氏　　　　　名　　吉　澤　真太郎

学位（専攻分野）　　博士(学術)

学　位　記　番　号　　総研大甲第418号

学位授与の日付　　平成１１年9月３０日

学位授与の要件　　数物科学研究科　統計科学専攻

学位規則第４条第１項該当

学位論文題目　　Dual Differential Geometry on the Gaussian Distributions and Related Topics

論文審査委員　　主　査　助教授　栗木 哲

教　授　伊藤 栄明

教　授　田辺 國士

教　授　古谷　賢朗（東京理科大学）

論文内容の要旨

統計学において多変量正規分布は最も基本的で重要な分布モデルである。例えば、さまざまな分野の応用研究において多変量解析と総称される多次元データ解析法が用いられることが多いが、これらは母集団が多変量正規分布に従うという仮定の下で開発された統計推測理論、データ解析手法である。また一方で歴史的には、多変量正規分布の性質や特徴づけ、あるいは多変量正規分布から派生する確率分布に関する基礎的な研究が多くなされている。

ところでこの多変量正規分布は、2次以下の積率、すなわち平均ベクトルと共分散行列で指定される (添字づけられる) いわゆるパラメトリック確率分布族の典型的な例である。これらのパラメトリック確率分布族に基づく統計的推論の解析、あるいは分布族自身の特徴づけのためのパラダイムの一つに甘利俊一東京大学名誉教授が80年代初頭に提唱した情報幾何 (統計幾何) の方法がある。この方法は、確率分布族をパラメータを局所座標系として持つ多様体 (統計多様体) として把握するというものである。この情報幾何の著しい特徴はその双対微分幾何学構造にある。双対性より派生する双対的なアファイン接続、チャート、ポテンシャル関数、ダイバージェンスなどの数学理論を展開することができる。本論文は基本的にはこの双対微分幾何学の考え方に基づき、多変量正規分布の集合を多様なアフィン接続を持つ可微分多様体ととらえて、その双対微分幾何学的構造を研究したものである。また本論文では併せて、別の二つの視点から多変量正規分布族に関する幾何構造を考察している。以下に結果の詳細を順次説明する。

まず第一の結果として、多変量正規確率分布の族の上に2母数で特徴づけられる双対微分幾何を具体的に構成し、付随する双対微分幾何のチャート、ポテンシャル関数を具体的に求めている。またこの結果に基づき新しいクラスのダイバージェンス群を与えている。この分野の先行研究としては、平均0の多変量正規分布族のなす双対微分幾何構造を扱ったA. Ohara, N. Suda, and A. Amari (1996, *Linear Algebra and Its Applications*)、および平均が0ではない場合の多変量正規分布族のなすリーマン幾何構造を扱ったL.T. Skovgaard (1984, *Scandinavian Journal of Statistics*) が良く知られているが、ここで新たに発見された幾何構造はこの両者をを特殊な場合として含むより一般的なものである。またこれらの幾何を展開するために、ダンフォード・テイラー積分を用いて対称行列を変数とする実数値関数の新しい微積分を展開し、2母数双対微分幾何の構成および A. Fujiwara and S. Amari (1995, *Phisica, Ser. D*) が一般的に論じたルジャンドル変換の関係式の、局所座標系によらない公式を導出している。また併せて体積形式に関する双対微分幾何的考察が与えられている。以上が本論文の主要部をなす第一の結果である。

本論文の第二の結果は、多変量正規分布の族がなす多様体上に Lax 形式で表現されるあるクラスの力学系を定義し、その漸近挙動を解明したことである。ここで新たに定義された力学系は、R. W. Bracket (1991, *Linear Algebra and its Application*)、あるいは M. T. Chu, K.R. Dressel (1990, *SIAM Journal of Numerical Analysis*)、Y. Nakamura (1992, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*) によって解析されたものと類似のものである。

三番目の結果は、正規分布を要素とする行列の固有値の分布に関するものである。確率

変数を要素とする行列はランダム行列と呼ばれ、原子核物理などの分野において50年代頃よりその固有値の漸近挙動が調べられている。とくに基準化固有値の分布に関する漸近理論はいわゆる半円則としてよく知られている。その一つのバージョンとして、独立同一分布に従うの正規確率変数を要素とする実確率行列の固有値が、適当な正規化のもとで複素平面上の単位円盤上に一様分布するという A. Edelman (1997, *Journal of Multivariate Analysis*) の結果がある。本論文は、Edelman とは別の行列分解を考察することにより Edelman の結果の別証明を与えている。

論文の審査結果の要旨

本審査委員会は吉澤真太郎氏の論文について慎重に検討し、公開の論文発表会を開催し審査を行った。

1. 論文の概要

申請論文は全5章から構成されている。第1章では研究の歴史的な背景が説明されている。続く第2章が本申請論文の中核となる部分である。この章ではまず多変量正規確率分布の族の上に2つの母数で特徴づけられる双対微分幾何を具体的に構成し、双対微分幾何に付随するチャート、ポテンシャル関数を具体的に求め、新しいクラスのダイバージェンス群を与えている。これらの結果は Ohara, Suda and Amari (1996) および Skovgaard (1984) の結果を含むものである。またこれらの幾何を展開するために、対称行列を変数とする実数値関数の微積分を定義し整理した。第3章は、多変量正規分布の族がなす多様体上に Lax 形式で表現されるあるクラスの力学系を定義しその漸近挙動を解明した。第4章は、独立同一の正規確率変数を要素とする実確率行列の固有値が、適当な正規化のもとで複素平面上の単位円盤上に一様分布するという Edelman (1997) の結果の別証明を与えた。最後の第5章では論文全体のまとめと今後の展望を与えた。

2. 論文の評価

本論文の主要な貢献は以下の3点である。

(i) 平均が0ではない多変量正規分布全体の族に Ohara, Suda and Amari (1996) の正定値行列族の双対微分幾何および Skovgaard (1984) のリーマン幾何を含む2母数双対微分幾何を構成し、この族の上に多様な双対微分幾何の構造を導入することが可能であることを示した。

(ii) 平均が0ではない多変量正規分布全体の族のなかの二つの分布の間の擬距離を測る一群の新しいダイバージェンスを与えた。

(iii) 対称行列を変数とする実数値関数の新しい微積分を定義し、双対微分幾何における双対チャートに依存しない表式を与え、ルジャンドル変換の形式が行列変数のポテンシャル関数とチャートの間にも成立することを示した。またその結果として、双対微分幾何におけるいわゆるコーディネートフリーなテンソル計算を可能にした。

以上のように吉澤真太郎君の論文は、確率分布論と微分幾何学にまたがるものであり、今後のこの方面の研究に一つの方向性を与えるものである。これらの貢献により、同君の論文は博士号取得に値する内容を備えているものと判断された。