氏　　　名	志 村 隆 彰
学位（専攻分野）	博士(学術)
学 位 記 番 号	総研大乙第34号
学位授与の日付	平成９年３月２４日
学位授与の要件	学位規則第４条第２項該当
学 位 論 文 題 目	Monotone Regularly Varying Functions and thier Applications to Probability Measures
論 文 審 査 委 員	主　査　教　授　松縄 規
	教　授　伊藤 栄明
	教　授　清水 良一
	教　授　平野 勝臣
	名誉教　佐藤　健一（名古屋大学）
	教　授　高橋　倫也（神戸商船大学）

論文内容の要旨

この論文の主要な目的は，正則変動関数に関係する分布族についての分解問題を定式化すること，そしてその解決のための理論的道具を新たに提案しその有用性を明らかにすることである．この際に次のような問題を考察し，それに答えることは基本的な重要課題となる．“$\mathbf{D}$ を適当な $\mathbf{R}^1$ 上の分布族とし，二つの分布 μ_1 と μ_2 の合成積がこれに属すならば，因子である μ_1 と μ_2 は $\mathbf{D}$ に属するであろうか？” これを確率分布族 $\mathbf{D}$ の分解問題と呼ぶ．本論文では $\mathbf{D}$ として，正規分布の吸引域に代表される正則変動性で特徴付けられるものを扱う．

この分布族の分解問題の解決に対し理論的に貢献するため，単調正則変動関数の分解なる概念を新たに導入する．非負非減少 関数 f が 非負非減少関数 f_1 と f_2（f の成分と呼ぶ）によって（または非負非増加関数 f が非負非増加関数 f_1，f_2 によって）和 $f = f_1 + f_2$ で表されるとき，f は f_1 と f_2 に分解されると言う．単調正則変動関数の分解において，与えられた正則変動関数の成分が正則変動か否かということが問題となる．本論文は，この単調正則変動関数の分解の一般論を構築し，その結果を分布族の分解問題に応用することで，従来明確でなかったこの分野の新しい理論展開を可能にしている．

本論文は 5 章から成っている．第 1 章では非減少緩慢変動関数の分解を扱う．この場合，すべての正の成分が緩慢変動するものが存在し，そのための必要十分条件 noindent が dominated non-decrease : $\limsup_{x\to\infty}(f(2x) - f(x)) < \infty$ であるという重要な結果が明らかにされている．反対に，この条件を満たさない非減少緩慢変動関数は，正則変動しない正の成分をもつのみならず，そうした成分の和で表されることが示される．加えて，成分の性質についても詳細な考察を加えている．

第 2 章では前章の結果を用いて，α 次の truncated moment $\int_{|t|<x} t^\alpha \mu(dt)$ が緩慢変動するような分布の族と tail $\mu(x,\infty)$ が指数 $-\alpha$ $(\alpha \geq 0)$ の正則変動する分布の族（$\mathbf{D}(\alpha)$ と書く）の分解問題に対して，次のような答を得ている．正規分布の吸引域（$\mathbf{D_2}$ で表す）の場合，μ_1，μ_2 ともに，$\mathbf{D_2}$ に属さないが，その合成積 $\mu_1 * \mu_2$ は $\mathbf{D_2}$ に属するものが存在することが証明される．これは $\mathbf{D_2}$ に属する分布はそれ自身に属する分布にしか分解されないという Tucker の conjecture に対する，筆者による強い意味での否定的な回答である．加えて，全ての非退化因子が $\mathbf{D_2}$ に属するための十分条件も与えている．さらに $\mathbf{D_2}$ については，通常の合成積の代りに Mellin-Stieltjes 合成積（確率変数での独立積，以下では MS-合成積と記す）として同様な問題を考える．これに対しても，前章の結果を用いることで，MS-合成積の基本的な性質や全ての非退化因子が $\mathbf{D_2}$ に属するための十分条件が与えられる．また，$\mathbf{D_2}$ に属する分布は MS-合成積の意味でそれ自身に属する分布にしか分解されないという Maller の conjecture に対する反例を与えることにも成功している．

第 3 章では非減少緩慢変動関数の分解を単調正則変動関数の分解に一般化する．非減少緩慢変動関数とは異なり，0 に収束する非増加緩慢変動関数と指数が 0 でない単調正則変動関数は，常に正則変動しない成分の和に分解されることが証明される．さらに，正則変動しない成分の性質が，緩慢変動の場合とそうでない場合では大きく異なることが示される．第 4 章でそうした結果を $\mathbf{D}(\alpha)$ の分解問題に応用することで，ともに $\cup_{0\leq\beta<\infty}\mathbf{D}(\beta)$ には属さないが，それらの合成積は $\mathbf{D}(\alpha)$ に属するような分布が構成出来ることなどが導かれている．

最後に第 5 章で，分布の分解問題とは異なり，exponential tail をもつ分布についての話題を扱っている．これは $\mathbf{D}(\alpha)$ における MS-合成積を考えていることに他ならない．この場合も，まず分布の hazard rate の非増加性を意味する単調な ε 関数を持つ非増加緩慢

変動関数について考察している．その性質を利用することにより，long tail を持つ分布族とそのサブクラスである subexponential 分布族，exponential tail を持つ分布族と そのサブクラスである convolution equivalent 分布族との違いを表す新しいタイプの例が与えられている．

論文の審査結果の要旨

本研究は，統計の分布理論や応用確率論の基礎において重要な役割を演じる，単調正則変動関数の分解問題に組織的に取り組み，独自の解析的な道具を開発して，この分野の基盤研究に貢献している．また，それらを統計の基礎理論の分野の研究に適用し，種々の重要な結果と興味ある知見を得ている．特に，非減少緩慢変動関数を非負非減少関数を使って成分分解を行い，理論展開に有用な道具を提案・整備したことは高く評価される．

論文は五章から成っている．

第１章の主な貢献は，非減少緩慢変動関数の分解 について，分解の二成分が共に緩慢変動しないにもかかわらず，その和が緩慢変動するものの存在や，非減少緩慢変動関数がそのような分解を持つための必要十分条件などを明らかにした点である．

第２章の貢献は，前章で構築した理論を応用して，正規分布の吸引域における分解問題に対する解答を与えたことである．二つの因子分布が共に上記の吸引域 に属さないが，その合成積がそこ に属するものが構成できることが証明されている．これはこの分野で未解決であった Tucker の予想の否定的解決であり，興味深い結果である．また，truncated moment が緩慢変動する分布に関して，確率変数の独立積の分布 (Mellin-Stieltjes 合成積) の挙動やその意味での分解について，前章の非減少緩慢変動関数の結果を踏まえて論じた点も意義のある結果である．関連して，正規分布の吸引域に属する分布は上記合成積の意味でそれ自身に属する分布にしか分解されないという Maller の予想 に対し反例を与えた点も理論的な価値がある．

第３章では，非減少緩慢変動関数の分解の概念を非増加緩慢変動関数と指数が０でない単調正則変動関数の分解へ一般化することに成功している．分解，成分と言う概念は自然に拡張されるが，０に収束する非増加緩慢変動関数と，指数が０でない単調正則変動関数は，常に正則変動しない正の成分を持ち，また，そうした成分の和で表現されることを示した点も評価される．

第４章の貢献は，前章の結果を，非負半直線上で分布の裾が負の指数をもつ正則変動する分布族の分解問題に応用し，成分が正則変動しない場合について興味ある結果を与えとことである．第２章で考察した正規分布族の吸引域での対応する話題との顕著な違いについても考察し，興味ある知見を得ている．

第５章では，裾が緩慢変動する関数を用いて表現される，ある種の指数型表現を持つ分布について考察されている．分布の積率母関数の存在を仮定し， hazard rate を関連する非増加緩慢変動関数と結び付けて，合成積同等な 分布族との差異を考察した点は斬新な結果である．そこで与えられている具体例も，今後の統計理論への応用が期待される．

論文全体を通じ，優れた学力の裏付けを持った理論展開がなされている．

正則変動関数とその特別な場合である緩慢変動関数は，広い応用範囲を有するにもかかわらず，統計基礎理論における組織的な研究は手薄であった．本論文の内容は，この観点から統計基礎理論の新分野開拓の糸口となる可能性を持っている．

総合的に判断して，本研究は出願者の統計基礎理論の分野における有意義な貢献を十分に表しているものと評価できる．

以上総合して，出願者の学位取得の審査に関して，審査委員全員が合格と判断した．