氏名	村 松 正 和
学位（専攻分野）	博士（学術）
学位記番号	総研大甲第６７号
学位授与の日付	平成６年３月２４日
学位授与の要件	数物科学研究科　統計科学専攻 学位規則第４条第１項該当
学位論文題目	Convergence Analysis of Affine Scaling Method for Linear Programming
論文審査委員	主 査　助教授　宮 里 義 彦 教 授　北 川 源四郎 教 授　田 辺 國 士 教 授　小 島 政 和（東京工業大学）

論 文 内 容 の 要 旨

線型計画問題は最も基本的な最適化問題であり，本論文の主要なテーマであるアフィンスケーリング法は，1967年に Dikin によって提案された最初の線型計画問題にたいする内点法である。アフィンスケーリング法は非常に単純な内点法であり，実用的にもすぐれた解法であることが数値的に確かめられているが，一方，逆に単純であるがために大域的収束の証明が困難とされてきた。本論文ではアフィンスケーリング法の実用性を常に視界に入れ，

●アフィンスケーリング法のロング・ステップサイズにおける大域的収束

●アフィンスケーリング法の非許容解を出発点とする方法への拡張

を大きな２つのテーマとしている。

内点法は一般に許容領域の内点が初期値として与えられ，そこから許容領域の内部を通って最適解へ近づく。多くの計算機実験から，アフィンスケーリング法は毎回次の点を制約領域の境界までのある比率（例えば，0.99）だけ進んだところにとるようにすると非常に性能がよいことが明らかにされている。
このような“次の点の取り方”をロング・ステップサイズとよぶ。

ところが理論的にはそのようなロング・ステップサイズにおけるアフィンスケーリング法の大域的収束は未解決の問題であった。特に退化とよばれる現象が起こると，アフィンスケーリング法の大域的収束の証明が難しくなることが知られている。“退化していない”という仮定（非退化仮定）をおいて証明をした論文は数多いが，この退化は実際の線型計画問題ではよく起きる現象であるので，実用上はそれらは重要な意味を持ちえない。実用という見地から本論文では決して非退化を仮定しない。

Ⅱ章では（１）の結果を元にして，比率を ３分の ２以下に取ればアフィンスケーリング法は収束することを証明する。これは現在までに得られている最良の結果である。また同じステップサイズで，双対推定と呼ばれる量が双対問題の最適解に収束することも証明する。これはアフィンスケーリング法によって，主問題と双対問題が同時に解かれることを意味する。主問題の最適値と双対問題の最適値は等しい（双対定理）ので，この性質はある種の停止条件として使うことができる。

証明には土谷が主退化仮定を取り除く際に開発した局所 Karmarkar ポテンシャル関数を活用する。この関数は厳密に評価する不等式を得たことが証明の成功につながった。

Ⅲ章においてはⅡ章の結果を応用し，Karmarkar の射影スケーリング法のロング・ステップサイズの変種を考える。この章の結果は（２）による。ここで提案するアルゴリズムは本質的に同次形線型計画問題に対するアフィンスケーリング法と同等であるので，上の結果を容易に適用できる。さらに問題の特殊性を考慮して Karmarkar ポテンシャル関数をより厳しく評価し，ステップサイズを ３分の ２より小さく取れば $O(nL)$（ただし，ｎは変数の数，Ｌは問題のサイズ）， ３分の ２ちょうどにとれば $O(n^2L)$ の反復回数で最適解を得られることが証明される。さらに双対推定の収束や，局所的収束率といった性質についても証明を得ている。

ここで扱われる同次形線型計画問題は最適値が０であることがあらかじめわかってい

ると仮定されている。（この仮定はそれほど不合理なものではなく，一般に解消できることが知られている。）Ⅲ章のおわりで，この条件がよりゆるい“最適値の下界が知られている”という条件に置き換えることができ，多項式性に関する定理が同様に成立することを示す。このような条件の緩和のアイデアは ToddとBurrellの仕事による。

最後にⅣ章ではアフィンスケーリング法を許容領域以外の点から出発できるような改良について論づる。この章の結果は（3）による。

冒頭にも述べたように内点法は一般に制約領域の内点が与えられていると仮定して，そこからアルゴリズムを始める。しかし実際の多くの線型計画問題では，許容内点が存在するか否か，あるいはそもそも許容解が存在するか否かが明らかでない。それを明らかにするには別の線型計画問題をひとつ解くくらいの手間がかかることが知られている。従って，内点法を許容解以外の点から始められるように拡張することは重要な課題である。すでに多くの内点法について，このような拡張が提案され，また理論的にも解析されている。アフィンスケーリング法も例外でなく，Dikin や Andersensen によっていろいろな拡張の仕方が提案されているが，やはり大域的収束の証明は困難であり，今までは計算機実験の結果のみが残されていた。

これに対し，本論文ではアフィンスケーリング法の新しい拡張版を提案するだけでなく，この大域的収束の証明を与える。すなわち，もし解こうとする線型計画問題に最適解が存在すれば，点列はそのひとつに収束し，また双対推定は双対問題の最適解に収束する。

このような拡張を考えると，一般の（内点許容解から始まる）内点法とは異なった場合，すなわち許容解がなかったり，内点許容解がなかったりする場合が考えられる。本論文ではこれらの場合についても点列の挙動を解析し，アルゴリズムとして意味のある結果が得られることを証明している。既に述べたように，これらの証明はすべて非退化仮定なしで証明してある。

論 文 の 審 査 結 果 の 要 旨

審査委員会は数物科学研究科統計科学専攻の村松正和君の論文を審査した結果，下記の理由により博士論文として十分の内容を備えていると判断した。

1）論文の概要

提案された論文は，線型計画問題の解法であるアフィンスケーリング法の収束性について論じたものである。全体は主に３つの内容から構成され，１）アフィンスケーリング法の実用的なステップサイズ（以下ロングステップと呼ぶ）の提案とその収束性の証明，２）カーマーカー法のロングステップを用いた算法の提案とその収束性の証明，３）制約条件を満足しない初期値も許容するアフィンスケーリング法の新解法の提案とその収束性の証明から成っている。

第１章：線型計画法とアフィンスケーリング法の概要と，カーマーカーの射影スケーリング法が同次形の線型計画問題にアフィンスケーリング法を適用したものと等価であることが述べられている。

第２章：アフィンスケーリング法における実用的なステップサイズ（ロングステップ）を提案し，非退化の仮定を置かずに，このロングステップを用いた算法の最適解への収束性を証明した。

第３章：第１章の後半の考察を発展させて，カーマーカーの射影スケーリング法をアフィンスケーリング法の一種と見なすことにより，ロングステップを用いた射影スケーリング法を提案し，収束性とアルゴリズムの多項式性の証明を与えている。

第４章：最適性だけでなく制約条件を満たすかどうかの判定についても逐次的な更新を行なうようにアフィンスケーリング法を拡張することで，制約条件を満たさない初期点も許容するような新算法を提案し，非退化の仮定を置かずにこの算法の収束性を証明した。さらに最適解や許容解が存在しない場合のこの算法の挙動についても明らかにした。

2）論文の評価

論文の内容は，ロングステップサイズを用いたアフィンスケーリング法（射影スケーリング法も含む）の提案と収束性の証明，制約条件を満たさない初期点も許容する新算法の提案とその収束性の証明からなるが，そのいずれも内点法による線型計画法の理論を発展させたものであり，内点法の実用化のために有用な結果を与えている。理論的にはロングステップを用いたアフィンスケーリングの収束性を，非退化の仮定を置かずに証明した点で，現在知られている中で最も進んだ結果を導いている。また本来は内点法（制約条件を満たす初期値から出発）であるアフィンスケーリング法に，制約条件に関連する更新の項を加えて任意の初期値を許容するように拡張したことは実用上極めて重要であるし，さらに同算法について非退化の仮定を置かずに収束性を証明，また許容解や最適解がないときに挙動も明らかにした点などは，内点法のこれ

までの研究全体の経緯から見て理論的にも高く評価される結果と考えられる。
これらの結果はすでに国際的にも評価されていて，第２章に関する内容は国際誌SIAM Journal on Optimization に掲載が決定している。