

氏 名 小川 兼司

学位（専攻分野） 博士（理学）

学位記番号 総研大甲第 944 号

学位授与の日付 平成 18 年 3 月 24 日

学位授与の要件 高エネルギー加速器科学研究科 素粒子原子核専攻  
学位規則第 6 条第 1 項該当

学位論文題目 Numerical simulations of lattice QCD near the chiral  
limit using the overlap fermion

論文審査委員	主 査 教授	岡田 安弘
	教授	熊野 俊三
	助教授	森松 治
	助教授	太田 滋生
	助教授	橋本 省二
	教授	青木 慎也（筑波大学）

In the real world of quarks and gluons described by quantum chromodynamics (QCD), quark mass is finite and space-time volume is infinite. But one can consider a system in which massless limit is taken and the length of space-time is large enough but finite. This parameter region is the so-called  $\epsilon$ -regime. In the  $\epsilon$ -regime, as well as in the infinite volume limit, the effective theory is constructed based on the symmetry of QCD and thus on the low energy theorem, but the qualitative behavior could be greatly different. The difference of these two system is related to the spontaneous breaking of the chiral symmetry. In the infinite volume, one vacuum is chosen among the degenerate vacua which is connected with each other by chiral symmetry, but in the  $\epsilon$ -regime, the vacuum becomes a superposition of degenerated vacua, and the order parameter of the chiral symmetry breaking, the chiral condensate, vanishes.

Though the physical picture of the  $\epsilon$ -regime and real world with the finite quark mass in the infinite volume differs so much, one can extract the information of QCD in the real world by doing the numerical simulations in the  $\epsilon$ -regime, because the effective theory of both system is the chiral perturbation theory and the bare parameters are the same. One of the advantages of the  $\epsilon$ -regime is that the chiral perturbation theory is safely applicable because of the smallness of quark masses, though numerical simulations out of the  $\epsilon$ -regime need extrapolation from heavier quark masses, and it might be affected by the contribution of higher order terms of chiral perturbation theory.

Moreover, QCD in the  $\epsilon$ -regime and the chiral random matrix theory can be related by the universality, so the  $\epsilon$ -regime is also interesting as a theoretical subject.

In this thesis, I studied the  $\epsilon$ -regime by numerical calculations of lattice QCD. When the  $\epsilon$ -regime is examined by the simulation of lattice QCD, the points to be considered are that quarks in this system are very light and that the expectation values of operators depend strongly on the topological charge, because, when the quark mass is very small, fermion determinant is sensitive to the distribution of low-lying eigenvalues rather than the collective effects of higher eigenvalues. Considering these two factors, tiny quark masses and the dependence of topology, one must use a lattice Dirac operator which satisfies the chiral symmetry on the lattice, Ginsparg-Wilson relation (GWR), with high accuracy.

GWR is realized by the overlap-Dirac operator, and I used this operator in this thesis. The effects of the quark loops become very important here but, when the quarks are very light, the computational methods of lattice QCD that take the effects of the quark loops into account have not been established yet. Moreover, as the compensation for the chiral symmetry, the numerical costs for one multiplication of the Dirac operator that satisfies GWR is about one hundred times larger than that of Wilson Dirac operator. Therefore it is difficult to do the dynamical simulation with commonly used hybrid Monte Carlo method in the  $\epsilon$ -regime. Then, we employed the approximation method

that includes the effects of fermion determinant by the products of low-lying eigenvalues of the overlap-Dirac operator.

Here, I calculated quantities that are derived from the mass dependence of the partition function. They are (1) the distribution of the lowest eigenvalue, (2) the mass dependence of the ratio of the partition function between topological sectors, (3) the topological susceptibility, (4) the coefficient of the quark masses in the partition function of a definite topological sector.

The analytical form is given by the chiral perturbation theory for these quantities, and the results of numerical calculations are in good agreement with the expected behavior despite the fact that we calculated only 0.1 percent of the total eigenvalues of the overlap-Dirac operator. Because the same parameter of the chiral perturbation theory can be extracted from the fitting of each quantity, one can check the consistency between these quantities. While the difference in the extracted parameters was not seen for the two-flavor simulations, the difference was seen for the one-flavor simulations. The reason might be that chiral symmetry is broken by anomaly and the Goldstone boson does not exist for one-flavor. However there is a room for discussion about legitimacy of the details of the method we used here. As a non-trivial discovery, we found that the quantities (4) contain ultraviolet divergence but they are canceled by taking the difference between topological sectors. This cancellation can be explained nonperturbatively using the finiteness of the topological susceptibility. The problem in this approximation method concerning the sampling is also discussed.

## 論文の審査結果の要旨

小川兼司氏の博士論文は、量子色力学（QCD）の有限体積低エネルギー極限（イプシロン領域と呼ばれる）での格子シミュレーションに関する研究である。

格子ゲージ理論は量子色力学を非摂動的に計算する有力な手法であるが、アップおよびダウンクォークのように QCD スケールに比べて非常に軽いクォークのシミュレーションは、現在に至るまで大きな課題として残っている。問題は、格子上のフェルミオンの定式化が陽にカイラル対称性を破っていること、および計算コストが一般にはフェルミオン質量の逆数(の冪)に比例するためにカイラル極限に近づくことが非常に困難であることによる。前者の問題は Ginsparg-Wilson 関係式に基づくフェルミオン定式化によって原理的に解決された。その代表的なものが、ここで小川氏が取り上げている Neuberger のオーバーラップフェルミオンである。一方、後者の数値計算上の問題は依然として残っている。

本博士論文で小川氏は、イプシロン領域、つまり有限体積でかつカイラル極限近傍、では物理的に重要なフェルミオンの固有モードは QCD のスケール程度かそれ以下のものだけであることに着目し、それらの固有モードだけを取り出すことで、格子ゲージ理論によるシミュレーションが可能になることを示した。カイラル極限付近のシミュレーションはオーバーラップフェルミオンを使うことで初めて可能になった。これまでオーバーラップフェルミオンのシミュレーションはクエンチ近似（ボルツマン分布からフェルミオン作用の寄与を取り除く近似）の範囲内でのみ行われてきたが、小川氏は限られた数の物理的に意味のある固有値だけでボルツマン分布への寄与を計算できることを実証した。この手法に基づいて、数値計算で得られた QCD の分配関数やトポロジー感受性、さらにはディラック演算子の固有値の間に導かれるいくつかの和則について、イプシロン領域で得られるカイラル有効理論の予言と比較し、それらのクォーク質量依存性を非常によく再現できることを示した。カイラル有効理論は低エネルギー極限では厳密に正しいので、格子計算の有用な確認手段である。また、この方法を使えばカイラル凝縮などの QCD の低エネルギー定数を決定できることも示した。得られた結果は他の方法を用いて得られたものとよく一致しており、この方法の妥当性を示すものと解釈できる。

これらの研究成果は、現実世界と同程度あるいはそれ以下の軽いクォーク質量での格子ゲージ理論の可能性を切り開いた重要な学問的成果であり、学位を授与するのにふさわしい研究である判断する。よって本審査委員会は、高エネルギー加速器科学研究科素粒子原子核専攻の博士論文審査に合格と判定する。