

情報量規準による単位根と構造変化の実務的分析

福田公正

博士（学術）

総合研究大学院大学

複合科学研究科

統計科学専攻

平成 18 年度

（ 2006 ）

目次

第1章	序論	1
1.1	先行研究の概観	1
1.2	統計実務からみた仮説検定法の問題	3
1.3	情報量規準によるモデル選択法における論点	5
1.4	仮説検定と情報量規準の比較の是非	8
1.5	論文の構成	9
第2章	単位根の検出	13
2.1	モデル選択と予備検定の問題	13
2.2	観測誤差を考慮した単位根の検出	28
2.3	条件付分散不均一を考慮した単位根の検出	35
第3章	構造変化の検出	44
3.1	複数の構造変化の検出	44
3.2	回帰係数変化と誤差分散変化の識別	58
第4章	構造変化を考慮した単位根の検出	67
4.1	構造変化の類型化と単位根の検出	67
4.2	回帰係数変化と誤差分散変化を考慮した単位根の検出	79
第5章	経済予測への応用	88
5.1	単位根と変数変換を考慮した予測	88
5.2	定常過程と非定常過程が切り替わるモデルによる予測	94
第6章	結論	102
	謝辞	106
	発表論文リスト	107
	参考文献	109
付録A	第2章の付録	121
付録B	第3章の付録	122
付録C	第4章の付録	124

第1章 序論

本章では、先行研究を概観するとともに、統計実務の観点から問題点を指摘する。次に、本論文で提案する情報量規準に基づいたモデル選択法における論点について概説する。さらに、仮説検定と情報量規準を比較することの是非について議論する。最後に、論文の構成について述べる。

1.1 先行研究の概観

単位根と構造変化の問題は、1980年代から最近に至るまで、経済時系列分析における最重要項目の1つとみなされ、膨大な研究成果が蓄積されてきた。単位根の問題を指摘し、仮説検定による単位根の検出法および検定統計量の分布表を最初に提案したのは Fuller [50] であるが、単位根の問題が広く知られるようになったのは Nelson-Plosser [74] による実証結果が発表されてからである。彼らは米国の14系列のマクロ経済時系列データに対して、Dickey-Fuller [21] による単位根検定を適用したところ、完全失業率を除く13系列のデータで単位根の存在を棄却できなかった。この結果は、経済時系列分析に大きな影響を与えることになった。彼らの発見以前までは、経済時系列データの多くはタイムトレンドの周りの定常過程に従うとされてきた。定常過程の場合、過去の1時点に発生したショックの影響は時間の経過とともに消滅していくが、単位根をもつ場合は永続することになる。Nelson-Plosser の論文の2005年11月末時点での引用回数 (Econlit による) が289回であり、1982年に *Econometrica* に発表された66論文 (引用回数1以上) のうち、引用回数の平均が42回であることを踏まえると影響力の大きさがうかがえる。表1-1に、論文の Abstract に「Unit root」がある論文数を主要4学術誌 (*Journal of the American Statistical Association* (JASA), *Journal of Business & Economic Statistics* (JBES), *Econometrica*, *Journal of Econometrics* (JOE)) 別、年代別にみた結果が掲載されている。単位根を扱う研究は1990年代に入ってから急速に増加し、現在に至ってなお勢いが衰えていないことがわかる。したがって、ここでは紙幅の制約もありいくつかの主要な先行研究についてのみ概観する。Dickey-Fuller は単位根の回帰係数に対する検定と t 値に対する検定 (以下、

表1-1 論文の概要に「単位根」「構造変化」「情報量規準」「予測」という言葉がある論文数の推移

学術誌名	1965～79	1980～84	1985～89	1990～94	1995～99	2000～2004
「Unit root」がAbstractにある論文数						
JASA	1	2	3	2	6	2
JBES	-	0	6	23	14	17
Econometrica	0	3	5	7	8	15
JOE	0	1	3	29	49	45
「Structural change (or break)」がAbstractにある論文数						
JASA	2	0	3	0	1	0
JBES	-	0	1	6	7	6
Econometrica	3	1	1	2	3	1
JOE	1	0	2	3	21	19
「Information criterion (or criteria)」がAbstractにある論文数						
JASA	0	0	5	1	12	8
JBES	-	0	2	1	0	1
Econometrica	2	1	1	1	3	1
JOE	0	5	0	0	3	7
「Forecast (or prediction)」がAbstractにある論文数						
JASA	87	42	66	44	38	40
JBES	-	8	42	20	20	21
Econometrica	24	8	3	3	13	5
JOE	15	19	21	27	23	33

(注) コメント論文は含まない。JBESは1983年から、JOEは1973年から公開。

DF 検定と略)を提案した後、尤度比検定[22]も提案した。いずれも検定統計量は複雑な分布になることから、分布表はシミュレーションで求めている。このことは以降の全ての単位根検定において共通している。以上の検定においては、帰無仮説に単位根を仮定していたが、Kwiatkowski et al. [66]は対立仮説に単位根を仮定した検定法を提案した。また、Elliott et al. [26]は最初に一般化最小2乗法によりトレンドを除去した後にDF検定を適用する方法を提案し、ARIMA過程における単位根の検出がより正確なものとなった。最後に、Ng-Perron[76]は単位根検定モデルにおけるラグ次数の選択に対して新しい情報量規準を提案した。

次に構造変化の問題に移る。未知の構造変化点の検出の問題を最初に提起したのは Quandt [84]であるが、その時点では検定統計量の漸近分布が求められていなかった。対立仮説にのみ未知の変化点という局外パラメータがある検定

問題を論じたのは Davies [19]であるが、最も単純な場合について解決したのは Hawkins [55]などであり、非線形モデルも含めた一般的な解決策を示したのが Andrews [4]である。表 1-1 をみても、構造変化の研究が飛躍的に進展したのは 1990 年代に入ってからである。その後、Bai-Perron [7]によって複数の未知の変化点への対応が可能となるだけでなく、変化点の推計誤差を評価することが可能となり、構造変化の問題は一定の解決をみたといっても過言ではない。

次に、構造変化を考慮した場合の単位根の検定問題にふれる。この問題に初めて焦点を当てたのが Perron [80]であり、構造変化を取り入れた単位根検定法が提案された。Perron は Nelson-Plosser の分析結果を再検証し、1929 年の構造変化を取り入れた場合、14 系列のマクロ経済時系列のうち 11 系列で単位根の存在が棄却されるとした。その後、Perron が構造変化点を既知としたことに対して数多くの批判がなされ、変化点を未知とした場合の単位根検定法が提案された[11,105,81]。さらに、複数の構造変化を考慮に入れた単位根検定法も提案されている[69,78]。

最後に、表 1-1 により情報量規準と予測に関する論文数の推移をみる。Akaike [1,2]により提案された情報量規準 AIC は統計学にとどまらず、様々な学問領域に広範な影響を及ぼし続けている。とりわけ、Sawa [90]の論文以来、計量経済学においても研究がなされてきている。また、Akaike [3]や Schwarz [91]によるベイズ型情報量規準 (Bayesian information criterion = BIC) をはじめとして様々な観点から新しい情報量規準の提案がなされ、その傾向は最近に至るまで続いている[63,58]。一方、予測は古くから経済時系列分析において最重要課題の 1 つであり、予測に関する論文数はどの年代においても非常に多く、その傾向は最近に至るまで変わらない。

1.2 統計実務からみた仮説検定法の問題

本論文を書く動機となったのは、1991 年度における統計実務の経験である。表 1-1 から明らかなとおり、当時は経済時系列分析の分野において単位根と構造変化に関する研究が急速に進展した時期に当たる。統計実務家は日々大量の経済時系列データに接し、その統計的特性、とりわけ単位根と構造変化について適切に判断する必要に迫られていた。しかしながら、単位根検定や構造変

化検定は実務上大きな問題を抱えていた。とりわけ日本の GDP のような複雑な構造が予想される時系列データから有用な情報を抽出する際、仮説検定による方法は困難にぶつかる。問題は大きく分けて5つある。

第一に、モデル選択の問題である。たとえば、DF 検定では、定数項やタイムトレンドの有無によって3つの検定モデルが提案され、それぞれ別な分布表が示されている。しかしながら、観測されたデータに対して、どのモデルを当てはめるべきか基準がない。たとえば、Nelson- Plosser は、米国失業率の単位根検定において、タイムトレンドを入れたモデルを使っているが、経済理論的には問題である。仮に単位根の存在が棄却された場合、米国失業率はタイムトレンドの周りの定常過程にあると判断されるが、このモデルで超長期の予測をした場合、米国失業率はマイナスになるか1を超えてしまう。経済理論的には定数項のみのモデルを使うべきである。しかしながら、適切な経済理論が常に存在するわけではない。

第二に、有意水準の選択の問題である。これは単位根検定や構造変化検定に限ったことではないが、3つの代表的な有意水準（10%、5%、1%）のうち、どの有意水準を用いるべきかという問題は実務上悩ましい問題である。学術研究においては、実証分析の結論として、たとえば「1%の水準では単位根の存在を棄却できないが、5%の水準では棄却できる」というものになる。しかしながら、実務上望まれるのは、実務家にとって客観的な唯一の答えなのである。なぜなら、単位根検定の後には経済予測や景気循環指標作成などの作業が続くからである。

第三に、予備検定問題（Pre-testing problem）である。たとえば、DF 検定において適切なラグ次数を選択する必要があるが、Ng-Perron [75]が明らかにしたように、ラグ次数も t 検定や F 検定で決定する必要がある。彼らは、ラグ次数は10%の有意水準で t 検定を行い、DF 検定では5%の有意水準を用いたシミュレーション結果を随所に示しているが、どの有意水準の組み合わせが良いのか基準がない。さらに、個別の検定サイズと最終的な検定サイズは異なるはずであり、前者は制御できても後者は制御できないという予備検定問題が生じる。

第四に、仮説検定の複雑さである。単位根と構造変化を組み合わせた検定法は数多く開発されている。なぜなら単位根の検定法単独でも複数の方法やモデ

ルが提案され、加えて構造変化の検定法でも複数の方法やモデルが提案されているからである。さらに、変化の場所が回帰係数なのか誤差分散なのかという組み合わせを考えると、膨大な数になる。実際、表 1-1 から明らかなとおり、新しい検定統計量とその分布表が次々と発表され、統計実務家にとっては混乱を極めたものとなっている。

最後に、実用化するまでの膨大な時間である。たとえば、単位根検定が Fuller [50] により初めて提案されたのは 1976 年であるが、その時点ではラグ次数選択の問題は厳密に議論されていなかった。その後、一般の ARIMA 過程に対する DF 検定の適用可能性が Said-Dickey [88] により検討された後、Campbell-Perron [17] の論文で実務上のガイドラインが示され、学術的にも一定の結論が得られたのは 1995 年の Ng-Perron [75] の論文においてである。したがって、非常に単純な線形モデルに限っても、単位根検定が提起されてから方法論が実務上確立するまでに 19 年の歳月がかかっている。統計実務家は、学術的課題の解決のいかにかわらず、日々のデータ処理を強いられている。したがって、理論的な厳密さに欠けるところがあっても、データから有用な情報を得るための手がかりを与えてくれる汎用的な枠組を強く必要としている。

1.3 情報量規準によるモデル選択法における論点

AIC をはじめとする情報量規準は、(1)モデリングにおける予測の視点、(2)分布による予測精度の評価、(3)Kullback-Leibler [65]情報量による分布の近さの評価、という 3 つの基本的な考えから導かれたものといえる(小西・北川[64, p.5])。Akaike [3]や Schwarz [91]の提唱した BIC はモデルの事後確率の対数として求められるもので、Kullback-Leibler 情報量の不偏推定を目指した情報量規準とは異なるものであるが、本稿では含めることとする。

AIC や BIC などの情報量規準は工学、地球物理学、医学生物学などの実証分析において適用されてきた。しかしながら、経済学においてその適用範囲は自己回帰モデルのラグ次数の決定に関してのものがほとんどで、モデル全体の評価基準として使われることはほとんどなかった。

本論文で提案する情報量規準によるモデル選択法のもとになったのは、Kitagawa-Gersch [62]が提案した非定常時系列データの解析法である。この方

法では、観測された時系列データが確率トレンド成分、定常自己回帰成分、季節変動成分、攪乱項の4つに分解される。その際、確率トレンド成分の階差次数や自己回帰次数等の組み合わせで様々なモデルを推計し、各モデルのAICを保存する。得られた複数のAICの中から最小AICを示すモデルを最終的に選択する。すなわち、単位根をもつのか重根をもつのか三重根をもつのか決定される。こうした手法はデータ解析の視点、とりわけモデルの予測力に着目した際には自然な方法と言える。しかしながら、こうした手法には理論的な問題があることは明らかである。DF検定ならびに同種の検定に限ってみても重根の場合と単位根の場合では検定統計量や分布は異なる。同様に、Dickey-Fuller [22] や Sims [94] が明らかにしたとおり、単位根の有無をAICやBICを使ってモデル選択の結果として判断する方法は漸近理論の立場からは支持されない。換言すれば、AICやBICが成立する条件の中で単位根の有無を判断することはできない。また、本論文の第3章以降において、Yao [104] に従い未知の構造変化点をパラメータ数に数えて情報量規準を求めている。しかしながら、本論文で扱う構造変化のモデルはYaoが想定したモデルとは異なる場合が多く、本来、その都度漸近理論による新しい情報量規準の導出が必要になる。しかしながら、本論文ではKitagawa-Gerschの考え方を参考に、情報量規準によるモデル選択法を単位根と構造変化の問題に適用し、その実務上の有用性を示す。結論を先取りすれば、次のような有用性が確かめられる。

第一に、先に述べた仮説検定法の5つの問題点(モデル選択、有意水準選択、予備検定問題、検定の複雑さ、実用化までの期間の長さ)のほとんどに対処できることである。情報量規準がモデル選択と有意水準の問題を解決することは明らかであろう。予備検定問題については次章以降のシミュレーション結果で明らかになるが、伝統的な多重検定に比べ、問題の程度はかなり小さなものになる。検定の複雑さの問題は、モデルの複雑さと手続きの複雑さに分けられ、前者についてはシミュレーション比較の便宜上仮説検定法と基本的には同じモデルを用いているので問題解決にはなっていないが、後者の問題に関しては、情報量規準による方法では、候補モデルを一括して考慮していることから、手続き自体は明確で平易である(ただし、計算時間が長くなる場合が多い)。最後に、実用化までの期間の長さであるが、単位根検定の中のラグ次数選択の例を

考えても明らかとおり，仮説検定法においてモデルの開発から実用化までに要する期間は極めて長い，提案する方法では無視しうるほど短い．さらに，本論文で詳述する方法以外にも，様々な応用分野での有用性が確認されている．たとえば，Fukuda は単位根や構造変化に関するパラメータ数を経験的に調整した BIC を用いて単位根や構造変化に関するモニタリング法を提案するとともに [31,34]，単位根と共和分を同時決定する方法を考案し [46]，さらに共和分次数が 0 と 1 の間で切り替わるモデルも開発した [43]．また，情報量規準を用いて観測誤差の有無を判断する方法を提案するとともに [33,37]，景気循環分析への情報量規準の応用も提案している [40,41,42]．

第二に，従来の仮説検定法では，漸近理論に基づいた検定統計量の理論的根拠付けがなされるが，有限標本のシミュレーション結果が悪い場合が少なくない．たとえば，設定したデータが小標本で非定常に近い定常の場合，DF 検定のパワーが劣ることは広く知られている．統計実務家が日々直面するデータの標本数は年次データで最大 50，四半期データで 200，月次データで 600 ほどであり，必ずしも漸近理論が前提とする状況にはない．また，単位根検定においても，漸近理論は複雑な分布の構造を導き出しただけで，実際の漸近分布の数値表でさえもシミュレーションで求めている．さらに，現実の経済時系列データの構造は非常に複雑であることが予想され，漸近理論の援用には自ずと限界があると考えるのが自然であろう．したがって，観測されたデータを前に候補となるモデルを様々に定式化し，その中から情報量規準を用いてモデルを選択するというアプローチの有用性を積極的に評価すべきであろう．その際，そうした手法のパフォーマンスの検討を様々なシミュレーション結果に基づいて行う必要がある．

本論文で提案する手法には様々な批判が予想される．繰り返しになるが，仮説検定法は漸近理論に基づいて導出され，有限標本におけるシミュレーション結果が悪い場合が少なくない．一方，本論文で提案する情報量規準によるモデル選択法では，有限標本におけるシミュレーション結果が良い場合が多いが，漸近理論の根拠付けに乏しい．また，様々な情報量規準がある中で，どの規準を採用するかについての根拠がないという批判もあろう．実際，本論文では BIC におけるモデル選択法が統一的に採用されているが，それは限られたシミュレ

ーション結果，特に単位根検出のパフォーマンスを考慮した結果であって，恣意性から逃れることはできない．ただし，一般的なガイドラインはある．柴田 [93]は次のように述べている．

AIC はそのモデルのもとで得られる最尤推定量の良さを密度の推定という形で問題にしているのに対し，BIC はそのモデル全体の未知の密度に対する総合的な近似能力を問題にしている．(中略)したがって予測や制御のように推定値が得られるたびにアクションをとる必要がある場合には AIC によるモデル選択が適当であり，現象を解釈する道具として一つのモデルを選択したいという場合には BIC が適当である．

以上の様々な議論を踏まえた上で，情報量規準によるモデル選択法の実務上の有用性を示すことが本稿の目的である．複雑な有限標本データを前にした統計実務家にとって，様々なシミュレーションにおいて実用性が確認されたモデルを用いて，データから有用な情報を抽出するアプローチはごく自然に受け入れられるものである．

1.4 仮説検定と情報量規準の比較の是非

本論文の目的は，シミュレーションや予測を通して，仮説検定法と情報量規準によるモデル選択法を比較し，後者の有用性を検討することにあるが，そもそも両者を比較すること自体に意味がないという批判が予想される．ここで留意すべきは仮説検定一般に対してではなく，単位根検定と構造変化検定に限って議論している点である．たとえば，DF 検定は帰無仮説に階差定常モデルを対立仮説にトレンド定常モデルを置いているので，両モデルの選択になる．問題は，意味のある比較ができるかどうかである．仮説検定のパフォーマンスは検定のサイズと検定のパワーで評価される．DF 検定でいえば，たとえば，誤ってトレンド定常モデルを選択する確率(検定サイズ)を 5%にした場合に，正しくトレンド定常モデルを選択する確率(検定パワー)がどれだけか，という問題になる．後者の確率を高くしたければ前者の確率を高くすれば良いだけのことである．それに対して，情報量規準には検定サイズに相当するもの(したがって検定パワ

ーに相当するもの)がない。検定サイズを制御できないのに、正しくトレンド定常モデルを選択する確率について、両手法間で比較することはできない。

確かに情報量規準では検定サイズに相当するものを制御することができない。しかしながら、両手法を比較した研究がないわけではない。たとえば、Gonzalo-Pitarakis [51]は情報量規準を用いた共和分次数の選択法を提案し、シミュレーションを通して代表的な仮説検定法と比較している。また、Bai-Perron [10]は構造変化点の検出に関して、彼らが提案した仮説検定法と情報量規準を用いた構造変化点の検出法とを比較し、シミュレーション結果に基づいて両者の評価をしている。これらの研究成果をみると、どのシミュレーションにおいても、情報量規準の検定サイズに相当するものが仮説検定法のそれに近い。したがって、このような場合には両者を比較するメリットが大きいといえよう。また、あるシミュレーションにおいて情報量規準によるモデル選択法の検定サイズに相当するものが仮説検定法のそれより小さく、検定パワーに相当するものが仮説検定法のそれより大きければ、前者が後者よりも優れていると結論付けることができる。検定サイズが制御できないから比較自体に意味がないと、頑なに拒否し両者の比較研究への道を閉ざすのではなく、両者の比較から双方にとって有意な研究成果を挙げるからこそ重要であろう。

本論文では情報量規準によるモデル選択において、仮説検定法との比較シミュレーションの議論のときに限り、正確には「検定サイズに相当するもの」というべきところを、煩雑さを避けて単に「検定サイズ」ということにする。同様のことは「検定パワー」についても該当する。また、本論文では提案した方法や既存の仮説検定法など、全ての数値計算について独自に作成したプログラムで対応している。特に既存の仮説検定法におけるプログラムミスを検査するため、原著論文にあるシミュレーション結果と独自に行った結果を比較し、シミュレーション誤差の範囲内で一致していることを確認している。

1.5 論文の構成

本論文の構成は次のとおりである。第2章では単位根の検出の問題を扱う。2.1節では、単位根検定におけるモデル選択および予備検定問題について議論する。その際、3段階からなるシミュレーションにより、仮説検定法と情報量規

準によるモデル選択法の比較をする [45,47]。第一に，モデルとラグ次数を既知とし，Dickey-Fuller [22]の尤度比検定法との比較を行う。第二に，モデルのみを既知とし，Ng-Perron [75]が行ったシミュレーションと類似のものをを行う。最後に，モデルとラグ次数の両方を未知とする。これら2つのシミュレーションではDF検定と比較する。主な結果として，仮説検定法とBICによるモデル選択法にそれほど差がないが，後者の実務上のメリットの方が大きいことが示される。最後に6か国の失業率に適用したところ，提案した方法が仮説検定法よりも説得的な結果を示すことがわかる。2.2節では，観測誤差を考慮した場合の単位根検出問題を議論する。情報量規準によるモデル選択法では，観測誤差を含むか否か，ARIMA(p,0,0)かARIMA(p,1,0)かによって4つのモデルクラスが考慮され，モデル選択の結果として，観測誤差と単位根の有無を判断する [32]。通常のDF検定に加え，予めフィルタリングを施した後のデータへのDF検定をも比較対象にする。シミュレーション結果から，BICによるモデル選択法の長所が確認される。提案する方法を7か国の鉱工業生産指数に適用したところ，興味深い結果が得られる。最後に2.3節では，条件付分散不均一を考慮した場合の単位根検出問題を議論する。情報量規準によるモデル選択法では，条件付分散不均一を含むか否か，単位根を含むか否かによって4つのモデルクラスが考慮され，モデル選択の結果として，条件付分散不均一と単位根の有無を判断する [49]。通常のDF検定とのシミュレーションによる比較結果から，BICによるモデル選択法の長所が確認される。そして，提案する方法を6か国の株価に適用したところ，仮説検定法よりも説得的な結果が得られる。

第3章では構造変化の検出の問題を扱う。3.1節では，複数の構造変化の検出問題を議論する。提案する方法は，Kitagawa-Akaike [61]による局所定常自己回帰モデルを一般の回帰モデルに拡張し，未知の変化点を情報量規準のパラメータ数に数える [38]。この方法の評価をシミュレーションにより Bai-Perron [10]による方法と比較すると，検出する変化点の数の正確さ，検出の遅れの短さ，さらにはモニタリング時のパフォーマンスの良さなどから，提案する方法の長所が確認される。また，提案する方法を日米の経済成長率の構造変化のモニタリングに適用し，実務上重要な結果を得る。3.2節では回帰係数変化と誤差分散変化の識別の問題を議論する。提案する方法では，たとえば2つの構造

変化があり，最初の構造変化では回帰係数変化のみが起こり，後の構造変化では誤差分散変化のみが起こるというモデルを情報量規準に基づいて評価する [36]．変化の組み合わせによって考察対象となるモデル数は，変化点が1つであれば3，変化点が2であれば9，変化点が3であれば27と急速に増える．シミュレーション結果によると，これまでの実体経済に起きたような大きな構造変化の場合，高い確率でモデルを正しく選択できることが明らかにされる．また，提案する方法を7か国の鉱工業生産指数の変化率の分析に適用し，全く新しい知見を得る．

第4章では構造変化を考慮した単位根の検出を扱う．4.1節では，類型化した構造変化を考慮した場合の単位根の検出について，情報量規準によるモデル選択法を提案する [48]．構造変化は加法型かイノベーション型か，水準変化か傾向変化かその両方かの組み合わせで6通りに類型化できる．従来の仮説検定法では1つの類型を恣意的に選択してきた．提案する方法の評価はまず，構造変化の類型が既知とした2種類のシミュレーションによる仮説検定法との比較で行い，有用性が確認される．さらに，構造変化の類型が未知の場合には従来の仮説検定法が適用できないことから，提案した方法のみのシミュレーションを行うが問題点も浮き彫りになる．また，提案する方法を7か国の鉱工業生産指数に適用し，従来にない結果を得る．4.2節では回帰係数変化と誤差分散変化を考慮した単位根の検出について議論する．提案する方法では，単位根の有無，トレンド変化の有無，そして誤差分散変化の有無によって，8つのモデルが考慮され，情報量規準によって1つのモデルが選択される [39]．この方法の評価は2種類のシミュレーションによる仮説検定法との比較で行われる．単位根の有無とトレンド変化の有無をみるシミュレーションでは，提案する方法が優れていることが示され，また，単位根の有無と誤差分散変化の有無をみるシミュレーションでは，両者がほぼ同等であることが明らかになる．さらに，8つのモデル間の選択は仮説検定法では困難であることから，情報量規準による方法の有用性が明らかになる．また，提案する方法を7か国の鉱工業生産指数に適用し，興味深い結果を得る．

第5章では単位根と構造変化の問題を予測への応用という視点で検討する．5.1節では，単位根と変数変換を考慮した予測について議論する．単位根の有無

はデータ変換に依存する可能性がある．そこで Box-Cox 変換のパラメータを未知とし，単位根の有無を考慮したモデル群の中から情報量規準によるモデル選択の結果として，単位根の有無および Box-Cox パラメータを求める手法を提案する[35]．この手法の有効性を予測結果に基づいて評価するため，20 か国の鉱工業生産指数の四半期データ（1975 年 1 期から 2000 年 4 期）を用いる．比較する手法は単位根検定結果に基づいた予測であり，原数値と対数値の 2 種類を考慮する．1 期先から 4 期先の予測結果のいずれも提案した手法が優れていることが明らかになる．5.2 節では，定常過程と非定常過程が切り替わるモデルによる予測を議論する．提案する方法は，Kitagawa-Akaike [61]による局所定常自己回帰モデルをトレンド定常モデルと階差定常モデルの間の変化に拡張したものである[30]．したがって，この方法では，たとえば，変化前はトレンド定常過程に従い，変化後には階差定常過程に従うというモデルが可能になる．さらに，たとえば，変化前後ともトレンド定常だが，回帰係数が変化するというモデルも含まれる．所与の最大変化点数のもとで，様々なモデルの候補を考え，情報量規準を用いてその中から最適なモデルを選択する．この手法の有効性を予測結果に基づいて評価するため，16 か国の鉱工業生産指数の四半期データ（1961 年 1 期から 2000 年 4 期）を用いる．比較する手法は，構造変化を考慮に入れた単位根検定結果に基づいた予測であり，1 期先から 4 期先の予測結果のいずれも提案した手法が優れていることが明らかになる．

最後に第 6 章では本論文の結論と今後の課題についてまとめる．

第2章 単位根の検出

本章では単位根の検出の問題を議論する。2.1節では、単位根検定におけるモデル選択および予備検定問題について検討する。2.2節では、観測誤差を考慮した場合の単位根検出問題を議論する。最後に、2.3節では条件付分散不均一を考慮した場合の単位根検出問題について検討する。

2.1 モデル選択と予備検定の問題

本節では、情報量規準に基づいた単位根の検出法を提案する。この方法では次の手順で単位根の検出を行う。まず、単位根の有無に加え、モデルの定式化やラグ次数を変えることで、様々なモデルを考慮する。各モデルを推定し、得られた情報量規準の値を保存する。最後に、最小情報量規準によるモデル選択の結果として、単位根の有無を決定する。

2.1.1 単位根がなぜ問題なのか

1.1節で述べたとおり、経済時系列に単位根が含まれるか否かで経済的含意は全く異なる。単位根が存在しない定常時系列であれば、過去の1時点に発生したショックの影響は時間の経過とともに消滅するが、単位根過程であれば永続することになる。しかしながら、本論文で問題にしているのは経済予測への影響である。Dickey et al. [23]やDiebold-Kilian [24]で論じられているように、単位根検出の主目的の1つは予測モデルの選択にある。Campbell-Perron [17]のシミュレーション結果にもあるとおり、真のデータ生成過程(Data generating process:DGP)が単位根を含むときに誤って単位根を含まないモデルで予測した場合の予測誤差の悪化の方が、真のDGPが単位根を含まないときに誤って単位根を含むモデルで予測した場合の予測誤差の悪化よりも格段に大きい。一方、真のDGPが単位根を含まないときに誤って階差をとった場合、Plosser-Schwert [83]が指摘するように、過剰階差(over-differencing)の問題(たとえば、真のDGPが白色雑音のとき、その階差時系列は反転不能のMA過程になる)が起きる。Fukuda [44]では、Elliott et al. [26]やNg-Perron [76]など、最新の単位根検定と情報量規準によるモデル選択法を比較検討している

が，ここではより基本的問題，すなわちモデル選択と予備検定の問題について議論する．

2.1.2 単位根検定における問題

観測データ y_t ($t=1, \dots, T$) に対して次のモデルを考える．

$$\Delta y_t = \mu + \beta t + \rho y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \phi_i \Delta y_{t-i} + e_t, \quad t = k+2, \dots, T. \quad (2.1)$$

ここで Δ は階差オペレータであり， $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ である．また， $e_t \sim \text{NID}(0, \sigma^2)$ とする．(2.1)式は augmented Dickey-Fuller (ADF) 検定[21,88]をするための回帰式であり，(2.1)式における係数制約により，3つの t 値タイプの検定統計量 (\hat{t}) が得られ，それぞれ分布表も異なる．

統計量	帰無仮説	対立仮説
\hat{t}	$\mu = \beta = \rho = 0$	$\mu = \beta = 0 \quad \rho < 0$
\hat{t}_μ	$\mu = \beta = \rho = 0$	$\beta = 0 \quad \rho < 0$
\hat{t}_ρ	$\beta = \rho = 0$	$\rho < 0$

観測データが与えられた時にどのモデルを用いるべきかという問題はこれまでほとんど検討されることはなかった．このことは次の2つの点から問題である．第一に，単位根検定の結果の解釈が困難になる．たとえば，Nelson-Plosser [74] は，米国失業率の単位根検定において，タイムトレンドを入れたモデルを使っているが，経済理論的には問題である．仮に単位根の存在が棄却された場合，米国失業率はタイムトレンドの周りの定常過程にあると判断されるが，このモデルで超長期の予測をした場合，米国失業率はマイナスになるか1を超えてしまう．第二に，モデルが異なれば検定統計量も異なり，単位根検定結果も異なる可能性があるという点である．

さらに，別の大きな問題として，ADF 検定において適切なラグ次数を選択する必要があるが，Ng-Perron [75]が明らかにしたように，ラグ次数も t 検定や F 検定で決定する必要がある．彼らは，ラグ次数は10%の有意水準で t 検定を行い，DF 検定では5%の有意水準を用いたシミュレーション結果を随所に示しているが，どの有意水準の組み合わせが良いのか基準がない．さらに，個別の検定サイズと最終的な検定サイズは異なるはずであり，前者は制御できて後者

は制御できないという予備検定問題が生じる可能性がある。

2.1.3 情報量規準による単位根の検出

前項で提起した問題に対処するため、情報量規準によるモデル選択の結果として単位根の有無を決定する方法を提案する[45,47]。この方法においては、次の三段階の手順を踏む。まず、単位根の有無、モデルの種類、そしてラグ次数を変えることによって様々なモデルを考慮し、各モデルを推定する。その度ごとに得られた情報量規準の値を蓄積する。次に、考慮した様々なモデルの中から最適なモデルを最小情報量規準の手続きにより選択する。最後に、選択されたモデルに基づいて単位根の有無を決定する。モデル(2.1)のAICとBICは次のように得られる。

$$AIC = (T - k - 1) \ln \hat{\sigma}^2 + 2p.$$

$$BIC = (T - k - 1) \ln \hat{\sigma}^2 + p \ln(T - k - 1).$$

ここで p はパラメータの数であり、制約なしのモデルの場合には $p = 3 + k$ であり、他のモデルの場合には、制約条件に応じて決定される。

2.1.4 シミュレーション研究

前項で提案した情報量規準による単位根の検出法が代表的な仮説検定法と比べて、どのような性質をもっているのかを、3種類のシミュレーションを通して検証する。まず、モデルの種類とラグ次数の両方が既知である場合を考察する。次に、モデルの種類は既知だが、ラグ次数は未知である場合について考える。最後に、モデルの種類とラグ次数の両方が未知である場合を考察する。

(モデルの種類とラグ次数が既知の場合)

ここではモデルの種類とラグ次数が既知の場合を扱う。すなわち、Dickey-Fuller [22]と同様、次のような3つのケースを考える。

帰無仮説	対立仮説
Case 1: $y_t = y_{t-1} + e_t$	$y_t = \mu + \rho y_{t-1} + e_t$
Case 2: $y_t = y_{t-1} + e_t$	$y_t = \mu + \beta t + \rho y_{t-1} + e_t$
Case 3: $y_t = \alpha + y_{t-1} + e_t$	$y_t = \mu + \beta t + \rho y_{t-1} + e_t.$

仮説検定法では，検定により所与の2つの仮説の間の選択を行い，提案する方法では，2つの仮説の中から情報量規準により選択を行う．ここでは，ADF 検定ではなく，Dickey-Fuller [22]による尤度比検定（DFLR）との比較を行う．理由は，情報量規準は形式的には罰則付き対数尤度であることから，提案した手法とDFLR法のパフォーマンスを直接比較できるからである．加えて，2つの手法による結果が一致する場合がありますが，それがどの標本数の場合なのかを検証するためである．

シミュレーションにおいてDGPは次のものを考える．

$$y_t = \theta y_{t-1} + e_t, \quad y_0 = 0, \quad e_t \sim \text{NID}(0,1).$$

ここで， θ の値は3通り（0.9, 0.95, 1）， T の値は2通り（100, 250）考える．各実験は次のとおり進む．まず， θ に関して3個の中から1個を選びDGPを設定する．そして攪乱項を発生し，DGPに代入することで人工データを生成する．次に，得られたデータに対してDFLR検定と情報量規準による手法をそれぞれ適用する．最後に，各手法で単位根の有無を決定する．DFLR検定では検定サイズとして3通り（10%, 5%, 1%）考慮する．各実験は5,000回繰り返される．

表 2-1 に定常モデルの選択率（帰無仮説を棄却した頻度）が示されている．Case 1の結果をまず考察する．AICによるモデル選択法では，0.41から0.43と検定サイズが大きい．他方，BICによるモデル選択法の結果はDFLR検定の結果に近い．標本数増加による検定サイズへの影響に関してはAICと逆の結果で，標本数の増加でBICの検定サイズは0.05から0.02へと改善している．興味深いのは， $T=100$ のときに，BICによるモデル選択法の結果と有意水準5%のDFLR検定の結果が一致する点である．Case 2は全体としてCase 1とほぼ同等の結果が得られた．Case 1からCase 2にかけて対立仮説でパラメータが1つ（ β ）が増加したが，BICの検定サイズへの影響はほとんどない．しかし，Case 3では， $T=100$ のときのBICによるモデル選択法の検定サイズが0.18とやや高い点が注目される．この理由は明らかで，帰無仮説で $\alpha=0$ としてパラメータ数に加えるべきでないところをDFLR検定との比較の都合上 $\alpha \neq 0$ として推定してBICを求めているからである．後にシミュレーションでこの問題は解消されることがわかるように，実務上はモデルの種類も未知なので $\alpha=0$ と $\alpha \neq 0$ の間でもモデル選択をすることになる．したがって，この問題は実務上はあまり意味はな

表2-1. 定常モデルの選択率

θ	T	方法				
		10%	5%	1%	AIC	BIC
帰無仮説: $y_t = y_{t-1} + e_t$, 対立仮説 $y_t = \mu + \rho y_{t-1} + e_t$.						
0.9	100	0.39	0.24	0.06	0.86	0.24
0.9	250	0.99	0.93	0.64	1.00	0.80
0.95	100	0.15	0.08	0.01	0.56	0.08
0.95	250	0.54	0.36	0.11	0.95	0.20
1	100	0.10	0.05	0.01	0.41	0.05
1	250	0.10	0.05	0.01	0.43	0.02
帰無仮説: $y_t = y_{t-1} + e_t$, 対立仮説 $y_t = \mu + \beta t + \rho y_{t-1} + e_t$.						
0.9	100	0.18	0.09	0.02	0.78	0.10
0.9	250	0.82	0.64	0.28	1.00	0.41
0.95	100	0.09	0.04	0.01	0.57	0.04
0.95	250	0.25	0.13	0.03	0.88	0.05
1	100	0.10	0.05	0.01	0.58	0.05
1	250	0.10	0.05	0.01	0.58	0.02
帰無仮説: $y_t = \alpha + y_{t-1} + e_t$, 対立仮説: $y_t = \mu + \beta t + \rho y_{t-1} + e_t$.						
0.9	100	0.28	0.15	0.04	0.96	0.39
0.9	250	0.90	0.77	0.41	1.00	0.88
0.95	100	0.13	0.07	0.01	0.83	0.21
0.95	250	0.36	0.22	0.06	0.98	0.33
1	100	0.11	0.06	0.01	0.75	0.18
1	250	0.09	0.05	0.01	0.74	0.08

(注) DGP: $y_t = \theta y_{t-1} + e_t$. 網掛は単位根仮説の場合を示す.

い. 全体としてみれば, BIC によるモデル選択法の結果は概ね DFLR 検定の結果に近いと結論付けることができよう.

(モデルの種類は既知でラグ次数が未知の場合)

ここではモデルの種類は既知でラグ次数が未知の場合を扱う. 観測データ $y_t (t=1, \dots, T)$ に対してモデルは次式で与えられる.

$$\Delta y_t = \rho y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \phi_i \Delta y_{t-i} + e_t, \quad t = k+2, \dots, T. \quad (2.2)$$

ラグ次数 k の選択は Ng-Perron [75] が提案した General-to-specific 法を採用する. この方法では次のようにラグ次数が決定される. 予め設定された最大ラグ次数 k_{\max} のもとで, $k = k_{\max}$ としてモデル(2.2)を推定する. その時 $\hat{\phi}_k$ が t 検定で有意であればラグ次数が決まる. 有意でなければ, $k = k_{\max} - 1$ として再びモデル(2.2)

を推定する。その時 $\hat{\phi}_k$ が t 検定で有意であればラグ次数が決まる。有意でなければ $k = k_{\max} - 2$ として同様の作業を続ける。最終的に $k = 1$ としてモデル(2.2)を推定し、 $\hat{\phi}_k$ が t 検定で有意でなければ $k = 0$ とする。一方、情報量規準による方法では、単位根の有無と $k = 0$ から $k = k_{\max}$ までのラグ次数を考慮し、それぞれのモデルを推定し情報量規準を保存する。そして、モデル選択の結果として単位根の有無とラグ次数を同時決定する。

シミュレーションでは Ng-Perron で考察された DGP の中の 1 つと同様のものを考える。それは、

$$y_t = \rho y_{t-1} + \sum_{i=1}^3 \phi_i \Delta y_{t-i} + e_t, \quad y_i = 0 (i = -3, \dots, 0), \quad e_t \sim \text{NID}(0, 1),$$

であり、ここで $\rho = 0.85, 0.95, 1$ と 3 通り考え、また $(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = (0.6, 0, 0), (-0.6, 0, 0), (0.4, 0.2, 0), (0.2, 0.2, 0.2)$ と 4 通り考える。したがって、12 通りの DGP を考えることになる。最大ラグ次数については $k_{\max} = 8$ とした。仮説検定法においては、ラグ次数選択における t 検定のサイズと単位根検定のサイズが同じ場合のみ考察の対象とし、10%、5%、1%の 3 通りを取り上げた。シミュレーションの手順は次の通り。まず、12 通りの DGP のうち 1 つを選択する。攪乱項を発生させ DGP に代入し、人工データを得る。得られたデータに対して仮説検定法と情報量規準によるモデル選択法を適用し、単位根の有無を判断する。標本数は $T = 100$ と $T = 250$ の 2 通り考慮し、各実験は 5,000 回繰り返す。そして、単位根無しと判断した頻度を計算する。

表 2-2 に定常モデルの選択率が示されている。Ng-Perron のシミュレーション結果と同様に、予備検定の問題は起きていない。たとえば、検定サイズが 5% の 2 つの独立した検定を行った場合、全体としての検定サイズは $1 - (1 - 0.05)^2 = 0.0975$ と 10% 近くになるはずであるが、こうしたことは起きていない。Ng-Perron でも単位根の検定サイズが 5% でラグ次数の検定サイズが 5% と 10% のシミュレーションを行っているが、全体の検定サイズはそれぞれ 0.069 と 0.066 であり、差はわずかに 0.003 でしかない。しかしながら、検定パワーでは 0.1 程度の差が発生する場合がある。前のシミュレーション結果と同様に、 $T = 100$ の時に BIC によるモデル選択法の結果は有意水準 5% の ADF 検定の結果に近く、 $T = 250$ の時に BIC によるモデル選択法の結果は有意水準 1% の ADF

表2-2. 定常モデルの選択率

パラメータ				方法				
ρ	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	10%	5%	1%	AIC	BIC
T = 100								
0.85	0.6	0	0	0.99	0.98	0.97	1.00	0.97
0.85	-0.6	0	0	0.78	0.63	0.26	0.89	0.49
0.85	0.4	0.2	0	0.98	0.97	0.90	0.99	0.95
0.85	0.2	0.2	0.2	0.98	0.94	0.64	0.99	0.78
0.95	0.6	0	0	0.86	0.76	0.43	0.94	0.66
0.95	-0.6	0	0	0.35	0.19	0.05	0.44	0.11
0.95	0.4	0.2	0	0.84	0.68	0.27	0.92	0.51
0.95	0.2	0.2	0.2	0.80	0.63	0.22	0.87	0.37
1	0.6	0	0	0.12	0.05	0.01	0.20	0.03
1	-0.6	0	0	0.11	0.05	0.01	0.19	0.04
1	0.4	0.2	0	0.11	0.06	0.01	0.19	0.04
1	0.2	0.2	0.2	0.11	0.05	0.01	0.20	0.06
T = 250								
0.85	0.6	0	0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0.85	-0.6	0	0	1.00	0.99	0.95	1.00	0.95
0.85	0.4	0.2	0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0.85	0.2	0.2	0.2	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99
0.95	0.6	0	0	1.00	1.00	0.98	1.00	0.96
0.95	-0.6	0	0	0.76	0.55	0.20	0.87	0.28
0.95	0.4	0.2	0	1.00	1.00	0.96	1.00	0.96
0.95	0.2	0.2	0.2	1.00	0.99	0.92	1.00	0.93
1	0.6	0	0	0.11	0.05	0.01	0.20	0.02
1	-0.6	0	0	0.10	0.05	0.01	0.19	0.02
1	0.4	0.2	0	0.11	0.05	0.01	0.19	0.02
1	0.2	0.2	0.2	0.11	0.05	0.01	0.19	0.02

(注)DGP: $y_t = \rho y_t + \sum_{i=1}^3 \phi_i \Delta y_{t-i} + e_t$. 網掛は単位根仮説の場合を示す.

検定の結果に近い. しかしながら, より細かくみると, BIC によるモデル選択法は ADF 検定よりもやや劣る. たとえば, $(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = (0.2, 0.2, 0.2)$ のときは, BIC によるモデル選択法のサイズは 0.06 と ADF 検定の 0.05 より大きいにもかかわらず, 検定パワー ($\rho = 0.95$) は 0.37 と ADF 検定の 0.63 より小さい.

(モデルの種類とラグ次数が未知の場合)

ここではラグ次数が未知であるのに加え, 2.1.2 項で考察した 3 つのモデルのうちどのモデルから生成されたのかも未知である場合を考える [45]. 前の 2 種類のシミュレーションよりもこのシミュレーションの方が実務上より重要であ

る。ADF 検定では予め検定モデルを選択しておく必要がある。ここで留意すべきは、帰無仮説の決定論項 (deterministic part) の扱いである。もし、帰無仮説に定数項があれば ($\mu \neq 0$)、帰無仮説から生成される時系列は線形トレンドを含むことになり、帰無仮説に線形トレンドがあれば ($\beta \neq 0$)、時系列は 2 次トレンドを含むことになる。そうした帰無仮説が真の場合の単位根検定統計量は漸近的に正規分布に従う [103]。換言すれば、DF 検定統計量を適用するのは決定論項を含まない帰無仮説のときだけである。このように帰無仮説にある決定論項の違いが単位根検定を複雑にする。

本稿ではこうした問題に対処するため、Dolado et al. [25]による逐次検定法を用いる。まず、図 2-1 にある通り、最も制約のない単位根検定モデル ($\mu \neq 0, \beta \neq 0$)を推定する。 $\hat{\tau}_\tau$ による検定の結果、帰無仮説が棄却されれば線形トレンドをもつ定常モデル (TSCT: trend stationary with constant and trend) が選択されたものとして作業を終え、もし棄却されなければ $\rho = 0$ とした場合のトレンドの係数 (β)に関する検定を行う。帰無仮説 $\beta = 0$ が棄却されれば、先の $\hat{\tau}_\tau$ を用いた検定を t 分布によって再度行い、帰無仮説が棄却されれば TSCT モデルが選択されたものとして作業を終える。棄却されなければ DSCT (difference stationary with constant and trend)モデルが選択されたものとみなす。帰無仮説 $\beta = 0$ が棄却されなければ、別の単位根検定モデル ($\mu \neq 0, \beta = 0$)を推定する。 $\hat{\tau}_\mu$ による検定の結果、帰無仮説が棄却されれば定数項をもつ定常モデル (TSC0: trend stationary with constant) が選択されたものとして作業を終え、もし棄却されなければ $\rho = 0$ とした場合の定数項 (μ)に関する検定を行う。帰無仮説 $\mu = 0$ が棄却されれば、先の $\hat{\tau}_\mu$ を用いた検定を t 分布によって再度行い、帰無仮説が棄却されれば TSC0 モデルが選択されたものとして作業を終える。棄却されなければ DSC0 (difference stationary with constant)モデルが選択されたものとみなす。帰無仮説 $\mu = 0$ が棄却されなければ、別の単位根検定モデル ($\mu = 0, \beta = 0$)を推定する。 $\hat{\tau}$ による検定の結果、帰無仮説が棄却されれば TS00 (trend stationary) モデルが選択され、棄却されなければ DS00 (difference stationary)モデルが選択される。したがって、仮説検定法においてはラグ次数の決定、モデルの決定そして単位根検定と 3 段階にわたって検定が必要である。仮に個々の検定サイズに 10%を採用して、全ての検定が独立であれば、全体の検定サイズは

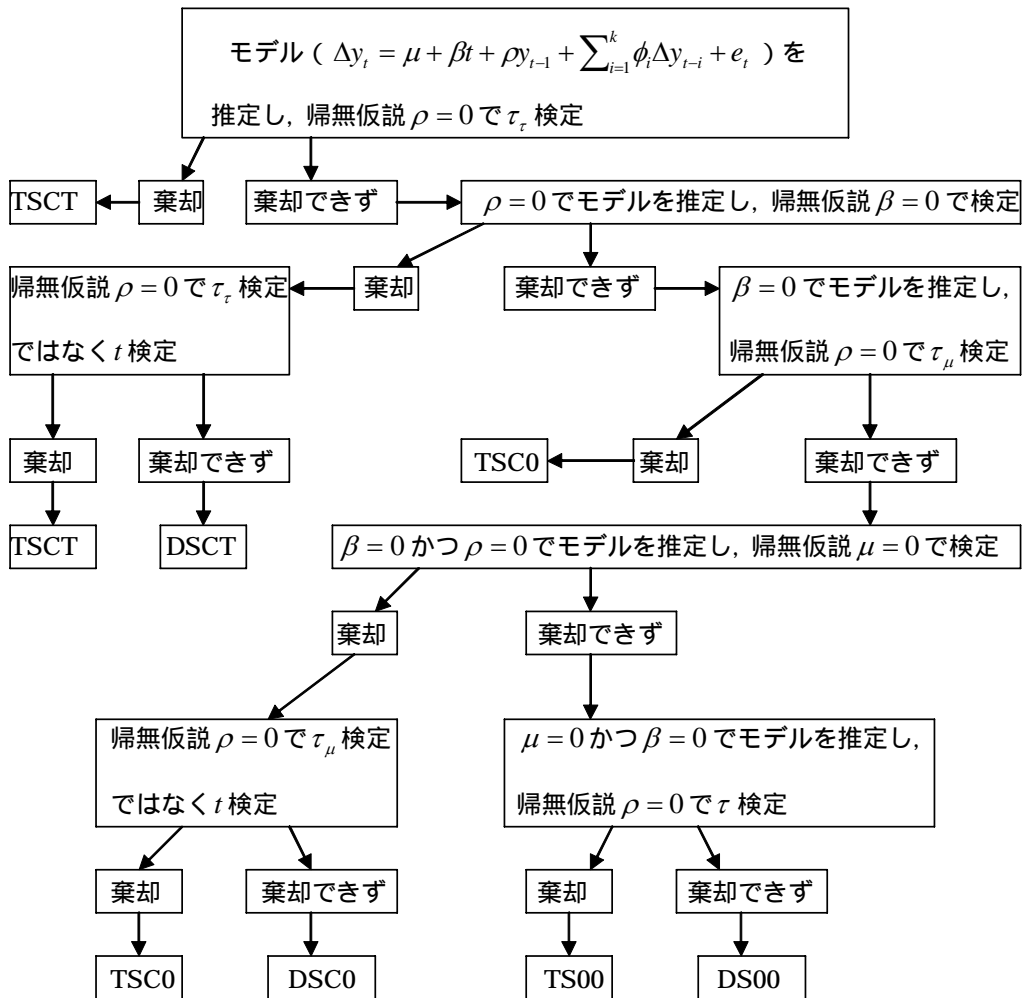


図 2-1 逐次検定法のフロー・チャート

$1 - (1 - 0.1)^3 = 0.271$ となり、実用上問題となる。

他方、情報量規準によるモデル選択法においては、次の手順で進む。まず、6つのモデルクラス (TS00, TSC0, TSCT, DS00, DSC0, DSCT) の中から1つを選択する。次に、選択されたモデルクラスのもとで $(k_{\max} + 1)$ 個のモデルを推定し、情報量規準を保存する。さらに、最小情報量規準により、当該モデルクラスの中で最適なラグ次数のモデルを1つ選択する。最後に、各モデルクラスで選択されたモデルの情報量規準を比較することで、全体として最適なモデルを選択する。こうして、情報量規準によるモデル選択の結果として、観測データが6

つのモデルクラスの中のどれから生成されているかが判定される。

シミュレーションで用いる基本的な DGP は

$$y_t = \mu + \beta t + \rho y_{t-1} + \phi \Delta y_{t-1} + e_t, -1 < \phi < 1, e_t \sim NID(0,1).$$

ここで、この基本 DGP に制約を課すことで次のような 4 つの DGP を考える。

DGP1 (DS00): $\mu = 0, \beta = 0,$ and $\rho = 1.$

DGP2 (DSC0): $\mu \neq 0, \beta = 0,$ and $\rho = 1.$

DGP3 (DSCT): $\mu \neq 0, \beta \neq 0,$ and $\rho = 1.$

DGP4 (TS00): $\mu = 0, \beta = 0,$ and $\rho < 1.$

既に述べた通り、Dolado et al.の方法は、結果的に 6 つのモデルクラスの中からモデル選択と見なすことができるが、この点には留意が必要である。すなわち、手順の最初の段階で単位根仮説が棄却されると、TSCT モデルが選択されたことになる。しかしながら、その際、定数項やトレンド項の有意性については検討を加えていない。極端な例として、たとえば、真の DGP が正規白色雑音のときに、単位根仮説は棄却され TSCT モデルが選択されたことになる。したがって、このシミュレーションでは、TS モデルを 3 つに分けていない。その結果、Dolado et al.の方法と提案する方法のいずれにおいても、ここでは TS モデルの 3 つのモデルクラスを一括して扱うことにする。

シミュレーションでは、 ρ については 2 通り ($\rho = 0.99$ or 0.95)、また、 ϕ については 3 通り ($\phi = 0, 0.6, -0.6$) 考えた。さらに、 $\mu = 1$ 、そして $\beta = 0.05$ とした。合計で 15 通りの DGP を考えることになる。最大ラグ次数については $k_{\max} = 8$ とした。

シミュレーションの手順は次の通り。まず、15 通りの DGP のうち 1 つを選択する。攪乱項を発生させ DGP に代入し、人工データを得る。得られたデータに対して仮説検定法と情報量規準によるモデル選択法を適用し、データがどのモデルクラスから生成されたのかを判定する。標本数は $T = 100$ と $T = 500$ の 2 通り考慮した。各実験は 1,000 回繰り返し、正しいモデルクラスを選択した頻度を計算する。ただし、DGP4 の場合は、既に述べた通り 3 つのモデルクラス (TS00, TSC0, TSCT) の合計値である。仮説検定法においては全ての検定で 10%、5%、1% を用いることで 3 通り考えることにする。

表 2-3 に正しいモデルクラスの選択率が示されている。前のシミュレーショ

表2-3 正しいモデルの選択率

T	μ	β	ρ	ϕ	10%	5%	1%	AIC	BIC
100	0	0	1	0	0.49	0.71	0.93	0.22	0.84
100	0	0	1	0.6	0.51	0.73	0.94	0.21	0.85
100	0	0	1	-0.6	0.53	0.72	0.94	0.24	0.86
100	1	0	1	0	0.74	0.85	0.96	0.23	0.80
100	1	0	1	0.6	0.69	0.82	0.95	0.18	0.76
100	1	0	1	-0.6	0.72	0.87	0.97	0.21	0.81
100	1	0.05	1	0	0.91	0.95	0.99	0.78	0.90
100	1	0.05	1	0.6	0.87	0.92	0.98	0.74	0.89
100	1	0.05	1	-0.6	0.90	0.95	0.99	0.77	0.89
100	0	0	0.99	0	0.35	0.20	0.04	0.68	0.11
100	0	0	0.99	0.6	0.50	0.28	0.07	0.77	0.15
100	0	0	0.99	-0.6	0.33	0.17	0.04	0.67	0.10
100	0	0	0.95	0	0.63	0.40	0.09	0.83	0.24
100	0	0	0.95	0.6	0.94	0.84	0.43	0.97	0.72
100	0	0	0.95	-0.6	0.48	0.28	0.06	0.75	0.16
500	0	0	1	0	0.59	0.81	0.96	0.25	0.96
500	0	0	1	0.6	0.57	0.77	0.95	0.27	0.96
500	0	0	1	-0.6	0.59	0.77	0.95	0.25	0.96
500	1	0	1	0	0.78	0.90	0.98	0.22	0.94
500	1	0	1	0.6	0.76	0.87	0.97	0.21	0.93
500	1	0	1	-0.6	0.78	0.89	0.98	0.23	0.94
500	1	0.05	1	0	0.94	0.97	0.99	0.84	0.98
500	1	0.05	1	0.6	0.94	0.97	0.99	0.83	0.99
500	1	0.05	1	-0.6	0.94	0.96	0.99	0.84	0.98
500	0	0	0.99	0	0.61	0.39	0.11	0.85	0.12
500	0	0	0.99	0.6	0.98	0.90	0.51	0.99	0.55
500	0	0	0.99	-0.6	0.45	0.24	0.05	0.74	0.06
500	0	0	0.95	0	1.00	1.00	0.98	1.00	0.99
500	0	0	0.95	0.6	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
500	0	0	0.95	-0.6	1.00	0.97	0.70	1.00	0.74

(注)正しいモデルが単位根を含むモデルの場合は網掛をしてある。

ン結果とは異なり，予備検定問題が明確に表れている．たとえば $T = 100$ で最初のケース（ $\mu = \beta = \phi = 0, \rho = 1$ ）に対する10%での仮説検定の結果をみると，正しくDS00を選択した頻度が0.49と小さく，予備検定問題が非常に明瞭に表れている．真のDGPがDSCT DSC0 DS00となるにつれて，Dolado et al.の方法（10%で $T = 100$ のとき）では，正しいモデル選択率が概ね90% 70% 50%と低下していく．これはDolado et al.の方法において，決定論項の高次のものから段階的に検定していくからである．一方，BICでは，76%から90%の間で比較的安定している．真のDGPがDSCTとDSC0の場合を除くと，BICのパフォーマ

ンスは $T = 100$ のときには概ね5%検定と1%検定の間であり、 $T = 500$ のときには概ね1%検定に対応している。以上の結果を要約すると、提案した方法と仮説検定法のパフォーマンスは概ね同等だが、予備検定問題については、Dolado et al.の方法に比べて提案した方法の方がやや優れているといえる。

2.1.5 実証分析

次に、提案した方法の評価を実証分析により行う。用いたデータは6か国（Canada, USA, Japan, Austria, Finland, UK）の失業率（月次・季節調整済）である。OECDのMain Economic Indicatorsから1960年1月から2005年12月まで取り、標本数は552個である。図2-2にあるとおり、フィンランドは1990年代初頭のバブル経済の影響を受けて失業率が大きく変動している。 $k_{\max} = 18$ としてDolado et al.による仮説検定法と提案した方法を適用した結果がそれぞれ表2-4と表2-5にある。仮説検定法では、先のシミュレーションと同様、3つの検定サイズ（10%、5%、1%）を考慮した。表2-4にある通り、18通りの単位根検定結果のうち、16通りの結果はDS00モデルの選択となり、その他はTSC0モデルが1通り（アメリカに対する10%の検定）、TSCTモデルが1通り（フィンランドに対する5%の検定）となった。一方、提案した方法では、表2-5にある通り、全ての国でDS00モデルが選択された。

失業率に対する単位根仮説は、経済学におけるhysteresis hypothesis（履歴効果仮説）に対応する。この仮説が成立すると、石油危機などの経済的ショックが失業率の水準に対し永続的な影響を及ぼすことになる。一方、トレンド定常仮説はnatural rate hypothesis（自然失業率仮説）に対応し、経済的ショックは失業率の短期的な変動を引き起こすだけで、失業率は長期的には自然失業率に戻っていくことになる。もし、失業率の変動が履歴効果仮説で説明できるならば、失業率の改善を目標とする経済政策は財政金融政策などのマクロ経済政策では不適當であり、雇用のミスマッチの改善などの構造政策に拠らなければならなくなる。したがって、失業率の時系列変動に単位根が存在するかどうかを実証することは経済政策にとっても非常に重要である。しかしながら、Blanchard-Summers [14]をはじめとするこれまでの実証研究の結果は不明確なものとなっている。

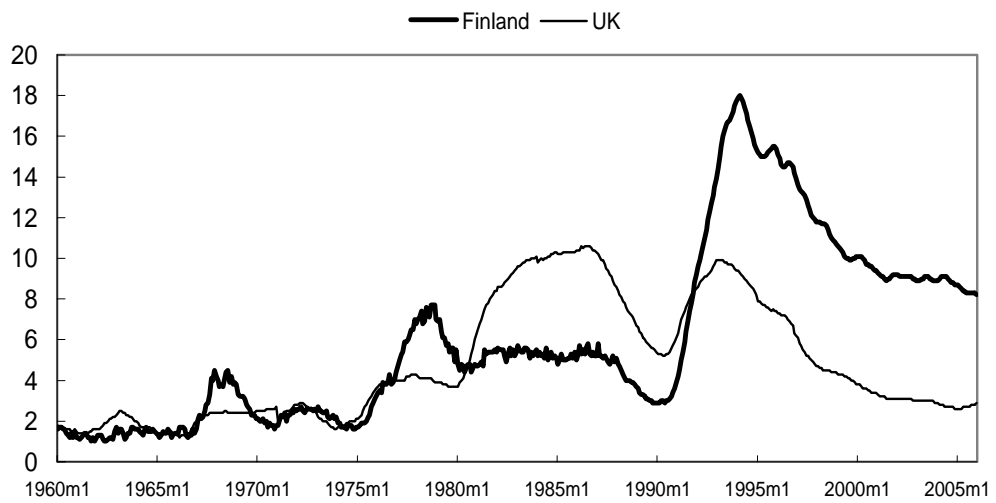
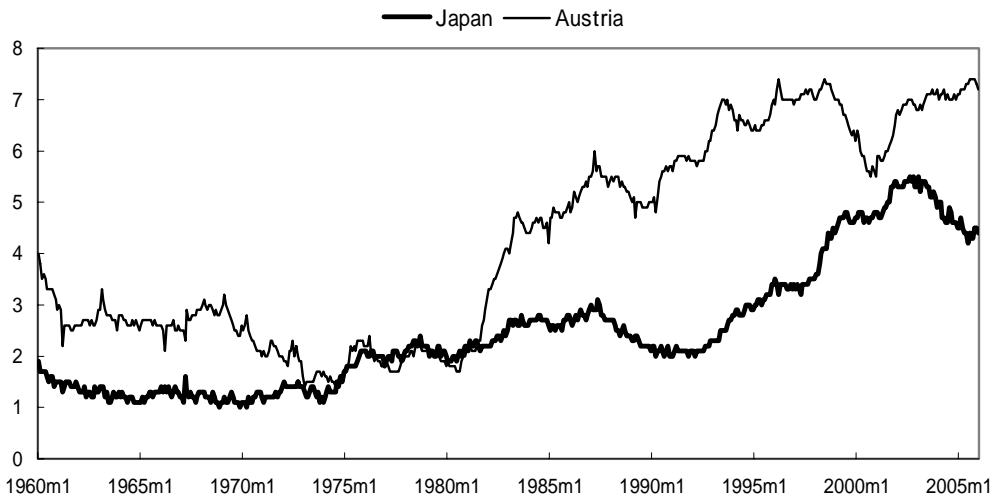
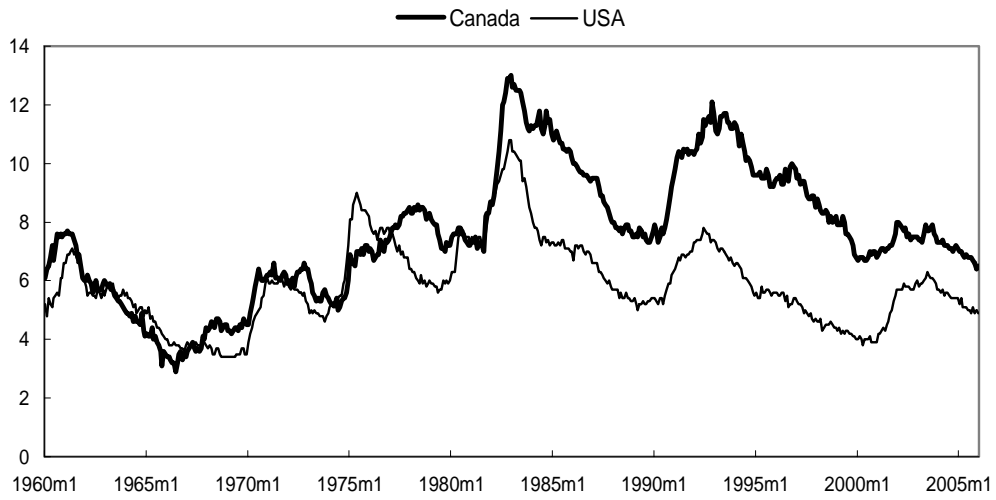


図2-2 6か国の失業率の推移

表2-4 仮説検定結果

国	10%			5%			1%		
	選択されたモデル	単位根検定統計量	ラグ	選択されたモデル	単位根検定統計量	ラグ	選択されたモデル	単位根検定統計量	ラグ
Canada	DS00	-0.60	17	DS00	-0.60	17	DS00	-0.53	12
USA	TSC0	-2.63 *	16	DS00	-0.75	14	DS00	-0.82	12
Japan	DS00	0.86	17	DS00	0.80	12	DS00	0.79	10
Austria	DS00	0.99	10	DS00	0.99	10	DS00	1.23	3
Finland	DS00	-0.76	14	TSCT	-3.50 *	12	DS00	-1.04	12
UK	DS00	-1.01	5	DS00	-1.01	5	DS00	-0.85	3

(注)DSはdifference stationaryをTSはtrend stationaryを表す。C0はconstant項を含むこと、CTはconstant項とtrend項を含むことを表す。*は単位根仮説の棄却を表す。

表2-5 6つのモデルクラスで選択されたモデルのBIC

Country	選択されたモデル	DS00	DSC0	DSCT	TS00	TSC0	TSCT
Canada	DS00	-91.4 (0)	-85.1 (0)	-79.1 (0)	-85.3 (0)	-81.2 (5)	-75.6 (5)
USA	DS00	-392.5 (4)	-386.2 (4)	-380.0 (4)	-387.0 (4)	-387.7 (4)	-381.4 (4)
Japan	DS00	-1001.7 (2)	-999.3 (2)	-994.1 (2)	-998.7 (2)	-993.0 (2)	-991.5 (2)
Austria	DS00	-723.4 (3)	-719.4 (3)	-713.6 (3)	-718.6 (3)	-713.2 (3)	-711.2 (3)
Finland	DS00	-166.7 (4)	-160.7 (4)	-154.6 (4)	-160.8 (4)	-157.6 (4)	-153.5 (4)
UK	DS00	-1234.0 (3)	-1227.7 (3)	-1222.1 (3)	-1228.4 (3)	-1225.2 (3)	-1219.0 (3)

(注)カッコ内はラグ回数である。DSはdifference stationaryをTSはtrend stationaryを表す。C0はconstant項を含むこと、CTはconstant項とtrend項を含むことを表す。

提案した分析結果は次の3点で非常に興味深いものである。第一に、これまでの実証研究では、構造変化を考慮したりパネルデータを用いるなど、最新の経済時系列分析手法を取り入れきたが、本稿ではより基本的な定式化の再考を促している。たとえば、Aresti-Biefang [6]では線形トレンドに2回の構造変化を取り入れた単位根検定を行っているが、理論的根拠が乏しい。本稿ではより基本に遡って、失業率の時系列変動に線形トレンドを入れることの是非を含めて検討している。第二に、仮説検定では、検定サイズの選択の仕方で、単位根検定の結果が異なるのに対し、提案した方法では、そのようなことは起きず、BICの差を比較することで、モデル間の比較を行うことができる。第三に、仮説検定では、履歴効果仮説が当てはまる国と、自然失業率仮説が当てはまる国が異なるが、提案した方法では全ての国に履歴効果仮説が当てはまるという一貫し

た結果が得られている。たとえば、なぜ、米国において自然失業率仮説が当てはまり、カナダでは履歴効果仮説が当てはまるのかを明確に説明することは困難であろう。こうしたことを踏まえると、提案した方法が仮説検定法よりも優れていることがわかる。

2.1.6 結論

以上、本節では単位根検定におけるモデル選択と予備検定の問題に焦点を当て、情報量規準による単位根検出法を提案した。この方法では、単位根の有無、モデルの種類とラグ次数の選択により様々なモデルを考慮する。各モデルを推定し情報量規準の値を蓄積した後、最小情報量規準により1つのモデルを最終的に選択する。そしてモデル選択の結果として単位根の有無を決定する。3種類のシミュレーション結果から明らかになったとおり、BICによるモデル選択法の結果は単位根検定の結果とほぼ同等のものである。 $T=100$ のときには検定サイズが5%の結果に近く、 $T=250$ か $T=500$ のときは1%の結果に近い。

しかしながら、より詳細にみていくと、仮説検定法と比べ情報量規準によるモデル選択法の優れた点が3つある。第一に、モデル選択や検定サイズの選択の際に見られる恣意性がなく、考慮すべきモデルの範囲が与えられれば、後は自動的に結論が導き出される。情報量規準によるモデル選択法に向けられる批判として、検定サイズが制御できないというものがあるが、本節で見てきたように、仮説検定法でも多重検定においては、全体としての検定サイズを制御できない。第二に、予備検定問題の程度が比較的小さい。第三に、提案した方法では計算時間が長くなるという傾向があるものの、仮説検定法のように段階ごとに t 分布やDF分布などの様々な分布を使い分ける必要はなく、単位根検出の手続きが明確かつ平易である。しかしながら、以上のシミュレーション結果を根拠付けるべき理論は残念ながらない。このことはすでに1.3節でも述べたが、単位根の有無をAICやBICで判断する方法に漸近理論上の根拠がないことはDickey-Fuller [22]やSims [94]が指摘している。

以上の議論は古典的統計分析の枠組の中のものであり、ベイズ分析では全く異なった議論となる。古典的統計分析では観測データは確率的に抽出されたものとされ、パラメータは値が未知の固定された変数であるとみなす。一方、ベイ

ズ分析では、観測データは確定されたものとし、未知のパラメータを確率変数であるとみなす。Sims-Uhlig [95]は DF 検定のような古典的統計分析に対して次のように批判する。古典的漸近理論は定常領域の境界（すなわち単位根の有無）で不連続になるので、通常の漸近正規性近似は適用できない。一方、flat-prior に基づくベイズ分析では、単位根を含む時系列においてさえ、対称な事後分布が得られ、通常の t 検定に基づいた単位根分析ができる。単位根のベイズ分析は古典的統計分析に比べると研究成果の蓄積が必ずしも多いとはいえないが、たとえば、Tsurumi-Wago [100]は円 ドル為替レートモデルに含まれる変数に単位根が含まれるか否かを DF 検定と対比する形でベイズ分析している。また、Summers [98]は 16 か国の失業率に単位根が存在するか否かについて、複数の構造変化を考慮したベイズ分析を行なっている。確率モデルが想定する不確実性に加えてモデルの確定に伴う不確実性も考慮しつつ意思決定を行なうことができる[72]ことから、統計実務におけるベイズ分析の一層の適用が期待される。

2.2 観測誤差を考慮した単位根の検出

本節では、観測誤差を考慮した場合の単位根の検出について、情報量規準によるモデル選択法の提案をする。シミュレーション結果では、観測誤差の大きさに応じて ADF 検定の検定サイズが大きく変動するのに対して、提案する方法ではそうした変動が小さくなることが明らかになる。

2.2.1 問題の所在

経済データには観測誤差が含まれており、そのため経済変数間に内在する真の構造が把握しにくくなる場合がある。こうした観測誤差問題を解決するために、Li et al. [67]や Blake-Camba-Mendez [13]は観測データに予め Hodrick-Prescott [56] (HP)フィルター（付録 A を参照）をかけて観測誤差を除去し、除去後のデータに共和分分析を行う方法を提案した。しかしながら、観測誤差を考慮した単位根の検出に関しては研究がなされていない。また、平滑化する際のパラメータの設定は経験的に行われており、恣意性を排除できない問題もある。後に明らかにすることであるが、観測誤差を含んだ AR 過程は、誘導形にすると ARMA 過程になる。Schwert [92]によって示されたように、観測データが ARMA

過程に従う場合，ADF 検定の検定サイズに歪みが発生する．したがって，観測誤差と単位根の有無を両方考慮に入れたモデル選択法の有用性が期待される．

2.2.2 情報量規準によるモデル選択法

前項で述べた問題に対処するために，情報量規準によるモデル選択法を提案する[32]．次のようなモデルを考える．

$$y_t = x_t + u_t \quad (t=1, \dots, T), \quad \phi(L)x_t = \varepsilon_t, \quad \phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p. \quad (2.3)$$

ここで y_t のみ観測され， x_t は観測されないものとする． u_t が観測誤差になり，ここでは， u_t と ε_t は次の過程から生成されているものとする．

$$\begin{pmatrix} u_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix} \sim NID(0, Q), \quad Q = \begin{pmatrix} \rho \sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix}.$$

提案する方法では次のような手順を踏む．まず，次のような4つのモデルクラスを考える．

- (1) 観測誤差を含まない ($\rho = 0$) 定常モデル ARIMA(p,0,0)
- (2) 観測誤差を含んだ ($\rho \neq 0$) 定常モデル ARIMA(p,0,0)
- (3) 観測誤差を含まない ($\rho = 0$) 非定常モデル ARIMA(p,1,0)
- (4) 観測誤差を含んだ ($\rho \neq 0$) 非定常モデル ARIMA(p,1,0)

次に，モデルクラスを1つ選び，所与の最大ラグ次数 p_{\max} のもとで， $(p_{\max} + 1)$ 個のモデルを推定し，得られた情報量規準を蓄える．そして最小情報量規準によりモデルを1つ選択する．最後に，得られた4つの情報量規準の中から最小情報量規準により全体として最適なモデルを1つ選択する．こうして，モデル選択の結果として，単位根の有無そして観測誤差の有無が決定される．

2.2.3 構造形から誘導形への変換

構造形で表現されたモデル(2.3)は次のように誘導形に表現することもできる．

$$\phi(L)y_t = \varepsilon_t + \phi(L)u_t. \quad (2.4)$$

このモデルは Granger の補題[52, p.29]より ARMA(p, p) モデルになる．モデル(2.3)のパラメータ数が $2+p$ でモデル(2.4)のパラメータ数が $2p+1$ であることから， $p-1$ 個の非線形の制約条件がモデル(2.4)に加わっていることになる．

ここで $p=1$ の場合 ,つまり $x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$ を考える .このとき次式が成り立つ .

$$(1 - \phi L)y_t = \varepsilon_t + u_t - \phi u_{t-1} = e_t - \theta e_{t-1}.$$

ここで $\theta = \frac{1 + (1 + \phi^2)\rho - \sqrt{\{1 + (1 + \phi^2)\rho\}^2 - 4\phi^2\rho^2}}{2\phi\rho}$ ($\rho > 0$ のとき) あるいは

$\theta = 0$ ($\rho = 0$ のとき) である .たとえば , $\sigma_\varepsilon^2 = \rho = \phi = 1$ のときには $\theta = 0.38$ となる .この場合 ,観測されたデータに ADF 検定を適用すると ,検定サイズが過大になる .

2.2.4 シミュレーション研究

提案した方法の評価はシミュレーションにより行われる .発生させるデータ y_t ($t=1..T$) の DGP は次のとおり .

$$y_t = x_t + u_t, x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t, x_0 = 0, \begin{pmatrix} u_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix} \sim NID(0, Q), Q = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ϕ に関して 3 通り ($\phi = 1, 0.95, 0.9$), また ρ に関して 4 通り ($\rho = 0, 0.5, 1, 10$) の値を考慮した .したがって , 12 通りの DGP が得られたことになる .標本数は $T = 100$ と $T = 250$ の 2 通り考慮する .シミュレーションを次の通り行う .まず , 1 つの DGP を選択し攪乱項を発生させ人工データを生成する .次に , 得られたデータに対して提案した方法を適用する .その際 , 最大ラグ次数は 4 とする .したがって , 2.2.2 項で説明した 4 つのモデルクラスのうち各モデルクラスでラグ次数を考えて 5 個 , 合計 20 個のモデルの中から情報量規準を用いて最適なモデルが 1 つ選択され , その結果として単位根の有無が決定される .各実験を 1,000 回繰り返し , 定常モデルの選択率を調査する .

提案したモデル選択法のパフォーマンスを比較するため次のとおり 6 種類の方法を考える .

M1: BIC によるモデル選択

M2: AIC によるモデル選択

M3: ADF 検定 (5%) でラグ選択を t 検定 (5%)

M4: HP フィルター (パラメータは 1) で平滑化した後に M3

M5: HP フィルター (パラメータは 100) で平滑化した後に M3

M6: HP フィルター (パラメータは 1600) で平滑化した後に M3

表2-6 定常モデルの選択率

ϕ	ρ	θ	M1	M2	M3		M4		M5	M6
			BIC	AIC	5%	Size-adjusted	5%	Size-adjusted	5%	5%
T = 100										
1.00	0.00	0.00	0.22	0.54	0.07	0.22	0.07	0.22	0.07	0.14
1.00	0.50	0.27	0.28	0.60	0.13	0.28	0.08	0.28	0.16	0.21
1.00	1.00	0.38	0.27	0.60	0.16	0.27	0.07	0.27	0.12	0.23
1.00	10.00	0.73	0.32	0.66	0.39	0.32	0.12	0.32	0.06	0.14
0.95	0.00	0.00	0.46	0.83	0.16	0.43	0.14	0.40	0.11	0.13
0.95	0.50	0.26	0.55	0.86	0.30	0.54	0.12	0.43	0.25	0.23
0.95	1.00	0.37	0.51	0.84	0.33	0.54	0.12	0.46	0.21	0.30
0.95	10.00	0.72	0.59	0.87	0.71	0.64	0.28	0.60	0.13	0.19
0.90	0.00	0.00	0.76	0.95	0.36	0.72	0.27	0.58	0.17	0.12
0.90	0.50	0.25	0.77	0.95	0.55	0.78	0.24	0.61	0.30	0.25
0.90	1.00	0.36	0.75	0.95	0.56	0.79	0.21	0.66	0.29	0.30
0.90	10.00	0.71	0.82	0.95	0.89	0.85	0.52	0.80	0.19	0.17
T = 250										
1.00	0.00	0.00	0.15	0.55	0.05	0.15	0.05	0.15	0.04	0.07
1.00	0.50	0.27	0.15	0.57	0.07	0.15	0.05	0.15	0.07	0.10
1.00	1.00	0.38	0.15	0.57	0.09	0.15	0.05	0.15	0.09	0.12
1.00	10.00	0.73	0.20	0.58	0.27	0.20	0.14	0.20	0.06	0.08
0.95	0.00	0.00	0.78	0.98	0.46	0.76	0.44	0.70	0.24	0.17
0.95	0.50	0.26	0.78	0.98	0.57	0.82	0.36	0.72	0.36	0.31
0.95	1.00	0.37	0.76	0.97	0.62	0.76	0.38	0.66	0.42	0.36
0.95	10.00	0.72	0.74	0.97	0.95	0.89	0.78	0.87	0.32	0.28
0.90	0.00	0.00	1.00	1.00	0.94	0.99	0.84	0.95	0.42	0.22
0.90	0.50	0.25	1.00	0.99	0.96	0.99	0.83	0.98	0.60	0.38
0.90	1.00	0.36	0.99	0.99	0.97	0.99	0.83	0.97	0.66	0.43
0.90	10.00	0.71	0.93	0.99	1.00	1.00	0.99	1.00	0.61	0.36

(注) DGP: $y_t = x_t + u_t, x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t, \begin{pmatrix} u_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix} \sim NID(0, Q), Q = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

θ : 誘導形に変換した場合のMA(1)パラメータ. M1: BICによるモデル選択. M2: AICによるモデル選択.
M3: ADF検定. M4-M6: フィルタリング後にADF検定 (フィルターのパラメータ値はそれぞれ1, 100, 1600).
M3とM4の検定サイズをM1の検定サイズに相当するものと同じにした結果も「Size-adjusted」として掲載.
検定サイズに相当する部分を網掛にしてある.

表 2-6 に定常モデルの選択率が示されている。また、この表には誘導形に変換した際の MA(1)パラメータ θ の値と M3 と M4 の検定サイズを M1 の検定サイズに調整した結果(「Size-adjusted」と表記)も掲載されている。まず、 $T = 100$

で $\phi=1$ かつ $\rho=10$ の場合を注目する。この場合、 θ の値は 0.73 と大きなものになり、M3 の検定サイズは 39% と大きな歪みが生じていることがわかる。 ρ の値に応じて M3 のサイズは 7% から 39% まで大きく変動するのに対して、M1 のサイズは 22% から 32% と変動幅は小さい。同様のことは $T=250$ のときにもいえるが、M3 のサイズの変動幅が 5% から 27% に対し、M1 の変動幅は 15% から 20% と、 $T=100$ の場合よりも大きく改善する。M4 に関しては $T=100$ のときの変動幅が 7% から 12%、 $T=250$ のときの変動幅が 5% から 14% と M3 に比べて大幅に改善はするが、標本数の増加による改善はみられない。

次に検定パワーについてみる。情報量規準によるモデル選択法では検定サイズを制御できないので、このままでは検定パワーを比較できない。そこで M3 と M4 の検定サイズを M1 の検定サイズと等しくして、検定パワーを比較することにする。その結果、M3 と M1 のパフォーマンスはほぼ同等だが、M4 のパフォーマンスがやや劣ることがわかる。

以上をまとめると次の 3 点になる。第一に、真のデータが単位根と観測誤差をもつとき、観測誤差の大きさが変動すると ADF 検定のサイズは大きく変動するが、BIC によるモデル選択法では変動幅が小さくなる。第二に、平滑化した後に ADF 検定を行った場合に最も検定サイズが安定するものの、同時に検定パワーの低下も起こる。第三に、標本数が少ない場合 ($T=100$) には、BIC の検定サイズが 22% から 32% と大きい、標本数が多い場合 ($T=250$) には 15% から 20% とかなり小さくなり、他の仮説検定法に比べてやや優れた結果を示す。

2.2.5 実証分析

ここでは提案した BIC による単位根の検出に関する実証分析を行う。データは 7 か国の鉱工業生産指数 (月次、季節調整済、1995 年=100) で 1976 年 1 月から 2000 年 12 月までを International Financial Statistics から取った。7 か国はカナダ (CAN)、フランス (FRA)、ドイツ (GER)、イタリア (ITA)、日本 (JPN)、イギリス (UK)、アメリカ (US) である。各時系列データは対数値に変換後 100 倍してある。鉱工業生産指数は観測誤差が確認されるデータの 1 つであることは広く知られている [37]。

図 2-3 に 7 か国の鉱工業生産指数を図示してある。カナダが一番下で、アメ

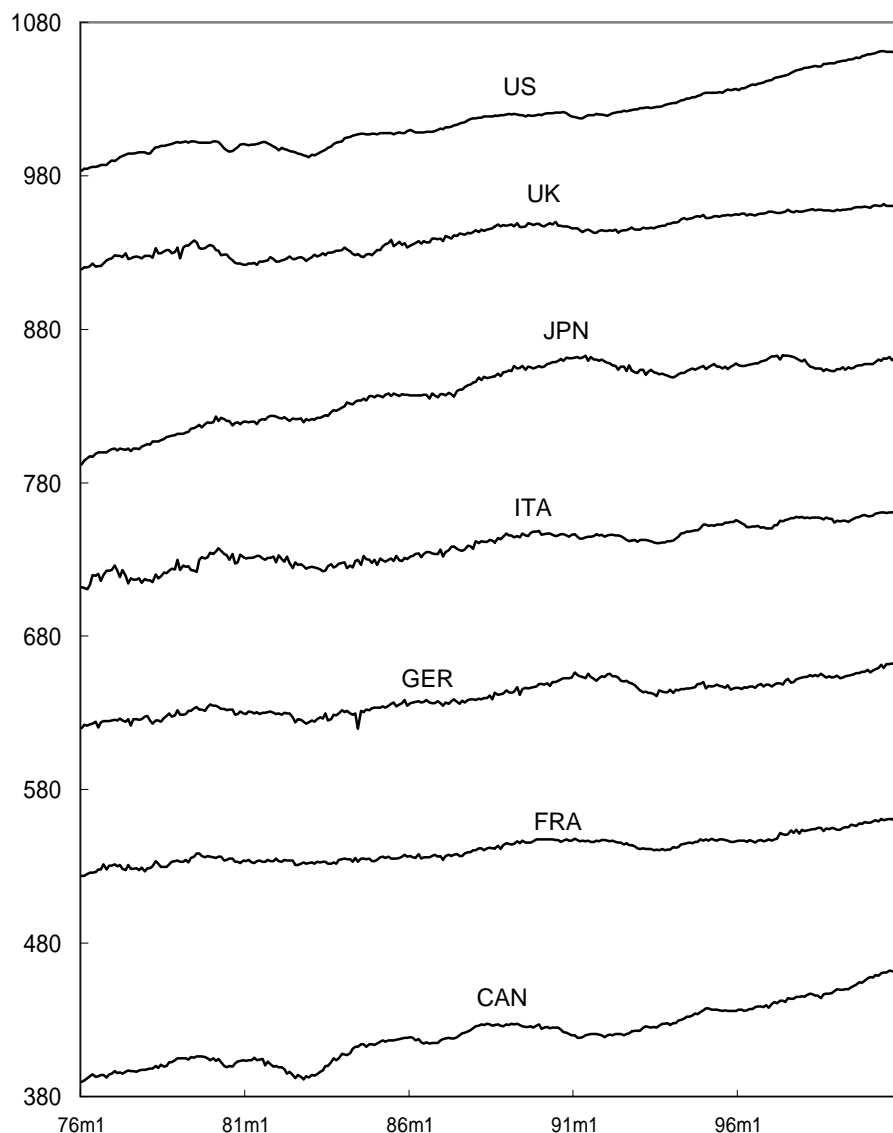


図2-3 7か国の鉱工業生産指数の推移

(注) 各国の指数の対数を取り100倍. フランス以降の国のデータには順に100を加えている.

リカが一番上にある .見やすいようにフランス以降順番に 100 ずつ加えている .
 この図から日本の時系列にトレンドの変化があることがわかる .これは 1990 年
 代初頭のバブル崩壊の影響によるものである .したがって ,日本に関しては第
 4 章で説明する構造変化を考慮した単位根の検出法を適用するのが最善と思わ
 れるが ,ここでは観測誤差に注目しているので ,他国と同様 ,本節で提案した
 方法を適用する .最大ラグ次数は 12 とする .

表2-7 7か国鉱工業生産指数の分析結果

国名	観測誤差なし定常		観測誤差あり定常		観測誤差なし非定常		観測誤差あり非定常	
	BIC	ラグ	BIC	ラグ	BIC	ラグ	BIC	ラグ
CAN	884.2	4	889.1	4	882.1 *	3	886.7	1
FRA	905.8	2	906.2	1	903.7	1	902.9 *	0
GER	1119.3	3	1117.4	1	1117.1	2	1114.8 *	0
ITA	1200.0	2	1198.3 *	1	1204.8	2	1201.0	0
JPN	956.1	5	962.4	5	954.7	4	943.1 *	1
UK	992.4	2	991.7	1	992.2	1	990.5 *	0
US	572.8	3	577.7	3	569.1	2	567.0 *	1

(注)*は最小BIC.

表 2-7 に分析結果が示されている。観測誤差を含まない定常モデルのクラス中で最適なモデルの BIC とラグ次数が最初に示され、そこから横に、観測誤差を含む定常モデル、観測誤差を含まない非定常モデル、そして観測誤差を含む非定常モデルの順に結果が表示されている。この表から得られる主な結論は次の通り。第一に、イタリアを除いた 6 か国の時系列が非定常である。第二に、カナダを除いた 6 か国で観測誤差を含むモデルが選択されている。第三に、観測誤差を含む非定常モデルのラグ次数が他の 3 つのモデルのラグ次数よりも非常に小さい。これは 2.2.3 項で分析したように、真の DGP が観測誤差を含んだ AR 過程である場合、観測誤差を含まない AR モデルを当てはめるとラグ次数が長くなることから生じる。鉱工業生産指数のような観測誤差を含む可能性が高い時系列データに対する単位根の検出では、提案した BIC によるモデル選択法が有用である。今後の課題として、季節調整の分析がある。たとえば、カナダにおいて観測誤差が検出されなかったが、これは季節調整法の影響の可能性もある。

2.2.6 結論

以上、本節では、観測誤差を含む時系列データの単位根の検出に対して情報量規準によるモデル選択法を提案した。この方法では、単位根と観測誤差の有無を組み合わせた 4 つのモデルクラスを考慮する。まず、各モデルクラスの中で、様々なラグ次数を考慮し、情報量規準により最適なモデルを選択する。次に、各モデルクラスで選択されたモデルの中から情報量規準により全体として

最適なモデルを選択する。こうしたモデル選択の結果として、単位根の有無そして観測誤差の有無が決定される。

BICによるモデル選択法とADF検定法そして平滑化後のADF検定法の3者について、シミュレーションにより比較した結果、通常のADF検定法に比べて観測誤差の大きさの変動による検定サイズの変動が小さいこと、特に標本数が多い場合 ($T = 250$) に実務における有用性が確認された。

提案したBICによるモデル選択法を7か国の鉱工業生産指数に適用した。主な結果は、イタリアを除いた6か国の時系列が非定常であること、カナダを除いた6か国で観測誤差を含むモデルが選択されたこと、観測誤差を含む非定常モデルのラグ次数が他の3つのモデルのラグ次数よりも非常に小さいことである。鉱工業生産指数は観測誤差を含む可能性が高く、提案した方法の実務上の有用性が確認された。

2.3 条件付分散不均一を考慮した単位根の検出

本節では、条件付分散不均一を考慮した場合の単位根の検出について、情報量規準によるモデル選択法の提案をする。シミュレーション結果では、条件付分散不均一があるとADF検定のサイズが過大になる場合があるが、提案する方法ではその程度が著しく改善されることが明らかになる。

2.3.1 問題の所在

Engle [27]の autoregressive conditionally heteroskedastic (ARCH)モデルや Bollerslev [15]の generalized autoregressive conditionally heteroskedastic (GARCH)モデルが提案されて以降、株価などの金融時系列に対し条件付分散不均一を取り入れたモデルを用いた実証研究が飛躍的に拡大している(サーベイ論文として Bollerslev et al. [16]がある)。一方で、これまで、Fama [28]以来の実証研究、とりわけ株価の時系列変動に単位根が含まれるか否かに対する実証分析結果は混在している。株価が単位根過程から生成されている場合には市場効率仮説 (market efficiency hypothesis) が当てはまる一方、定常過程から生成されている場合には平均再帰仮説 (mean reverting hypothesis) が当てはまる。したがって、これまでの単位根検定に何らかの問題があったことが予想さ

れる．そうした原因の一つとして，Kim-Schmidt [59]が指摘したように，条件付分散不均一があると DF 検定のサイズが過大になるという問題がある．したがって，条件付分散不均一と単位根の有無を両方考慮したモデル選択法の有用性が期待される．

2.3.2 情報量規準によるモデル選択法

前項で述べた問題に対処するために，情報量規準によるモデル選択法を提案する[49]．次のような DF モデルを考える．

$$\Delta y_t = \mu + \beta t + \rho y_{t-1} + u_t.$$

DF モデルにおいては u_t が白色雑音から生成されていると仮定しているが，ここでは，Kim-Schmidt にならい， u_t が GARCH (1,1)過程から生成されていると仮定する．もし h_t が $t-1$ 時点で可能な情報をもとにした u_t の分散とした場合，次式が得られる．

$$h_t = \phi_0 + \phi_1 u_{t-1}^2 + \phi_2 h_{t-1}, \quad u_t \sim N(0, h_t).$$

このとき，もし $\phi_0 > 0$ かつ $\phi_1 + \phi_2 < 1$ ならば u_t の無条件分散は $\phi_0 / (1 - \phi_1 - \phi_2)$ に等しくなる．加えて，本稿では Kim-Schmidt にならい，2つの特殊ケース ($\phi_0 = 0, \phi_1 + \phi_2 = 1$) も考察対象に加えることとする．

ところで，Phillips-Perron [82]が明らかにしたように，これらの2つの特殊ケースを除くと，DF 検定は GARCH 過程から生成される攪乱項の影響に対して，漸近的には頑健である．しかしながら，後のシミュレーション結果から明らかになるが，Kim-Schmidt が指摘した通り， ϕ_1 が比較的大きな値（たとえば 0.3）をとり ϕ_0 が 0 に近い値（たとえば 0.001）をとった場合，DF 検定のサイズが大きなものとなる．

こうした問題を解決するため，情報量規準による GARCH (1,1)過程を考慮した単位根の検出法を提案する．この方法では次の4つのモデルクラスを考える．

Model 1: 攪乱項が GARCH (0,0)から生成された定常モデル

$$(\mu \neq 0, \beta \neq 0, \rho \neq 0, \phi_0 \neq 0, \phi_1 = 0, \phi_2 = 0)$$

Model 2: 攪乱項が GARCH (1,1) から生成された定常モデル

$$(\mu \neq 0, \beta \neq 0, \rho \neq 0, \phi_0 \neq 0, \phi_1 \neq 0, \phi_2 \neq 0)$$

Model 3: 攪乱項が GARCH (0,0)から生成された単位根モデル

$$(\mu \neq 0, \beta = 0, \rho = 0, \phi_0 \neq 0, \phi_1 = 0, \phi_2 = 0)$$

Model 4: 攪乱項が GARCH (1,1) から生成された単位根モデル

$$(\mu \neq 0, \beta = 0, \rho = 0, \phi_0 \neq 0, \phi_1 \neq 0, \phi_2 \neq 0)$$

さらに DF モデルに代えて、次のような ADF モデルを考える。

$$\Delta y_t = \mu + \beta t + \rho y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \theta_i \Delta y_{t-i} + u_t.$$

たとえば Model 2 の BIC は次式の通りとなる。

$$\text{BIC} = -2(\text{最大対数尤度}) + p \log(T - k - 1).$$

ここで p はパラメータ数であり、 $p = 6 + k$ である。他のモデルの p については、 $p = 4 + k$ (Model 1), $p = 2 + k$ (Model 3), そして $p = 4 + k$ (Model 4) となる。

提案する方法は次のような手順を経る。まず、4 つのモデルクラスの中から 1 つを選択する。所与の最大ラグ次数 k_{\max} のもとで $(k_{\max} + 1)$ 個のモデルを推定し BIC を保存する。最小 BIC により各モデルクラスの中から最適モデルを 1 つ選択する。最後に、各モデルクラスから得られたモデルの BIC を比較することで、全体として最適なモデルを 1 つ選択する。こうして、BIC によるモデル選択の結果として、観測データに単位根があるかどうか、また攪乱項は GARCH (0,0) と GARCH (1,1) のいずれから生成されているのかを判定する。

2.3.3 シミュレーション研究

提案した方法の評価はシミュレーションにより行われる。発生させるデータ $y_t (t=1, \dots, T)$ の DGP は次のとおり。

$$y_t = \rho y_{t-1} + u_t, \quad y_0 = 0, \quad u_t \sim N(0, h_t), \quad h_t = \phi_0 + \phi_1 u_{t-1}^2 + \phi_2 h_{t-1}, \quad h_0 = 1.$$

各実験を次のとおり行う。まず、所与のパラメータベクトル (ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2) のもと、攪乱項 u_t を発生させ DGP に代入し、人工データを得る。次に得られたデータに対して提案した方法と ADF 検定を適用する。その際定常モデルを選択した頻度を計算する。各実験は 1,000 回繰り返され標本数は $T = 100$ と $T = 500$ の 2 種類考える。検定サイズの歪みを検討することが主目的なので $\rho = 1$ とするが、後の実証分析の参考のために、 $T = 500$ のときに限り $\rho = 0.95$ の場合も加える。パラメータベクトル (ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2) は次の通り 10 種類与える。 $(\phi_0, \phi_1, \phi_2) = (1, 0, 0), (0.1, 0.3, 0.6), (0.1, 0.3, 0.7), (0.1, 0.1, 0.9), (0.001, 0.3, 0.6), (0.001, 0.3, 0.7), (0.001,$

0.1, 0.9), (0, 0.3, 0.6), (0, 0.3, 0.7), (0, 0.1, 0.9). ラグ次数を未知とし, $k_{\max} = 8$ のもとでラグ次数選択を行う. ADF 検定においては, これまでと同様, Ng-Perron [75]の方法を用い, 全ての検定で 10%, 5%, 1%の検定を用いたケースを考えることにする.

表 2-8 に定常モデルの選択率がある. 表の中でたとえば, AIC1 とは, AIC を用いて Model 1 を選択した頻度に対応し, AIC2 とは Model 2 を選択した場合に対応する. また, AIC12 とは Model 1 か Model 2 を選択した場合である. したがって AIC12 による定常モデルの選択率が検定サイズに相当する. 同様のことは BIC についてもいえる. まず, $T = 100$ の結果をみる. $\phi_0 = 1, \phi_1 = \phi_2 = 0$ のときには, 表 2-2 同様, ADF 検定において多少検定サイズが大きくなっている. これまでのシミュレーション結果から予想されるとおり, AIC は 0.77 と非常に検定サイズが大きい. BIC は 0.18 とやや大きい. Kim-Schmidt と同様, GARCH (1,1) 過程において ϕ_1 の値が比較的大きい場合, ϕ_0 が 0 に近づけば近づくほど ADF 検定のサイズが大きくなる. たとえば, 5% の ADF 検定で $\phi_1 = 0.3$ で $\phi_2 = 0.6$ のときに, $\phi_0 = 0.1$ であれば 0.12 (0.19), $\phi_0 = 0.001$ であれば 0.43 (0.29), $\phi_0 = 0$ であれば 0.69 (0.08) となる. ここで () 内の数字は BIC による検定サイズである. このことからわかるように, BIC によるモデル選択法では検定サイズの歪みは ADF 検定に比べて大幅に小さい. 同様のことは $T = 500$ で $\rho = 1$ の場合についてもいえる. また, BIC は $(\phi_0, \phi_1, \phi_2) = (0.1, 0.3, 0.7), (0, 0.3, 0.6), (0, 0.1, 0.9)$ の場合を除いて, $T = 100$ のときよりも検定サイズが非常に小さくなる. 以上から BIC によるモデル選択法の有用性が確認されたといえる. 最後に, $T = 500$ で $\rho = 0.95$ の場合, 情報量規準の検定サイズが調整できないので厳密な比較はできないものの, $\phi_0 = 0$ の場合を除いて両手法とも概ね良好なパフォーマンスを示しているといえる. $(\phi_0, \phi_1, \phi_2) = (0, 0.3, 0.7), (0, 0.3, 0.6)$ のとき, 仮説検定法では検定パワーの方が検定サイズよりもやや小さいという逆転現象が起きている. また, $(\phi_0, \phi_1, \phi_2) = (0, 0.1, 0.9)$ のときは, 検定サイズとパワーの両方で仮説検定法の方が優れている. 他方で, 検定サイズとパワーの両方で優れているケースが提案した方法で 3 件, 仮説検定法で 1 件あり, 全体としてみれば, 両手法のいずれかに絶対的な優位を認めるほどの差はないが, GARCH (1,1) 過程による検定サイズの歪みの小ささという面で, 提案した方法が優れている.

表2-8 定常モデルの選択率

ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	10%	5%	1%	AIC12	AIC1	AIC2	BIC12	BIC1	BIC2
$T = 100(\rho = 1)$											
1	0	0	0.16	0.08	0.02	0.77	0.74	0.02	0.18	0.18	0.00
0.1	0.3	0.6	0.18	0.12	0.03	0.91	0.28	0.63	0.19	0.12	0.07
0.1	0.3	0.7	0.16	0.10	0.04	0.93	0.20	0.72	0.24	0.11	0.13
0.1	0.1	0.9	0.10	0.06	0.02	0.81	0.44	0.38	0.13	0.09	0.04
0.001	0.3	0.6	0.50	0.43	0.31	1.00	0.04	0.96	0.29	0.03	0.26
0.001	0.3	0.7	0.37	0.30	0.17	0.99	0.04	0.95	0.34	0.04	0.30
0.001	0.1	0.9	0.20	0.10	0.03	0.84	0.51	0.33	0.24	0.20	0.04
0	0.3	0.6	0.74	0.69	0.58	1.00	0.00	1.00	0.08	0.00	0.08
0	0.3	0.7	0.43	0.37	0.24	1.00	0.02	0.97	0.28	0.02	0.27
0	0.1	0.9	0.20	0.12	0.04	0.86	0.50	0.36	0.23	0.18	0.06
$T = 500(\rho = 1)$											
1	0	0	0.14	0.07	0.01	0.74	0.72	0.03	0.07	0.07	0.00
0.1	0.3	0.6	0.14	0.07	0.02	1.00	0.00	1.00	0.04	0.00	0.04
0.1	0.3	0.7	0.17	0.11	0.04	1.00	0.00	1.00	0.26	0.00	0.26
0.1	0.1	0.9	0.11	0.06	0.02	1.00	0.00	1.00	0.09	0.00	0.09
0.001	0.3	0.6	0.45	0.37	0.27	1.00	0.00	1.00	0.06	0.00	0.06
0.001	0.3	0.7	0.44	0.35	0.22	1.00	0.00	1.00	0.24	0.00	0.24
0.001	0.1	0.9	0.20	0.14	0.05	1.00	0.00	1.00	0.16	0.00	0.16
0	0.3	0.6	0.99	0.98	0.96	1.00	0.00	1.00	0.19	0.00	0.19
0	0.3	0.7	0.83	0.80	0.72	1.00	0.00	1.00	0.15	0.00	0.15
0	0.1	0.9	0.33	0.24	0.14	1.00	0.00	1.00	0.44	0.00	0.44
$T = 500(\rho = 0.95)$											
1	0	0	0.91	0.79	0.45	1.00	0.98	0.02	0.75	0.75	0.00
0.1	0.3	0.6	0.90	0.79	0.52	1.00	0.00	1.00	0.93	0.00	0.93
0.1	0.3	0.7	0.85	0.74	0.49	1.00	0.00	1.00	0.89	0.00	0.89
0.1	0.1	0.9	0.86	0.77	0.48	1.00	0.01	0.99	0.65	0.03	0.62
0.001	0.3	0.6	0.90	0.83	0.63	1.00	0.00	1.00	0.95	0.00	0.95
0.001	0.3	0.7	0.86	0.77	0.57	1.00	0.00	1.00	0.82	0.00	0.82
0.001	0.1	0.9	0.91	0.81	0.55	1.00	0.00	1.00	0.80	0.01	0.78
0	0.3	0.6	0.90	0.86	0.80	1.00	0.00	1.00	0.20	0.00	0.20
0	0.3	0.7	0.85	0.79	0.68	1.00	0.00	1.00	0.16	0.00	0.16
0	0.1	0.9	0.91	0.83	0.59	1.00	0.00	1.00	0.71	0.00	0.70

(注) DGP: $y_t = \rho y_{t-1} + u_t, u_t \sim N(0, R_t), R_t = \phi_0 + \phi_1 u_{t-1}^2 + \phi_2 R_{t-1}$.

AIC1はAICにより定常モデルで攪乱項がGARCH (0,0)のモデルが選択された確率を表し, AIC2はAICにより定常モデルで攪乱項がGARCH (1,1)のモデルが選択された確率を表す. AIC12 = AIC1 + AIC2である. BICについてもAICと同様である. 検定サイズに相当する部分を網掛にした.

2.3.4 実証分析

次に、提案した方法の評価を実証分析により行う。用いたデータは6か国（Canada, Japan, France, Germany, Switzerland, UK）の株価指数（月次、2000年=100）の対数値であり、OECDのMain Economic Indicatorsから1960年1月から2005年12月まで取り、標本数は552個である。図2-4にあるとおり、1980年代以降、全ての国で株価が上昇傾向にあったが、日本ではバブル崩壊の1990年代以降で、また日本以外の国では世界同時不況の2000年以降概ね横ばいで推移している。 $k_{\max} = 12$ としてADF検定法と提案した方法を適用した結果がそれぞれ表2-9と表2-10にある。仮説検定法では、先のシミュレーションと同様、3つの検定サイズ（10%、5%、1%）を考慮した。表2-9にある通り、18通りの単位根検定結果のうち、15通りの結果は単位根仮説を棄却できず、カナダで2つの有意水準（10%と5%）で、また、ドイツでは1つの有意水準（10%）で単位根仮説を棄却した。一方、表2-10には各モデルクラスから選択されたモデルのBICの値とラグ次数、そして全体として選択されたモデルのGARCH(1,1)過程のパラメータの推定値が掲載されている。全ての国でModel 4(攪乱項がGARCH(1,1)から生成された単位根モデル)が選択されている。 $\hat{\phi}_0$ は0.0001から0.0003、 $\hat{\phi}_1$ は0.09から0.17、 $\hat{\phi}_2$ は0.72から0.89、 $\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2$ は0.86から0.99の値をとっている。先のシミュレーションにおいて、 $T = 500$ 、 $(\phi_0, \phi_1, \phi_2) = (0.001, 0.3, 0.6)$ のときに、提案した方法の検定サイズが0.06、検定パワーが0.95、また、 $(\phi_0, \phi_1, \phi_2) = (0.001, 0.1, 0.9)$ のときに、検定サイズが0.16、検定パワーが0.80であることを踏まえると、実証結果は説得的なものであると考えてよいであろう。株価の時系列分析において、階差をとった後にGARCHモデルを当てはめる方法が広く用いられているが、その際、階差の妥当性について統計学的検証が十分になされてきたとは言い難い。以上の実証結果は階差の妥当性を再確認したといえよう。

2.3.5 結論

以上、本節では、条件付分散不均一を含む時系列の単位根の検出に対して情報規準によるモデル選択法を提案した。この方法では、単位根とGARCH(1,1)過程の有無を組み合わせた4つのモデルクラスを考慮する。まず、各モデルク

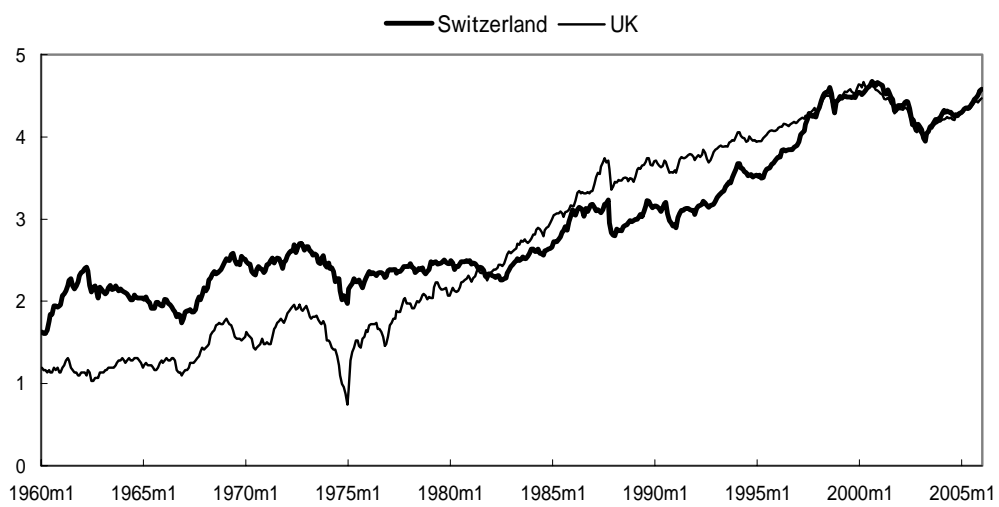
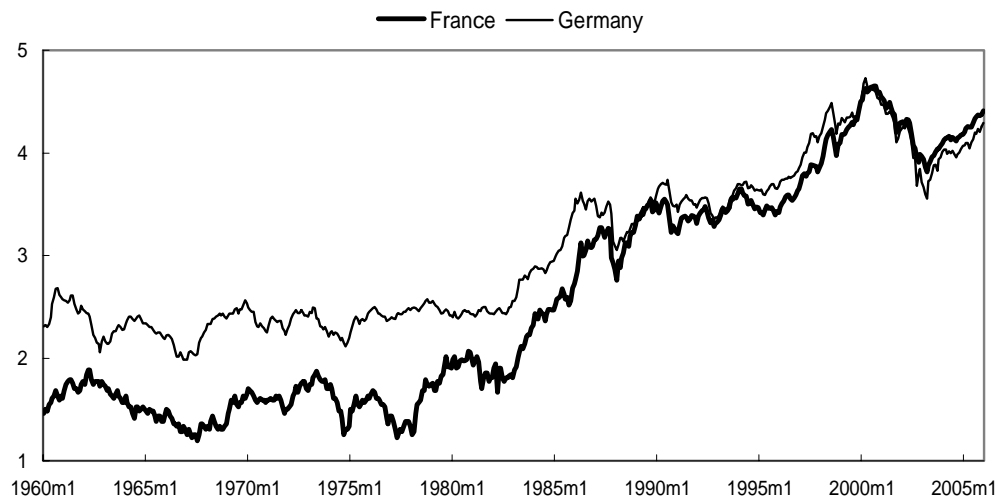
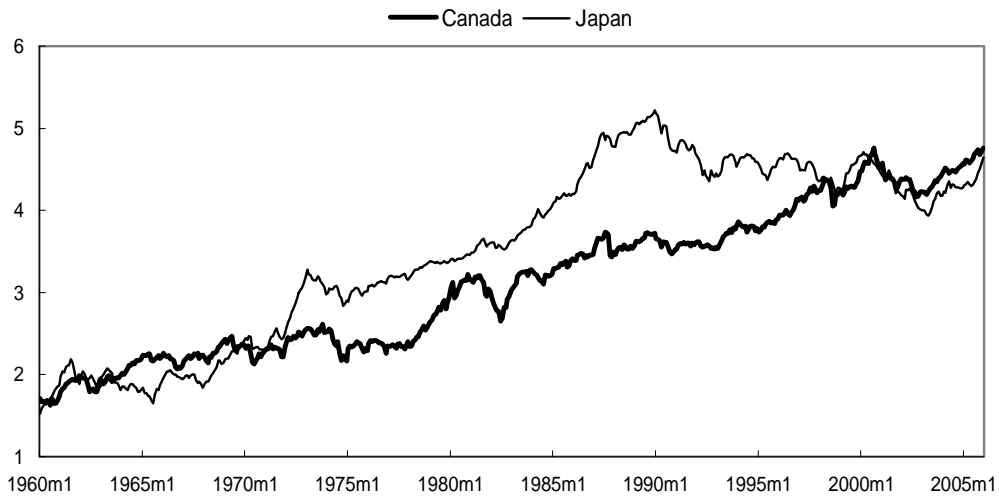


図2-4 6か国の株価(対数)の推移

表2-9 仮説検定結果

国	10%		5%		1%	
	単位根検定 統計量	ラグ	単位根検定 統計量	ラグ	単位根検定 統計量	ラグ
Canada	-3.53 *	5	-3.53 *	5	-3.02	0
Japan	-1.25	1	-1.25	1	-1.25	1
France	-2.55	9	-2.55	9	-2.55	9
Germany	-3.50 *	12	-2.92	1	-2.92	1
Switzerland	-2.33	9	-2.33	9	-2.33	9
UK	-2.55	9	-2.55	9	-2.53	3

(注) *は単位根仮説の棄却を意味する。

表2-10 4つのモデルクラスで選択されたモデルのBIC

Country	BIC1	BIC2	BIC3	BIC4	$\hat{\phi}_0 \times 1000$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$
Canada	-1788.4 (0)	-1790.1 (0)	-1791.8 (0)	-1792.9 (0)	0.293	0.116	0.752
Japan	-1902.9 (1)	-1921.2 (1)	-1913.6 (1)	-1934.0 (1)	0.092	0.134	0.816
France	-1584.0 (0)	-1611.3 (1)	-1589.6 (0)	-1614.9 (1)	0.056	0.094	0.893
Germany	-1831.8 (1)	-1913.5 (2)	-1835.0 (1)	-1925.6 (1)	0.086	0.171	0.795
Switzerland	-1797.2 (1)	-1802.3 (1)	-1804.6 (1)	-1808.9 (1)	0.303	0.135	0.724
UK	-1841.8 (3)	-1916.1 (2)	-1848.0 (3)	-1923.7 (2)	0.079	0.135	0.824

(注) BIC_iは i番目のモデルクラスの中から選択されたモデルのBIC。()内はラグ次数。

BIC1: GARCH(0,0)の定常モデルのBIC. BIC2: GARCH(1,1)の定常モデルのBIC.

BIC3: GARCH(0,0)の単位根モデルのBIC. BIC4: GARCH(1,1)の単位根モデルのBIC.

ラスの中で、様々なラグ次数を考慮し、情報量規準により最適なモデルを選択する。次に、各モデルクラスで選択されたモデルの中から情報量規準により全体として最適なモデルを選択する。こうしたモデル選択の結果として、単位根の有無そして GARCH (1,1)過程の有無が決定される。

BIC によるモデル選択法と ADF 検定法について、シミュレーションにより比較した結果、Kim-Schmidt [59]により指摘された ADF 検定法における検定サイズの歪みに相当するものは、提案した方法では一部の場を除外して小さく、実務における有用性が確認された。

6か国の株価の実証分析結果は次の3点で非常に興味深いものである。第一に、これまでの実証研究では、構造変化を考慮したりパネルデータを用いるなど、最新の経済時系列分析手法を取り入れきたが、本稿では基本的な定式化に

再考を加え、GARCH(1,1)過程の妥当性を検討している。第二に、仮説検定では、検定サイズを選択の仕方、単位根検定の結果が異なるのに対し、提案した方法では、そのようなことは起きず、BICの差を比較することで、モデル間の比較を行うことができる。第三に、仮説検定では、市場効率仮説が当てはまる国と、平均再帰仮説が当てはまる国が異なるが、提案した方法では全ての国に市場効率仮説が当てはまるという一貫した結果が得られている。たとえば、なぜ、カナダにおいて平均再帰仮説が当てはまり、イギリスでは市場効率仮説が当てはまるのかを明確に説明することは困難であろう。このことから提案した方法の説得性が確認されたといえよう。

第3章 構造変化の検出

本章では構造変化の検出の問題を議論する。3.1 節では複数の構造変化の検出方法について検討する。3.2 節では回帰係数変化と誤差分散変化の識別の問題について考察する。

3.1 複数の構造変化の検出

本節では複数の構造変化の検出について、情報量規準に基づいたモデル選択法を提案する。この方法では、観測されたデータをいくつかの区間に分け、区間ごとに最小2乗推定し残差を求めモデルの情報量規準の値を求めている。区間数や区分点（構造変化点）は、様々なモデルの中から最小情報量規準によるモデル選択の結果として決定される。この方法の有効性は、シミュレーションによる代表的な仮説検定法との比較によって確認される。

3.1.1 問題の所在

観測された経済時系列データに構造変化があるか否かを判断することは、統計実務家にとって極めて重要である。なぜなら、構造変化を見落とすと、経済予測の失敗につながる可能性が高いからである。時系列分析における未知の変化点 (T_B) の問題は 1950 年代後半から Quandt [84,85] をはじめとして様々な研究がなされてきた。観測されたデータ $y_t (t=1, \dots, T)$ に対して、Quandt は次のような簡単なモデルを考えた。

$$y_t = \mu_1 + \mu_2 DU_t + e_t, e_t \sim NID(0, \sigma^2), DU_t = 0(t \leq T_B), DU_t = 1(t > T_B).$$

Quandt は次のような手順で未知の変化点の有無を決定した。まず、様々な変化点を仮定した下でモデルを推定し、得られた尤度を蓄積する。次に、最大尤度とそれに対応する T_B を求める。最後に、変化点なしのモデルの尤度との尤度比検定により、変化点の有無を決定する。しかしながら、その尤度比統計量の漸近分布は未知のままだった。理由は、Davies [19] が明らかにしたように、対立仮説にのみ未知の変化点が存在し、従来の仮説検定の枠組みが適用できないからである。この問題を初めて解決したのは、Hawkins [55] などである。しかしながら、非線形モデルも含めた広範なモデルの適用への道を開いたのは

Andrews [4]であり，さらに Bai-Perron [7] (BP) により複数の未知の変化点への対応が可能となるだけでなく，変化点の推計誤差を評価することが可能となり，構造変化の問題は一定の解決をみたといっても過言ではない。

しかしながら，実務家にとって最大の問題点は，BP の方法は複雑すぎてあまり実用的ではないということにある．第一に，攪乱項に系列相関を許容するのか，また分散不均一を認めるか否かによって4通りの検定統計量がある．さらに，4つの検定統計量のうち，どれを使うべきかの規準が示されていない．実際，米国の実質金利の分析例でも，データの目視によって系列相関と分散不均一の場合を想定しているに過ぎない[8]．第二に，最小区間の長さに応じて検定統計量の分布は異なる．ここで最小区間とは，データ区間の両端から直近の変化点までのデータ数ならびに隣接する変化点間のデータ数に対して設定するものとする．標本数の5%刻みで最小区間の大きさごとの分布表[9]が与えられているが，どの程度の最小区間を設定するべきかの規準がない．目安として，変化点の最大数が2のときは25%，最大数が3のときには20%などあるに過ぎない．

3.1.2 情報量規準による構造変化の検出

前項で提起した問題に対処するため，情報量規準によるモデル選択の結果として複数の構造変化を検出する方法を提案する[38]．情報量規準の構造変化への適用は Ozaki-Tong [79]によって始められ，非定常時系列に対する局所定常自己回帰モデルへの適用として提案された．このモデルでは，観測データをいくつかの区間に分け，区間ごとに異なる次数の定常自己回帰モデルを当てはめるというものである．モデルのパラメータは累積自己共分散をもとに求める．最大区分数や基本区間の長さ (the length of the basic span) を所与とした場合，区分数や区分点は最小 AIC 規準により自動的に求めることができる．その後，Kitagawa-Akaike [61]はモデルのパラメータをハウスホルダー法に基づく最小2乗法で求める方法を提案した．さらに，最近になって，Davis et al. [20]は，広義の情報量規準の1つである Rissanen [86]の MDL (minimum description length) 基準と Holland [57]などによる genetic algorithm を用いた解法を提案している．

提案する方法は, Kitagawa-Akaike [61] (KA) のモデルを拡張したものである。ポイントは, ここでは KA とは異なり, 未知の変化点をパラメータとしている点である。観測データ $y_t (t = 1, \dots, T)$ に対して m 回の構造変化があったと仮定して, 次のようなモデルを考える。

$$y_t = x_t \beta_i + u_{it}, \quad t = T_{i-1} + 1, \dots, T_i, \quad i = 1, \dots, m+1, \quad u_{it} \sim NID(0, \sigma_i^2).$$

ここで $T_0 = 0$ で $T_{m+1} = T$ とする。 x_t は n 変量の説明変数ベクトルである。KA では x_t を y_t の自己ラグとし (すなわち AR モデルとし), 様々な AR 次数と変化点数そして変化点の組み合わせを考え 様々な候補モデルの AIC を比較する中で, 最適なモデル, すなわち, 最適な AR 次数と変化点が決定される。AIC と BIC は次式のように求められる。

$$AIC = \sum_{i=1}^{m+1} (T_i - T_{i-1}) \ln \hat{\sigma}_i^2 + 2\{(n+1)(m+1) + m\}.$$

$$BIC = \sum_{i=1}^{m+1} (T_i - T_{i-1}) \ln \hat{\sigma}_i^2 + \{(n+1)(m+1) + m\} \ln(T).$$

このように KA においては攪乱項の分散不均一を仮定しているが, 本論文では BP のモデルに従い, 分散均一を仮定したモデルも考慮する。その場合の AIC と BIC は次のようになる。

$$AIC = T \ln \left\{ \sum_{i=1}^{m+1} \hat{\sigma}_i^2 (T_i - T_{i-1}) / T \right\} + 2\{n(m+1) + m + 1\}.$$

$$BIC = T \ln \left\{ \sum_{i=1}^{m+1} \hat{\sigma}_i^2 (T_i - T_{i-1}) / T \right\} + \{n(m+1) + m + 1\} \ln(T).$$

したがって, 提案する方法では次のような手順で構造変化の検出をする。まず, 所与の最大変化点数のもとで, 変化点の数を設定する。次に, 与えられた変化点数のもとで, 様々な変化点の組み合わせを考え, 情報量規準を用いて分散均一のモデルの中で最適なモデルを選択する。分散不均一のモデルにおいても同様にする。各変化点数のもとで得られた情報量規準の値を用いて, 分散均一のモデルの中で最適なものを選択する。同様のことを分散不均一モデルについても行う。最後に 2 つのモデルを比較することで, 構造変化の有無, 変化点そして分散均一か否かが決定される。

次に，最小区間（ L ）の問題について議論する．次式を考える．

$$T_i - T_{i-1} \geq L \quad (i=1, \dots, m+1).$$

先に述べたとおり，BPの方法では， L の値によって検定統計量の分布表は異なる．このことが仮説検定法における煩雑さや恣意性を引き起こす．一方，提案する方法では L の値の設定自体も情報量規準によるモデル選択の結果として客観的に決定することができる．しかしながら，本稿のシミュレーションでは，提案する方法と仮説検定法を比較するため，統一的に次の条件を課す．

$$L = 0.15T.$$

このように，実証分析における L の扱いでも提案する方法が優れていることがわかる．

3.1.3 シミュレーション研究

提案した方法の評価は3種類のシミュレーション研究を通して，代表的な仮説検定法であるBPの方法と比較することにより行う．

（変化点の数の判定）

まず，観測された時系列データの中に構造変化がいくつあるのかを判定するシミュレーションを行う．考慮するDGPは全てBP [10]の研究の中のものと同じか類似のものにした．

$$\text{DGP 1: } y_t = \Psi_t + e_t, \quad z_t = \{1, \Psi_t\};$$

$$\text{DGP 2: } y_t = 0.5y_{t-1} + e_t, \quad z_t = \{1, y_{t-1}\};$$

$$\text{DGP 3: } y_t = \Psi_t + e_t \quad (t \leq [T/2]), \quad y_t = 0.5 + \Psi_t + e_t \quad (t > [T/2]),$$

$$z_t = \{1, \Psi_t\};$$

$$\text{DGP 4: } y_t = 0.5y_{t-1} + e_t \quad (t \leq [T/2]), \quad y_t = 1 + 0.5y_{t-1} + e_t \quad (t > [T/2]),$$

$$z_t = \{1, y_{t-1}\};$$

$$\text{DGP 5: } y_t = \mu_t + \gamma_t \Phi_t + e_t,$$

$$\{ \mu_t = 0, \gamma_t = 1, \Phi_t \sim \text{NID}(1,1), t \leq [T/3] \};$$

$$\{ \mu_t = 0.5, \gamma_t = 1.5, \Phi_t \sim \text{NID}(1,4), [T/3] < t \leq [2T/3] \};$$

$$\{ \mu_t = -0.5, \gamma_t = 1, \Phi_t \sim \text{NID}(1,1), [2T/3] < t \leq T \};$$

$$z_t = \{1, \Phi_t\}.$$

ここで, $y_0 = 0$, $e_t \sim NID(0,1)$, $\Psi_t \sim NID(1,1)$, そして $T = 120$ である. 以上の DGP に加え, 攪乱項の分散不均一の DGP も考慮した.

$$\text{DGP 6: } y_t = \Psi_t + e_t \ (t \leq [T/2]), \quad y_t = \Psi_t + 2e_t \ (t > [T/2]);$$

$$\text{DGP 7: } y_t = 0.5y_{t-1} + e_t \ (t \leq [T/2]), \quad y_t = 0.5y_{t-1} + 2e_t \ (t > [T/2]);$$

$$\text{DGP 8: } y_t = \Psi_t + e_t \ (t \leq [T/2]), \quad y_t = 0.5 + \Psi_t + 2e_t \ (t > [T/2]);$$

$$\text{DGP 9: } y_t = 0.5y_{t-1} + e_t \ (t \leq [T/2]), \quad y_t = 1 + 0.5y_{t-1} + 2e_t \ (t > [T/2]);$$

$$\text{DGP10: } y_t = \mu_t + \gamma_t \Phi_t + e_t \ (t \leq [T/3]);$$

$$y_t = \mu_t + \gamma_t \Phi_t + 2e_t \ ([T/3] < t \leq [2T/3]);$$

$$y_t = \mu_t + \gamma_t \Phi_t + e_t \ ([2T/3] < t \leq T).$$

z_t は説明変数ベクトルであり, シミュレーションの際, 観測データ y_t と同時に与えられるものとする. シミュレーションを次のように行う. まず, 1つの DGP を選び, 攪乱項を発生させ人工データを作成する. 得られた人工データに BP の方法と提案する方法, さらに情報量規準を援用した方法として Yao [104] の方法と Liu et al. [68] の方法を適用する. Yao の情報量規準は既述の BIC のうち, 均一分散のものに一致する. また, Liu et al. の情報量規準は次のとおり.

$$\text{LWZ} = T \ln \left\{ \sum_{i=1}^{m+1} \hat{\sigma}_i^2 (T_i - T_{i-1}) / (T - K) \right\} + 0.299K (\ln(T))^{2.1}, \quad K = n(m+1) + m.$$

また, BP の方法では多重変化検定 (Multiple-break test) と逐次検定 (Sequential test) の2種類を考慮し, 有意水準は5%とした. また, 逐次検定法では最初の検定のみ, 構造変化なしという帰無仮説に対して変化数1という対立仮説を検定する多重変化検定法を適用する (付録 B を参照). さらに, 最大変化点数は3, 最小区間数 (L) は18 (標本数の15%) とした. 1,000回の繰り返し実験により, 方法ごとに変化点数別の検出頻度をみる.

表 3-1 に変化点数別の頻度が示されている. DGP ごとに, 分散均一, 不均一の多重変化検定 (HO-FT5, HE-FT5) および逐次検定 (HO-SQ5, HE-SQ5), AIC, BIC, YAO, LWZ の順に掲載されているが, 以下では複数の変化点に対して BP が推奨していない多重変化検定の結果については言及しない. DGP1 と DGP2 については, AIC を除いて非常に望ましい結果が得られている. DGP3 と DGP4 については, 逐次検定法の結果が情報量規準による方法の結果より良い. 逆に, DGP5 については BIC と YAO の結果の方が逐次検定法の結果より

表3-1 構造変化の検出

方法	変化点数(k)の頻度				方法	変化点数(k)の頻度			
	k=0	k=1	k=2	k=3		k=0	k=1	k=2	k=3
DGP 1					DGP 6				
HO-FT5	0.96	0.04	0.04	0.05	HE-FT5	0.95	0.05	0.05	0.05
HO-SQ5	0.96	0.04	0.00	0.00	HE-SQ5	0.95	0.05	0.00	0.00
AIC	0.40	0.29	0.22	0.09	AIC	0.00	0.51	0.35	0.14
BIC	0.98	0.02	0.00	0.00	BIC	0.08	0.91	0.01	0.00
YAO	0.99	0.01	0.00	0.00	YAO	0.96	0.03	0.01	0.00
LWZ	1.00	0.00	0.00	0.00	LWZ	1.00	0.00	0.00	0.00
DGP 2					DGP 7				
HO-FT5	0.95	0.05	0.06	0.08	HE-FT5	0.92	0.09	0.11	0.10
HO-SQ5	0.95	0.05	0.00	0.00	HE-SQ5	0.92	0.09	0.00	0.00
AIC	0.32	0.25	0.27	0.15	AIC	0.00	0.44	0.39	0.17
BIC	0.98	0.02	0.00	0.00	BIC	0.07	0.92	0.01	0.00
YAO	0.98	0.01	0.00	0.00	YAO	0.93	0.05	0.01	0.00
LWZ	1.00	0.00	0.00	0.00	LWZ	1.00	0.00	0.00	0.00
DGP 3					DGP 8				
HO-FT5	0.47	0.53	0.43	0.39	HE-FT5	0.81	0.19	0.16	0.17
HO-SQ5	0.47	0.53	0.00	0.00	HE-SQ5	0.81	0.19	0.00	0.00
AIC	0.07	0.44	0.36	0.14	AIC	0.00	0.52	0.35	0.13
BIC	0.64	0.35	0.01	0.00	BIC	0.05	0.94	0.01	0.00
YAO	0.65	0.34	0.01	0.00	YAO	0.85	0.13	0.02	0.00
LWZ	0.97	0.03	0.00	0.00	LWZ	1.00	0.00	0.00	0.00
DGP 4					DGP 9				
HO-FT5	0.03	0.97	0.92	0.88	HE-FT5	0.36	0.64	0.57	0.53
HO-SQ5	0.03	0.97	0.00	0.00	HE-SQ5	0.36	0.64	0.01	0.00
AIC	0.00	0.42	0.40	0.18	AIC	0.00	0.45	0.38	0.16
BIC	0.11	0.86	0.03	0.00	BIC	0.01	0.98	0.01	0.00
YAO	0.11	0.86	0.03	0.00	YAO	0.48	0.46	0.06	0.01
LWZ	0.82	0.18	0.00	0.00	LWZ	0.94	0.06	0.00	0.00
DGP 5					DGP 10				
HO-FT5	0.00	1.00	1.00	1.00	HE-FT5	0.00	1.00	1.00	1.00
HO-SQ5	0.00	0.40	0.60	0.00	HE-SQ5	0.00	0.60	0.40	0.00
AIC	0.00	0.00	0.58	0.42	AIC	0.00	0.00	0.57	0.43
BIC	0.00	0.13	0.85	0.02	BIC	0.00	0.07	0.92	0.01
YAO	0.00	0.13	0.86	0.02	YAO	0.00	0.38	0.57	0.05
LWZ	0.00	0.61	0.38	0.00	LWZ	0.10	0.79	0.12	0.00

(注)HO-FT5とHE-FT5は多重変化検定で分散均一，不均一誤差で5%有意水準を適用．HO-SQ5とHE-SQ5は逐次検定．正しい変化点数の選択率を網掛にしてある．

優れている．DGP6 と DGP7 については AIC や BIC では分散不均一も構造変化と数えるので他と異なった結果となっている．DGP8 から DGP10 にかけては BIC によるモデル選択法が他の方法より非常に良い結果を示している．以上をまとめると，BIC によるモデル選択法が BP の仮説検定法を含め他の方法よりやや望ましい結果を示しているといえる．特に実務上の観点からは DGP8 から DGP10 までの結果が重要である．なぜなら，多くの経済時系列の長期デー

タにおいて分散不均一を前提に分析すべきだからである．たとえば，McConnell-Perez-Quiros [70]が米国経済成長率について1980年央に誤差分散変化が起きていることを明らかにしているからである．

(構造変化の検出速度)

次に，構造変化の検出速度に関するシミュレーションを行う．統計実務において構造変化をできるだけ早く，できるだけ正確に検出することが重要である．ここでは，経済時系列分析において代表的な構造変化のモニタリング法である Chu et al. [18]の方法と BP の方法 (HO-FT あるいは HE-FT)，そして提案した方法の比較を行う．次の3つの DGP を考える．

$$\text{DGP 11: } y_t = 2 + e_t, \quad e_t \sim NID(0,1), \quad t = 1, \dots, T.$$

$$\text{DGP 12: } y_t = 2 + e_t \quad (t \leq T_B), \quad y_t = 2.8 + e_t \quad (t > T_B).$$

$$\text{DGP 13: } y_t = 2 + e_t \quad (t \leq T_B), \quad y_t = 2.4 + 2e_t \quad (t > T_B).$$

DGP11 と DGP12 は Chu et al.が行ったシミュレーションで用いられたものと同じであり，DGP13 は実務上の有用性を考え本稿で付け加えたものである．ここで $T = 200$ そして $T_B = 110$ とする．モニタリングを次のように行う．まず $t = 101$ までのデータが得られた時点で構造変化の検出を行う．構造変化が検出されたらモニタリングを終える．検出されなかったら $t = 102$ までのデータが得られた時点で同様の作業を行う．この作業は最長で $t = 200$ まで続けられる．

以上を踏まえて，シミュレーションを次のように行う．まず，DGP11 から DGP13 までのうち1つの DGP を選ぶ．次に，攪乱項を発生させ人工データを作成する．そこで得られたデータに対して各種の構造変化の検出法を適用し，先に述べたモニタリングを行う．最小データ区間 (L) を 15 とする．こうした実験を 1,000 回繰り返し，構造変化の検出頻度，検出時期の平均と標準偏差，変化点の平均と標準偏差を求めた結果が表 3-2 にある．Chu et al.の方法では 5% と 10% の検定サイズを用いる (CSW5, CSW10)．

まず DGP11 の結果をみると，Chu et al.の方法は検定サイズが良く制御されているが，LWZ を除いて他の方法では検出頻度がやや高い．頻度の低い順にならべると，YAO, BIC, HO-FT5, HO-FT10, AIC となる．特に AIC の結果が悪い．これは，Robbins [87]が明らかにしているように，モニタリング用に開発

表3-2 構造変化の検出頻度と検出時期

方法	検出頻度	検出時期		変化点	
		平均	標準偏差	平均	標準偏差
DGP 11					
CSW5	0.04	133	26	121	24
CSW10	0.06	133	26	117	19
HO-FT5	0.19	145	27	116	23
HO-FT10	0.32	142	28	115	23
AIC	0.89	123	24	101	20
BIC	0.16	140	27	112	22
YAO	0.12	144	27	115	21
LWZ	0.00	136	17	106	1
DGP 12					
CSW5	0.99	138	16	115	12
CSW10	0.99	134	14	114	10
HO-FT5	1.00	126	9	104	7
HO-FT10	1.00	123	8	102	8
AIC	1.00	113	8	93	8
BIC	1.00	128	10	104	8
YAO	1.00	128	11	105	7
LWZ	0.90	145	18	110	7
DGP 13					
CSW5	0.96	135	18	123	16
CSW10	0.97	132	17	122	16
HE-FT5	0.92	140	21	112	14
HE-FT10	0.96	134	20	109	14
AIC	1.00	111	7	92	7
BIC	1.00	120	7	101	6
YAO	0.97	131	16	109	12
LWZ	0.66	141	18	115	12

(注)CSW5とCSW10はChu-Stinchcombe-White検定で5%, 10%の有意水準を適用。それ以外は表3-1の注を参照。検定サイズに相当する部分を網掛にしている

された Chu et al.の方法以外の方法をモニタリングに適用すると、誤って構造変化がないという仮説を棄却する確率が最終的には1に近づくことから予想された結果といえる。次に DGP12 の結果についてみる。検定サイズが制御できないので、情報量規準によるモデル選択の結果の評価を正確に行うことはできないものの、DGP11での結果が悪い分、検出頻度は高く、また、構造変化の検出時期も早いことがわかる。最後に DGP13 についてみると、分散不均一を想定していないCSWやYAOそしてLWZの結果が悪くなっている。以上をまとめると、モニタリング用に開発された Chu et al.の方法は検定サイズが制御されている一方、BICによるモデル選択法は検定サイズが16%とやや大きいものの、

その分 Chu et al.の方法よりも早く構造変化を検出することができ、実務上1つの有力な方法であることが確認できる。

(構造変化のモニタリング)

最後に、経済時系列データの実務上のモニタリングを想定したシミュレーションを行う。ここでは、構造変化の数が未知で、次数が未知の AR モデルを想定する。シミュレーションでは次のような3つの DGP を考える。

$$\text{DGP 14: } y_t = 0.5y_{t-1} + e_t, \quad e_t \sim NID(0,1), \quad t = 1, \dots, T.$$

$$\text{DGP 15: } y_t = 0.5y_{t-1} + e_t \quad (t \leq T_B), \quad y_t = 1 + 0.5y_{t-1} + e_t \quad (t > T_B).$$

$$\text{DGP 16 } y_t = 0.5y_{t-1} + e_t \quad (t \leq T_B), \quad y_t = 1 + 0.5y_{t-1} + 2e_t \quad (t > T_B).$$

ここで、 $y_0 = 0$, $T_B = 120$, 最大変化点数 2, 最大 AR 次数 4 とし、モニタリング期間を $t = 138$ から $t = 147$ までの 10 時点とする。ここでは仮説検定法の中で Chu et al.のモニタリング法は AR モデルについては導出されていないので使えない。また、BP の方法のうち、彼らが推奨している逐次検定法のみを扱う。その際、最初の検定のみ、構造変化なしという帰無仮説に対して変化数 1 という対立仮説を検定する UD max 検定 (多重変化検定の結果のうち変化数の最大値を選択) (付録 B 参照) を適用する。また、BP の方法では、AR モデルの構造変化に対して2つの接近法が考えられる。1つは説明変数を定数項のみとし攪乱項に系列相関を認める方法、他の1つは説明変数に自己ラグを設定し (通常の AR モデルと同じ)、攪乱項に系列相関を認めない方法である。どちらの方法が優れているかについて彼らは明らかにしていないが、ここでは、後者を使い、ラグ次数は ADF 検定で用いた Ng-Perron [75]の t 検定で決定する。

シミュレーションを次のように行う。まず3つの DGP の中から1つを選択する。次に与えられた DGP のもとで、攪乱項を $T = 147$ として発生させ人工データを作成する。そして、得られたデータのもとで $t = 138$ からモニタリングを始め10 時点続ける。各時点で仮説検定法では AR モデルのラグ次数の検定と構造変化の逐次検定が行われ、変化点の数や変化点の位置を求める。情報量規準によるモデル選択法でも変化点の数や変化点の位置に加えてラグ次数も組み合わせた様々な候補モデルの中から最適なモデルが1つ選択される。こうした実験を 1,000 回繰り返し、各モニタリング時点で変化点数 1 を検出した頻度と第一

変化点の平均を求める。

表 3-3 に方法ごとのモニタリング結果が示されている。DGP14 についてみると、先に言及した Robbins の現象が起きていないことがわかる。これは、モニタリング前の標本数に対して、モニタリング最終期の標本数がさほど増加していない（比率で 1.1 に満たない）からである。AIC の結果が良くないことはこれまでのシミュレーション結果から予想される。一方、これまでのシミュレーションとは異なり BIC の検定サイズは HO-SQ5 の検定サイズより小さくなっているのが特徴である。これは、構造変化点数が未知であることに加え、AR 次数も未知であることが影響していると思われる。BP では AR 次数選択の問題は議論されていないため、ここでは Ng-Perron の方法を援用したのが一因かもしれない。DGP15 についてみると、検定サイズが大きい分だけ、HO-SQ5 の結果が良い。しかしながら、モニタリングの始点と終点における検出頻度の差をみると、HO-SQ5 の 23 ポイント（=91-68）に対し、BIC は 32 ポイント（=77-45）と、BIC の方が大きい。最後に DGP16 についてみると、BIC の結果が非常に良いことがわかる。また、興味深い結果として、DGP15 より DGP16 の方がモニタリングの終期（ $t=147$ ）に近づくと検出変化点の平均が真の変化点（ $T_B=120$ ）に近づいていることが確認できる。これは表 3-1 の結果から予想されるとおり、回帰係数と誤差分散の両方に構造変化があるので変化点の推定精度が高いためである。以上の結果を総合的に評価すると、BIC によるモデル選択法がやや優れているといえよう。

3.1.4 実証分析

ここでは提案した方法を日米の経済成長率（季節調整済四半期、前期比年率）の時系列データに適用する。データは米国に関しては商務省経済分析局（<http://bea.doc.gov>）、日本に関しては内閣府（<http://www.cao.go.jp>）より入手した。データ期間は 1955q3 から 2000q4 までの 182 時点である。図 3-1 に両国の経済成長率（年率換算）が図示されている。見やすいように、米国の値には 20 を、日本の値には 40 を予め加えてある。米国ではデータ期間内に平均成長率の変化がほとんど見られないが、日本では石油危機後の 1970 年代半ばとバブル崩壊後の 1990 年代初頭のときに平均成長率が低下しているのが見られる。

表3-3 構造変化のモニタリング

方法	検出ラグ									
	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
DGP 14										
HO-SQ5	0.12 70	0.11 71	0.11 73	0.11 71	0.12 74	0.11 75	0.11 72	0.12 75	0.11 75	0.10 78
AIC	0.30 72	0.29 74	0.28 72	0.29 74	0.28 73	0.29 76	0.30 72	0.28 75	0.31 79	0.30 80
BIC	0.03 70	0.03 65	0.02 60	0.02 63	0.03 68	0.03 70	0.02 78	0.03 78	0.03 79	0.02 79
YAO	0.02 70	0.02 66	0.02 67	0.02 62	0.02 63	0.02 69	0.02 76	0.02 75	0.02 78	0.02 78
LWZ	0.00 -	0.00 -	0.00 -	0.00 -	0.00 -	0.00 -	0.00 -	0.00 -	0.00 -	0.00 -
DGP 15										
HO-SQ5	0.68 108	0.73 110	0.78 113	0.82 114	0.86 115	0.87 115	0.89 115	0.90 115	0.92 116	0.91 117
AIC	0.46 111	0.47 113	0.47 115	0.45 117	0.47 117	0.46 117	0.47 117	0.48 118	0.47 117	0.48 118
BIC	0.45 111	0.52 113	0.59 115	0.65 116	0.69 117	0.69 117	0.72 117	0.74 117	0.75 118	0.77 118
YAO	0.44 113	0.51 115	0.59 116	0.64 117	0.68 117	0.69 118	0.71 118	0.73 118	0.75 118	0.77 118
LWZ	0.03 116	0.04 117	0.06 118	0.06 118	0.07 119	0.09 119	0.08 119	0.08 119	0.09 120	0.10 120
DGP 16										
HE-SQ5	0.31 108	0.34 111	0.35 113	0.40 116	0.40 116	0.42 117	0.41 117	0.45 118	0.49 119	0.50 120
AIC	0.51 115	0.50 117	0.51 118	0.50 118	0.49 119	0.50 120	0.51 119	0.51 120	0.51 120	0.51 120
BIC	0.81 116	0.86 117	0.89 118	0.91 119	0.94 119	0.94 120	0.95 120	0.96 120	0.96 120	0.96 120
YAO	0.36 115	0.42 117	0.47 118	0.51 119	0.55 119	0.55 120	0.54 120	0.56 120	0.61 120	0.64 120
LWZ	0.04 116	0.06 118	0.09 119	0.11 119	0.13 120	0.13 120	0.12 120	0.12 120	0.14 120	0.14 121

(注)表3-1の注を参照.各欄の上段は変化点数1を検出した頻度,下段は検出した第一変化点の平均を表す.検定サイズに相当するものを網掛にしてある.

また,米国では1980年代半ば以降に変動幅が低下しているように見えるが,日本では1970年代半ば以降に変動幅が低下したものの1990年代に入って再び上昇したように見える.

表3-4にBICによる構造変化のモニタリング結果が示されている.各モニタリング時点において,最大変化点数3,最小区間(L)20かつ最大ラグ次数4という条件のもとで各区間をARモデルで推定し,BICによるモデル選択の結果として変化点を検出した.モニタリングは1976年q1からはじめ2000q4で

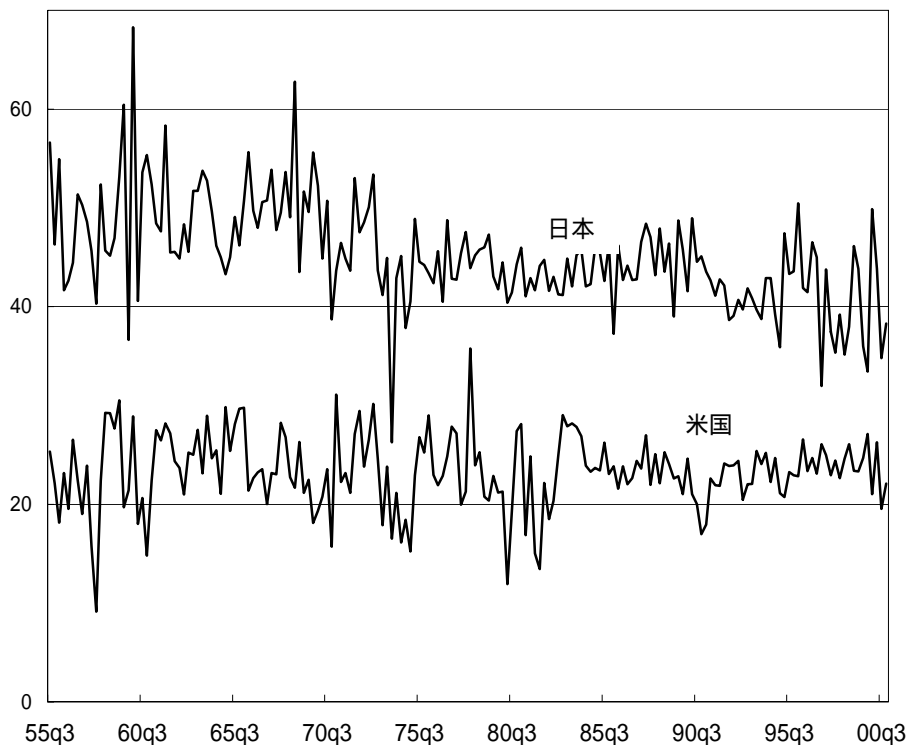


図3-1 日米の経済成長率

(注) 米国の経済成長率(年率%表示)には20が加算されており, また, 日本の経済成長率(年率%表示)には40が加算されている.

終了している。紙幅の関係から重要なモニタリング期間のみ掲載している。まず、データ期間全体での構造変化の検出結果であるが、米国では構造変化が1984q3に一度起こった。これは誤差分散の変化によるもので、変化前後の平均成長率は3.3%と3.2%とでほとんど変化していない。分析手法は異なるものの、この結果はMcConnell-Perez-Quiros [70]による結果と非常に近い。モニタリング結果をみると、初めて87q3時点で構造変化が1度あり変化点が82q4であるという結果を出している。しかしながら、この検出結果は不安定であり、88q1時点で構造変化が1度もないという結果に変更されている。そして再び88q4時点で構造変化が1度あり変化点が83q3であるという結果を出している。その後、構造変化が1度あるという結果は不変だが、変化点については83q3から84q3の間で多少変動している。

次に日本の経済成長率に関するモニタリング結果をみる。まずデータ期間全

表3-4 日米経済成長率の構造変化に関するモニタリングの結果

米国の2000q4での構造変化の検出		
変化点	第1区間の 平均成長率	第2区間の 平均成長率
84q3	3.3	3.2

米国の経済成長率の構造変化に関するモニタリング結果

モニタリング時点	86q3	86q4	87q1	87q2	87q3	87q4	88q1	88q2	88q3	88q4	
変化点数	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	
最後の变化点	0	0	0	0	82q4	82q4	0	0	0	83q3	
89q1	89q2	89q3	89q4	90q1	90q2	90q3	90q4	91q1	91q2	91q3	91q4
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
84q2	84q3	84q3	84q3	84q3	84q3	84q3	83q3	83q3	83q3	83q3	83q3
92q1	92q2	92q3	92q4	93q1	93q2	93q3	93q4	94q1	94q2	94q3	94q4
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
83q3	83q3	83q3	83q3	83q3	83q3	83q3	83q3	83q3	83q3	83q3	83q3
95q1	95q2	95q3	95q4	96q1	96q2	96q3	96q4	97q1	97q2	97q3	97q4
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
83q3	83q3	83q3	83q3	83q3	83q3	83q3	83q3	83q3	83q3	83q3	83q3
98q1	98q2	98q3	98q4	99q1	99q2	99q3	99q4	00q1	00q2	00q3	00q4
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
83q3	83q3	83q3	83q3	83q3	83q3	83q3	83q3	84q2	84q2	83q4	84q3

日本の2000q4での構造変化の検出

変化点	第1区間の 平均成長率	第2区間の 平均成長率	第3区間の 平均成長率
74q2 92q2	8.6	3.9	0.7

日本の経済成長率の構造変化に関するモニタリング結果

モニタリング時点	74q3	74q4	75q1	75q2	75q3	75q4	76q1	76q2	76q3	76q4	
変化点数	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	
最後の变化点	0	0	0	0	70q4	70q4	70q4	70q4	70q4	70q4	
77q1	77q2	77q3	77q4	78q1	78q2	78q3	78q4	79q1	79q2	79q3	79q4
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
70q4	70q4	70q4	70q4	73q2	73q2	73q2	73q2	74q2	74q2	74q2	74q2
95q1	95q2	95q3	95q4	96q1	96q2	96q3	96q4	97q1	97q2	97q3	97q4
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
74q2	74q2	74q2	74q2	74q2	74q2	74q2	74q2	74q2	74q2	74q2	74q2
98q1	98q2	98q3	98q4	99q1	99q2	99q3	99q4	00q1	00q2	00q3	00q4
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
92q2	92q2	92q2	92q2	92q2	92q2	92q2	92q2	92q2	92q2	92q2	92q2

体での検出結果では、構造変化は74q2と92q2の2度起きている。前者が石油危機後に対応し、後者はバブル崩壊後に対応している。平均成長率も8.6%、3.9%、0.7%と低下している。分析手法は異なるものの、この結果はOhara [78]

による分析結果と非常に近い。モニタリング結果をみると、初めて 75q3 時点で構造変化が 1 度あり変化点が 70q4 であるという結果を出している。この結果は 78q1 時点で変化点が 73q2 であるという結果に変更されるまで変わらない。最初の変化点が 74q2 であるという結果は 79q1 時点で初めて出されてから 97q4 時点まで不変である。98q1 時点になって構造変化は 2 度あり、2 つめの変化点が 92q2 であるという結論に変更された。そして、この結論は最後まで不変である。

3.1.5 結論

以上、本節では複数の構造変化の検出について、情報量規準に基づいたモデル選択法を提案した。その背景には、代表的な仮説検定法である BP は複雑すぎてあまり実用的ではないということがある。提案した方法では、観測されたデータをいくつかの区間に分け、区間ごとに最小 2 乗推定して残差を求めモデルの情報量規準の値を求めている。区間数や変化点は、様々なモデルの中から最小情報量規準によるモデル選択の結果として決定される。この方法の有用性は、3 種類のシミュレーションにより確かめられた。まず、変化点の数の判定のシミュレーションでは、BIC によるモデル選択法が BP を含めた他の方法よりもやや優れていることがわかった。特に、実務上重要な分散不均一へのデータに対する優れた結果が注目された。次に、非常に単純な DGP を想定し、構造変化の検出速度に関するシミュレーションを行った。仮説検定によるモニタリング法に比べて、BIC によるモデル選択法は検定サイズがやや大きいものの、その検出速度が速く、実務上有用であることが確認された。最後に、より実務上の問題を考慮するため、変化点数のみならず AR 次数も未知な場合を想定し、構造変化のモニタリングのシミュレーションを行った。2 番目のシミュレーション結果とは逆で、BIC によるモデル選択法は検定サイズに相当するものがやや小さくなる分、最初の検出頻度は小さいものの、その後の頻度の上昇の速度を考慮すると、より望ましい方法であることがわかった。特に、実務上重要な分散不均一の場合、BIC によるモデル選択法の結果が非常に良いことが注目された。さらに、提案した方法を日米の経済成長率の構造変化の検出に適用した。データ期間全体での分析結果は、日米両国とも他の手法による分析結果と非常

に近いものになった。一方、構造変化のモニタリング結果も興味深い。米国については 88q4 以降 1 度の構造変化を検出しているが、モニタリング期によって変化点が若干変動するという結果になった。日本については 75q3 以降 1 度目の構造変化を検出し、79q1 以降は変化点が不変で推移した。そして 98q1 時点で 2 度の構造変化を検出し、変化点は不変のままであった。

今後の課題として、最小区間 (L) の設定問題を議論する。この問題は本節以降の分析にも該当する。先に、仮説検定法では L を恣意的に設定するのに対し、情報量規準によるモデル選択法では L を情報量規準に基づいて客観的に設定できることを述べた。しかしながら、提案した方法にも問題点が 2 つある。第一に、計算時間の問題である。一般に、情報量規準によるモデル選択法は仮説検定法に比べて計算時間がかかる。それに加えて、 L を厳密に最適化するには、考えられる全ての L について計算する必要がある、膨大な時間がかかる。先の実証分析のときにも計算時間を考えて $L = 20$ との前提を置いた。もし、構造変化の検出ラグをさらに小さくしたければ、もっと小さな L を設定すべきであるが、計算時間が膨大になる。第二に、坂本・石黒・北川[89]による AIC に関する解説書にある通り、データ数に対してパラメータ数が多すぎる場合、AIC は正常に機能しない。同様のことは他の情報量規準にも当てはまると考えられることから、単に検出ラグを小さくできるからといって、 L を必要以上に小さくすることはできず、結果を詳細に再検討する必要がある場合がある。

3.2 回帰係数変化と誤差分散変化の識別

本節では、回帰係数変化と誤差分散変化の識別について、情報量規準によるモデル選択法を提案する。この方法では、たとえば最初の構造変化で回帰係数のみが変化し、次の構造変化では誤差分散のみが変化するというモデルも考察の対象になる。シミュレーション結果によると、実務上妥当な大きさの構造変化を前提とした場合、それぞれのモデルを識別できる可能性が高いことがわかる。

3.2.1 問題の所在

3.1 節でも明らかにしたように、構造変化の問題はこれまで主に仮説検定の枠

組みで処理されてきた。その1つの到達点がBP [7]の方法であり、複数の構造変化を含む線形モデルの推定や複数の構造変化点の有無に対する検定、さらには変化点数の決定という種々の問題に対して統合的な接近法を提供している。加えて、この方法の優れているところは、回帰モデル中の一部分（たとえば定数項）のみに構造変化が起きた場合にも適用可能な点である。また、攪乱項の系列相関や分散不均一の問題に対しても対応可能な極めて汎用的な方法である。しかしながら、この方法をもってしても、実務上経験し得る構造変化の一部分しか捉えているに過ぎない。たとえば、日本の実質GDP成長率の変動をみると、1973年の石油危機と1990年のバブル崩壊のときに平均成長率が大きく低下していることは明らかである。しかしながら、成長率の変動幅については、石油危機を境に低下したことは明白だが、バブル崩壊を境に変化があったか否かは不明である。このような複雑な変動過程をもつデータに対しては、従来の仮説検定の枠組で対応することはできない。より柔軟なモデリングが望まれるのである。

3.2.2 情報量規準によるモデル選択法

前項で提起した問題に対処するため、情報量規準によるモデル選択の結果として構造変化のパターンを決定する方法を提案する[36]。前節までの研究成果を踏まえ、ここでは情報量規準はBICに限定する。提案する方法を例示するため次のようなモデルを考える。

$$\begin{aligned}
 y_t &= \alpha_1 + \phi_1 y_{t-1} + e_t, e_t \sim NID(0, \sigma_1^2) (t \leq T_1); \\
 y_t &= \alpha_1 + \phi_1 y_{t-1} + e_t, e_t \sim NID(0, \sigma_2^2) (T_1 < t \leq T_2); \\
 y_t &= \alpha_2 + \phi_2 y_{t-1} + e_t, e_t \sim NID(0, \sigma_2^2) (t > T_2).
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

ここで $T_i (i=1,2)$ は未知の変化点で定常AR過程の条件 $|\phi_i| < 1 (i=1,2)$ が成立するものとする。この場合、最初の変化点(T_1)では回帰係数変化はなく誤差分散変化のみが起きている。次の変化点(T_2)では誤差分散変化はなく回帰係数変化のみが起きている。こうした混合モデルを仮説検定の枠組で評価する方法は現在のところ開発されていない。2つの変化点を与えられたときの対数尤度(LL)は次式で求められる。

$$LL = -\frac{T_1-1}{2} \ln(2\pi\sigma_1^2) - \frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{t=2}^{T_1} (y_t - \alpha_1 - \phi_1 y_{t-1})^2 - \frac{T_2-T_1}{2} \ln(2\pi\sigma_2^2) \\ - \frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_{t=T_1+1}^{T_2} (y_t - \alpha_1 - \phi_1 y_{t-1})^2 - \frac{T-T_2}{2} \ln(2\pi\sigma_2^2) - \frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_{t=T_2+1}^T (y_t - \alpha_2 - \phi_2 y_{t-1})^2.$$

一階の条件 $\frac{\partial LL}{\partial \sigma_i^2} = 0$ ($i=1,2$) より次の関数 $F(\bullet)$ が得られる .

$$F(\alpha_1, \phi_1, \alpha_2, \phi_2) = -(T_1-1) \ln \sum_{t=2}^{T_1} (y_t - \alpha_1 - \phi_1 y_{t-1})^2 \\ - (T-T_1) \ln \left\{ \sum_{t=T_1+1}^{T_2} (y_t - \alpha_1 - \phi_1 y_{t-1})^2 + \sum_{t=T_2+1}^T (y_t - \alpha_2 - \phi_2 y_{t-1})^2 \right\}. \quad (3.2)$$

まず, α_2 と ϕ_2 に対する最小 2 乗推定量は容易に求められるが, 残りの α_1 と ϕ_1 に対しては数値的最適化をする必要がある . $T_1, T_2, \alpha_1, \phi_1, \alpha_2, \phi_2$, に対する推定値を得るため, 次のような手順を踏む . まず, 様々な T_1 と T_2 の組み合わせを考える . その中から 1 つの組み合わせを選択し, モデル(3.1)を関数(3.2)をもとに推定し, 得られた BIC を蓄積する . 次に, 様々なモデルの BIC の値を比較し, 最小 BIC を与えるモデルを選択する .

考慮すべきモデルは構造変化の数とともに幾何級数的に増加する . たとえば, 変化数が 1 のモデルは次のとおり 3 つある .

Model 2 (0-1): 誤差分散のみ変化のモデル ,

Model 3 (1-0): 回帰係数のみ変化のモデル ,

Model 4 (1-1): 回帰係数と誤差分散の両方が変化するモデル .

ここで, カッコ内の数字のうち, ハイフンの前の数字は回帰係数変化の順番を, また後の数字は誤差分散変化の順番を指している . 0 は変化がないことを指し, たとえば, 回帰係数変化での 01 とは, 1 番目の構造変化のときには回帰係数は変化せず (誤差分散は変化するが), 2 番目の構造変化のときに回帰係数は初めて変化することを指す . 変化数が 2 のモデルは, (00-12), (01-10), (01-12), (10-01), (10-12), (12-00), (12-01), (12-10), (12-12) の 9 モデル (Models 5-13) がある . さらに, 変化数が 3 のモデルは, (000-123), (001-120), (001-123), (010-102), (010-123), (012-100), (012-102), (012-120), (012-123), (100-012), (100-123), (102-010), (102-012), (102-120), (102-123), (120-001), (120-012), (123-102), (120-123),

(123-000), (123-001), (123-010), (123-012), (123-100), (123-102), (123-120), (123-123)で27モデル (Models 14-40)ある .モデル(3.1)は Model 6 (01-10)であり , Model 6 以外のモデルの推定法も同様に行うことができる .

3.2.3 シミュレーション研究

提案した方法の評価はシミュレーション結果に基づいて行う . 前節での比較研究とは異なり , 提案した方法と比較可能な方法はないので , ここでは各モデルの識別可能性について着目する . まず , $y_t (t = 1, \dots, T)$ に対して次のような 13 通りの DGP を考える . いずれも既に述べたモデルの番号に対応している .

$$\text{DGP 1: } y_t = \alpha_1 + \phi_1 y_{t-1} + e_{1t}.$$

$$\text{DGP 2: DGP 1 } (t \leq T_1), y_t = \alpha_1 + \phi_1 y_{t-1} + e_{2t} \text{ } (t > T_1).$$

$$\text{DGP 3: DGP 1 } (t \leq T_1), y_t = \alpha_2 + \phi_2 y_{t-1} + e_{1t} \text{ } (t > T_1).$$

$$\text{DGP 4: DGP 1 } (t \leq T_1), y_t = \alpha_2 + \phi_2 y_{t-1} + e_{2t} \text{ } (t > T_1).$$

$$\text{DGP 5: DGP 2 } (t \leq T_2), y_t = \alpha_1 + \phi_1 y_{t-1} + e_{1t} \text{ } (t > T_2).$$

$$\text{DGP 6: DGP 2 } (t \leq T_2), y_t = \alpha_2 + \phi_2 y_{t-1} + e_{2t} \text{ } (t > T_2).$$

$$\text{DGP 7: DGP 2 } (t \leq T_2), y_t = \alpha_2 + \phi_2 y_{t-1} + e_{1t} \text{ } (t > T_2).$$

$$\text{DGP 8: DGP 3 } (t \leq T_2), y_t = \alpha_2 + \phi_2 y_{t-1} + e_{2t} \text{ } (t > T_2).$$

$$\text{DGP 9: DGP 4 } (t \leq T_2), y_t = \alpha_2 + \phi_2 y_{t-1} + e_{1t} \text{ } (t > T_2).$$

$$\text{DGP 10: DGP 3 } (t \leq T_2), y_t = \alpha_1 + \phi_1 y_{t-1} + e_{1t} \text{ } (t > T_2).$$

$$\text{DGP 11: DGP 3 } (t \leq T_2), y_t = \alpha_1 + \phi_1 y_{t-1} + e_{2t} \text{ } (t > T_2).$$

$$\text{DGP 12: DGP 4 } (t \leq T_2), y_t = \alpha_1 + \phi_1 y_{t-1} + e_{2t} \text{ } (t > T_2).$$

$$\text{DGP 13: DGP 4 } (t \leq T_2), y_t = \alpha_1 + \phi_1 y_{t-1} + e_{1t} \text{ } (t > T_2).$$

ここで , $y_0 = 0, e_{it} \sim NID(0, \sigma_i^2) (i=1,2)$ であり , また $T_1 < T_2$ である . シミュレーションにおいては , $T = 180$ とし , DGPs 2-4 のときには $T_1 = 90$, DGPs 5-13 のときには $T_1 = 60$ そして $T_2 = 120$ とする . また , DGP1 のパラメータについては $\alpha_1 = 1, \phi_1 = 0.8, \sigma_1^2 = 1$ とする . 他のパラメータについては次の 2 通りのケースを考える .

$$\text{ケース 1 (緩慢な変化): } \alpha_2 = 0.8, \phi_2 = 0.64, \sigma_2^2 = 0.64.$$

$$\text{ケース 2 (急激な変化): } \alpha_2 = 0.5, \phi_2 = 0.4, \sigma_2^2 = 0.25.$$

シミュレーションを次のように行う . まず , 13 通りの DGP のうちから 1 つを選

択する．攪乱項を発生させ人工データを作成する．得られた人工データに対して，変化点の最大数を 3 とし，提案した方法を適用する．この場合，40 の候補モデルの中から BIC を用いて 1 つのモデルを選択し，得られたモデルがどの DGP に該当するのかを判断する．各実験を 1,000 回繰り返し，各モデルの選択率をみる．また，提案した方法では 3.1 節と同様に最少区間 (L) の設定が必要であり，全ての i ($i=1,2,3$) に対して $T_i - T_{i-1} \geq L$ が成り立つものとする．ここでは計算時間も考慮し， $L=30$ とした．

表 3-5 に各モデルの選択率が示されている．太字は正しく選択した頻度を示している．紙幅の関係から変化数 3 の 27 個のモデル (Model 14 から Model 40) は全て Model 14 として集計されている．まず，ケース 1 (緩慢な変化) の結果をみる．DGP1 に関しては 0.98 と高い頻度で正しく選択されている．しかしながら，DGP2 については正しく選択された頻度が 0.21 となっており，緩慢な構造変化 (この場合は誤差分散の変化) では正しいモデル選択がほとんどできないことがわかる．ケース 1 に関しては他の DGP についても DGP3 を除いて正しく選択した頻度は低い．一方，ケース 2 (急激な変化) の場合は，DGP10 を正しく選択した頻度が 85% であることを除いて，いずれも 93% 以上の高い値を示している．次項で述べる 7 か国の鉱工業生産指数の実証結果では，ほとんどの国で構造変化の大きさはケース 1 よりもケース 2 に近く，BIC によるモデル選択法の実務上の有用性が確認できる．

3.2.4 実証分析

ここでは提案した BIC によるモデル選択法を用いた回帰係数変化と誤差分散変化の識別に関する実証分析を行う．データは 7 か国の鉱工業生産指数 (四半期，季節調整済，1995 年=100) で 1961 年 1 期から 2000 年 4 期までを International Financial Statistics から取った．7 か国はカナダ (CAN)，フランス (FRA)，ドイツ (GER)，イタリア (ITA)，日本 (JPN)，イギリス (UK)，アメリカ (US) である．各時系列データは前期比変化率 (年率%表示) に変換する．

図 3-2 に 7 か国の鉱工業生産指数を図示してある．カナダが一番下で，アメリカが一番上にある．見やすいようにフランス以降順番に 50 ずつ加えている．

表3-5 各モデルの選択率

DGP	モデル													
	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	M10	M11	M12	M13	M14
ケース1 (緩慢な構造変化の場合)														
D1	0.98	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
D2	0.77	0.21	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
D3	0.17	0.00	0.81	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
D4	0.06	0.01	0.52	0.41	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
D5	0.95	0.03	0.01	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
D6	0.20	0.02	0.57	0.10	0.00	0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00
D7	0.19	0.01	0.69	0.07	0.01	0.01	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
D8	0.09	0.04	0.73	0.07	0.00	0.00	0.00	0.06	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
D9	0.14	0.01	0.74	0.06	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
D10	0.85	0.01	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.10	0.00	0.00	0.00	0.00
D11	0.62	0.14	0.01	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.10	0.08	0.02	0.00	0.00
D12	0.67	0.07	0.01	0.01	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.13	0.01	0.10	0.00	0.00
D13	0.83	0.01	0.03	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.08	0.03	0.02	0.01	0.00
ケース2 (急激な構造変化の場合)														
D2	0.00	0.99	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
D3	0.00	0.00	0.96	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
D4	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
D5	0.04	0.01	0.00	0.00	0.93	0.00	0.01	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
D6	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.96	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00
D7	0.00	0.00	0.01	0.01	0.00	0.00	0.96	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00
D8	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.95	0.03	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
D9	0.00	0.00	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.98	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00
D10	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.85	0.03	0.03	0.00	0.00
D11	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.96	0.00	0.02	0.00
D12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.98	0.02	0.00
D13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.99	0.00

(注)太字は正しくモデルを選択した頻度を表す。

ほとんどの国で変化率の変動幅がデータ区間によって大きく変動しているのがわかる。また、区間ごとの変化率の平均については、ほとんどの国で必ずしも明瞭な変化が見られない。

次に、最大変化点数3、最小区間(L)20という条件のもとで提案した方法を適用した。表3-6に国別に40個の候補モデルの中から選択されたモデルの番号とBIC、さらにModel1からModel13までのBIC値が示されている。さらに、表3-7では選択されたモデルの推定結果が明らかにされている。7か国のうち、変化点が1個の国が2か国(ドイツと日本)で全てModel2が選択された。変化点が2個の国も2か国で全てModel5(カナダとアメリカ)が選択された。さらに、変化点が3個の国が3か国(フランス、イタリア、イギリス)で

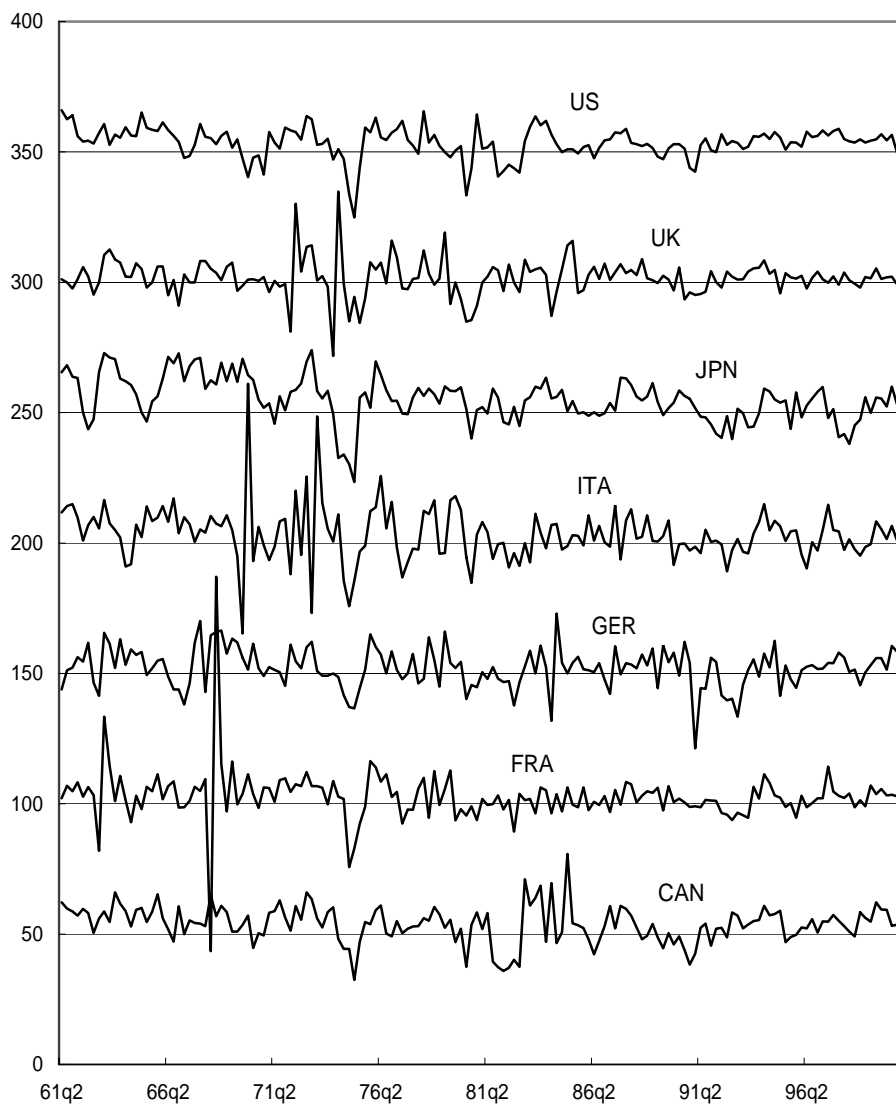


図3-2 7か国の鉱工業生産指数の前期比変化率
 (注)変化率は年率%表示.CAN以降順に50ずつ加算している。

ある．興味深い結果をまとめると次の2点になる．第一に，全ての变化点で誤差分散が大きく変化している．前節のシミュレーションで急激な構造変化のケースの検出率が非常に高い(1つのDGPで0.85,それ以外の12個のDGPで0.93以上)ことを確認したが，7か国で見られる誤差分散の変化の大きさは，ほぼ全ての場合で急激な構造変化のケースを上回るものである．第二に，回帰係数変化は2か国(フランスとイタリア)でしか見られず，しかも両国とも1度の

表3-6 国別モデル別のBIC値

モデル	国名						
	カナダ	フランス	ドイツ	イタリア	日本	イギリス	アメリカ
M1	602.4	742.4	645.7	756.4	589.9	638.4	520.8
M2	589.9	653.4	637.9	711.9	583.1	590.5	486.5
M3	610.0	697.1	653.4	730.7	588.6	639.3	528.7
M4	597.9	641.4	646.5	714.8	587.3	598.8	496.4
M5	568.2	636.8	642.4	692.7	586.7	565.5	479.2
M6	603.4	645.0	662.2	717.9	592.2	601.1	493.0
M7	574.9	644.1	651.6	694.5	588.2	575.1	487.9
M8	599.1	635.1	649.3	701.8	590.7	595.0	498.5
M9	575.6	625.1	651.5	690.7	587.7	573.9	485.3
M10	609.2	707.7	658.0	729.7	591.7	648.0	536.3
M11	597.8	644.3	653.3	709.2	593.3	604.5	505.7
M12	605.2	646.7	662.8	724.4	589.1	608.2	499.3
M13	584.2	633.5	656.7	695.7	593.6	582.0	494.5
選択された モデル	M5	M18	M2	M24	M2	M14	M5
	568.2	624.8	637.9	690.3	583.1	560.9	479.2

表3-7 国別推定結果

	変化点			残差分散				回帰係数			
	$\hat{\tau}_1$	$\hat{\tau}_2$	$\hat{\tau}_3$	$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$	$\hat{\sigma}_4^2$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\phi}_2$
カナダ	80q1	85q2		27.1	163.4	17.8		1.86	0.48		
								< 0.34>	< 0.05>		
フランス	68q4	74q3	79q4	326.4	15.8	95.3	16.7	7.92	-0.42	1.07	0.20
								< 0.76>	< 0.08>	< 0.32>	< 0.07>
ドイツ	95q4			60.7	10.0			1.99	0.24		
								< 0.37>	< 0.05>		
イタリア	69q2	74q4	80q3	30.0	514.5	112.9	31.6	4.49	0.35	1.59	0.15
								< 1.53>	< 0.16>	< 0.43>	< 0.06>
日本	76q1			62.7	23.8			1.29	0.65		
								< 0.35>	< 0.04>		
イギリス	71q4	76q4	85q3	18.1	256.9	56.4	10.2	1.34	0.24		
								< 0.25>	< 0.05>		
アメリカ	69q3	83q3		12.6	52.9	7.4		1.55	0.58		
								< 0.27>	< 0.04>		

(注) カッコ内は標準誤差。

変化に過ぎない。特に、日本の結果は意外なものである。なぜなら、3.2.1 項でも述べた通り、また、3.1.4 項で経済成長率の分析でも確認した通り、1970 年代半ばの石油危機と 1990 年代初頭のバブル崩壊で経済成長率が大きく低下してい

るため、回帰係数変化が期待された。しかしながら、そうしたモデルは BIC 最小法では選択されなかった。1 つの可能性はモデルの定式化である。もし、定数項 (α) のみの変化を認めるモデルであれば選択される可能性は高い。この点は今後の研究課題としたい。また、3.1.4 項でも述べたが、最小区間 (L) の設定により、結果が多少変化することも有りうることに留意が必要である。

3.2.5 結論

以上、本節では回帰係数変化と誤差分散変化の識別について、BIC によるモデル選択法を提案した。この方法では、たとえば最初の構造変化で回帰係数のみが変わり、次の構造変化では誤差分散のみが変わるというモデルが可能になる。経済時系列データは様々な攪乱要因によって構造変化が起きる。したがって、ある要因はトレンドなど回帰係数の変化を引き起こし、また別な要因は、変動幅を拡大または縮小させるなど誤差分散の変化を引き起こすと考えるのは自然なことであろう。提案した方法では、構造変化の組み合わせにより極めて柔軟なモデリングが可能になる。シミュレーションにより各モデル間の識別の頻度を検討したところ、急激な変化のときにのみ識別が可能であることが判明した。これは換言すれば仮説検定の検定サイズに当たるものが小さいということでもある。実際の経済時系列データにおける構造変化の大きさを考えると BIC によるモデル選択法の実務上の有用性が期待できる。実証分析結果も非常に興味深いものであった。7 か国の鉱工業生産指数の変化率に提案した方法を適用したところ、全ての国の全ての変化点で誤差分散の大きな変化を確認した。一方、回帰係数変化については 2 か国で検出されただけで、しかも 1 度限りの変化であった。

第4章 構造変化を考慮した単位根の検出

本章では構造変化を考慮した単位根検出の問題を議論する。4.1節では構造変化の諸類型を考察し、類型化した構造変化を考慮に入れた場合の単位根の検出について議論する。4.2節では回帰係数変化と誤差分散変化を考慮した場合の単位根の検出方法について考察する。

4.1 構造変化の類型化と単位根の検出

本節では、構造変化の諸類型のうち、加法型かイノベーション型か、また水準変化か傾向変化かを考慮した場合の単位根の検出について、情報量規準に基づいたモデル選択法を提案する。この方法の有用性はシミュレーションを通して、代表的な仮説検定法との比較によって確認される。

4.1.1 問題の所在

Perron [80]の研究以来、構造変化を考慮した場合の単位根の検出について様々な研究がなされてきた。構造変化はいくつかの視点から類型化が可能であるが、ここでは、構造変化が加法型異常値 (AO: additive outlier) によって起きたのかイノベーション型異常値 (IO: innovational outlier) によって起きたのか、また、水準変化 (J: jump) なのか傾向変化 (K: kink) なのか、それとも両方の変化 (JK: jump and kink) なのかに分けて考察する。したがって、考慮すべきモデルは、AO-J, AO-K, AO-JK, IO-J, IO-K, IO-JK の6つのモデルになる。たとえば、Perron は Nelson-Plosser [74]で分析された13系列の年次時系列のうち、11系列に対しては IO-J モデルを適用し、残り2系列に対しては IO-JK モデルを適用している。さらに四半期の GDP データに対しては AO-K モデルを適用している。しかしながら、そこには問題点が2つある。第一に、Perron は当該モデルを選択した理由について経済学的にも統計学的にも何ら説明しておらず、恣意的に選択したといえる。第二に、6つのモデルを基にした単位根の検定統計量は異なり、それぞれ独自の分布表が必要となる。実務家にとっては複雑な作業が強いられることになる。

4.1.2 仮説検定法

Vogelsang-Perron [102] (VP)は6つのモデルによる単位根検定について検討を加えている。AOモデルについては、次のような2段階の手続きが必要である。まず、観測された時系列データ $y_t (t=1, \dots, T)$ に対して、次式に基づいてトレンド除去を行う。

$$y_t = \mu + \beta t + \theta DU_t + \gamma DT_t + \tilde{y}_t. \quad (4.1)$$

ここで、 $DU_t = 1 (t > T_B)$, $DT_t = 1 (t > T_B)(t - T_B)$ であり、 T_B は変化点、 $1(\bullet)$ は指標関数 (indicator function) である。第二段階として、 \tilde{y}_t に対して次式を推定する。

$$\tilde{y}_t = \sum_{i=0}^k \omega_i D(T_B)_{t-i} + \alpha \tilde{y}_{t-1} + \sum_{i=1}^k c_i \Delta \tilde{y}_{t-i} + e_t. \quad (4.2)$$

ここで、 $D(T_B)_t = 1 (t = T_B + 1)$ そして $e_t \sim NID(0, \sigma^2)$ である。第2章で議論した ADF 検定 [21] のように、帰無仮説 $\alpha = 1$ に対する t 検定をする。留意すべきは、 $k+1$ 個のダミー変数 $D(T_B)_{t-i} (i=0, \dots, k)$ が含まれている点であるが、これは $\alpha = 1$ に対する t 値の漸近分布が攪乱項の系列相関から影響を受けないようにするためである。また、IOモデルは次式になる。

$$y_t = \mu + \beta t + dD(T_B)_t + \theta DU_t + \gamma DT_t + \alpha y_{t-1} + \sum_{i=1}^k c_i \Delta y_{t-i} + e_t. \quad (4.3)$$

したがって、VP 検定では次のように単位根を含まない6種類の DGP を設定することができる。

T-AO-J: (4.1)(4.2)において $\gamma = 0$ のモデルでの帰無仮説 $\alpha = 1$ の棄却

T-AO-K: (4.1)(4.2)において $\theta = 0$ のモデルでの帰無仮説 $\alpha = 1$ の棄却

T-AO-JK: (4.1)(4.2)のモデルでの帰無仮説 $\alpha = 1$ の棄却

T-IO-J: (4.3)において $\gamma = 0$ のモデルでの帰無仮説 $\alpha = 1$ の棄却

T-IO-K: (4.3)において $\theta = 0$ のモデルでの帰無仮説の棄却

T-IO-JK: (4.3)のモデルでの帰無仮説の棄却 $\alpha = 1$ の棄却

ここで T はトレンド定常 (Trend stationary) を指している。また、それぞれの帰無仮説を棄却できなければ、D-AO-J などの単位根を含む6種類の DGP が得られる。ここで D は階差定常 (Difference stationary) を指している。

以上の定式化から明らかなように、構造変化が加法型なのかイノベーション

型なのかを明らかにすることは実務家にとって極めて重要である。なぜなら、変化が加法型であれば、影響は変化が起きた時点に限定されるが、イノベーション型の場合には影響は永続するからである。また、構造変化によって水準が変化するのか、傾向が変化するのかを明らかにすることも実務家にとって不可欠なものである。とりわけ実質 GDP などのマクロ時系列の場合、水準の変化に対して経済政策は単年度限りのもので対応可能だが、傾向の変化であれば長期的制度的な対応が必要になるからである。

VP による単位根検定法では次のような手順をとる。まず、6つのモデルクラスの中の1つを選ぶ。次に、選択されたモデルクラスのもとで、変化点を逐次移動しながら、その度ごとにモデルを推定する。その際ラグ次数の選択は2.1節などで適用した Ng-Perron [75]の方法を用いる。最適な変化点を決める方法はいくつかあるが、ここでは単位根にかかる帰無仮説を最も棄却しうる点を求め、そこで単位根検定を行う。

4.1.3 情報量規準によるモデル選択法

4.1.1 項で提起した問題に対処するため、情報量規準によるモデル選択の結果として単位根の有無および構造変化の類型を決定する方法を提案する[48]。次のような4つのモデルクラスを考える。

$$\text{T-AO-JK: } y_t = \mu + \beta t + \theta DU_t + \gamma DT_t + \tilde{y}_t,$$

$$\tilde{y}_t = \alpha \tilde{y}_{t-1} + \sum_{i=1}^k c_i \Delta \tilde{y}_{t-i} + u_t. \quad (4.4)$$

$$\text{T-IO-JK: } y_t = \mu + \beta t + \theta DU_t + \gamma DT_t + \alpha y_{t-1} + \sum_{i=1}^k c_i \Delta y_{t-i} + u_t. \quad (4.5)$$

$$\text{D-AO-JK: } \Delta y_t = \beta + \theta D(T_B)_t + \gamma DU_t + \Delta \tilde{y}_t, \Delta \tilde{y}_t = \sum_{i=1}^k c_i \Delta y_{t-i} + u_t. \quad (4.6)$$

$$\text{D-IO-JK: } \Delta y_t = \beta + \theta D(T_B)_t + \gamma DU_t + \sum_{i=1}^k c_i \Delta y_{t-i} + u_t. \quad (4.7)$$

以上の4つのモデルクラスに対して制約を課すことにより、さらに10個のモデルクラスを得る。それらは、T ((4.5)式において $\theta = \gamma = 0$)、T-AO-J ((4.4)式において $\gamma = 0$)、T-AO-K ((4.4)式において $\theta = 0$)、T-IO-J ((4.5)式において $\gamma = 0$)、T-IO-K

((4.5)式において $\theta = 0$), D ((4.7)式において $\theta = \gamma = 0$), D-AO-J ((4.6)式において $\gamma = 0$), D-AO-K ((4.6)式において $\theta = 0$), D-IO-J ((4.7)式において $\gamma = 0$), そして D-IO-K ((4.7)式において $\theta = 0$)である .

提案する方法では次のような手順を経る . まず , 14 個のモデルクラスの中から 1 つを選び , 変化点とラグ次数を組み合わせて様々なモデルを推定し情報量規準の値を保存する . 次に , 最小情報量規準により各モデルクラスにおける最適モデルを 1 つ選択する . 最後に , 14 個の情報量規準の値を比較し , 全体として最適なモデルを 1 つ選択する . こうして , モデル選択の結果として , 単位根の有無や構造変化の類型が決定される . その際 , 本論文の他章同様 , 変化点もパラメータとして数える .

4.1.4 シミュレーション研究

ここでは提案した方法と仮説検定法の比較をするため , 3 種類のシミュレーションを行う . まず , 考察対象とする構造変化を AO-JK か IO-JK かに限定し , 構造変化の類型が既知の場合について調べる . 次に , 考察対象とする構造変化が AO-J であるのか IO-J であるのか未知の場合について調べる . 最後に , 構造変化の類型を全て未知とし , 14 個のモデルクラスの中からのモデル選択として検討する .

(構造変化の類型が既知の場合)

VP [102]は構造変化が加法型かイノベーション型かを既知とした場合に , 水準変化や傾向変化の大きさが単位根検定の結果にどのような影響を及ぼすかについてシミュレーション研究をしている . 彼らが考えたのは次のような DGP である .

$$\text{AO-JK: } y_t = \theta DU_t + \gamma DT_t + z_t.$$

$$\text{IO-JK: } y_t = (1 - (\alpha + \rho)L + \rho L^2)^{-1} (1 + \psi L) [\bar{\theta} DU_t + \bar{\gamma} DT_t] + z_t \quad (\alpha < 1),$$

$$\Delta y_t = (1 - \rho L)^{-1} (1 + \psi L) [\tilde{\theta} D(T_B)_t + \tilde{\gamma} DU_t] + \Delta z_t \quad (\alpha = 1).$$

ここで $z_t = \alpha z_{t-1} + \rho \Delta z_{t-1} + e_t + \psi e_{t-1}$, $z_{-1} = z_0 = 0$, $e_t \sim NID(0,1)$ である . VP は所与の θ と γ のもとで AO-JK から生成される時系列と IO-JK から生成される時系列の長期の値が等しくなるように $\bar{\theta}$, $\tilde{\theta}$, $\bar{\gamma}$, そして $\tilde{\gamma}$ の値を次のように設定して

いる。

$$\bar{\gamma} = \gamma(1-\alpha)/(1+\psi), \quad \bar{\theta} = \{\theta(1-\alpha) + \gamma(\alpha - \rho) + \bar{\gamma}\psi\}/(1+\psi),$$

$$\tilde{\gamma} = \gamma(1-\rho)/(1+\psi), \quad \tilde{\theta} = \{\theta(1-\rho) + \gamma\rho + \tilde{\gamma}\psi\}/(1+\psi).$$

ここでのシミュレーションでは VP と同じ DGP を考える。まず, AO-JK か IO-JK かで 2 通り。単位根の有無 ($\alpha = 1, 0.8$) で 2 通り。さらに水準変化か傾向変化かの組み合わせ ($\theta = 0$ かつ $\gamma = 0$, $\theta = 5$ かつ $\gamma = 0$, $\theta = 10$ かつ $\gamma = 0$, $\theta = 0$ かつ $\gamma = 1$, そして $\theta = 0$ かつ $\gamma = 2$) で 5 通り。そしてラグ構造に関して ($\rho = 0$ かつ $\psi = 0$, $\rho = 0.6$ かつ $\psi = 0$, $\rho = -0.6$ かつ $\psi = 0$, $\rho = 0$ かつ $\psi = 0.5$, そして $\rho = 0$ かつ $\psi = -0.5$) で 5 通り。合計で 100 通りの DGP が得られる。シミュレーションでは, 定常モデルを選択した頻度に関して, 提案した方法と VP による仮説検定法とを比較する。最大ラグ次数を 4 としてラグ次数を選択する。シミュレーションを次のように行う。まず, 100 通りの DGP の中から 1 つを選び, 攪乱項を発生させ人工データを得る。このデータに VP による仮説検定法と情報量規準によるモデル選択法を適用し, 単位根の有無を調べる。その際, AO-JK か IO-JK かは既知とする。したがって, 各手法において未知なのは変化点とラグ次数である。 $T = 200, T_B = 100$ とし, 各実験を 1,000 回繰り返して, 定常モデルを選択した頻度を調べる。全ての仮説検定のサイズは 5% とする。

表 4-1 に定常モデルを選択した頻度が掲載されている。まず単位根を含んだ AO タイプの結果をみると, BIC の検定サイズが極端に大きいという場合は少なく, VP よりやや良好な結果を示している。次に単位根を含まない AO タイプの結果をみると, 検定サイズが等しくないので厳密な比較はできないが, VP と検定サイズが等しいのに検定パワーは BIC の方が大きいという場合が 2 つあり, その逆はないことから BIC の方がやや良い。さらに単位根を含んだ IO タイプの結果をみると, 両方法とも検定サイズが極端に大きい場合が少なくない。最後に単位根を含まない IO タイプの結果をみると, BIC の方が VP よりも検定サイズが小さいのに検定パワーが大きいという場合が 7 つあり, その逆はないことから BIC の結果の方が良いといえる。なお, VP のシミュレーション結果にもあるとおり, 変化が大きい場合, 検定サイズよりも検定パワーの方が小さいということも起こりうる。以上をまとめると, 変化のタイプや大きさによってパフォーマンスが悪い場合があるものの, VP による仮説検定法と比較した場合,

表4-1 定常モデルの選択率

変化の タイプ	ρ	ψ	方法	$\alpha=1$					$\alpha=0.8$				
				$\theta=0$	$\theta=5$	$\theta=10$	$\theta=0$	$\theta=0$	$\theta=0$	$\theta=5$	$\theta=10$	$\theta=0$	$\theta=0$
				$\gamma=0$	$\gamma=0$	$\gamma=0$	$\gamma=1$	$\gamma=2$	$\gamma=0$	$\gamma=0$	$\gamma=0$	$\gamma=1$	$\gamma=2$
AO	0.0	0.0	VP	0.05	0.09	0.36	0.10	0.28	0.89	0.91	0.99	0.91	1.00
			BIC	0.19	0.13	0.12	0.17	0.14	1.00	0.98	0.98	1.00	0.99
AO	0.6	0.0	VP	0.03	0.04	0.06	0.03	0.05	0.99	0.99	1.00	0.99	1.00
			BIC	0.13	0.06	0.05	0.15	0.12	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
AO	-0.6	0.0	VP	0.05	0.20	0.78	0.22	0.49	0.41	0.78	1.00	0.79	0.96
			BIC	0.30	0.20	0.20	0.22	0.20	0.94	0.89	0.89	0.88	0.90
AO	0.0	0.5	VP	0.04	0.07	0.17	0.04	0.11	0.67	0.69	0.96	0.65	0.88
			BIC	0.18	0.09	0.09	0.21	0.15	0.94	0.84	0.83	0.93	0.93
AO	0.0	-0.5	VP	0.27	0.42	0.94	0.48	0.78	0.96	0.99	1.00	1.00	1.00
			BIC	0.65	0.48	0.48	0.54	0.51	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
IO	0.0	0.0	VP	0.04	0.10	0.41	0.20	0.80	0.84	0.74	0.89	0.93	1.00
			BIC	0.51	0.07	0.00	0.50	0.48	0.99	0.99	0.99	0.99	1.00
IO	0.6	0.0	VP	0.04	0.04	0.06	0.04	0.13	0.99	0.99	0.99	0.99	1.00
			BIC	0.54	0.48	0.20	0.51	0.45	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
IO	-0.6	0.0	VP	0.04	0.28	0.84	0.60	0.98	0.38	0.26	0.50	0.95	1.00
			BIC	0.53	0.00	0.00	0.52	0.47	0.92	0.84	0.98	0.93	0.91
IO	0.0	0.5	VP	0.05	0.07	0.18	0.09	0.39	0.63	0.53	0.57	0.71	0.99
			BIC	0.52	0.33	0.01	0.52	0.51	0.95	0.92	0.96	0.94	0.97
IO	0.0	-0.5	VP	0.25	0.56	0.96	0.77	1.00	0.96	0.96	1.00	1.00	1.00
			BIC	0.71	0.00	0.00	0.70	0.67	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

(注)VPはVogelsang-Perronによる単位根検定.検定サイズに相当するものを網掛にしてある.

BIC によるモデル選択法の方がやや優れているという結果になった.

(加法型かイノベーション型かが未知の場合)

次に, DGP を AO-J か IO-J かに限定する. しかし, どちらの DGP かはわからないものとする. この問題に対して統一的な解法を示したのは Tsay [99]である(付録 C 参照). 本稿におけるシミュレーションでは, 4 つのモデルクラス(T-AO-J, T-IO-J, D-AO-J, D-IO-J)の中からのモデル選択の問題を考える. 仮説検定法では次のような手順を踏む. まず観測されたデータに対して Tsay による判定法を適用し, IO モデルが選ばれたとする. 次に T-IO-J モデルを適用し VP による単位根検定をする. 帰無仮説が棄却されれば T-IO-J モデルが選択さ

れ、棄却されなければ D-IO-J モデルが選択される。Tsay による判定で AO モデルが選ばれた場合も同様に進める。したがって、ここでの仮説検定法を Tsay-Vogelsang-Perron (TVP)法と呼ぶことにする。情報量規準によるモデル選択法では、4つのモデルクラス、変化点、ラグ次数の組み合わせでできるモデルを全て推定し、情報量規準を保存する。得られた情報量規準の中から最小値を与えるモデルを最終的に選択する。そして、モデル選択の結果として、単位根の有無および構造変化の類型が決定される。

シミュレーションに用いた DGP は次の通りである。

$$\text{T-AO-J: } y_t = \theta DU_t + z_t, z_t = 1.4z_{t-1} - 0.6z_{t-2} + e_t.$$

$$\text{T-IO-J: } y_t = \theta DU_t + 1.4y_{t-1} - 0.6y_{t-2} + e_t.$$

$$\text{D-AO-J: } y_t = \theta DU_t + z_t, z_t = 1.6z_{t-1} - 0.6z_{t-2} + e_t.$$

$$\text{D-IO-J: } y_t = \theta D(T_B)_t + 1.6y_{t-1} - 0.6y_{t-2} + e_t.$$

ここで $z_{-1} = z_0 = 0$, $e_t \sim NID(0,1)$ である。T-AO-J と D-AO-J に対しては $\theta = 5, 10$, T-IO-J と D-IO-J に対しては $\theta = 1, 2$ と、それぞれ2種類の値を考慮する。シミュレーションを次のように行う。まず、4つの DGP のうち1つを選ぶ。次に攪乱項を発生させ人工データを作成する。得られたデータに対して提案した方法と仮説検定法を適用し、正しくモデル選択を行った頻度を数える。各実験は 1,000 回繰り返される。 $T = 200$, $T_B = 100$ とし最大ラグ次数を 4 とする。

表 4-2 に各モデルの選択率が示されている。まず T-AO-J の結果についてみると両方法とも非常に良い結果となっているが、BIC の方が優れているといえる。次に T-IO-J についてみると BIC の方が非常に優れている。さらに D-AO-J についてみると両者の結果は非常に良好でほぼ同等である。最後に D-IO-J についてみると、これも両者の結果はほぼ同等である。以上をまとめると、BIC によるモデル選択法の方が TVP による仮説検定法よりも優れているといえる。

(構造変化の類型が完全に未知の場合)

最後に構造変化の類型が完全に未知の場合について検討する。この場合、14個のモデルクラスの中から1つを選択する問題になる。情報量規準によるモデル選択法ではこれまでの延長で簡単に対応できるが、仮説検定法では対応できない。シミュレーションでは次のような DGP を考える。これらはいずれも VP

表4-2 各モデルの選択率

モデル	方法	DGP							
		T-AO-J		T-IO-J		D-AO-J		D-IO-J	
		$\theta=5$	$\theta=10$	$\theta=1$	$\theta=2$	$\theta=5$	$\theta=10$	$\theta=2$	$\theta=4$
T-AO-J	TVP	0.87	0.96	0.56	0.50	0.03	0.03	0.02	0.01
	BIC	0.96	1.00	0.17	0.00	0.02	0.03	0.02	0.00
T-IO-J	TVP	0.12	0.04	0.42	0.49	0.00	0.00	0.02	0.04
	BIC	0.04	0.00	0.83	1.00	0.00	0.00	0.25	0.08
D-AO-J	TVP	0.01	0.00	0.01	0.00	0.89	0.95	0.46	0.20
	BIC	0.00	0.00	0.00	0.00	0.87	0.97	0.29	0.14
D-IO-J	TVP	0.00	0.00	0.00	0.00	0.08	0.01	0.49	0.75
	BIC	0.00	0.00	0.00	0.00	0.10	0.01	0.44	0.78

(注)太字は正しいモデルの選択率. TVPはTsayの構造変化検定とVogelsang-Perronの単位根検定を組み合わせたもの.

が行ったシミュレーションと類似のものになっている.

$$T-AO: y_t = \theta DU_t + \gamma DT_t + z_t, z_t = 1.4z_{t-1} - 0.6z_{t-2} + e_t.$$

$$T-IO: y_t = \bar{\theta} DU_t + \bar{\gamma} DT_t + 1.4y_{t-1} - 0.6y_{t-2} + e_t.$$

$$D-AO: y_t = \theta DU_t + \gamma DT_t + z_t, z_t = 1.6z_{t-1} - 0.6z_{t-2} + e_t.$$

$$D-IO: y_t = \tilde{\theta} D(T_B)_t + \tilde{\gamma} DU_t + 1.6y_{t-1} - 0.6y_{t-2} + e_t.$$

ここで $e_t \sim NID(0,1)$ であり, 14 個の DGP は既に述べた係数制約で作成できる. 構造変化については緩慢な変化と急激な変化の 2 種類を考える. 緩慢な変化の場合は $(\theta, \bar{\theta}, \tilde{\theta}, \gamma, \bar{\gamma}, \tilde{\gamma}) = (5, 1, 2, 1, 0.2, 0.4)$ とし, 急激な変化の場合は $(\theta, \bar{\theta}, \tilde{\theta}, \gamma, \bar{\gamma}, \tilde{\gamma}) = (10, 2, 4, 2, 0.4, 0.8)$ とする. また, $T = 200, T_B = 100$ とし, 最大ラグ次数は 4 とする. シミュレーションを次の手順で行う. まず, 14 個の DGP の中から 1 つを選ぶ. 攪乱項を発生させ人工データを作成した後に提案した方法を適用し, 観測されたデータがどの DGP から生成されているのかを決定する. 実験を 1,000 回繰り返す. モデルごとに選択された頻度を求める.

表 4-3 に各モデルの選択率が示されている. まず, 緩やかな変化についてみる. 正しい選択率が 0.8 を上回ったのが, 4 個の DGP に過ぎない. 特に, T-IO-JK, D-AO-K, D-IO-J, D-IO-K, D-IO-JK の 5 つについては 0.3 を下回っている. 次に, 急激な変化についてみる. D-IO-K を除いて概ね 0.5 を上回っている. D-IO-K を正しく選択する頻度は 0.15 であるのに対し, 誤って D-AO-K を選択する頻度が 0.41 となっている. 結論としては, 経済時系列において急激な変化に相当する

表4-3 各モデルの選択率

モデル	DGP													
	T	TAOJ	TAOK	TAOJK	TIOJ	TIOK	TIOJK	D	DAOJ	DAOK	DAOJK	DIOJ	DIOK	DIOJK
緩やかな変化														
T	0.81	0.01	0.00	0.00	0.19	0.00	0.00	0.07	0.01	0.03	0.00	0.06	0.03	0.04
T-AO-J	0.11	0.93	0.00	0.00	0.10	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
T-AO-K	0.00	0.00	0.60	0.01	0.00	0.58	0.39	0.04	0.00	0.12	0.00	0.03	0.12	0.12
T-AO-JK	0.01	0.04	0.03	0.97	0.01	0.02	0.01	0.00	0.01	0.00	0.04	0.00	0.00	0.01
T-IO-J	0.06	0.02	0.00	0.00	0.67	0.00	0.00	0.15	0.00	0.08	0.00	0.12	0.08	0.07
T-IO-K	0.00	0.00	0.32	0.00	0.00	0.33	0.37	0.01	0.00	0.05	0.01	0.02	0.06	0.03
T-IO-JK	0.01	0.00	0.05	0.01	0.03	0.07	0.23	0.06	0.01	0.10	0.00	0.06	0.10	0.09
D	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.46	0.00	0.20	0.00	0.43	0.20	0.15
D-AO-J	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.07	0.82	0.03	0.24	0.09	0.03	0.04
D-AO-K	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.00	0.27	0.00	0.03	0.26	0.25
D-AO-JK	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.02	0.61	0.00	0.02	0.05
D-IO-J	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.09	0.09	0.06	0.03	0.15	0.06	0.07
D-IO-K	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.00	0.01	0.03	0.03
D-IO-JK	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.03	0.07	0.01	0.03	0.08
急激な変化														
T	0.81	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.07	0.00	0.01	0.00	0.02	0.02	0.01
T-AO-J	0.11	0.96	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00
T-AO-K	0.00	0.00	0.61	0.00	0.00	0.39	0.10	0.04	0.00	0.17	0.00	0.01	0.14	0.07
T-AO-JK	0.01	0.04	0.03	1.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.01	0.00	0.05	0.00	0.00	0.01
T-IO-J	0.06	0.00	0.00	0.00	0.96	0.00	0.00	0.15	0.00	0.02	0.00	0.06	0.02	0.01
T-IO-K	0.00	0.00	0.33	0.00	0.00	0.55	0.23	0.01	0.00	0.08	0.00	0.01	0.12	0.01
T-IO-JK	0.01	0.00	0.03	0.00	0.04	0.05	0.67	0.06	0.00	0.08	0.00	0.03	0.09	0.04
D	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.46	0.00	0.00	0.00	0.10	0.00	0.00
D-AO-J	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.07	0.92	0.00	0.01	0.10	0.00	0.00
D-AO-K	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.00	0.47	0.00	0.01	0.41	0.22
D-AO-JK	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.01	0.94	0.01	0.01	0.13
D-IO-J	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.09	0.01	0.00	0.00	0.61	0.00	0.00
D-IO-K	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.12	0.00	0.01	0.15	0.01
D-IO-JK	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.03	0.00	0.04	0.03	0.50

(注)太字は正しいモデルの選択率

構造変化はあまり起こらないことを考えると、提案した方法が実務上常に信頼できる結果をもたらすわけではない。しかしながら、観測されるデータは非常に複雑な構造をしており、従来の極めて限定的な仮説検定法を補完する手法としては積極的な評価ができよう。

4.1.5 実証分析

ここでは、提案した BIC によるモデル選択法により、構造変化の類型を総合的に考慮した単位根の検出に関する実証分析を行う。先のシミュレーション結果から、提案した手法による分析結果が常に信頼できるというものではないが、実務の事例として示すこととする。データは7か国の鉱工業生産指数(四半期、季節調整済,1995年=100)で1961年1期から2000年4期までを International

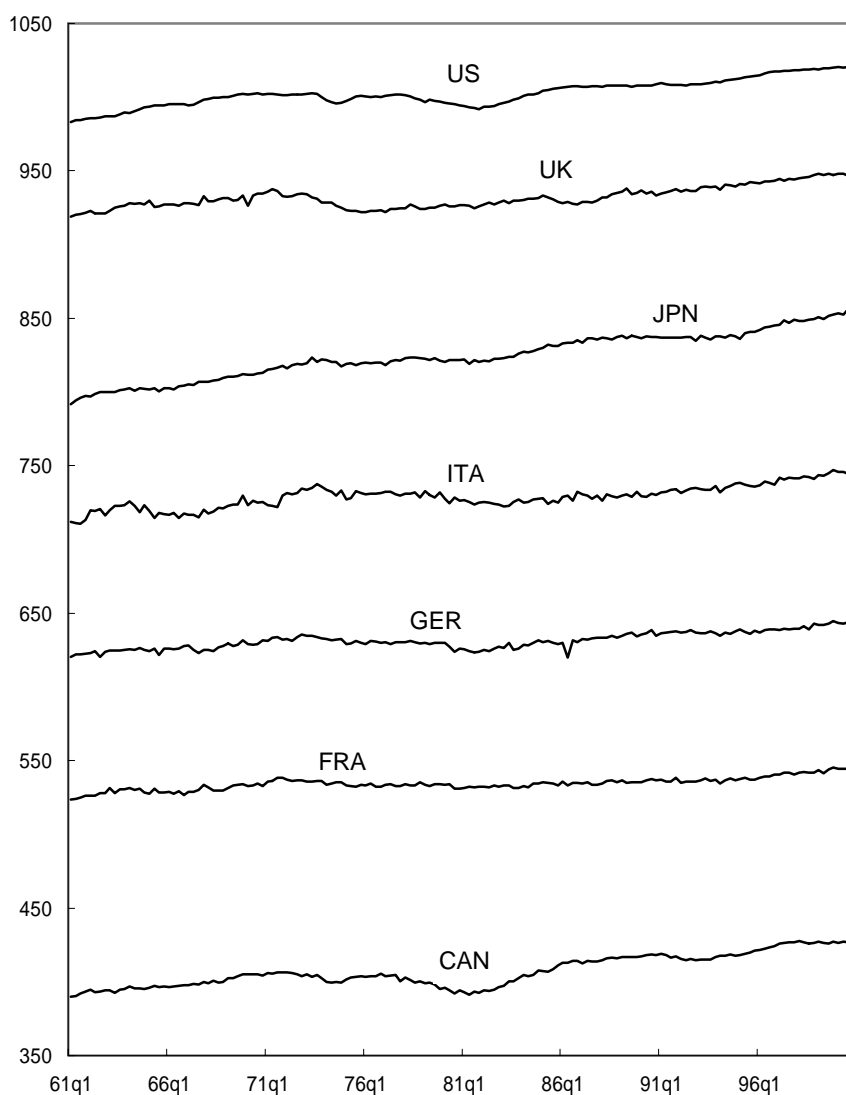


図4-1 7か国の鉱工業生産指数の推移

(注) 各国の指数の対数を取り100倍. フランス以降の国のデータには順に100を加えている.

Financial Statistics から取った . 7 か国はカナダ (CAN), フランス (FRA), ドイツ (GER), イタリア (ITA), 日本 (JPN), イギリス (UK), アメリカ (US) である . 各時系列データは対数変換後に 100 倍した .

図 4-1 に 7 か国の鉱工業生産指数を図示してある . カナダが一番下で , アメリカが一番上にある . 見やすいようにフランス以降順番に 100 ずつ加えている . 日本は 1970 年代半ばの石油危機のときと , 1990 年代初頭のバブル崩壊のとき

表4-4 国別モデル別BIC値

国名		CAN	FRA	GER	ITA	JPN1	JPN2	UK	US
選択され	モデル番号	M9	M12	M12	M12	M12	M6	M9	M12
	BIC	587.3	679.6	631.1	723.9	579.9	315.0	618.3	510.8
たモデル	変化点	84q4	68q2	90q4	69q4	75q1	90q2	74q1	80q1
	Model 1 (T)	599.5	738.4	643.6	744.0	587.5	321.4	628.1	517.8
	Model 2 (T-AO-J)	611.9	697.6	655.1	734.4	603.9	333.5	629.2	517.0
	Model 3 (T-AO-K)	603.7	731.3	646.6	741.7	584.2	316.8	636.9	525.2
	Model 4 (T-AO-JK)	609.0	690.4	647.7	732.8	594.1	321.3	622.3	530.7
	Model 5 (T-IO-J)	604.7	710.2	639.6	745.8	586.0	322.8	628.9	520.1
	Model 6 (T-IO-K)	604.0	731.6	647.4	742.4	585.0	315.0	636.7	522.9
	Model 7 (T-IO-JK)	605.4	715.3	643.5	745.2	588.7	315.9	634.0	524.5
	Model 8 (D)	598.9	736.0	641.4	743.0	585.9	317.4	629.4	517.3
	Model 9 (D-AO-J)	587.3	679.6	632.4	724.0	583.8	319.0	618.3	515.3
	Model 10 (D-AO-K)	602.7	737.7	645.5	747.8	584.5	322.4	637.3	523.8
	Model 11 (D-AO-JK)	591.8	684.7	635.8	727.5	589.4	322.8	623.0	519.9
	Model 12 (D-IO-J)	589.4	679.6	631.1	723.9	579.9	320.3	618.9	510.8
	Model 13 (D-IO-K)	602.4	737.7	645.4	747.6	586.1	322.3	637.0	524.2
	Model 14 (D-IO-JK)	593.7	684.6	634.9	727.2	584.2	323.5	623.4	515.7

(注) JPN1は全期間(1961q1-2000q4), JPN2は部分期間(1976q1-2000q4).

にトレンドが変化しているように見えるが、他の国では2度以上の明らかなトレンドの変化は見られないので、提案した方法を適用しても問題ないと考えられる。

表4-4に国別モデル別のBIC値、さらには選択されたモデルのBIC値と変化点が示されている。日本についてのみ石油危機後(1976q1-)のみの期間による結果も併記してある。日本の全期間の結果ではModel 12(D-IO-J)で変化点1975q1が選択されているが、石油危機後の期間の結果ではModel 6(T-IO-JK)で変化点1990q2が選択されている。したがって、もし、全期間で変化点2のモデルが適用されればOhara [78] (5.2.4項参照)の結果と同様、石油危機後とバブル崩壊後に変化点をもったトレンド定常モデルが選択されるかもしれない。他の6か国に関しては、Model 9(D-AO-J)が2か国(カナダ、イギリス)、Model 12(D-IO-J)が4か国(フランス、ドイツ、イタリア、アメリカ)となっており、非定常で変化は全てJumpの形をしている。分析手法が異なるので直接の比較はできないが、3.2.4項での分析結果、すなわち7か国中5か国で鉱工業生産指数の変化率においてトレンドの変化(ここでのKink)が見られない、ということと似た結果になっている。すなわち、ここでの結論(JPN2を除く)では、7か国全てで鉱工業生産指数は1つの変化点でJumpを除いて不変のトレンド(モデル

上は定数項)をもった階差定常過程が見られる。ただし、表 4-3 のシミュレーション結果を踏まえると、Model 9 が選択された結果に関しては信頼性が高いが、Model 12 に関しては信頼性が必ずしも高くない点に留意が必要である。Model 9 (D-AO-J) は緩やかな構造変化の場合でも 82% の確率で正しく選択され、他のモデルを誤って選択する確率も最高で Model 12 (D-IO-J) の 9% に過ぎない。ところが、Model 12 (D-IO-J) を正しく選択する確率は、緩やかな構造変化の場合で 15%、急激な構造変化の場合でも 61% に過ぎない。

4.1.6 結論

以上、本節では、これまで単位根に関する仮説検定法の中で構造変化の類型が恣意的に選択されてきたという問題に対して、BIC によるモデル選択法による解決を試みた。構造変化は大きく分けると、影響が一度限りの加法型と、影響が持続するイノベーション型になる。また、水準変化、傾向変化、両方の変化の 3 つに分けることも可能であり、以上を組み合わせると 6 通りの構造変化がありうる。提案した方法の評価はシミュレーション結果に基づいて行った。第一に、構造変化の類型が既知の場合について仮説検定法との比較を行ったところ、提案した方法がやや優れているという結果になった。しかしながら、変化のタイプや大きさによってはパフォーマンスが悪化することも確認された。第二に、構造変化が加法型かイノベーション型かに関して未知の場合について、仮説検定法との比較を行った。その結果、提案した方法が優れていることがわかった。最後に、構造変化の類型が完全に未知の場合について検討した。実務上常に信頼できる結果をもたらすまでには至らなかったが、仮説検定法での対応が不可能であることから、1 つの有力な接近法の候補としては認められよう。最後に、7 か国の鉱工業生産指数を使っての実証分析結果は非常に興味深いものであった。BIC によるモデル選択法を用いて 14 個のモデルクラスからの選択を行った結果、7 か国全てで水準変化を伴った単位根過程が選択され、そのうち 2 か国で加法型変化、5 か国でイノベーション型変化が見られた。ただし、シミュレーション結果が必ずしも望ましくないことから、こうした実証分析結果には一定の留意が必要であろう。

4.2 回帰係数変化と誤差分散変化を考慮した単位根の検出

本節では，回帰係数変化と誤差分散変化を考慮した場合の単位根の検出について，情報量規準によるモデル選択法を提案する．この方法の有用性はシミュレーションによる代表的な仮説検定法との比較によって確認される．

4.2.1 問題の所在

構造変化を考慮した場合の単位根の検出について，数多くの研究がなされてきた．だが，そのほとんどが水準変化や傾向変化など，回帰係数の変化に関するものにとどまっていた．最近になって，Kim et al. [60]が誤差分散の変化を考慮した場合の単位根の検定について提案した．しかしながら，3.2 節でも検討したように，回帰係数変化と誤差分散変化が同時に起きている可能性もある．たとえば，1973 年の石油危機以降の日本の実質 GDP のトレンドが変化したことは広く知られているが，同時にトレンド周りの変動も小さくなり，誤差分散が低下している可能性が高い．このように，回帰係数変化と誤差分散変化の両方を考慮したモデルが必要となるのである．しかしながら，両方の変化を同時に考慮した単位根検定法は提案されていない．

4.2.2 情報量規準によるモデル選択法

前項で提起した問題に対処するため，情報量規準によるモデル選択法を提案する[39]．ここでは次のように 8 つのモデルクラスを考える．

I0B00: 単位根を含まず構造変化もないモデル

I0B10: 単位根を含まず回帰係数変化のあるモデル

I0B01: 単位根を含まず誤差分散変化のあるモデル

I0B11: 単位根を含まず回帰係数変化と誤差分散変化のあるモデル

I1B00: 単位根を含み構造変化はないモデル

I1B10: 単位根を含み回帰係数変化のあるモデル

I1B01: 単位根を含み誤差分散変化のあるモデル

I1B11: 単位根を含み回帰係数変化と誤差分散変化のあるモデル

8 つのモデルクラスの部分的なモデル選択に関しては既存の検定を組み合わせることで可能である．たとえば，Ben-David-Papell [12]は Perron [81]の単位根

検定と Vogelsang [101]の構造変化検定を組み合わせることで、4つのモデルクラス (I0B00, I0B10, I1B00, I1B10) からのモデル選択により、各国の経済成長の構造変化を検証している。また、後のシミュレーションで明らかになるように、Kim et al. [60]の単位根検定と Andrews [4]の構造変化検定を組み合わせることで、4つのモデルクラス (I0B00, I0B01, I1B00, I1B01) からのモデル選択を行うこともできる。しかしながら、8つのモデルクラスからの選択問題を仮説検定の枠組で対応することは不可能である。

ここで観測された時系列データ $y_t (t=1, \dots, T)$ に対して次式を考える。

$$\Delta y_t = \alpha + \beta t + aD(T_B) + bDU_t + cDT_t + \gamma y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \phi_i \Delta y_{t-i} + e_t. \quad (4.8)$$

ここで T_B は変化点、 $D(T_B)_t (t=T_B+1)$ 、 $DU_t = 1 (t > T_B)$ 、 $DT_t = 1 (t > T_B)t$ で $1(\bullet)$ は指標関数、また、 $t \leq T_B$ のとき $e_t \sim NID(0, \sigma_1^2)$ 、さらに $t > T_B$ のとき $e_t \sim NID(0, \sigma_2^2)$ が成り立つとする。上で導入した8つのモデルクラスは(4.8)式に次のような制約を課すことで得られる。

Model 1 (I0B00): $a = b = c = 0$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Model 2 (I0B10): $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Model 3 (I0B01): $a = b = c = 0$.

Model 4 (I0B11): 制約なし。

Model 5 (I1B00): $\beta = \gamma = 0$, $a = b = c = 0$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Model 6 (I1B10): $\beta = \gamma = 0$, $c = 0$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Model 7 (I1B01): $\beta = \gamma = 0$, $a = b = c = 0$.

Model 8 (I1B11): $\beta = \gamma = 0$, $c = 0$.

対数尤度 (LL) および BIC は次のように求められる。

$$LL = -0.5 \{T(\ln 2\pi + 1) + \hat{T}_B \ln \hat{\sigma}_1^2 + (T - \hat{T}_B) \ln \hat{\sigma}_2^2\}.$$

$$BIC = -2LL + \theta \ln(T).$$

ここで θ はパラメータ数であり、Model 1 では $\theta = 4 + k$ 、Model 2 では $\theta = 8 + k$ 、Model 3 では $\theta = 6 + k$ 、Model 4 では $\theta = 9 + k$ 、Model 5 では $\theta = 2 + k$ 、Model 6 では $\theta = 5 + k$ 、Model 7 では $\theta = 4 + k$ 、Model 8 では $\theta = 6 + k$ である。本論文の他章同様、変化点はパラメータに数えている。

情報量規準によるモデル選択は次のように行う。まず、8つのモデルクラス

の中から1つを選ぶ。次に所与の最大ラグ次数のもとで、変化点とラグ次数の組み合わせを変えてモデルを推定し情報量規準の値を保存する。さらに最小情報量規準により当該モデルクラスの中で最適なモデルを選ぶ。最後に、得られた8つの情報量規準の値のうち最小値を与えるモデルを選択する。こうしてモデル選択の結果として、観測された時系列がどのモデルクラスから生成されたのかを判断する。

4.2.3 シミュレーション研究

ここでは提案した方法と仮説検定法の比較をするため、3種類のシミュレーションを行う。まず、回帰係数変化を考慮した単位根の検出について調べる。次に、誤差分散変化を考慮した単位根の検出について考察する。最後に、回帰係数変化と誤差分散変化を同時に考慮した場合の単位根の検出について検討する。

(回帰係数変化のみを考慮した単位根の検出)

まず、回帰係数変化のみを考慮した場合の単位根の検出について検討する。シミュレーションで設定するDGPは4.1.4項の(構造変化の類型が既知の場合)と同じものであるが、ここでの目的は単位根の検出ではなく、4つのモデルクラス(I0B00, I0B10, I1B00, I1B10)からのモデル選択にある。そのため、仮説検定法においては、Ben-David-Papell [12]の方法を援用する。具体的には次のような手順を踏む。まず観測された時系列データに対してPerron [81]の単位根検定を行う。帰無仮説が棄却されたときには定常時系列用のVogelsang [101]の回帰係数変化の検定を行う(付録Cを参照)。回帰係数変化がないという帰無仮説が棄却されたときにはI0B10モデルが選択され、棄却されなければI0B00モデルが選択される。Perronの単位根検定で帰無仮説が棄却されなければ非定常時系列用のVogelsangの回帰係数変化の検定を行う。帰無仮説が棄却されたときにはI1B10モデルが選択され、棄却されなければI1B00モデルが選択される。したがって、ここでの仮説検定法をPerron-Vogelsang法(PV法)と呼ぶことにする。いずれの検定でも最大ラグ次数を4とし、Ng-Perron [75]のラグ選択法を適用する。全ての検定でサイズは5%とする。

ここでは Ben-David-Papell にならい ,IO-JK のみを考え ,シミュレーションは 4.1.4 項と同様 ,次の手順で行う .まず ,50 通りの DGP の中から 1 つを選び ,攪乱項を発生させ人工データを得る .このデータに PV による仮説検定法と情報量規準によるモデル選択法を適用し ,得られたデータが 4 つのモデルクラス (I0B00, I0B10, I1B00, I1B10) のうちのどのモデルから生成されているかを判定する .各手法において未知なのは ,単位根の有無 ,変化点とラグ次数である . $T = 200, T_B = 100$ とし ,各実験を 1,000 回繰り返す .

表 4-5 に正しいモデル選択の頻度が示されている .まず , I1B00 ($\alpha = 1, \theta = \gamma = 0$) についてみると ,5 ケース中 4 ケースで BIC の結果が優れている . I1B10 ($\alpha = 1, \theta \neq 0$ あるいは $\gamma \neq 0$) では 20 ケース中 15 ケースで ,そして I0B00 ($\alpha = 0.8, \theta = \gamma = 0$) では 5 ケース中 5 ケースで BIC の結果が優れている .しかしながら , I0B10 ($\alpha = 0.8, \theta \neq 0$ あるいは $\gamma \neq 0$) では 20 ケース中 13 ケースで PV による仮説検定法の結果が優れている .PV 法では I1B10 のときに変化が大きいほど正しい選択率が低下するという結果 (このとき I0B10 を選択率が高まる) も踏まえると ,BIC による仮説検定法が PV による仮説検定法より優れているといえる .

(誤差分散変化のみを考慮した単位根の検出)

次に ,誤差分散変化のみを考慮した単位根の検出を検討する .仮説検定法においては ,まず Kim et al. [60] による誤差分散変化を考慮した単位根検定 (付録 C を参照) を行い .その後 Andrews [4] による誤差分散変化の検定を行う .本稿では ,Andrews が提案した 3 つの検定のうち尤度比検定を用いる .すわわち ,誤差分散変化がなかったと仮定して推定されたモデルの尤度と ,その誤差の時系列をある変化点のもとで 2 つに区分したモデルの尤度とから得られる尤度比検定統計量の最大値が Andrews の統計量であり ,誤差分散の変化の有無の判断と変化点の推定に用いる .もし ,単位根があるという帰無仮説が棄却されたときに ,誤差分散変化がないという帰無仮説が棄却されると I0B01 が選択され ,棄却されなかったとき I0B00 が選択される .単位根があるという帰無仮説が棄却されなかったときに ,誤差分散変化がないという帰無仮説が棄却されると I1B01 が選択され ,棄却されなかったとき I1B00 が選択される .ここでは ,

表4-5 正しいモデルの選択率

ρ	ψ	方法	$\alpha=1$					$\alpha=0.8$				
			$\theta=0$	$\theta=5$	$\theta=10$	$\theta=0$	$\theta=0$	$\theta=0$	$\theta=5$	$\theta=10$	$\theta=0$	$\theta=0$
			$\gamma=0$	$\gamma=0$	$\gamma=0$	$\gamma=1$	$\gamma=2$	$\gamma=0$	$\gamma=0$	$\gamma=0$	$\gamma=1$	$\gamma=2$
0.0	0.0	PV	0.72	0.26	0.21	0.82	0.21	0.16	0.71	0.84	0.92	1.00
		BIC	0.83	0.69	0.85	0.70	0.80	0.97	0.25	0.81	0.98	0.98
0.6	0.0	PV	0.74	0.22	0.21	0.71	0.89	0.77	0.76	1.00	0.99	1.00
		BIC	0.82	0.06	0.45	0.23	0.65	0.98	0.25	0.96	1.00	1.00
-0.6	0.0	PV	0.78	0.21	0.06	0.42	0.01	0.17	0.27	0.50	0.97	1.00
		BIC	0.82	0.84	0.84	0.76	0.82	0.82	0.17	0.67	0.71	0.68
0.0	0.5	PV	0.71	0.21	0.22	0.91	0.64	0.36	0.39	0.56	0.67	0.99
		BIC	0.80	0.24	0.83	0.52	0.73	0.91	0.10	0.39	0.86	0.87
0.0	-0.5	PV	0.67	0.10	0.01	0.23	0.00	0.41	0.94	1.00	1.00	1.00
		BIC	0.61	0.63	0.65	0.54	0.60	0.90	0.95	1.00	0.99	0.99

(注) PVはPerronの単位根検定とVogelsangの構造変化検定を組み合わせたもの、単位根を含むDGPに網掛。

Kim et al.の単位根検定法と Andrews の誤差分散変化の検定を組み合わせた仮説検定法を Kim-Leybourne-Newbold-Andrews 法 (KLNA 法) と呼ぶことにする。一方、情報量規準によるモデル選択法では4つのモデルクラスからの選択問題となる。

シミュレーションでは次のような DGP を考える。

$$y_t = \gamma y_{t-1} + e_t, \quad y_0 = 0, \quad e_t = \sigma_t \eta_t, \quad \sigma_t^2 = 1[t \leq T/2] + \delta^2 1[t > T/2],$$

$$\eta_t \sim NID(0,1).$$

ここで、 γ については4通り (1, 0.9, 0.8, 0.5), δ についても4通り (1, 0.8, 0.6, 0.2) の値を設定する。Kim et al.の検定法ではラグ次数を既知としているが、ここでは両方の仮説検定法において、最大ラグ次数を4とし、ラグ次数選択では Ng-Perron [75]の方法を援用する。全ての検定においてサイズは5%とする。

シミュレーションは次の手順で行う。まず、16通りのDGPの中から1つを選択する。次に、攪乱項を発生させDGPに代入することで人工データを作成する。そして、得られたデータに対してKLNAによる仮説検定法とBICによるモデル選択法を適用し、観測されたデータが4つのモデルクラス (I0B00, I0B01, I1B00, I1B01) のうちのどのモデルから生成されているかを判定する。 $T = 200, T_B = 100$ とし、各実験を1,000回繰り返す。

表4-6 正しいモデル選択の頻度

γ	方法	δ			
		1	0.8	0.6	0.2
1	KLNA	0.85	0.30	0.85	0.86
	BIC	0.87	0.24	0.86	0.73
0.9	KLNA	0.60	0.21	0.54	0.59
	BIC	0.73	0.20	0.73	0.64
0.8	KLNA	0.91	0.34	0.92	0.94
	BIC	0.98	0.28	0.98	0.95
0.5	KLNA	0.96	0.36	0.99	1.00
	BIC	0.99	0.27	0.98	1.00

(注) KLNAはKimらの単位根検定とAndrewsの構造変化検定を組み合わせたもの. 誤差分散変化なしのDGPに網掛.

表 4-6 に正しいモデル選択の頻度が示されている . まず I1B00 ($\gamma=1, \delta=1$) については , KLNA の 0.85 に対し BIC の 0.87 と , いずれも良好な結果となった . 次に I1B01 ($\gamma=1, \delta \neq 1$) については , KLNA の方が正しくモデル選択をした頻度がやや高い . また , IOB00 ($\gamma \neq 1, \delta=1$) については BIC の結果の方がよい . 最後に , IOB01 ($\gamma \neq 1, \delta \neq 1$) については , ほぼ同等の結果といえる . 以上をまとめると , KLNA による仮説検定法と BIC によるモデル選択法のパフォーマンスは概ね同等のものといえる .

(回帰係数変化と誤差分散変化を同時に考慮した単位根の検出)

最後に , 回帰係数変化と誤差分散変化を同時に考慮した単位根の検出について検討する . これまでのところ , 仮説検定法の枠組の中でこの問題に対応できる方法は開発されていない . そこで , 提案した方法で 8 つのモデルクラスの中から正しくモデル選択ができるか否かについて , シミュレーションを通して検証する . 考察する DGP は次の通りである .

$$\text{DGP1 (IOB00): } y_t = 0.4t + 0.8y_{t-1} + e_t.$$

$$\text{DGP2 (IOB10): } y_t = 0.4t + 0.8y_{t-1} + e_t \quad (t \leq T/2),$$

$$y_t = 1 + 0.4t - 0.2(t - T/2) + 0.8y_{t-1} + e_t \quad (t = T/2 + 1),$$

$$y_t = 0.4t - 0.2(t - T/2) + 0.8y_{t-1} + e_t \quad (t > T/2 + 1).$$

$$\text{DGP3 (IOB01): } y_t = 0.4t + 0.8y_{t-1} + e_t \quad (t \leq T/2),$$

$$y_t = 0.4t + 0.8y_{t-1} + 0.5e_t \quad (t > T/2).$$

$$\begin{aligned} \text{DGP4 (I0B11)} : y_t &= 0.4t + 0.8y_{t-1} + e_t \quad (t \leq T/2), \\ y_t &= 1 + 0.4t - 0.2(t - T/2) + 0.8y_{t-1} + 0.5e_t \quad (t = T/2 + 1), \\ y_t &= 0.4t - 0.2(t - T/2) + 0.8y_{t-1} + 0.5e_t \quad (t > T/2 + 1). \end{aligned}$$

$$\text{DGP5 (I1B00)}: y_t = 2 + y_{t-1} + e_t.$$

$$\begin{aligned} \text{DGP6 (I1B10)}: y_t &= 2 + y_{t-1} + e_t \quad (t \leq T/2), \quad y_t = 3 + y_{t-1} + e_t \quad (t = T/2 + 1), \\ y_t &= 1 + y_{t-1} + e_t \quad \text{if } t > T/2 + 1 \end{aligned}$$

$$\text{DGP7 (I1B01)}: y_t = 2 + y_{t-1} + e_t \quad \text{if } t \leq T/2, \quad y_t = y_{t-1} + 0.5e_t \quad \text{if } t > T/2$$

$$\begin{aligned} \text{DGP8 (I1B11)}: y_t &= 2 + y_{t-1} + e_t \quad \text{if } t \leq T/2, \quad y_t = 3 + y_{t-1} + 0.5e_t \\ &\quad \text{if } t = T/2 + 1, \quad y_t = 1 + y_{t-1} + 0.5e_t \quad \text{if } t > T/2 + 1 \end{aligned}$$

ここで $y_0 = 0$, $e_t \sim \text{NID}(0,1)$ とする。シミュレーションは次の手順で行う。まず、8通りの DGP の中から 1つを選択する。次に、攪乱項を発生させ DGP に代入することで人工データを作成する。そして、得られたデータに対して BIC によるモデル選択法を適用し、観測されたデータが 8つのモデルクラスのうちのどのモデルから生成しているかを判定する。最大ラグ次数を 4, $T = 200$ とし、各実験を 1,000 回繰り返す。

表 4-7 に各モデルの選択率が示されている。単位根を含まない 4 つの DGP (DGP1~DGP4) に対しては正しいモデルの選択率が 0.97 以上という良好な結果を示しているが、単位根を含んだ 4 つの DGP (DGP5~DGP8) に対しては正しいモデルの選択率が 0.72 から 0.84 とやや小さくなっている。このように、BIC によるモデル選択法の単位根検定サイズに相当するものがやや大きいことは、これまでの単位根の有無を決定するシミュレーションで共通して得られていることである。しかしながら、実務上直面しているのは、回帰係数変化と誤差分散変化を同時に考慮しなくてはならないような複雑な状況であり、仮説検定法による解決が困難である以上、提案した方法は積極的に評価できよう。

4.2.4 実証分析

ここでは、提案した BIC によるモデル選択法により、回帰係数変化と誤差分散変化を同時に考慮した単位根の検出に関する実証分析を行う。使用したデータは 4.1.5 項で用いたものと全く同一である。実証分析結果が表 4-8 にある。I1B01 モデルが選択された国が 4 か国 (ドイツ, 日本, イギリス, アメリカ)

表4-7 各モデルの選択率

DGP	Model 1	Model 2	Model 3	Model 4	Model 5	Model 6	Model 7	Model 8
DGP 1 (I0B00)	0.97	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
DGP 2 (I0B10)	0.00	0.97	0.00	0.02	0.00	0.01	0.00	0.00
DGP 3 (I0B01)	0.00	0.00	0.97	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00
DGP 4 (I0B11)	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
DGP 5 (I1B00)	0.10	0.04	0.00	0.00	0.84	0.02	0.00	0.00
DGP 6 (I1B10)	0.06	0.20	0.00	0.01	0.00	0.72	0.00	0.01
DGP 7 (I1B01)	0.00	0.00	0.12	0.05	0.00	0.00	0.79	0.04
DGP 8 (I1B11)	0.00	0.00	0.01	0.15	0.00	0.00	0.00	0.84

(注)太字は正しいモデルの選択率。

表4-8 国別モデル別BIC値

国名	選択されたモデル	変化点	I0B00	I0B10	I0B01	I0B11	I1B00	I1B10	I1B01	I1B11
CAN	I1B11	84q4	599.5	596.4	588.5	585.3	598.9	593.7	586.2	583.0
FRA	I1B11	68q2	738.4	665.8	643.6	635.8	736.0	684.6	644.4	631.4
GER	I1B01	95q4	643.6	639.2	637.2	638.5	641.4	634.9	634.0	636.2
ITA	I0B01	80q3	744.0	729.1	698.6	706.3	743.0	727.2	700.1	701.2
JPN	I1B01	76q1	587.5	589.8	579.8	588.4	585.9	584.2	578.8	580.1
UK	I1B01	85q3	628.1	618.6	584.1	593.2	629.4	623.4	582.0	588.3
US	I1B01	83q3	517.8	518.5	489.9	493.9	517.3	515.7	482.6	489.9

(注)太字は選択されたモデルのBIC値。

と最も多く、次いで I1B11 モデルが選択された国が 2 か国(カナダとフランス)、最後に I0B01 モデルが選択された国が 1 か国(イタリア)となっている。先のシミュレーション結果で、真の DGP が I1B01 のときに誤って I0B01 モデルを選択する確率が 12%であることを踏まえると、イタリアの結果については若干の留保が必要であるものの、他の結果については概ね妥当だと思われる。以上をまとめると、鋳工業生産の時系列データに関して、7 か国中 6 か国が単位根過程にあること、また、7 か国全てで誤差分散変化を伴っていること、さらに回帰係数変化に関しては 2 か国にとどまっていることが明らかになった。

4.2.5 結論

以上、本節では、従来の仮説検定法では適用不可能な問題、すなわち回帰係数変化と誤差分散変化の両方を考慮した場合の単位根の検出について、BIC によるモデル選択法を提案した。提案した方法の評価は 3 種類のシミュレーショ

ンを通して行った。第一に、回帰係数変化のみを考慮した場合の単位根の検出については、BIC によるモデル選択法が仮説検定法より優れていることがわかった。しかしながら、変化のタイプや大きさによっては劣る結果になることも確認された。第二に、誤差分散変化のみを考慮した場合の単位根の検出については、BIC によるモデル選択法は仮説検定法とほぼ同等のパフォーマンスであることが明らかになった。最後に、回帰係数変化と誤差分散変化の両方を考慮した場合の単位根の検出については、正しく単位根を検出する確率がやや低いものの、BIC によるモデル選択法は実務上有用な方法であることがわかった。

提案した方法を7か国の鋳工業生産指数に適用した実証分析結果は興味深いものであった。主な結論として、鋳工業生産の時系列データに関して、7か国中6か国が単位根過程にあること、また、7か国全てで誤差分散変化を伴っていること、さらに回帰係数変化に関しては2か国にとどまっていることが明らかになった。

第5章 経済予測への応用

本章では単位根と構造変化を考慮した経済予測の問題を議論する。5.1節では変数変換を考慮した場合の単位根の検出方法を提案するとともに、経済予測への応用を検討する。5.2節では定常過程と非定常過程が切り替わるモデルを提案し、経済予測での有用性について考察する。

5.1 単位根と変数変換を考慮した予測

本節では変数変換を考慮した場合の単位根の検出方法を提案するとともに、経済予測への応用を検討する。提案する方法では、単位根の有無と変数変換を考慮して様々なモデルを推定し、情報量規準によるモデル選択をする。

5.1.1 問題の所在

経済成長という言葉から連想されるように、生産や消費などの多くのマクロ経済時系列はある範囲の伸び率で増加していることが確認できる。したがって、こうしたデータを分析するにはほぼ自動的に対数変換をする。一方、変数変換は単位根の検出結果に大きな影響を与える。したがって、たとえば、あるデータの対数変換後の時系列が定常過程であると結論付ける前に、そもそも対数変換そのものが誤りであった可能性を検討する必要がある。

変数変換を考慮した場合の単位根検出に関する先行研究は非常に少ない。Granger-Hallman [53]は変数変換に対して頑健な単位根の仮説検定法を提案したものの、彼らの変数変換は原数値を y_t とすると、非常に限られた変換 ($y_t^2, y_t^3, |y_t|, \text{sgn}(y_t), \sin y_t, \exp(y_t), \log(y_t + 75), 1/y_t + 75$) であり、さらに変数変換の基準が示されておらず実用的とはいえない。また、Franses-McAleer [29]は ADF 回帰の妥当性を評価するための非線形変換の検定を考案した。しかしながら、彼らの方法では Box-Cox パラメータにある値を仮定したもとの帰無仮説を用いた検定であり、Box-Cox パラメータを直接求めることはできず、実務上は必ずしも有用とはいえない。

5.1.2 情報量規準によるモデル選択法

前項の問題に対処するため，情報量規準によるモデル選択の結果として，単位根の有無の判断と Box-Cox パラメータの推定を同時に行う方法を提案する [35]．まず，変数変換をしていない観測時系列データ $y_t (t=1, \dots, T)$ に対し，次のような ADF 回帰を考える．

$$y_t(\lambda) = \rho y_{t-1}(\lambda) + \alpha + \beta t + \sum_{i=1}^p \phi_i \Delta y_{t-i}(\lambda) + e_t, \quad t = p+2, \dots, T. \quad (5.1)$$

ここで e_t は分散 σ^2 の正規白色雑音であり， Δ は階差オペレータ， λ は Box-Cox パラメータである． $y_t(\lambda)$ は Box-Cox 変換後の y_t を表し次のように定義される．

$$y_t(\lambda) = (y_t^\lambda - 1)/\lambda \quad (\lambda \neq 0 \text{ のとき}).$$

$$y_t(\lambda) = \ln(y_t) \quad (\lambda = 0 \text{ のとき}).$$

トレンド定常 (TS: Trend Stationary) モデルは (5.1) 式において $\rho < 1$ と $\beta \neq 0$ の条件で得られ，階差定常 (DS: Difference Stationary) モデルは $\rho = 1$ と $\beta = 0$ の条件で得られる．TS モデルの対数尤度は次式の通りである．

$$l(\alpha, \beta, \rho, \phi_1, \dots, \phi_p, \sigma^2, \lambda) = -\frac{T-p-1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=p+2}^T \left\{ y_t(\lambda) - \rho y_{t-1}(\lambda) - \alpha - \beta t - \sum_{i=1}^p \phi_i \Delta y_{t-i}(\lambda) \right\}^2 + \sum_{t=p+2}^T \ln \left| \frac{\partial y_t(\lambda)}{\partial y_t} \right|.$$

同様に，DS モデルの対数尤度は次式で得られる．

$$l(\alpha, \phi_1, \dots, \phi_p, \sigma^2, \lambda) = -\frac{T-p-1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=p+2}^T \left\{ y_t(\lambda) - y_{t-1}(\lambda) - \alpha - \sum_{i=1}^p \phi_i \Delta y_{t-i}(\lambda) \right\}^2 + \sum_{t=p+2}^T \ln \left| \frac{\partial y_t(\lambda)}{\partial y_t} \right|.$$

TS モデルと DS モデルの BIC はそれぞれ次式の通り．

$$\text{BICTS} = -2l(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\rho}, \hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_p, \hat{\sigma}^2, \hat{\lambda}) + (5+p) \ln(T-p-1).$$

$$\text{BICDS} = -2l(\hat{\alpha}, \hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_p, \hat{\sigma}^2, \hat{\lambda}) + (3+p) \ln(T-p-1).$$

Box-Cox パラメータ λ と回帰係数を同時推定するため Spitzer [96] の非線形最小 2 乗アルゴリズムを用いる．すなわち，所与の λ のもとで他のパラメータが

最小 2 乗推定で求められ尤度も得られることから， λ の非線形最適化によって全ての解を求めることができる．

変数変換を考慮した場合の単位根の検出について，提案する方法は次のような手順で進む．まず，TS モデルか DS モデルかのうち 1 つのモデルクラスを選択する．次に，与えられたモデルクラスと最大ラグ次数のもとで，ラグ次数を変えるごとにモデルを推定し BIC を求め保存する．そして，最小 BIC により最適モデルを 1 つ選択する．最後に，得られた 2 つの BIC の中から小さい方を全体としての最適モデルとする．したがって，BIC によるモデル選択の結果として，単位根の有無や λ の値を求めることができる．

5.1.3 シミュレーション研究

ここでは提案した方法の評価をシミュレーション結果に基づいて行う．次のような DGP を考える．

$$y_t = (\lambda x_t + 1)^{1/\lambda} \quad (\lambda \neq 0 \text{ のとき}), \quad y_t = e^{x_t} \quad (\lambda = 0 \text{ のとき}).$$

ここで， $\lambda \geq 0$ のとき $x_t = 1 + 0.02t + u_t$ であり， $\lambda < 0$ のとき $x_t = -8 + 0.02t + u_t$ である．いずれの場合も， $u_t = \rho u_{t-1} + v_t$ ， $u_0 = 0$ ， $v_t \sim NID(0, 0.01)$ とする．提案した方法の実務上の有用性をみるため， ρ については 3 通り (0.8, 0.9, 1)， λ については 5 通り (-1, -0.5, 0, 0.5, 1) の合計 15 通りの DGP を考える．

提案した方法の評価をするため，2 種類の仮説検定法との比較を行う．1 つは，原数値に対しての ADF 検定法であり，もう 1 つは対数変換値に対しての ADF 検定法である．ADF 検定では本論文で既に試みたように，所与の最大ラグ次数のもとで，ラグ選択を Ng-Perron [75] の方法で行う．また，単位根検定とラグ次数検定は 5% の有意水準で行うこととする．シミュレーションは次のような手順で進む．まず，15 通りの DGP の中から 1 つを選ぶ．次に，攪乱項を発生させ選択した DGP に代入し人工データを作成する．さらに，得られたデータに対して 3 つの方法を適用し，単位根の有無を判断する．こうした実験を 1,000 回繰り返し，定常モデルを選択した頻度を求める．最大ラグ次数は 4 とし，標本数は $T = 100$ と $T = 200$ の 2 ケースを考える．

表 5-1 に提案した方法によって得られた $\hat{\lambda}$ の平均値と標準偏差，そして定常モデルを選択した頻度が示されている．主な結果として 3 点ある．第一に， $\hat{\lambda}$ の

平均値は真の値に近いものの、標準偏差が大きい。特に真の DGP が非定常に近づけば近づくほど、また λ の値が -1 に近づけば近づくほど大きくなる。第二に、BIC によるモデル選択の結果は λ の影響を受けない。第三に、正しくは原数値にすべきところを誤って対数値に単位根検定をした方が、正しくは対数値にすべきところを誤って原数値に単位根検定をした場合よりも悪影響は小さい。たとえば、真の DGP が $\rho = 0.8$ で $\lambda = 0$ として $T = 200$ のときに正しくは対数値にすべきところを誤って原数値に単位根検定をした場合、正しく定常モデルを選択する確率は 0 となっている。以上から、BIC によるモデル選択法が優れている点が確認された。

5.1.4 経済予測への応用

本項では、提案した方法の経済予測における有用性を検討するため、20 か国の鉱工業生産指数（季節調整済み四半期、1975 年 1 期から 2000 年 4 期）を用いた分析を行う。データは International Financial Statistics から入手した。20 か国とは、米国 (US)、カナダ (CAN)、オーストラリア (AUL)、日本 (JPN)、オーストリア (AUR)、ベルギー (BEL)、フィンランド (FIN)、フランス (FRA)、ドイツ (GER)、アイルランド (IRE)、イタリア (ITA)、ルクセンブルク (LUX)、オランダ (NET)、スペイン (SPA)、デンマーク (DEN)、ギリシャ (GRE)、ノルウェー (NOR)、スウェーデン (SWE)、スイス (SWI)、英国 (UK) である。

予測は 1 期先から 4 期先までを考慮する。たとえば 4 期先予測を次のように行う。最初に、1985 年 1 期までのデータを用いてモデルを推定し 1986 年 1 期の予測を行う。次に、1985 年 2 期までのデータを用いてモデルを推定し 1986 年 2 期の予測を行う。こうした作業を 60 回繰り返し、最後に、1999 年 4 期までのデータを用いてモデルを推定し 2000 年 4 期の予測を行う。予測期間ごとに 60 個の予測誤差を得る。予測誤差は次のように求める。まず、手法ごとの予測値を逆変換により原数値に対する予測値に変換する。次に、実績値と予測値の両方を対数変換し 100 倍する。予測評価は平均誤差と平均平方誤差の平方根の 2 つで行う。また、最大ラグ次数は 12 とし、前項でのシミュレーションと同様、3 つの方法を適用し、得られたモデル、すなわち (5.1) 式において $\rho < 1$ かつ

表5-1 定常モデルの選択率

ρ	λ	T = 100					T = 200				
		LAMA	LAMS	BIC	LEVEL	LOG	LAMA	LAMS	BIC	LEVEL	LOG
1.0	-1.0	-0.94	1.23	0.20	0.08	0.09	-1.00	0.41	0.11	0.04	0.06
1.0	-0.5	-0.49	0.76	0.20	0.07	0.09	-0.50	0.23	0.11	0.04	0.06
1.0	0.0	0.00	0.16	0.20	0.06	0.09	0.00	0.05	0.11	0.04	0.08
1.0	0.5	0.49	0.30	0.20	0.08	0.12	0.50	0.12	0.12	0.05	0.13
1.0	1.0	0.99	0.44	0.20	0.09	0.14	1.00	0.18	0.11	0.08	0.15
0.9	-1.0	-0.97	1.07	0.41	0.26	0.27	-0.99	0.29	0.73	0.19	0.44
0.9	-0.5	-0.49	0.61	0.41	0.24	0.28	-0.49	0.17	0.73	0.09	0.48
0.9	0.0	0.00	0.14	0.41	0.13	0.29	0.00	0.04	0.73	0.01	0.65
0.9	0.5	0.50	0.27	0.42	0.26	0.33	0.50	0.10	0.73	0.34	0.44
0.9	1.0	0.99	0.41	0.42	0.29	0.33	1.00	0.16	0.73	0.65	0.40
0.8	-1.0	-1.00	1.00	0.84	0.60	0.67	-0.99	0.24	1.00	0.26	0.82
0.8	-0.5	-0.50	0.57	0.85	0.53	0.67	-0.50	0.14	1.00	0.07	0.87
0.8	0.0	0.00	0.13	0.85	0.17	0.70	0.00	0.04	1.00	0.00	0.98
0.8	0.5	0.49	0.26	0.85	0.61	0.68	0.50	0.09	1.00	0.65	0.73
0.8	1.0	0.98	0.38	0.85	0.70	0.65	1.00	0.14	1.00	0.98	0.57

(注) LAMAとLAMSはBox-Coxパラメータの推定値の平均値と標準偏差。BICはBICによるモデル選択。LEVELは原数値に対する単位根検定。LOGは対数値に対する単位根検定。検定サイズに相当するものを網掛にしてある。

$\beta \neq 0$ のモデル (TS モデル) か, $\rho = 1$ かつ $\beta = 0$ のモデル (DS モデル) かに基づいて予測を行う。

こうした比較は Stock-Watson の研究 [97]でも行われている。彼らは 215 の米国月次時系列データを用い, 49 の予測手法により比較を行っている。その結果, 最も優れた予測法は事前に単位根検定をした後の自己回帰モデルによる予測であることがわかった。本節で提案した方法の比較対象として単位根検定モデルを用いたのは彼らの研究成果を踏まえてのものである。

表 5-2 に予測結果が示されている。具体的には, 国別予測期間別の平均平方誤差の平方根と平均誤差, さらには予測手法ごと予測期間ごとの順位の平均と標準偏差である。順位の平均に着目すると, 両予測評価とも提案した方法の予測力が他の 2 手法よりも優れていることがわかる。また, 平均平方誤差の平方根では原数値による予測と対数値による予測ではほぼ同等だが, 平均誤差では原数値による予測が劣っている。

Campbell-Perron [17]のシミュレーション結果にもあるとおり, 真の DGP が

表5-2 予測結果

国名	1期先予測			2期先予測			3期先予測			4期先予測		
	BIC	LEVEL	LOG	BIC	LEVEL	LOG	BIC	LEVEL	LOG	BIC	LEVEL	LOG
平均平方誤差の平方根												
US	0.93	1.08	1.20	2.34	2.34	2.61	4.24	3.56	4.01	6.72	4.78	5.38
CAN	1.50	1.96	2.12	2.85	3.69	4.18	3.80	5.11	5.60	4.85	7.25	7.99
AUL	1.63	1.68	1.61	2.26	2.40	2.15	2.75	3.03	2.72	3.14	3.77	3.37
JPN	1.63	1.67	1.65	2.66	2.85	2.80	4.05	4.28	4.23	5.12	5.41	5.39
AUR	1.94	2.05	2.02	2.85	3.17	3.13	3.50	4.00	3.89	3.81	4.54	4.39
BEL	4.08	4.25	4.11	4.71	4.66	4.82	4.95	4.88	5.12	5.13	5.10	5.14
FIN	1.97	2.08	2.08	3.21	3.44	3.50	4.34	4.67	4.61	5.53	5.91	5.75
FRA	1.23	1.29	1.28	2.02	2.05	2.03	2.70	2.68	2.62	3.29	3.26	3.17
GER	1.45	1.64	1.69	2.23	2.43	2.45	2.99	3.22	3.31	3.58	3.94	4.04
IRE	3.05	3.68	3.10	4.43	5.49	4.42	5.48	7.00	5.35	6.60	8.57	6.51
ITA	1.66	1.67	1.63	2.50	2.60	2.56	3.09	3.27	3.28	3.83	4.02	3.98
LUX	3.79	3.98	4.07	4.29	4.77	4.96	4.87	5.87	5.96	4.87	6.47	6.54
NET	2.04	1.97	1.99	2.31	2.25	2.25	2.41	2.47	2.51	2.53	2.65	2.70
SPA	1.52	1.45	1.45	2.51	2.34	2.29	3.56	3.35	3.24	4.67	4.39	4.19
DEN	2.47	2.62	2.66	3.07	3.64	3.46	3.61	4.19	3.97	4.11	4.57	4.39
GRE	3.11	3.27	3.32	4.07	4.00	4.10	4.11	4.00	4.08	4.42	4.41	4.51
NOR	3.29	3.57	3.42	4.01	3.77	4.03	4.68	4.19	4.62	4.96	4.37	5.04
SWE	2.47	2.51	2.50	3.21	3.21	3.18	4.15	4.14	4.12	5.03	5.01	4.97
SWI	3.64	4.45	4.27	3.58	4.22	4.21	4.21	5.27	5.23	4.35	5.02	4.73
UK	0.95	1.18	1.21	1.45	1.96	2.01	1.87	2.51	2.55	2.25	2.96	3.00
平均順位	1.3	2.5	2.3	1.6	2.1	2.3	1.8	2.1	2.1	1.6	2.2	2.2
標準偏差	0.6	0.7	0.6	0.7	0.8	0.8	0.9	0.7	0.8	0.8	0.7	0.7
平均誤差												
US	0.11	0.32	0.31	0.21	0.80	0.72	0.26	1.33	1.20	0.26	1.96	1.75
CAN	-0.04	0.15	0.10	-0.03	0.37	0.18	0.13	0.76	0.38	0.27	1.22	0.68
AUL	0.08	0.31	0.13	0.11	0.62	0.21	0.08	0.86	0.22	0.05	1.11	0.24
JPN	-0.08	-0.04	-0.14	-0.27	-0.12	-0.44	-0.46	-0.18	-0.77	-0.69	-0.33	-1.17
AUR	0.20	0.35	0.36	0.45	0.77	0.73	0.65	1.22	1.11	0.92	1.61	1.43
BEL	0.46	0.56	0.64	0.68	0.84	1.02	0.99	1.01	1.24	1.10	1.23	1.35
FIN	0.21	0.12	-0.02	0.49	0.35	0.07	0.87	0.75	0.27	1.37	1.27	0.57
FRA	0.39	0.38	0.33	0.70	0.70	0.61	1.02	1.00	0.87	1.31	1.33	1.19
GER	0.13	0.12	0.13	0.27	0.29	0.26	0.41	0.41	0.41	0.56	0.57	0.59
IRE	0.53	0.70	0.67	1.10	1.38	1.31	1.70	2.37	2.00	2.25	3.26	2.72
ITA	0.23	0.57	0.58	0.46	1.12	1.15	0.65	1.62	1.62	0.86	2.12	2.10
LUX	0.03	0.28	0.05	0.09	0.36	-0.04	0.17	0.65	0.20	0.21	0.81	0.27
NET	0.11	0.15	0.14	0.25	0.30	0.25	0.44	0.55	0.45	0.61	0.78	0.63
SPA	0.39	0.25	0.14	0.75	0.50	0.27	1.13	0.77	0.40	1.52	1.04	0.52
DEN	0.08	0.10	-0.15	0.13	0.21	-0.24	0.07	0.26	-0.42	0.03	0.29	-0.58
GRE	0.28	0.16	0.11	0.55	0.51	0.40	0.63	0.61	0.50	0.75	0.69	0.55
NOR	-1.02	0.36	-0.97	-1.72	0.24	-1.68	-2.30	0.18	-2.25	-2.84	0.10	-2.73
SWE	0.19	0.09	0.05	0.40	0.25	0.17	0.65	0.44	0.30	0.98	0.72	0.54
SWI	0.20	0.45	0.54	0.39	0.69	0.58	0.47	0.95	1.10	0.77	1.14	0.94
UK	0.04	0.10	0.05	0.10	0.24	0.12	0.21	0.42	0.24	0.33	0.58	0.34
平均順位	1.8	2.2	2.0	1.8	2.4	1.8	1.8	2.3	1.9	1.6	2.5	1.9
標準偏差	0.9	0.7	0.7	0.9	0.7	0.7	0.9	0.6	0.7	0.9	0.7	0.7

(注)表5-1の注を参照.

単位根を含むときに誤って単位根を含まないモデルで予測した場合の予測誤差の悪化の方が、真のDGPが単位根を含まないときに誤って単位根を含むモデルで予測した場合の予測誤差の悪化よりも格段に大きい。また、Stock-Watson

[97]の実証結果からも明らかとなり、観測データに応じて単位根検定の結果としてモデルを選択して予測を行なったほうが、そうでない場合よりも予測結果が良いものの、常に単位根を含んだモデルで予測した場合よりも結果が大幅に改善することはない。表 5-2 で示された予測結果を再検討したところ、提案した方法の予測結果が良いのは主に変数変換が的確に行なわれた結果であり、的確な単位根の検出による予測結果の改善の寄与は小さい。

5.1.5 結論

以上、本節では変数変換を考慮した単位根の検出問題に関して、BIC によるモデル選択法を提案した。この方法では、単位根の有無により 2 つのモデルクラスを考え、各モデルクラスの中で様々なラグ次数のモデルを推定し、最小 BIC により最適なモデルを選択する。最後に残った 2 つの最適モデル（単位根を含むモデルと含まないモデル）の BIC を比較することで全体としての最適モデルを選ぶ。こうしてモデル選択の結果として単位根の有無や Box-Cox パラメータを決定する。この方法の評価はまずシミュレーション結果に基づいて行われた。そこでは、通常の ADF 検定では、原数値と対数値のどちらを用いても様々な変数変換に対応しきれず単位根の正しい検出に問題が生じること、そして提案した方法が変数変換の影響を受けることなく単位根の正しい検出に優れた結果をもたらすことが示された。最後に、提案した方法の評価を経済予測における予測誤差に基づいて行った。その結果、広く使われている、原数値あるいは対数値に対する単位根検定モデルによる予測よりも優れていることが示され、提案した方法の実務上の有用性が確認された。

5.2 定常過程と非定常過程が切り替わるモデルによる予測

本節では定常過程と非定常過程が切り替わるモデルを提案し、経済予測における有用性について考察する。提案する方法では、所与の最大変化点数のもとで、区間ごとに定常過程と非定常過程を組み合わせて柔軟なモデリングが可能となる。変化点や定常過程と非定常過程の組み合わせは、情報量規準によるモデル選択の結果として決定される。

5.2.1 問題の所在

景気循環において上昇期と下降期では期間や変動幅が異なることは広く知られ、Neftci [73]をはじめとしてこうした特性を持つ経済時系列の分析手法は様々な開発されてきた。しかしながら、そうした研究のほとんどが定常モデルや非定常モデルの中での回帰係数変化や誤差分散変化にとどまっており、2つの例外を除いて定常過程と非定常過程が切り替わるモデルに関する研究はほとんどなされていない。ところが、たとえば、Ang-Bekaert [5]が指摘しているように、米国の金融政策を分析する際に従来の分析法には限界がある。なぜなら、米国では低インフレのときには、短期金利は単位根をもつ時系列のように操作され、高インフレのときは単位根を持たない時系列のように操作されているからである。

2つの例外の第一は、McCulloch-Tsay [71]による方法である。彼らは定常モデルと非定常モデルを相互代替モデルとし、観測データの1つ1つにおいてマルコフ過程に従って切り替わる過程をモデル化し、推定方法を提案した。さらに彼らは提案した方法を米国の月次鉱工業生産指数（1947年1月から1992年1月）に適用した。その結論は、1971年12月前後で構造変化が1度起こり、非定常過程から定常過程に切り替わったというものである。しかしながら、彼らの目的は構造変化の検出であって時系列モデルの予測力向上に焦点を当てたものではない。例外の第二は、Granger-Swanson [54]による方法である。彼らは単位根の周りを確率的に変動するモデルを提案した。すなわち、従来の単位根過程とはデータの観測期間全てで一様に単位根を含む過程であったが、彼らのモデルでは、単位根とその近傍を確率的に変動する。彼らは米国の月次時系列データを用いて予測力を検証したところ、1期先予測と5期先予測ではドリフト付ランダムウォークモデルよりも劣るが10期先予測では優れているという結果を得た。しかしながら、経済予測の中心は1期先から4期先予測であることから、彼らの方法の実務上の有用性には期待できない。

5.2.2 情報量規準によるモデル選択法

以上で述べた問題に対処するため、定常過程と非定常過程が切り替わるモデルと情報量規準によるモデル選択法を提案する[30]。基本的な考え方は3.1節で

議論したのと同じである．ここで，観測された時系列データ $y_t (t = 1, \dots, T)$ に $(m+1)$ 個の区間（あるいは m 回の構造変化）があるとして，次のようなモデルを考える．

$$\Delta y_t = \alpha_i + \beta_i t + \gamma_i y_{t-1} + \phi_{i1} \Delta y_{t-1} + \dots + \phi_{ip_i} \Delta y_{t-p_i} + e_{it}, \quad t = T_{i-1} + 1, \dots, T_i.$$

$$\Delta y_t = \delta_j + \phi_{j1} \Delta y_{t-1} + \dots + \phi_{jp_j} \Delta y_{t-p_j} + e_{jt}, \quad t = T_{j-1} + 1, \dots, T_j.$$

ここで， $1 \leq i < j \leq m+1$ ， $e_{it} \sim NID(0, \sigma_i^2)$ ， $e_{jt} \sim NID(0, \sigma_j^2)$ ， $T_0 = 0$ ， $T_{m+1} = T$ が成り立つものとする．したがって上のモデルでは， i 番目の区間においてトレンド定常（TS: Trend Stationary）モデルが当てはまり， j 番目の区間において階差定常（DS: Difference Stationary）モデルが当てはまるとした定式化になっている．また，3.1 節で議論したのと同様，次式を考える．

$$T_i - T_{i-1} \geq L, \quad i = 1, \dots, m+1.$$

さらに，3.1 節と同様に BIC は次式で求められる．

$$\text{BIC} = \sum_{i=1}^{m+1} (T_i - T_{i-1}) \ln \hat{\sigma}_i^2 + \ln(T) (m + \sum_{i=1}^{m+1} \theta_i).$$

ここで θ_i は i 番目の区間のパラメータ数であり，誤差分散 $\hat{\sigma}_i^2$ や変化点数もパラメータ数に数える．ここで TS モデルを T，DS モデルを D とすると，構造変化の数に応じて各モデルクラスを表記できる．まず， $m=0$ のときは，T と D の 2 個， $m=1$ のときは TT，TD，DT，DD の 4 個， $m=2$ のときは TTT，TTD，TDT，TDD，DTT，DTD，DDT，DDD の 8 個などとなり，一般に $m=n$ のときは 2^{n+1} 個となる．

提案する方法は次のような手順を踏む．まず，所与の最大変化点数 m のもとで，1 つの変化点数 n を選ぶ．次に，選択した変化点数 n のもとで 2^{n+1} 個のモデルクラスを考え，その中から 1 つのモデルクラスを選ぶ．さらに，様々な変化点の組み合わせを考え，区間ごとに最小 BIC によりラグ次数を選択し，時系列全体の BIC の値を保存する．選択したモデルクラスの中から最小 BIC により 1 つのモデルを選ぶ．さらに， 2^{n+1} 個の BIC の中から最小 BIC により 1 つのモデルを選ぶ．こうして，変化点数ごとに最小 BIC のモデルが残るので，最後に全体として最適なモデルを 1 つ選択する．

5.2.3 シミュレーション研究

提案した方法の評価はシミュレーション研究を通して行う．ここではまず次のような 4 個の基本 DGP を考える．

$$y_{1,t} = 0.4t + 1.4y_{1,t-1} - 0.6y_{1,t-2} + e_{1,t}.$$

$$y_{2,t} = 0.2t + y_{2,t-1} - 0.4y_{2,t-2} + 0.5e_{2,t}.$$

$$y_{3,t} = 0.8 + 1.6y_{3,t-1} - 0.6y_{3,t-2} + e_{3,t}.$$

$$y_{4,t} = 0.2 + 1.2y_{4,t-1} - 0.2y_{4,t-2} + 0.5e_{4,t}.$$

ここで, $y_{i,-1} = y_{i,0} = 0$, $e_{i,t} \sim NID(0,1)$ ($i=1,2,3,4$) とする．

さらにこれら 4 つの基本 DGP を組み合わせ以下のような 14 個のシミュレーション用 DGP を考える．

$$\text{DGP1(T): } y_t = y_{1,t}.$$

$$\text{DGP2(D): } y_t = y_{3,t}.$$

$$\text{DGP3(TT): } y_t = y_{1,t} (t \leq T/2), \quad y_t = y_{2,t} + y_{T/2} - y_{2,T/2} (t > T/2).$$

$$\text{DGP4(TD): } y_t = y_{1,t} (t \leq T/2), \quad y_t = y_{4,t} + y_{T/2} - y_{4,T/2} (t > T/2).$$

$$\text{DGP5(DT): } y_t = y_{3,t} (t \leq T/2), \quad y_t = y_{2,t} + y_{T/2} - y_{2,T/2} (t > T/2).$$

$$\text{DGP6(DD): } y_t = y_{3,t} (t \leq T/2), \quad y_t = y_{4,t} + y_{T/2} - y_{4,T/2} (t > T/2).$$

$$\text{DGP7(TTT): } y_t = y_{1,t} (t \leq T/3), \quad y_t = y_{2,t} + y_{T/3} - y_{2,T/3} (T/3 < t \leq 2T/3),$$

$$y_t = y_{1,t} + y_{2T/3} - y_{1,2T/3} (t > 2T/3).$$

$$\text{DGP8(TTD): } y_t = y_{1,t} (t \leq T/3), \quad y_t = y_{2,t} + y_{T/3} - y_{2,T/3} (T/3 < t \leq 2T/3),$$

$$y_t = y_{3,t} + y_{2T/3} - y_{3,2T/3} (t > 2T/3).$$

$$\text{DGP9(TDT): } y_t = y_{1,t} (t \leq T/3), \quad y_t = y_{4,t} + y_{T/3} - y_{4,T/3} (T/3 < t \leq 2T/3),$$

$$y_t = y_{1,t} + y_{2T/3} - y_{1,2T/3} (t > 2T/3).$$

$$\text{DGP10(TDD): } y_t = y_{1,t} (t \leq T/3), \quad y_t = y_{4,t} + y_{T/3} - y_{4,T/3} (T/3 < t \leq 2T/3),$$

$$y_t = y_{3,t} + y_{2T/3} - y_{3,2T/3} (t > 2T/3).$$

$$\text{DGP11(DTT): } y_t = y_{3,t} (t \leq T/3), \quad y_t = y_{2,t} + y_{T/3} - y_{2,T/3} (T/3 < t \leq 2T/3),$$

$$y_t = y_{1,t} + y_{2T/3} - y_{1,2T/3} (t > 2T/3).$$

$$\text{DGP12(DTD): } y_t = y_{3,t} (t \leq T/3), \quad y_t = y_{2,t} + y_{T/3} - y_{2,T/3} (T/3 < t \leq 2T/3),$$

$$y_t = y_{3,t} + y_{2T/3} - y_{3,2T/3} (t > 2T/3).$$

$$\text{DGP13(DDT): } y_t = y_{3,t} (t \leq T/3), \quad y_t = y_{4,t} + y_{T/3} - y_{4,T/3} (T/3 < t \leq 2T/3),$$

$$y_t = y_{1,t} + y_{2T/3} - y_{1,2T/3} (t > 2T/3).$$

$$\begin{aligned} \text{DGP14(DDD): } y_t &= y_{3,t} \quad (t \leq T/3), \quad y_t = y_{4,t} + y_{T/3} - y_{4,T/3} \quad (T/3 < t \leq 2T/3), \\ y_t &= y_{3,t} + y_{2T/3} - y_{3,2T/3} \quad (t > 2T/3). \end{aligned}$$

シミュレーションは次の手順で行う。まず、14 個の DGP のうち 1 つを選ぶ。次に、攪乱項を発生させ選択した DGP に代入し人工データを得る。さらに、得られたデータに対して提案した手法を適用する。そしてモデルクラス選択の結果として、データがどの DGP から生成されたのかを判断する。T = 180, 最大ラグ次数が 4, L = 40 とする。各実験を 1,000 回繰り返し、それぞれの DGP に対して各モデルクラスの選択頻度を求める。

表 5-3 に各モデルクラスの選択率が示されている。特に、表の対角線上に正しいモデルの選択率があり太字で表示されている。主な結果は次の 2 点である。第一に、すでに第 3 章を除く本論文の各章で述べてきたように、正しくトレンド定常モデルを選択する確率の方が正しく階差定常モデルを選択する確率よりも高い。具体的には、DGP1(T)の 1 に対して DGP2(D)の 0.86, DGP3(TT)の 0.97 に対して DGP6(DD)の 0.69, DGP7(TTT)の 0.68 に対して DGP14(DDD)の 0.56 となっている。第二に、変化点の数が増えれば増えるほど正しくモデルを選択する頻度は低下していく。これは、各変化点間のデータ数が少なくなるからである。以上、結論としては、DGP によっては識別力が必ずしも十分とはいえないものの、実務上一定の有用性が期待できる。

5.2.4 経済予測への応用

本項では、提案した方法の経済予測における有用性を検討するため、16 か国の鉱工業生産指数（季節調整済み四半期、1961 年 1 期から 2000 年 4 期）の対数変換後 100 倍したものを分析する。5.1.4 項で用いたデータとの違いは期間が長くなったことと、国の数が 4 つ（オーストリア、ルクセンブルク、ギリシャ、スイス）減ったことである。このデータ期間には、1973 年の石油危機、日本などでみられた 1990 年代初頭のバブル崩壊などがあり、構造変化が最大 2 回起きた可能性がある。予測方法や評価は 5.1.4 項とほとんど同じだが、異なるのは、たとえば最初の 4 期先予測は 1980 年 1 期までのデータを用いてモデルを推定し 1981 年 1 期の予測を行う点であり、予測誤差の標本数が 80 個になる。また、比較対象となる他の予測手法の 1 つは ARIMA(k,1,0)モデルであり、他の 1 つ

表5-3 各モデルの選択率

DGP	モデル													
	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	M10	M11	M12	M13	M14
D1	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
D2	0.11	0.86	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
D3	0.00	0.00	0.97	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
D4	0.00	0.00	0.18	0.80	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
D5	0.00	0.00	0.14	0.00	0.85	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
D6	0.00	0.00	0.04	0.10	0.17	0.69	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
D7	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.68	0.11	0.03	0.01	0.14	0.04	0.01	0.00
D8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.15	0.67	0.00	0.01	0.02	0.14	0.00	0.01
D9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.13	0.03	0.56	0.09	0.04	0.01	0.12	0.03
D10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.12	0.12	0.59	0.00	0.02	0.00	0.11
D11	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.14	0.01	0.01	0.00	0.69	0.10	0.06	0.00
D12	0.00	0.01	0.00	0.01	0.00	0.00	0.03	0.11	0.00	0.01	0.14	0.67	0.01	0.02
D13	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.03	0.00	0.12	0.01	0.14	0.03	0.59	0.07
D14	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.08	0.04	0.14	0.14	0.56

(注)太字は正しくモデルを選択した頻度を表す。

は Dickey-Fuller-Zivot-Andrews-Ohara (DFZAO)の方法である . Ohara [78]は q 回の構造変化を考慮した単位根検定モデルを次のように提案した .

$$y_t = \mu + \beta t + \sum_{i=1}^q \{\theta_i DU_t(\lambda_i) + \gamma_i DT_t(\lambda_i)\} + \alpha y_{t-1} + \sum_{i=1}^k c_i \Delta y_{t-i} + e_t.$$

ここで , $DT_t(\lambda_i) = 0 (t \leq T_{Bi}), DT_t(\lambda_i) = t - T_{Bi} (t > T_{Bi}), T_{Bi}$ は i 番目の変化点 , $\lambda_i = T_{Bi}/T, 0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_q < 1$ そして $e_t \sim NID(0, \sigma^2)$ である . 単位根の検定法は第 4 章で議論した Perron や Vogelsang-Perron の方法と本質的には変わらない . ただし , Ohara の方法は帰無仮説に構造変化を含まない単位根過程を設定している . また , 本項で扱うデータの変化点の数は最大で 2 と考えられるので , Ohara の検定では $q = 2$ の場合のみを考える . さらに , Zivot-Andrews [105]の方法は Ohara の方法の $q = 1$ の場合に一致し , ADF 法は Ohara の方法の $q = 0$ の場合に一致する . 本項では , ラグ次数 k は最大ラグ次数が 12 のもとで Ng-Perron [75]の方法で決定する . DFZAO における予測モデルの選択は次のように行われる . まず , 観測データに対して ADF 検定を行う . 単位根を含むという帰無仮説が棄却されれば , そのままトレンド定常モデルが選択され , 予測作業に入る . 帰無仮説が棄却されなければ , Zivot-Andrews 検定を行う . 帰無仮説が棄却されれば , そのまま $q = 1$ のトレンド定常モデルが選択され , 予測作業に入る . 帰無仮説が棄却されなければ , Ohara の検定を行う . 帰無仮説が棄却されれば ,

そのまま $q = 2$ のトレンド定常モデルが選択され、予測作業に入る。帰無仮説が棄却されなければ、構造変化のない単位根過程モデルが選択され、予測作業に入る。検定サイズは全て 5 % とする。

表 5-4 に予測結果が示されている。この表の見方は表 5-2 と全く同じである。順位に平均に着目すると、平均平方誤差の平方根と平均誤差の両方とも提案した方法の予測力が他の 2 手法よりも優れていることがわかる。しかしながら、これは ARIMA(p,1,0)モデルによる予測の平均誤差の偏りから明らかなように、構造変化を含んだ単位根過程が考慮されていないことを反映しているともいえる。本論文執筆前の段階では、帰無仮説に複数の構造変化を含んだ単位根過程を設定した検定法は見当たらず、本論文ではやむを得ず Ohara の検定法を用いたが、当該検定法が利用可能であれば、提案した方法の評価を変える必要があるかもしれない。また、DFZAO の予測結果が悪いのは、変化点の推定誤差が大きいことと、Campbel-Perron [17] が明らかにしたように、正しくトレンド定常モデルで予測をしたときの予測誤差の改善よりも誤ってトレンド定常モデルで予測したときの予測誤差の悪化の方が大きいからである。

5.2.5 結論

以上、本節では定常過程と非定常過程が切り替わるモデルを提案した。この方法では、変化点の数、変化点の組み合わせ、トレンド定常モデルと階差定常モデルの組み合わせを考慮した様々なモデルの中から BIC を用いたモデル選択を行う。この方法の評価はまずシミュレーション結果に基づいて行われた。ここでは、トレンド定常を含むモデルを選択する傾向がやや高いこと、変化点が増加すると候補モデルが 2 のべき乗で増加し、正しくモデルを選択する頻度が低下していくことなどの問題が確認できたものの、実務上の有用性を否定するものではないことがわかった。最後に、提案した方法の評価を経済予測における予測誤差に基づいて行った。その結果、留意点が付くとはいえ、ARIMA モデルや構造変化を考慮した単位根検定モデルによる予測よりも優れていることが示され、提案した方法の実務上の有用性が確認された。

表5-4 予測結果

国名	1期先予測			2期先予測			3期先予測			4期先予測		
	ARIMADFZAC	BIC		ARIMADFZAC	BIC		ARIMADFZAC	BIC		ARIMADFZAC	BIC	
平均平方誤差の平方根												
US	1.19	1.39	1.14	2.21	2.89	2.09	3.04	4.34	2.79	3.94	5.85	3.65
CAN	2.04	2.20	1.97	3.40	4.03	3.29	4.66	5.69	4.66	6.24	7.70	6.22
AUL	1.78	2.01	1.73	2.65	3.25	2.62	3.23	4.26	3.30	3.73	5.20	3.90
JPN	1.30	1.39	1.42	2.44	2.67	2.61	3.71	3.99	3.79	5.02	5.40	4.94
BEL	4.33	4.35	4.11	4.97	5.17	4.80	5.13	5.70	5.03	5.27	6.13	5.23
FIN	2.31	2.31	2.46	3.13	3.13	3.41	4.10	4.10	4.52	5.28	5.28	5.69
FRA	1.23	1.38	1.29	1.86	2.12	2.11	2.55	2.76	3.07	3.09	3.32	3.91
GER	2.05	2.17	1.95	3.06	3.35	2.89	3.95	4.47	3.73	4.78	5.47	4.52
IRE	3.32	3.48	3.38	4.73	5.02	4.60	5.79	6.12	5.51	7.09	7.54	6.61
ITA	1.88	2.30	1.77	2.98	3.76	2.84	3.90	5.22	3.56	4.71	6.47	4.36
NET	2.30	2.32	2.12	3.08	3.09	2.80	3.48	3.46	3.19	3.87	4.05	3.85
SPA	2.02	2.14	2.01	3.12	3.30	3.07	4.16	4.43	3.98	5.29	5.59	4.94
DEN	4.41	4.61	4.58	4.46	4.87	4.56	4.89	5.76	4.72	5.72	6.94	5.39
NOR	3.19	3.24	3.06	3.63	3.79	3.51	3.83	3.98	3.78	4.03	4.46	4.01
SWE	3.17	3.30	2.98	3.74	4.02	3.46	4.74	5.23	4.28	5.37	6.04	4.97
UK	1.48	1.86	1.47	2.31	3.19	2.55	2.89	4.26	3.32	3.27	5.12	3.83
平均	1.8	2.9	1.4	1.8	2.9	1.4	1.8	2.8	1.5	1.8	2.9	1.4
順位												
標準	0.4	0.3	0.7	0.4	0.2	0.6	0.5	0.4	0.7	0.4	0.3	0.7
偏差												
平均誤差												
US	-0.06	0.36	0.02	-0.09	0.95	0.12	-0.10	1.61	0.25	-0.18	2.27	0.33
CAN	-0.15	0.23	0.13	-0.27	0.58	0.30	-0.41	1.02	0.52	-0.59	1.49	0.75
AUL	-0.07	0.20	-0.06	-0.14	0.42	-0.11	-0.25	0.53	-0.20	-0.38	0.56	-0.34
JPN	-0.28	0.13	-0.24	-0.70	0.30	-0.58	-1.21	0.49	-0.96	-1.84	0.66	-1.39
BEL	-0.41	-0.17	-0.03	-0.62	-0.24	-0.09	-0.84	-0.28	-0.16	-1.02	-0.23	-0.04
FIN	-0.25	-0.25	-0.25	-0.39	-0.39	-0.35	-0.59	-0.59	-0.48	-0.70	-0.70	-0.52
FRA	-0.43	-0.10	-0.18	-0.73	-0.14	-0.26	-1.05	-0.14	-0.30	-1.32	-0.09	-0.28
GER	-0.29	-0.19	-0.33	-0.57	-0.42	-0.69	-0.83	-0.63	-1.03	-1.12	-0.81	-1.36
IRE	0.77	0.63	0.66	1.65	1.38	1.37	2.66	2.22	2.18	3.79	3.24	3.12
ITA	-0.67	-0.02	-0.43	-1.24	-0.06	-0.82	-1.82	-0.08	-1.13	-2.32	-0.14	-1.39
NET	-0.20	0.15	0.01	-0.40	0.28	0.01	-0.65	0.43	0.04	-1.00	0.51	-0.01
SPA	-0.72	-0.78	-0.35	-1.44	-1.56	-0.71	-2.19	-2.36	-1.01	-2.97	-3.20	-1.37
DEN	-0.30	-0.39	-0.48	-0.40	-0.54	-0.63	-0.54	-0.71	-0.76	-0.73	-0.95	-0.98
NOR	-0.40	-0.30	0.05	-0.75	-0.65	-0.06	-0.90	-0.79	-0.11	-1.13	-0.99	-0.26
SWE	-0.17	-0.07	0.10	-0.12	0.08	0.38	-0.19	0.17	0.55	-0.26	0.25	0.78
UK	-0.14	-0.20	-0.28	-0.22	-0.29	-0.58	-0.26	-0.36	-0.82	-0.29	-0.38	-0.97
平均	2.4	1.9	1.8	2.3	2.0	1.8	2.3	2.0	1.8	2.3	2.0	1.8
順位												
標準	0.7	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
偏差												

(注) DFZAOはDickey-Fuller-Zivot-Andrews-Ohara. BICはBICによるモデル選択.

第6章 結論

本章では、本論文を総括し、残された課題についてまとめる。本論文では単位根と構造変化について、従来の仮説検定法における統計実務上の問題点を指摘し、情報量規準によるモデル選択法を提案した。そして、シミュレーション結果や予測結果に基づいて、BICによるモデル選択法の有用性を検証した。

第2章では単位根の検出の問題を検討した。2.1節では、モデルクラスとラグ次数に関して既知の場合と未知の場合に分けてシミュレーションを行った。いずれの場合においても、BICによるモデル選択法が仮説検定法とほぼ同等のパフォーマンスを示すことを確認した。さらに、実務的状況、すなわちモデルクラスとラグ次数の両方が未知の場合の単位根の検出において、6か国の失業率の分析を通して提案した手法の有用性を明らかにした。2.2節では、観測誤差を考慮した場合の単位根の検出において、従来の仮説検定法における検定サイズの歪みの問題を指摘した。そして、提案した方法ではそうした歪みは小さくなるという結果を得た。7か国の鉱工業生産指数に関する実証結果として、6か国で単位根が検出され、また6か国で観測誤差が検出された。2.3節では、条件付分散不均一を考慮した場合の単位根検出において、従来の仮説検定法で生じる検定サイズの歪みが、提案した方法で著しく改善されることを指摘した。6か国の株価指数の分析において、提案した方法の有用性を確認した。

第3章では構造変化の検出の問題を検討した。3.1節では、複数の構造変化を検出する問題において、仮説検定法における実務上の問題があることを指摘し、情報量規準によるモデル選択法の必要性を説いた。そして、変化点の検出と検出速度さらに変化点のモニタリングに関するシミュレーション結果によって、BICによるモデル選択法の有用性を確認した。日米の経済成長率に関する実証結果として、米国では1988q4以降1度の構造変化を検出していること、日本では1973q3以降1度目の構造変化を、また1998年以降2度目の構造変化を検出していることがわかった。3.2節では、回帰係数変化と誤差分散変化を識別する方法を提案した。現在この問題に仮説検定法の枠組で対応することはできない。シミュレーション結果によると、経済時系列に起こりうる構造変化を考えた場合、BICによるモデル選択法の実務上の有用性を確認した。7か国の鉱工

業生産指数変化率に関する実証結果として、全ての国で大きな誤差分散変化が検出され、また回帰係数変化は2か国で検出された。

第4章では構造変化を考慮した単位根の検出の問題を検討した。4.1節では、構造変化を、加法型かイノベーション型か、水準変化か傾向変化かその両方かによって6つに類型化できることを示すとともに、従来の仮説検定法ではどの型を用いるかの基準がないことを問題視し、BICによるモデル選択法を提案した。シミュレーション結果では、従来の仮説検定法と比べて有用性が高いが、構造変化の類型が完全に未知の場合には、真のモデルを選択する頻度がそれほど高くないことがわかった。7か国の鉱工業生産指数に関する実証結果として、全ての国で水準変化を伴った単位根過程であることがわかった。4.2節では、回帰係数変化と誤差分散変化を考慮した単位根の検出法を提案した。両方の変化を考慮した場合、現在この問題に仮説検定の枠組で対応することはできない。構造変化が回帰係数変化か誤差分散変化のいずれか一方である場合のシミュレーション結果によると、仮説検定法と比べて提案した方法が同等かやや優れていることがわかった。両方の構造変化の場合にも概ね実務上適用可能なことを確認した。7か国の鉱工業生産指数に関する実証結果として、全ての国で誤差分散変化があり、さらに6か国が単位根過程にあることがわかった。

第5章では情報量規準によるモデル選択法の経済予測への応用を検討した。5.1節では、変数変換のしかたによっては単位根の検出結果が異なることを指摘し、BICによるモデル選択の結果としてBox-Coxパラメータの値と単位根の有無を同時に求める方法を提案した。従来の原数値と対数値による単位根検定法との比較では、シミュレーション結果と20か国の鉱工業生産指数の予測結果の両方において提案した方法が優れていることを確認した。5.2節では、定常過程と非定常過程が切り替わるモデルを提案した。このモデルでは変化点が最大2個でも14個のモデルを考慮する必要がある。シミュレーション結果では、定常過程を多く含むモデルを選択する方にややバイアスがあるものの、実務上の有用性を否定するほどのものではなかった。そして、16か国の鉱工業生産指数の予測結果においても、優れた予測力を示すことを確認した。

ここで、本論文で行った実証分析の結果に関して、各章横断的な整理をする。3.2節、4.1節さらに4.2節で、7か国の鉱工業生産指数に関する全く同一デー

タによる実証分析を行った。3.2 節では時系列が単位根過程にあることを前提に前期比変化率に対して分析した結果、全ての国で誤差分散変化、2 か国で回帰係数変化がみられた。4.1 節では誤差分散変化を考慮せず回帰係数変化のみを考慮した単位根の検出を行ったところ、全ての国で水準変化を伴った単位根過程であることがわかった。最後に、4.2 節では回帰係数変化と誤差分散変化を考慮した単位根の検出を行ったところ、全ての国で誤差分散変化がみられ、6 か国が単位根過程にあることがわかった。3 つの分析手法は分析枠組が異なることから、厳密に結果を相互に比較できないが、概ね類似した結果が得られている。すなわち、7 か国のうち少なくとも6 か国では単位根が検出され、全ての国で誤差分散変化が見られる。

以上が本論文の結論であるが、最後にもう一度、仮説検定法における5 つの問題（モデル選択、有意水準、予備検定問題、検定の複雑さ、実用化までの期間の長さ）のほとんどを提案した方法が解決していることを再確認し、今後の研究課題にふれたい。まず、提案した方法では、モデル選択や有意水準選択における恣意性の問題がないことは自明であろう。もちろん、提案した方法のもとでも、複数の情報量規準の間の選択問題は常にある。その際、事前のシミュレーション研究を通して、どの情報量規準を使えば相対的に望ましい結果が得られるのかを検証している。その結果として、本論文では一貫して BIC を中心に議論している。

予備検定問題については、提案した方法が抜本的解決策を与えるものではない。多重検定が必要となる状況においては、提案した方法においても、考慮すべきモデルの数が多くなることに変わりはないからである。しかしながら、2.1 節における「モデルとラグ次数が未知の場合のシミュレーション結果」（表 2-3）、4.1 節における「構造変化が加法型かイノベーション型か未知の場合」のシミュレーション結果（表 4-2）、そして 4.2 節における「回帰係数変化のみを考慮した単位根の検出」のシミュレーション結果（表 4-5）などからも明らかとなり、提案した方法では、予備検定問題に相当するものの程度が仮説検定法に比べて小さなものとなっている。

検定の複雑さの問題はモデルの複雑さと手続きの複雑さに分けて考えられる。まず、モデルの複雑さについては、少なくとも仮説検定法より提案した方法の

方がより問題化することはない．たとえば，構造変化を考慮した単位根に関する回帰式(4.2)において，単位根に対する t 値の漸近分布が攪乱項の系列相関から影響を受けないようにするためにダミー変数が必要になるが，提案した方法では不要である．次に，手続きの複雑さについては，仮説検定法においては，段階ごとに t 分布やDF分布など様々な分布表を使いこなさなくてはならないが，提案した方法では情報量規準を用いて一括して処理することが可能である．

最後に，実用化までの期間の長さであるが，提案した方法においては仮説検定法に比べ無視しうるほど短いといえよう．たとえば，Fuller [50]によりDF検定が提案されたのは1976年であるが，Dickey-Fuller [21]のADF検定について，ラグ次数選択の学術的ガイドラインがNg-Perron [75]によって確定するまでに19年の歳月を要している．また，未知の変化点を検出する問題においても，1958年にQuandt [84]がこの問題を最初に提起したが，その時点では検定統計量の漸近分布が求められておらず，非線形モデルも含めた一般的な解決策がAndrews [4]によって提案されるまでに実に35年の歳月がかかっている．本論文は，単位根と構造変化に関する筆者の17本の個別論文(公刊済または公刊予定)を関連論文として構成されているが，どの個別論文も統計実務の観点から極めて短期間に作成されたものである．このこと自体が提案した方法の有用性を証明しているといえよう．

最後に今後の研究課題を述べる．本論文では様々な情報量規準の中でBICを中心に議論している．これは，第2章における単位根の検出においてAICよりもBICの方が実務上の有用性が確認されたこと，また，第3章における構造変化の検出においてYao [104]をはじめとしてBICによるモデル選択が幅広く議論されてきたことなどによるものである．しかしながら，最近，Ninomiya [77]によって，構造変化を検出するための修正AICが明らかにされ，変化点1つを3つのパラメータ数に数えることが提唱されている．単位根の検出に関しても同様な修正AICが将来提案されるかもしれない．したがって今後の直接的課題として，こうした修正AICの導入によって，本論文の研究成果がどのように変わるのかを検討することがあげられる．さらに今後の長期的課題として，ブートストラップ情報量規準EIC [58]や一般化情報量規準GIC [63]についても考察を加え，情報量規準の実務上の有用性をさらに幅広く検討していく必要がある．

謝辞

本論文は、筆者が1991年度に経済企画庁調査局景気統計調査課（現内閣府経済社会総合研究所景気統計部）において携わった統計実務における問題意識をもとに、情報量規準を用いて単位根と構造変化を統計実務の観点から分析したものです。

当時、統計学の基礎知識も乏しい一行政官だった筆者は、北川源四郎先生（現統計数理研究所長）に懇切な指導をしていただきました。他局への人事異動の際、筆者の作成したモデルよりもAICの小さなモデルを作ることが後任者の仕事である、と事務引継ぎをした覚えがあります。AICが統計科学の発展に大きく寄与したことは周知の通りですが、AICは行政事務の科学的引継ぎという新地平をも切り拓いたのだといえます。筆者はその後様々な職種を経て本格的な統計研究の道に進むことになりました。本来ならばもう少し早く、このような形で研究成果をまとめるべきだったのですが、筆者の怠惰により15年の歳月が流れてしまいました。統計実務における情報量規準の有用性に対する確信をもとに、さらに研究に励むことが先生から頂いた学恩に報いる唯一の道だと肝に銘じております。

最後に、統計数理研究所の尾崎統教授、田村義保教授、川崎能典助教授、佐藤整尚助教授、そして名古屋大学経済学研究科の和合肇教授には、本論文の完成に有益な御教示、御助言をいただきました。ここに深く感謝の意を表します。なお、本稿における誤りは全て筆者の責任であることはいうまでもありません。

発表論文リスト

1. Detection of regime switches between stationary and nonstationary processes and economic forecasting. *Journal of Forecasting* 24 (2005), 255-267.
2. Model-selection-based monitoring of structural change. *Journal of Modern Applied Statistical Methods* 4 (2005), 155-162.
3. Unit root detection allowing for measurement error. *Statistics and Probability Letters* 74 (2005), 373-377.
4. Forecasting economic time series with measurement error. *Applied Economics Letters* (2005) 12, 923-927.
5. Monitoring unit root and multiple structural changes: an information criterion approach. *Mathematics and Computers in Simulation* 71 (2006), 121-130.
6. Time series forecast jointly allowing the unit-root detection and the Box-Cox transformation. *Communications in Statistics: Simulation and Computation* 35 (2006), 419-427.
7. Differentiating between coefficient break and volatility break. *Applied Mathematics and Computation* 176 (2006), 262-269.
8. Measurement-error detection: international evidence on industrial production. *Applied Stochastic Models in Business and Industry* 22 (2006), 313-319.
9. Simulated real-time detection of multiple structural changes: evidence from Japanese economic growth. *Statistical Papers* (2005), forthcoming.

10. A unified approach to detecting unit root and structural break. *Applied Economics* (2005), forthcoming.
11. Are trend and cycle innovations uncorrelated? international evidence. *Applied Economics Letters* (2006), forthcoming.
12. Differentiating between business cycles and growth cycles: evidence from 15 developed countries. *Applied Economics* (2006), forthcoming.
13. Flexible trend-cycle decomposition of nonstationary multivariate time series. *Applied Economics* (2006), forthcoming.
14. Detection of switching cointegration rank allowing for switching lag structure: an application to money demand function. *Applied Economics* (2006), forthcoming.
15. BIC-based unit-root detection: simulation-based evidence. *Applied Mathematics and Computation* (2006), forthcoming.
16. Model-selection-based unit-root detection in unemployment rates: international evidence. *Applied Economics* (2006), forthcoming.
17. Joint detection of unit roots and cointegration: data-based simulation. *Mathematics and Computers in Simulation* (2006), forthcoming.

(注) 全て単著である .

参考文献

- [1] Akaike, H. 1973. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. *2nd International Symposium on Information Theory* (Petrov, B.N., Csaki, F. eds.) Akademiai Kiado, 267-281. (Reproduced in *Selected Papers of Hirotugu Akaike* (Parzen, E., Tanabe, K., Kitagawa, G. eds.) Springer-Verlag (1998), 199-213).
- [2] Akaike, H. 1974. A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-19, 716-723.
- [3] Akaike, H. 1977. On entropy maximization principle. *Applications of Statistics*. (Krishnaiah, P.R, ed.) North-Holland, 27-41.
- [4] Andrews, D.W.K. 1993. Test for parameter instability and structural change with unknown change point. *Econometrica* 61, 821-856.
- [5] Ang, A., Bekaert, G. 2002. Regime switches in interest rates. *Journal of Business & Economic Statistics* 20, 163-182.
- [6] Arestis, P., Biefang, I.M. 1999. Unit roots and structural breaks in OECD unemployment. *Economics Letters* 65, 149-156.
- [7] Bai, J., Perron, P. 1998. Estimating and testing linear models with multiple structural changes. *Econometrica* 66, 47-78.
- [8] Bai, J., Perron, P. 2003. Computation and analysis of multiple structural change models. *Journal of Applied Econometrics* 18, 1-22.

- [9] Bai, J., Perron, P. 2003. Critical values for multiple structural change tests (unpublished tables). (<http://econ.bu.edu/perron/>).
- [10] Bai, J., Perron, P. 2005. Multiple structural change models: a simulation analysis. *Econometric Theory and Practice: Frontiers of Analysis and Applied Research* (Corbae, P.D., Durlauf, S.N., Hansen, B.E. eds.) Cambridge University Press, 212-240.
- [11] Banerjee, A., Lumsdaine, R.L., Stock, J.H. 1992. Recursive and sequential tests of the unit-root and trend-break hypotheses: theory and international evidence. *Journal of Business & Economic Statistics* 10, 271-288.
- [12] Ben-David, D., Papell, D. 1998. Slowdowns and meltdowns: postwar growth evidence from 74 countries. *Review of Economics and Statistics* 80, 561-571.
- [13] Blake, A.P., Camba-Mendez, G., 1998. Filtered least squares and measurement error. *Economics Letters* 59, 163-168.
- [14] Blanchard, O.J., Summers, L.H. 1986. Hysteresis and the European unemployment problem. *NBER Macroeconomics Annual* (Fisher, S. ed.) MIT Press, 15-90.
- [15] Bollerslev, T. 1986. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31, 307-327.
- [16] Bollerslev, T., Chou, R.Y., Kroner, K.F. 1992. ARCH modeling in finance: a review of the theory and empirical evidence. *Journal of Econometrics* 52, 5-59.
- [17] Campbell, J.Y., Perron, P. 1991. Pitfalls and opportunities: what macroeconomists should know about unit roots. *NBER Macroeconomics Annual* (Blanchard, O.J., Fisher, S. eds.) MIT Press, 141-201.

- [18] Chu, C-S.J., Stinchcombe, M., White, H. 1996. Monitoring structural change. *Econometrica* 64, 1045-1065.
- [19] Davies, R.B. 1977. Hypothesis testing when a nuisance parameter is present only under the alternative. *Biometrika* 64, 247-254.
- [20] Davis, R.A., Lee, T.C.M., Rodriguez-Yam, G.A. 2006. Structural break estimation for nonstationary time series models. *Journal of the American Statistical Association* 101, 223-239.
- [21] Dickey, D.A., Fuller, W.A. 1979. Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association* 74, 427-431.
- [22] Dickey, D.A., Fuller, W.A. 1981. Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. *Econometrica* 49, 1057-1072.
- [23] Dickey, F.A., Bell, W.R., Miller, R.B. 1986. Unit roots in time series models: tests and implications. *American Statistician* 40, 12-26.
- [24] Diebold, F.X., Kilian, L. 2000. Unit-root tests are useful for selecting forecasting models. *Journal of Business & Economic Statistics* 18, 265-273.
- [25] Dolado, J., Jenkinson, T., Sosvilla-Rivero, S. 1990. Cointegration and unit roots. *Journal of Economic Surveys* 4, 249-273.
- [26] Elliott, G., Rothnberg, T.J., Stock, J.H. 1996. Efficient tests for an autoregressive unit root. *Econometrica* 64, 813-836.

- [27] Engle, R.F. 1982. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica* 50, 987-1008.
- [28] Fama, E. F. 1970. Efficient capital markets: a review of theory and empirical work. *Journal of Finance* 25, 383-417.
- [29] Franses, P.H., McAleer, M. 1998. Testing for unit roots and non-linear transformations. *Journal of Time Series Analysis* 19, 147-164.
- [30] Fukuda, K. 2005. Detection of regime switches between stationary and nonstationary processes and economic forecasting. *Journal of Forecasting* 24, 255-267.
- [31] Fukuda, K. 2005. Model-selection-based monitoring of structural change. *Journal of Modern Applied Statistical Methods* 4, 155-162.
- [32] Fukuda, K. 2005. Unit root detection allowing for measurement error. *Statistics and Probability Letters* 74, 373-377.
- [33] Fukuda, K. 2005. Forecasting economic time series with measurement error. *Applied Economics Letters* 12, 923-927.
- [34] Fukuda, K. 2006. Monitoring unit root and multiple structural changes: an information criterion approach. *Mathematics and Computers in Simulation* 71, 121-130.
- [35] Fukuda, K. 2006. Time series forecast jointly allowing the unit-root detection and the Box-Cox transformation. *Communications in Statistics: Simulation and Computation* 35, 419-427.

- [36] Fukuda, K. 2006. Differentiating between coefficient break and volatility break. *Applied Mathematics and Computation* 176, 262-269.
- [37] Fukuda, K. 2006. Measurement-error detection: international evidence on industrial production. *Applied Stochastic Models in Business and Industry* 22, 313-319.
- [38] Fukuda, K. 2005. Simulated real-time detection of multiple structural changes: evidence from Japanese economic growth. *Statistical Papers* (to appear).
- [39] Fukuda, K. 2005. A unified approach to detecting unit root and structural break. *Applied Economics* (to appear).
- [40] Fukuda, K. 2006. Are trend and cycle innovation correlated? international evidence. *Applied Economics Letters* (to appear).
- [41] Fukuda, K. 2006. Differentiating between business cycles and growth cycles: evidence from 15 developed countries. *Applied Economics* (to appear).
- [42] Fukuda, K. 2006. Flexible trend-cycle decomposition of nonstationary multivariate time series. *Applied Economics* (to appear).
- [43] Fukuda, K. 2006. Detection of switching cointegration rank allowing for switching lag structure: an application to money demand function. *Applied Economics* (to appear).
- [44] Fukuda, K. 2006. BIC-based unit-root detection: simulation-based evidence. *Applied Mathematics and Computation* (to appear).

- [45] Fukuda, K. 2006. Model-selection-based unit-root detection in unemployment rates: international evidence. *Applied Economics* (to appear).
- [46] Fukuda, K. 2006. Joint detection of unit roots and cointegration: data-based simulation. *Mathematics and Computers in Simulation* (to appear).
- [47] Fukuda, K. 2006. Practical unit-root analysis using information criteria: simulation evidence. Submitted.
- [48] Fukuda, K. 2006. A model-selection approach to the detection of unit root and trend break. Submitted.
- [49] Fukuda, K. 2006. Unit root detection allowing for conditional heteroskedasticity: international evidence on stock prices. Submitted.
- [50] Fuller, W.A. 1976. *Introduction to Statistical Time Series*. John Wiley & Sons.
- [51] Gonzalo, J., Pitarakis, J-Y. 1998. Specification via model selection in vector error correction models. *Economics Letters* 60, 321-328.
- [52] Granger, C.W.J., Newbold, P. 1986. *Forecasting Economic Time Series*, 2nd ed. Academic Press.
- [53] Granger, C.W.J., Hallman, J. 1991. Nonlinear transformations of integrated time series. *Journal of Time Series Analysis* 12, 207-224.
- [54] Granger, C.W.J., Swanson, N.R. 1997. An introduction to stochastic unit-root process. *Journal of Econometrics* 80, 35-62.

- [55] Hawkins, D.L. 1987. A test for a change point in a parametric model based on a maximal Wald-type statistic. *Sankhya* 49, 368-376.
- [56] Hodrick, R.J., Prescott, E.C. 1997. Post-war U.S. business cycles: an empirical investigation. *Journal of Money, Credit, and Banking* 29, 1-16.
- [57] Holland, J. 1975. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press.
- [58] Ishiguro, M., Sakamoto, Y., Kitagawa, G. 1997. Bootstrapping log likelihood and EIC, an extension of AIC. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 49, 411-434.
- [59] Kim, K., Schmidt, P. 1993. Unit root tests with conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 59, 287-300.
- [60] Kim, T-H., Leybourne, S., Newbold, P. 2002. Unit root tests with a break in innovation variance. *Journal of Econometrics* 109, 365-387.
- [61] Kitagawa, G., Akaike, H. 1978. A procedure for the modeling of non-stationary time series. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 30(B), 351-363.
- [62] Kitagawa, G., Gersch, W. 1984. A smoothness priors-state space modeling of time series with trend and seasonality. *Journal of the American Statistical Association* 79, 378-389.
- [63] Konishi, S., Kitagawa, G. 1996. Generalized information criteria in model selection. *Biometrika* 83, 875-890.
- [64] 小西貞則・北川源四郎．2004．情報量規準．朝倉書店．

- [65] Kullback, S., Leibler, R.A. 1951. On information and sufficiency. *Annals of Mathematical Statistics* 22, 79-86.
- [66] Kwiatkowski, D., Phillips, P.C.B., Schmidt, P., Shin, Y. 1992. Testing the null hypothesis of stationary against the alternative of a unit root. *Journal of Econometrics* 54, 159-178.
- [67] Li, Y., Maddala, G.S., Rush, M. 1995. New small sample estimators for cointegration regression: low-pass spectral filter method. *Economics Letters* 47, 123-129.
- [68] Liu, J., Wu, S., Zidek, J.V. 1997. On segmented multivariate regressions. *Statistica Sinica* 7, 497-525.
- [69] Lumsdaine, R., Papell, D. 1997. Multiple trend breaks and the unit root hypothesis. *Review of Economics and Statistics* 79, 212-218.
- [70] McConnell, M.M., Perez-Quiros, G. 2000. Output fluctuations in the United States: what has changed since the early 1980's? *American Economic Review* 90, 1464-1476.
- [71] McCulloch, R.E., Tsay, R.S. 1994. Bayesian inference of trend- and difference-stationarity. *Econometric Theory* 15, 523-539.
- [72] 中妻照雄 . 2003 . ファイナンスのための MCMC 法によるベイズ分析 . 三菱経済研究所 .
- [73] Neftci, S.N. 1984. Are economic time series asymmetric over business cycle? *Journal of Political Economy* 92, 307-328.

- [74] Nelson, C.R., Plosser, C.I. 1982. Trends and random walks in macroeconomic time series: some evidence and implications. *Journal of Monetary Economics* 10, 139-162.
- [75] Ng, S., Perron, P. 1995. Unit root tests in ARMA models with data dependent methods for the selection of the truncation lag. *Journal of the American Statistical Association* 90, 268-281.
- [76] Ng, S., Perron, P. 2001. Lag length selection and the construction of unit root tests with good size and power. *Econometrica* 69, 1519-1554.
- [77] Ninomiya, Y. 2005. Information criterion for Gaussian change-point model. *Statistics and Probability Letters* 72, 237-247.
- [78] Ohara, H. 1999. A unit root test with multiple trend breaks: a theory and an application to US and Japanese macroeconomic time series. *Japanese Economic Review* 50, 266-290.
- [79] Ozaki, T., Tong, H. 1975. On the fitting of non-stationary autoregressive models in time series analysis. *Proceeding of the 8th Hawaii International Conference on System Science*. Western Periodical Company, 224-226.
- [80] Perron P. 1989. The great crash, the oil-price shock, and the unit-root hypothesis. *Econometrica* 57, 1361-1402.
- [81] Perron, P. 1997. Further evidence on breaking trend functions in macroeconomic variables. *Journal of Econometrics* 80, 355-385.
- [82] Phillips, P.C.B., Perron, P. 1988. Testing for a unit root in time series regression. *Biometrika* 75, 335-346.

- [83] Plosser, C.I., Schwert, G.M. 1977. Estimation of a non-invertible moving average process : the case of overdifferencing? *Journal of Econometrics* 6, 199-224.
- [84] Quandt, R. 1958. The estimation of the parameters of a linear regression system obeying two separate regimes. *Journal of the American Statistical Association* 53, 873-880.
- [85] Quandt, R. 1960. Tests of the hypothesis that a linear regression system obeys two separate regimes. *Journal of the American Statistical Association* 55, 324-330.
- [86] Rissanen, J. 1989. *Stochastic Complexity in Sstatistical Inquiry*. World Scientific.
- [87] Robbins, H. 1970. Statistical methods related to the law of the iterated logarithm. *Annals of Mathematical Statistics* 41, 1397-1409.
- [88] Said, S.E., Dickey, D.A. 1984. Testing for unit roots in autoregressive-moving average models of unknown order. *Biometrika* 71, 599-607.
- [89] 坂本慶行・石黒真木夫・北川源四郎 . 1983 . 情報量統計学 . 共立出版 .
- [90] Sawa, T. 1978. Information criteria for discriminating among alternative regression models. *Econometrica* 46, 1273-1291.
- [91] Schwarz, G. 1978. Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics* 6, 461-464.
- [92] Schwert, G.W. 1989. Tests for unit roots: an Monte Carlo investigation. *Journal of Business & Economic Statistics* 7, 147-159.

- [93] 柴田里程 . 2000 . 情報量基準による統計的モデル選択 . 電子情報通信学会論文誌 A, Vol. J83-A, No.6, 605-61
- [94] Sims, C.A. 1988. Bayesian skepticism on unit root econometrics. *Journal of Economic Dynamics and Control* 12, 463-474.
- [95] Sims, C.A., Uhlig, H. 1991. Understanding unit rooters: a helicopter tour. *Econometrica* 59, 1591-1599.
- [96] Spitzer, J.J. 1982. A fast and efficient algorithm for the estimation of parameters with the Box-Cox transformation. *Journal of the American Statistical Association* 77, 760-765.
- [97] Stock, J.H., Watson, M.W. 1999. A comparison of linear and nonlinear univariate time series models for forecasting macroeconomic time series. *Cointegration, Causality, and Forecasting* (Engle, R.F., White, H. eds.) Oxford University Press, 1-44.
- [98] Summers, P.H. 2004. Bayesian evidence on the structure of unemployment. *Economics Letters* 83, 299-306.
- [99] Tsay, R.S. 1988. Outliers, level shifts, and variance changes in time series. *Journal of Forecasting*, 7, 1-20.
- [100] Tsurumi, H., Wago, H. 1996. A Bayesian analysis of unit root and cointegration with an application to a yen-dollar exchange rate model. *Advances in Econometrics* B11 (Fomby, T.B. ed.). JAI Press, 51-88.
- [101] Vogelsang, T. 1997. Wald-type tests for detecting breaks in the trend function of a dynamic time series. *Econometric Theory* 13, 818-849.

- [102] Vogelsang, T.J., Perron, P. 1998. Additional tests for a unit root allowing for a break in the trend function at unknown time. *International Economic Review* 39, 1073-1100.
- [103] West, K. 1988. Asymptotic normality when regressors have a unit root. *Econometrica* 56, 1397-1417.
- [104] Yao, Y.C. 1988. Estimating the number of change-points via Schwarz' criterion. *Statistics and Probability Letters* 6, 181-189.
- [105] Zivot, E., Andrews, D.W.K. 1992. Further evidence on the great crash, the oil price shock, and the unit-root hypothesis. *Journal of Business & Economic Statistics* 10, 251-270.

付録 A 第 2 章の付録

ここでは第 2 章で用いた Hodrick-Prescott filter について解説する。Hodrick-Prescott [56]が提案した平滑化法は 1980 年にワーキングペーパーとして公表され、1980 年代前半から最近に至るまで経済時系列分析、とりわけ景気循環分析において最も頻繁に使われている方法である。観測された時系列データ $y_t (t=1, \dots, T)$ に対して次のモデルを考える。

$$y_t = g_t + c_t. \quad (\text{A.1})$$

ここで g_t は滑らかに変動するトレンド成分であり、 c_t は平均 0 のサイクル成分である。したがって、次の最適化問題を考える。

$$\left\{ \sum_{t=3}^T c_t^2 + \lambda \sum_{t=3}^T [(g_t - g_{t-1}) - (g_{t-1} - g_{t-2})]^2 \right\} \rightarrow \text{Min}. \quad (\text{A.2})$$

ここで λ はトレンド成分 g_t の滑らかさを決めるパラメータで分析者が決める必要がある。 λ の値が大きいくほど滑らかなトレンド成分 g_t が得られる。 λ の値が決まると最適化問題(A.2)を解くことで自動的に(A.1)式の分解結果が得られる。

Hodrick-Prescott (HP) フィルタには数多くの批判が寄せられてきたが、平易さゆえ実務家に最も使われている方法である。批判の第一は、理論的根拠に乏しく、経済時系列の特性を反映していないというものである。特に、これまで数多く行われてきた単位根検定の結果によると、経済時系列はトレンド定常 (I(0)) が階差定常(I(1))であり、HP フィルタが想定している I(2)過程から生成されていない。批判の第二は、 λ の値を恣意的に決めていているという点である。景気循環分析家の間では年次データでは $\lambda = 400$, 四半期データでは $\lambda = 1600$, そして月次データでは $\lambda = 14400$ とする場合が多いが、客観的な基準がない。

付録 B 第3章の付録

ここでは第3章で用いた Bai-Perron による構造変化の検出法について解説する。Bai-Perron [7] (BP) は観測された時系列 $y_t (t=1, \dots, T)$ に m 回の構造変化が起きたものと仮定し、次のようなモデルを考えた。

$$y_t = x_t \phi_i + u_{it}, \quad t = T_{i-1} + 1, \dots, T_i, \quad i = 1, \dots, m+1, \quad u_{it} \sim NID(0, \sigma^2).$$

ここで x_t は n 変量の説明変数ベクトルであり、変数 (T_1, \dots, T_m) は未知の変化点である。また、 $T_0 = 0$ で $T_{m+1} = T$ とする。BP はこの未知の変化点と回帰係数を同時に推定する方法を提案した。それはモデル全体の平方誤差の合計を最小化する方法であり、次式で与えられる。

$$S_T(T_1, \dots, T_m) = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{t=T_{i-1}+1}^{T_i} (y_t - x_t \phi_i)^2 \rightarrow \text{Min.}$$

BP は帰無仮説に $m = 0$ を対立仮説に $m = k$ を設定し、 $\sup F$ 検定 (Multiple break test: 多重変化検定) を提案した。 $\sup F$ 検定統計量は次式で与えられる。

$$F_T(\lambda_1, \dots, \lambda_k; n) = \frac{1}{T} \left(\frac{T - (k+1)n}{kn} \right) \hat{\phi}' R' (R \hat{V}(\hat{\phi}) R')^{-1} R \hat{\phi}.$$

ここで、 $\lambda_i = T_i / T$ 、 $\hat{\phi} = (\hat{\phi}_1', \dots, \hat{\phi}_n')$ 、 R は次式を満たす行列である。

$$(R \hat{\phi})' = (\hat{\phi}_1' - \hat{\phi}_2', \dots, \hat{\phi}_k' - \hat{\phi}_{k+1}').$$

また、 $\hat{V}(\hat{\phi})$ は $\hat{\phi}$ の共分散行列の推定量であり、攪乱項における系列相関や分散不均一に応じた定式化が考えられている (詳細は Bai-Perron [8] を参照)。BP 検定では、変化点の探索の際、次のような制約条件を考える。

$$T_i - T_{i-1} \geq \varepsilon T \quad (i = 1, \dots, m+1).$$

ここで ε はトリミング (trimming) 値と呼ばれる最小データ区間を与えるパラメータである。問題は ε の値によって検定統計量の分布が異なる点である。BP [9] では ε の値が 0.05 から 0.25 までの 0.05 刻みで与えられたときの分布表を与えている。

さらに、BP は他に 2 つのタイプの検定 (Maximum test と Sequential test) を提案している。Maximum test はある上限の変化点数 M が与えられたときに、変化点の数ではなく、変化点の有無を検定するために用いられ、2 種類ある。1 つは UD Max 検定と呼ばれ、統計量は次式で定義される。

$$UD \max F_T(M, p) = \max_{1 \leq m \leq M} F_T(\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_m; p).$$

他の 1 つは WD Max 検定と呼ばれ, 変化点数 0 から変化点数 m までの $\sup F$ 検定統計量に対する p 値を平均したものである .

他方, 逐次検定 (Sequential Test) は $F_T(l+1|l)$ と表記され, 帰無仮説に変化点 0, 対立仮説に変化点 1 の $\sup F$ 検定を繰り返すことで得られる . UD Max 検定, WD Max 検定, そして逐次検定の統計量の分布表は ε の値ごとにそれぞれ独自にある .

付録 C 第 4 章の付録

C.1 Tsay による構造変化の検出

構造変化は加法型異常値 (Additive Outlier: AO) によって引き起こされるのかイノベーション型異常値 (Innovational Outlier: IO) によって引き起こされるのかによって、経済的意味合いが大きく異なる。前者ならばその影響は 1 時点に限られるが、後者ならばその影響は永続する。したがって、両者の識別は非常に重要である。Tsay [99] は未知で異なる種類の異常値を検出するための統一的手法を提案した。そこでは、まず、通常の ARIMA モデルを推定する。次に、異常値の存在を後述する基準に基づいて判断する。さらに、もし異常値が検出されれば、その異常値を除いて再び ARIMA モデルを推定する。そして同様の手順を繰り返す。異常値の検出がなくなったところで作業を終了する。

ここでは ARIMA(k,1,0) モデルの推定を Ng-Perron [75] のラグ次数の選択とともに行う。また、本論文では最大で 1 個の異常値のみを前提にしているので、前述の手順は 1 回どまりである。観測された時系列 $y_t (t=1, \dots, T)$ に対して、ARIMA(k,1,0) モデルと $t=d$ における AO 統計量と IO 統計量は次の通り。

$$\Delta y_t = \mu + \sum_{i=1}^k c_i \Delta y_{t-i} + u_t, \quad u_t \sim NID(0, \sigma_u^2),$$

$$\lambda_{Id} = \hat{u}_d / \hat{\sigma}_\mu,$$

$$\lambda_{Ad} = \delta^2 (\hat{u}_d - \sum_{i=1}^{T-d} \hat{c}_i \hat{u}_{d+i}) / (\delta \hat{\sigma}_\mu), \quad \delta^2 = (1 + \sum_{i=1}^{T-d} \hat{c}_i^2)^{-1}.$$

d は $|\lambda_{Id}|$ あるいは $|\lambda_{Ad}|$ が最大化するように選択する。そして、 $|\lambda_{Id}| \geq \eta$ かつ $|\lambda_{Id}| > |\lambda_{Ad}|$ のときには IO モデルが選択され、 $|\lambda_{Ad}| \geq \eta$ かつ $|\lambda_{Ad}| > |\lambda_{Id}|$ のときには AO モデルが選択される。 η は異常値がないという帰無仮説を棄却するための基準値であり、Tsay は 3, 3.5, 4 の中から分析者が選択するとしている。しかしながら、本論文では、異常値の存在自体は既知であり、異常値の種類が AO か IO かが未知としているので、 $\eta = 0$ としていることになる。

C.2 Vogelsang による構造変化の検出

Vogelsang [101] は多項式トレンドにおける構造変化を検出する手法を提案し、

広く実証分析に用いられている．ここでは議論を平易にするためにタイムトレンドの場合に限定する．観測された時系列 $y_t (t = 1, \dots, T)$ に対して次のモデルを考える．

$$y_t = d_1 + d_2 DU_t + d_3 t + d_4 DT_t + \sum_{i=1}^k \lambda_i y_{t-i} + e_t. \quad (C.1)$$

ここで， $DU_t = 1 (t > T_B)$ ， $DT_t = 1 (t > T_B)t$ であり， T_B は未知の変化点， $1(\bullet)$ は指標関数 (indicator function)，さらに $e_t \sim NID(0, \sigma^2)$ である．

Vogelsang は帰無仮説 $d_2 = d_4 = 0$ を，対立仮説に $d_2 \neq 0$ かつ $d_4 \neq 0$ を設け，3つの検定統計量を提案した．本論文では変化点の有無だけではなく変化点の特定に適した Supremum 統計量を用いる．これは帰無仮説を検定する Wald 統計量の最大値である．この統計量を用いた変化点の検出は次の手順で進む．まず，後述するトリミングに考慮して様々な変化点を考える．そして，与えられた変化点のもとで(C.1)式を推定する．その際，ラグ次数 k については，Ng-Perron [75] の t 検定を用いる．選択されたモデルによる Wald 統計量を保存する．次に，変化点を変更して同様の作業を繰り返す．得られた様々な Wald 統計量の中から最大のものを選択する．こうして Supremum 統計量と変化点が得られ，Vogelsang が与える分布表を使って構造変化の有無を判定する．帰無仮説が棄却されれば変化点も同時に決定される．分布表はトリミングやトレンドの次数ごとに異なる．

ただし，留意点は4つある．第一に，単位根の有無により分布表は異なる．したがって，Vogelsang の検定の前に単位根検定をする必要がある．第二に，複数の構造変化への適用はできない．第三に，トリミングの設定の問題がある．データの両端に極端に近い部分は，変化点の探索から除く必要がある．Vogelsang はデータの両端から変化点までの割合として0.05と0.15の値を設け，それぞれ異なった分布表を明らかにした．本論文では，Ben-David-Papell [12] の実証分析にならい，トリミングに0.15を用いた．第四に，単位根がある場合の検定法に関してである．この場合，(C.1)式をそのまま推定し，単位根を含む場合の分布表を用いる方法と， y_t の代わりに $y_t - y_{t-1}$ を用い(C.1)式に $d_3 = d_4 = 0$ という制約条件を付けて推定し，単位根を含まない場合の分布表を用いる方法である．本論文では，Ben-David-Papell の分析方法に従い，両方法で帰無仮説が

棄却された場合は、 p 値の小さい値を与えた方の変化点とした。もし、いずれか 1 つの方法で棄却されれば、その方法による結果に従った。

C.3 Kim et al. による誤差分散変化を考慮した単位根の検出

Kim et al. [60]は誤差分散変化を考慮した単位根の検出法を提案した。この方法では観測された時系列 $y_t (t=1, \dots, T)$ に対して、最初に次式の通り ADF [21] 回帰分析を行う。

$$y_t = \alpha + \beta t + \gamma y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \phi_i \Delta y_{t-i} + e_t.$$

次に誤差分散変化の変化点 T_B の推定量を次式から求める。

$$\begin{aligned} \hat{T}_B &= \arg \min \hat{Q}(T_B), \quad \hat{Q}(T_B) = T_B \log \hat{\sigma}_1^2(T_B) + (T - T_B) \log \hat{\sigma}_2^2(T_B), \\ \hat{\sigma}_1^2(T_B) &= T_B^{-1} \sum_{t=1}^{T_B} e_t^2, \quad \hat{\sigma}_2^2(T_B) = (T - T_B)^{-1} \sum_{t=T_B+1}^T e_t^2. \end{aligned}$$

最後に、得られた変化点 \hat{T}_B を踏まえて、単位根の検出のために次式を推定する。

$$\begin{aligned} \tilde{y}_t(\hat{T}_B) &= m_0 + m_1 D_{1t}(\hat{T}_B) + m_2 D_{2t}(\hat{T}_B) + m_3 D_{3t}(\hat{T}_B) + m_4 t + \sum_{i=1}^k n_i D_{2,t-i}(\hat{T}_B) \\ &\quad + \gamma \tilde{y}_{t-1}(\hat{T}_B) + \sum_{i=1}^k \phi_i \Delta \tilde{y}_{t-i}(\hat{T}_B) + u_t. \end{aligned}$$

ここで、 $\tilde{y}_t(\hat{T}_B) = \hat{\sigma}_1^{-1} y_t \mathbb{1}[t \leq \hat{T}_B] + \hat{\sigma}_2^{-1} y_t \mathbb{1}[t > \hat{T}_B]$, $D_{1t}(\hat{T}_B) = \mathbb{1}[t > \hat{T}_B]$, $D_{2t}(\hat{T}_B) = \mathbb{1}[t = \hat{T}_B + 1]$, $D_{3t}(\hat{T}_B) = (t - \hat{T}_B) \mathbb{1}[t > \hat{T}_B]$ であり、 $\mathbb{1}(\bullet)$ は指標関数 (indicator function), さらに $u_t \sim NID(0, \sigma^2)$ である。

検定は $\hat{\gamma}$ に対する t 統計量に基づいて行われ、分布表は Perron [80]のものを用いる。