itself. It concerns a technical condition called fiberedness, and we prove a sufficient condition for a codensity lifting to be fibered. To formulate and prove the result, we define the notion of a c -injective object. The result has a consequence also for codensity bisimilarities: it implies the reflection of the codensity bisimilarity by coalgebra morphisms. We identify c -injective objects in some cases, for example, complete lattices in the fibration of preorders and continuous lattices in the fibration of topologies. We also prove the fiberedness of several codensity lifting and, thus, the reflection of the corresponding codensity bisimilarities.

博士論文審査結果

Name in Full 氏名 小森田 祐一

Title 論文題目 Fibrational Theory of Behaviors and Observations: Bisimulation, Logic, and Games from Modalities

本論文は、情報システムのモデルである種々の状態遷移システムに対して、ふるまいと観察の統一的理論を数学的抽象論として展開し、特に「ふるまいが等しい」ということを表現するいくつかの等価性概念の間関係の一般理論を樹立するものである。これら等価性概念とはすなわち、Milner および Park による双模倣関係 bisimilarity と、様相論理、さらに無限ゲームの3つである。本論文では、これら3つの等価性概念が、ファイバー圏の中で定義される様相演算子 modality を用いて自然に現れることを示した後、やはりファイバー圏の数学的言語を用いてこれらの関係を定式化している。

本論文が樹立する一般理論において特筆すべきは、上記等価性概念が従来の定性的等価性（等価性判定が真偽の2値）にとどまらず、Desharnais らによる確率的システムの双模倣距離の概念のような定量的等価性も具体例になることである。定量的等価性概念は近年の情報システムの多様化に伴いますます重要性を増しているが、これらを包摂するような高い一般性をもつこの理論は、個別の状態遷移システムに対する既知の諸成果を統一し整理してその数学的本質を明らかにするものであり、また同時に、その一般性を活かして未知の新たな個別例を導くものになっている。

本論文の理論においては codensity lifting とよばれる圏論的構成が中心的役割を果たす。この構成は、システムの種類を表現する関手のファイバー圏に沿った持ち上げを、様相演算子を用いて一般的かつ直観的なやり方で実現するものである。本論文の研究の少し前に Katsumata らによって導入されたこの構成について、本論文はその数学的理論を発展させ、同時に圏論的モデリングにとどまらず等価性判定アルゴリズムにもつながるような広いソフトウェア科学的価値を示したものになっている。

本論文は6つの章から構成され英語で書かれている。第1章では状態遷移システムの等価性とその圏論的モデリングの既存研究について導入を述べた後、それに続く各章のアウトラインを示し、論文全体の動機づけを行っている。第2章ではこれを受けて、特に圏論的モデリングの既存研究（余代数、ファイバー圏）について、技術的準備を述べている。

第3章では codensity lifting の数学的理論を展開している。Katsumata らによってなされた定義を述べたあと、観察の概念をキーとした新たな直観的説明を述べている。またここでは、codensity lifting がファイバー圏のカルテジアン射の構造を保つ十分条件を、新たな理論的成果として述べている。この条件は、codensity lifting の重要なパラメータである観察値対象 Ω が適切な意味で入射的であるというものである。本章ではいくつかのソフトウェア科学的に重要な具体例について上記条件の検討を行い、そのなかで多くの自然な例においては上記条件が成り立ち、よって codensity lifting が良い保存則を満たすこと

を示している。

第4章では、3つの等価性概念のうち2つ、すなわち双模倣関係と無限ゲームについて、**codensity lifting**による一般理論を樹立している。いくつかの特定の状態遷移システムに対してはこの2つの等価性概念の理論はよく研究されていたが、定量的等価性を含む一般理論である本章の内容はこれまでにない一般性を持つ。また同時に、等価性を記述する無限ゲームとして本章で導入する **codensity game** は具体的ゲームであり、アルゴリズム的応用も期待できる。本章の主結果は、**codensity game** の定義と、それが双模倣関係を特徴づけることの証明である。本章ではさらに、上記一般理論の例として種々の状態遷移システムに対する具体的無限ゲームを導出し、既知のゲーム概念と比較を行っている。いくつかは既知のゲーム概念と一致し、またいくつかは新しい、既存研究にはないゲーム概念になっている。

第5章では3つの等価性概念のうちあと1つ、すなわち様相論理について、双模倣関係との関係に関する一般理論を **codensity lifting** により樹立している。様相論理による双模倣関係の特徴づけは、ラベル付き遷移系という基本的な状態遷移システムに対しては **Hennessy** と **Milner** による古典的結果があり、近年その拡張として種々の状態遷移システムに対して個別の成果が得られていた。しかし後者の個別の成果においては、技術的に込み入った表現可能性の議論のステップが1つ入ることが常であり、この議論の数学的本質が明らかになっていなかった。第5章ではこの議論の本質を **approximating family of observations** というファイバー圏の概念を用いて定式化することに成功している。本章の主結果は、上記概念を仮定した上での様相論理と双模倣関係の一致定理 (**expressivity**) の一般的証明である。本章ではさらに、この一般的証明を用いて2つの既知の定理の整理を行い、また1つの新しい具体的定理 (**bisimulation uniformity** に関するもの) を得ている。

本論文にまとめられた研究の成果は、学術誌論文1篇、査読付き国際会議・ワークショップ予稿集のフルペーパー3篇として発表されている(出願者はこれらの論文の筆頭著者)。これらを含めた出願者の出版業績は以下の通りである：主著者となる学術誌論文1篇、その他学術誌論文1篇、主著者となる査読付きトップ国際会議予稿集フルペーパー2篇、主著者となる査読付き国際ワークショップ予稿集フルペーパー1篇(単著論文)、その他国際会議予稿集フルペーパー1篇。

公開発表会では博士論文の章立てに従って発表が行われ、その後に行われた論文審査会及び口述試験では、審査委員からの質疑に対して適切に回答がなされた。

以上を要するに本論文は、状態遷移システムの等価性という理論計算機科学の基礎的トピックにおいて、ファイバー圏の理論を用いてこれまでにない一般性を持った統一理論を樹立したものである。同時に、**codensity lifting** の概念の持つ直観性によって、同理論が直観的で具体的なものになっていることも特筆に値する。実際、第4章では無限ゲーム、第5章では様相論理による、等価性の具体的・記号的特徴付けが得られており、本理論のシステム検証への実応用も今後大きく期待できる。一方で第3章では **codensity lifting** の数学的抽象論への大きな貢献も行っており、本論文の研究成果の理論・数学的価値及び応用・ソフトウェア科学的価値は双方とも高いと認められる。

以上の理由により審査委員会は、本学位論文が学位の授与に値すると判断した。