

氏 名 武 井 智 裕

学位（専攻分野） 博士(学術)

学 位 記 番 号 総研大甲第646号

学位授与の日付 平成15年3月24日

学位授与の要件 数物科学研究科 統計科学専攻

学位規則第4条第1項該当

学 位 論 文 題 目 相反構造を持つ確率モデルの理論研究

論 文 審 査 委 員 主 査 教授 江口 真透
教授 伊藤 栄明
教授 松縄 規
助教授 栗木 哲
助教授 吉田 朋広 (東京大学)

論文内容の要旨

提出された論文は、非負値の確率変数の分布について考察している。特に、密度関数の表現の中に主要な変量とその逆数の和で定める構造を持つ確率分布族に注目して、その基礎理論を展開したものである。

観測の結果が非負実数値で与えられる場合、その確率密度関数の「相反構造」について興味深い結果が得られている。相反構造という観点から系統的に従来の分布族を整理することに成功している。さらに、幾つかの新しい分布の提案を行った。この数学的な基礎付けを下にして微分方程式と相反分布族の関連が明らかにされた。論文ではそのような構造及びその背後にある相反平均と言う概念を導入し、考察対象の分布族を「相反分布族」として捉え、理論面からその基本的性質、近似問題及び関連事項の研究を新しい視点から研究し種々な成果を得ている。

対流拡散方程式の初期値問題と境界値問題の基本解として相反分布の密度関数が特徴付けられることが証明されている。特にある種の典型的な拡散方程式に適切な初期条件を与えることによってLaplace逆変換の標準的な方法から逆数逆 Gauss 分布の密度関数が基本解であることが証明されている。境界条件をうまく選ぶことによって統計学でよく使われる分布が、例えば、Birnbbaum-Saunders 分布などが自然に導出されることは興味深い。

この議論から逆ガウス分布による一般の分布族の近似公式が提案されている。この一般指数相反分布族に対する近似公式は第2種変形 Bessel 関数の2重不等式近似を交互に組み合わせることによって精度の高いバージョンに拡張されることを示した。それぞれの評価において不完全ガンマ関数比の評価不等式が利用されている。近似の評価は一様変分距離によって行われ、近似誤差の上界が具体的に求められている。幾つかの典型例によってその近似の理論的精度の数値的正当性が確認されている。

これらの統一的な相反構造による考察を通して、武井君は統計学に現れる非負値確率変数の分布論に明快な理解を提出した。非負の観測結果であるという制限だけから出発しの確率密度関数のあるクラスがきれいな数学的構造をもたらすということは、そのランダムネスの本質がどのように関連しているか追及することが今後のより深い洞察から明らかにされるだろう。このことは相反分布族のパラメータの統計推測についても深く関わっていると思われる。今後、この分布論の成果が、広く信頼性、経済学、ファイナンスなどのより具体的な問題の統計的考察に役立つであろう。それぞれの適用に当たって相反分布族の本質がより高い視点から明らかにされる日も近いだろう。

論文は六章から成っている。各章の内容及び主要な貢献は以下の通りである。

第 1 章では、Schrödinger の初通過分布など関連諸科学に端を発した関連分布の歴史的背景について紹介し、研究の動機及び目的について述べている。

第 2 章は、相反分布族の構築をするための数学的基礎付けに焦点が絞られている。相反平均、相反分布の考えから出発して、より一般的な相反構造が展開された。Bayes 的観点から、冪ガンマ分布を事前分布とするとき、Kullback の不等式の等号条件を利用することによって、その事後分布が一般指数相反分布族に属すること示している。これらの結果は既に研究されている Jorgensen (1982) 等のアプローチとは着想を異にするアプローチであり、より簡明な証明と明快な理解が得られたことは評価できる。

第 3 章では、相反分布の幾つかの具体的事例を与えている。逆ガウス分布の他、逆数逆ガウス分布、Birnbaum-Saunders 分布も相反分布として捉え得ることを示している。また、それ以外に、対数関数や逆正接関数を密度関数に含む指数相反分布や、指数関数部分を持たない、種々の興味深い新しい相反分布の密度関数型を提案している。さらに、相反分布族を生成する上で有用となる、相反構造を含む積分等式群も与えている。

第 4 章では、一般指数相反分布族を対流拡散方程式の初期-境界値問題から捉え、幾つかの初期-境界値の条件の下で、代表的な相反分布の密度関数と分布関数の誘導に成功している。そのようにして得られた分布および概形が類似する対数正規分布やガンマ分布などの関連分布と、代表的な相反分布である逆ガウス分布との間の一様変動距離に基づく近似誤差の上界を、拡散係数の比較的簡素な関数で表現し、複数の興味ある有用な評価不等式を与えている。

第 5 章では、相反分布の密度関数の近似を行っている。その為の、第 2 種変形 Bessel 関数の解析的近似とその精度の高い誤差評価に重要な貢献がなされている。この関数の主要変数と次数パラメーターの大小の組み合わせにより、四組合計八つの不等式を与えている。その際、不完全ガンマ関数に関する両側不等式も開発・援用して目的を達成している。これらの不等式を利用して、一般指数相反分布と一般冪ガンマ分布などの間の密度関数に関する近似を種々な条件下で行っている。本章で与えられたいくつかの不等式はそれ自体でも有用であり、評価に値する。

第 6 章では論文のまとめと今後の課題に言及している。付録として、本文における理論展開を補う定理の証明や計算結果が実施されている。

論文全体を通じ、得た諸結果を視覚的に表示し、理解を容易にする工夫と努力も随所に見られる。

論文審査結果

審査委員会は、以下の理由により、武井智裕君の提出論文が学位授与に値すると判断した。

提出された論文は、観測値が非負値を取る一次元連続型の確率変数の分布について考察している。特に、密度関数の表現の中に主要な変量とその逆数の和で定める「相反構造」を持つ確率分布族に注目して、独自の基礎理論を展開したものである。論文ではそのような構造及びその背後にある相反平均と言う概念を導入し、考察対象の分布族を「相反分布族」として捉え、理論面からその基本的性質、近似問題及び関連事項の研究を新しい視点から研究し種々な成果を得ている。

密度関数の主要部分が指数型でその部分に相反構造を有する一般指数相反分布族が主として議論されている。この分布族には今日その重要性が様々に認識され始めている逆ガウス分布等が含まれており、提出論文は今後の発展性が期待される分布族の研究を行ったものと評価できる。

申請者は、一般指数相反分布族が対流拡散方程式の初期-境界値問題と密接に関連していることも明らかにした。種々に初期-境界値の条件を変え、代表的な相反分布の密度関数と累積分布関数が生成可能であることが組織的に示し、いくつかの具体的事例を与えることに成功している。それらの分布および関連分布と、逆ガウス分布との間の一様変動距離に基づく近似誤差の上界が拡散係数の関数で表現され、興味ある不等式評価が与えられている。

また、申請者は、一般指数相反分布族に現れる第2種変形 Bessel 関数の近似に取組み、この関数の変数やパラメータの大小に応じて種々の有用な不等式群を与えた。これにより関連問題に対しても、解析的・定量的な精度の高い近似評価を行なえるという重要な貢献をしている。

以上から、審査委員会は、申請者の学位請求論文が学位に十分値する水準にあると判定した。