

氏 名 飯 野 光 徳

学位 (専攻分野) 博士(学術)

学位記番号 総研大甲第484号

学位授与の日付 平成12年9月29日

学位授与の要件 数物科学研究科 統計科学専攻

学位規則第4条第1項該当

学位論文題目 **Statistical Inference for Stochastic Differential
Equations Based on Discrete Observations**

論文審査委員 主 査 教授 中野 純司
教授 尾崎 統
教授 北川 源四郎
教授 田邊 國士
教授 山本 拓 (一橋大学)

論文内容の要旨

本研究は、ドリフト係数と拡散係数が共に確率変数の関数として表現される非線形確率微分方程式の離散観測データに基づいた推定問題について考察し、その効率的な推定方法の構築を目的とするものである。

不確実性を含む現象を取り扱う場合に、確率微分方程式は不可欠なものである。特に、最近の金融研究においては、(1)オプション価格評価モデル、(2)金利の期間構造モデル、(3)資産配分モデル等に代表されるように、確率微分方程式に基づいた数多くの理論モデルが提案されている。金融データの変動の最も顕著な特徴は、条件付平均に加えて、条件付分散が時間の経過に従い変動というものである。このため、我々は、ドリフト係数、拡散係数のいずれもが確率変数の関数形として表現される一般的な確率微分方程式を対象とする必要がある。ところが、このような非線形確率微分方程式の離散観測データからの推定問題は、非常に困難なことが認識されている。

確率微分方程式を用いて定義された確率変数の変動は、推移確率によって特徴付けられる。したがって、推移確率が既知の場合には、推移確率の積で定義された尤度関数を最大化することによって未知パラメータの最尤推定量を算出することが可能である。しかし、推移確率は Fokker-Planck 方程式の解として表現されるものの、通常は解析的に解くことは出来ないため、確率微分方程式の推定を行うためには何らかの近似が不可欠となっている。

これまでに、様々な推移確率（尤度関数）の近似手法が提案されているが、その多くは「連続時間尤度関数の離散近似法」と「確率微分方程式の離散近似法」の二つに大別することが可能である。前者は、連続的な観測の仮定の下で導出される尤度関数を離散近似するものであり、後者は、対象とする確率微分方程式を離散近似し、離散化された確率過程から尤度関数を導出するものである。二つの手法に共通の問題点は、観測間隔が大きくなるに従って推定量に大きなバイアスが生じることである。更に、前者については、拡散係数に含まれる未知パラメータを二次変分の公式等を用いて予め決定しなければならず、拡散係数に大きな制約を課したものとなっている。

このような既存手法の問題点を考慮した上で、本研究ではバイアスの小さな推定が可能であり、更に、多次元の確率微分方程式の推定も容易に行うことが可能な新たなアプローチを提示する。基本的な着想は、取り扱いの困難な推移確率を直接取り扱うことは避け、条件付平均と条件付分散の正確な近似手法を開発し、それらの値を用いて推移確率を正規近似するものである。このようなアプローチを採用する主な根拠は次の2点である。

- (1) マルコフ過程の条件付期待値の持つ半群性により、条件付モーメントは推移確率と比較すると数値的な取り扱いがはるかに容易であり、正確な近似手法を導出することが可能である。
- (2) 未知パラメータの推定を目的とする場合、必ずしも真の推移確率を知る必要は無く、条件付平均・分散の値が既知であれば、正規分布を仮定して導出される擬似最尤推定量は一致性、漸近的な正規性を持つことが知られている。

本論文は3部から構成されている。第I部では、離散観測データに基づいた確率微分方程式の推定方法の概要を述べる。まず、第2章では、既存の推定方法について、その主な

着想と問題点について述べる。ここでは重要な例として、近似尤度法 (Pedersen, 1995)、局所線形化法 (Shoji and Ozaki, 1997)、推定関数法 (Bibby and Sorensen, 1995) 等が取り上げられる。次に、第3章では新たな推定方法として、局所線形ガウス法 (Local Linear Gaussian Method)、局所ガウス法 (Local Gaussian Method) の概要を述べる。いずれの方法も、条件付平均・分散を常微分方程式の解として表現し、その近似解を利用して推移確率を正規近似する Pseudo-Likelihood 法である。

第II部では、新たな推定方法の詳細が述べられる。第4章では、局所線形ガウス法が導出される。基本的な着想は、条件付モーメントの変動を非線形微分方程式で表現し、非線形項を線形近似して近似解を導出するものである。言うまでも無く、線形近似は観測間隔が小さな場合には有効なものの、観測間隔が大きくなるに従い近似精度の悪化は避けられない。そこで、第5章から第7章では、線形近似の問題へ対処するための拡張が行われる。具体的には、観測間隔を数多くの微小区間に分割し、微小区間内での条件付モーメントの変動を逐次的に算出することによって、観測時点における条件付モーメントの値を算出することが可能であることが示される。ここでのポイントは、条件付モーメントの半群性を利用してすることによって、観測間隔の影響を取り除くことが可能となる点である。第5章では、1次元の確率微分方程式を対象にした条件付モーメントの近似方法が導出される。更に、第6章では、多次元の確率微分方程式を対象にして、区分定数近似による条件付モーメントの近似手法が導出される。第7章では、第6章で提示した手法を用いた多次元の確率微分方程式の推定方法として、局所ガウス法を導出する。基本的な着想は、推移確率を正規近似して導出される近似尤度関数の最大化によって未知パラメータの推定を行うものである。その結果導出される推定量は、既存の推定方法では実現されなかった望ましい性質として一致性、漸近的な正規性を備えており、局所ガウス法が優れた推定方法であることが示される。

第III部では、第II部で開発した推定手法の応用例を示す。第8、9章では、シミュレーションを用いて、局所線形ガウス法の有限標本でのパフォーマンスを他の手法と比較評価する。第10章では、金融データの変動を記述する新たな非線形モデルを考察し、局所線形ガウス法を用いた推定方法を示す。第11章では、不連続なジャンプを含む連続時間モデルの推定方法について考察を行う。

論文の審査結果の要旨

本博士論文は、ドリフト係数と拡散係数が共に確率変数の関数となっている確率微分方程式のパラメータを離散時間で観測される有限個の時系列データから推定する問題を考察し、その効率的な推定方法の構築を目的としている。

論文は3部から構成されている。第I部は全3章からなり、非線形確率微分方程式モデルの、諸科学、特に数理金融学における役割に注目し、その離散観測データに基づいた推定方法について旧来のやり方と新しい手法の両方を対比しながらその概観を述べている。第II部は全4章からなり、著者の提出する新しい手法の考え方、理論的背景と計算手法の詳細について数値例と共に詳述している。第III部は全6章からなり、著者の提出する新しい推定手法と従来の手法との数値的パフォーマンスの比較、特に数理金融学において取り上げられることの多い Mean Reverting Process と Micro Market Structure の推定問題や、ショットノイズの関係するプロセスの推定問題への応用、さらに高次のモーメントを用いた手法への拡張とその数値例などが示されている。

以下に本論文の総体的な評価を述べる。本論文の真髄は非線形確率微分方程式、特に拡散項がプロセスの関数である場合の推定問題において、サンプリング間隔が大きい場合の推定バイアスの改善で明確な成果を出しているという点にある。著者の提出した推定手法は従来の代表的推定法である Euler 法に基づく推定法だけでなく最近注目を集めている Shoji & Ozaki らの局所線形化法とくらべてもサンプリング間隔が大きい場合にその性能が優れていることが数値例で明瞭に示されている。新しい推定手法は理論的には Bibby & Sorensen らの Martingale 推定関数に基づくアプローチを追求するという立場に立ち、従来の Ozaki らの提唱するイノベーションアプローチの立場と一線を画している。同じ Martingale 推定関数に基づく Bibby & Sorensen らの提示する方法と比べると、各区間ごとのプロセスのモーメントの変化をモーメントのダイナミクスの構造を特定化しそれを利用する事によって、彼等のシミュレーションに頼る方法より数値的にはるかに精度のよい結果を出している。その結果は諸外国の専門家からも注目を集めている。博士論文としてその内容は非常に高い水準にあると判断される。

なお、提出された論文は提起された推定問題の推定手法の改善において明確な貢献をしているとした上で、「モデリングの問題と切り離された推定問題に限定されている点が本論文の成果が本来示唆している大きなスケールの問題と貢献を不必要に小さいスケール（統計科学の問題でなく数理統計学の問題）に留めている。欲を言えば推定問題でなくモデリングの問題として扱ってほしかった。」との主旨のコメントが複数の委員からあった。またある委員からは「著者の論文の投稿先が確率論と統計の雑誌に限られているようだが、計量経済の分野でもこのような問題には非常に関心が高く今回の成果は高く評価されるのではないか」とのコメントがあった。もちろん、これらの意見は本論文の価値に疑問を呈したものであるのではない。

以上のことより、審査委員会は本研究成果が博士論文として十分な内容をもったものであると判断した。